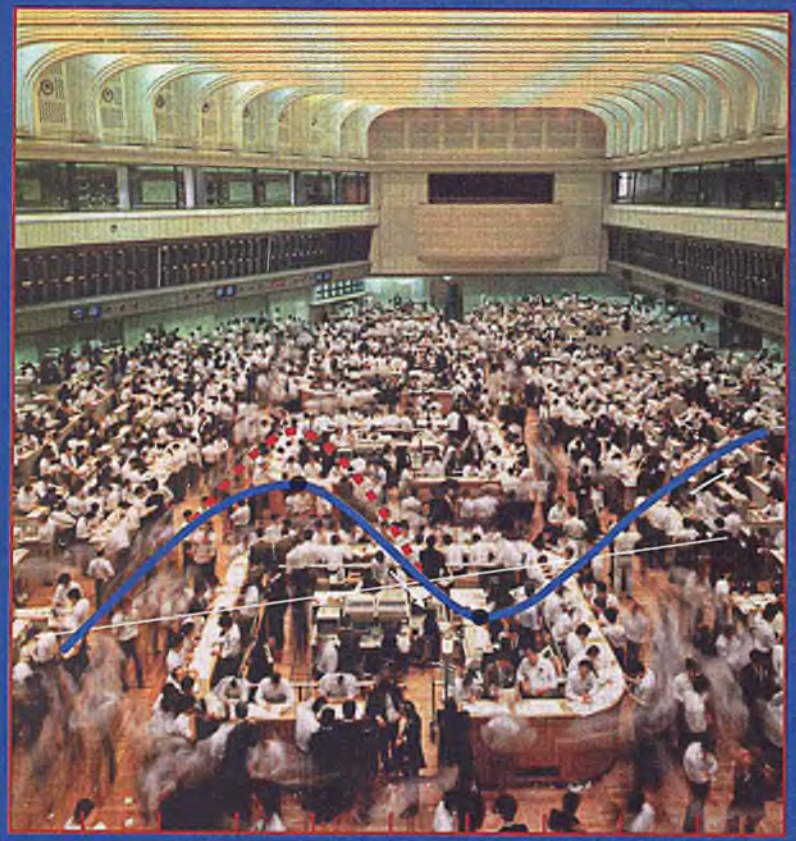


OCTAVA EDICIÓN

CÁLCULO APLICADO

PARA ADMINISTRACIÓN, ECONOMÍA Y CIENCIAS SOCIALES

LAURENCE D. HOFFMANN
GERALD L. BRADLEY
KENNETH H. ROSEN

Mc Graw Hill

INCLUYE CD-ROM

www.FreeLibros.com

CÁLCULO APLICADO

para administración, economía y ciencias sociales

www.FreeLibros.com

OCTAVA EDICIÓN

CÁLCULO APLICADO

para administración, economía y ciencias sociales

LAURENCE D. HOFFMANN
Salomon Smith Barney

GERALD L. BRADLEY
Claremont McKenna College

KENNETH H. ROSEN
AT&T Laboratories

Traducción
Javier León Cárdenas
Jorge Humberto Romo Muñoz
Traductores profesionales

Revisión técnica
Irma López Saura
Profesora de cálculo
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
Campus Ciudad de México

MÉXICO • AUCKLAND • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA
LISBOA • LONDRES • MADRID • MILÁN • MONTREAL • NUEVA YORK
SAN FRANCISCO • SAN JUAN • SAN LUIS • NUEVA DELHI • SANTIAGO
SÃO PAULO • SIDNEY • SINGAPUR • TORONTO

www.FreeLibros.com

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Director editorial: Ricardo del Bosque Alayón
Editor sponsor: Jesús Mares Chacón
Editora de desarrollo: Marcela I. Rocha Martínez
Supervisor de producción: Zeferino García García

CÁLCULO APLICADO PARA ADMINISTRACIÓN, ECONOMÍA Y CIENCIAS SOCIALES
Octava edición

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin la autorización escrita del editor.

McGraw-Hill Interamericana

DERECHOS RESERVADOS © 2006, respecto a la tercera edición en español por:
McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES S.A DE C.V
A Subsidiary of ***The McGraw-Hill*** *Companies, Inc.*
Edificio Punta Santa Fe
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN 970-10-5907-7

ISBN 958-41-0202-8 (segunda edición)

Traducido de la octava edición de: APPLIED CALCULUS FOR BUSINESS, ECONOMICS, AND THE SOCIAL AND LIFE SCIENCIES
Copyright © MMV by The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. Previous editions © 1986, 1989, 1992, 1996, 2000, and 2004

0-07-301856-2

1234567890 09875432106

Impreso en México *Printed in Mexico*

Esta obra se terminó de imprimir el mes de Abril del 2006
en los talleres de Edamsa Impresiones S.A. de C. V.

The McGraw-Hill Companies

www.FreeLibros.com

ÍNDICE DE APLICACIONES SELECCIONADAS

PROBLEMAS DE NEGOCIOS

Accidentes industriales, 757
Administración de costos, 120, 230
Administración de empresas, 644
Administración de personal, 651
Administración de pesca, 198, 337, 623, 638-640, 767-768
Administración de tiempo, 767
Agricultura, 760
Análisis de costos, 271, 744
Análisis de precio, 342
Análisis de punto de equilibrio, 49-51, 55-56, 86
Análisis marginal, 148-150-154-155, 197, 214, 238, 271, 314-315, 324, 335-336, 441, 517, 518, 556, 558, 577, 698
Aproximación de mínimos cuadrados de datos de utilidades, 576
Asignación de fondos, 530, 551-552, 555-556, 557, 577
Aumentos de salario, 120
Bienes raíces, 123-124, 155, 193-194
Capacitación en empresas, 295
Cobertizo de mantenimiento, 530
Construcción de bienes raíces, 271
Consumo de petróleo, 440
Contratos de deportes, 425-426
Control de calidad, 651, 719-720, 724, 760, 761 (Prob. 45), 762, 765, 767, 768
Corre, 23, 82
Cosecha, 55, 260
Costo de construcción, 54, 87, 175, 261, 262, 272, 556, 557, 824
Costo de distribución, 12, 229-230
Costo de impresión, 38
Costo de instalación, 261, 263
Costo de manufactura, 11, 12, 23, 38, 43-44, 53, 55, 86, 87, 145, 151, 155, 156, 163, 171, 176, 229, 262, 263, 265, 270, 391, 411
Costo marginal, 362, 366, 367, 440, 462, 600, 822
Costo mínimo, 557-558
Costo óptimo de preparación, 263
Costo total por costo marginal, 487
Costos de almacenamiento, 363-364, 394, 426
Costos de transporte, 53, 263
Crecimiento burocrático, 338
Crecimiento de suscripciones, 486
Curvas de producción constante, 507
Decisión de publicidad, 56
Diseño eficiente de costos, 86
Eficiencia de manufactura, 86
Eficiencia de trabajador, 11, 119, 128-129, 133, 155, 175, 211, 214-215, 267, 271, 309, 335, 344, 410, 411, 462, 601, 769, 816
Entrega de paquetería, 768-769
Fijar precios, 32-33, problemas 2 y 7, 143, 529
Ganancias anuales, 120, 145
Ingreso marginal, 367
Ingreso por producción de petróleo, 590-591
Ingreso por ventas, 52, 395
Ingreso total, 426
Inventario, 82, 86, 229, 258-260, 262, 265, 271-272, 411, 426
Investigación de mercado, 339
Mantenimiento de restaurante, 622
Manufactura, 761-762
Material de construcción, 175, 529, 555
Máxima producción asequible, 67
Negocio de restaurante, 722
Números de ventas, 799-800
Óptimo diseño, 269
Organización corporativa, 338
Póliza de seguro, 767
Porcentaje de cambio de costo, 138-139
Porcentaje de oferta, 165-166, 167
Precio de venta óptimo, 590-591
Precios al menudeo, 379, 610
Precios de alimentos, 410
Precios de gasolina, 543
Presupuesto fijo, 558
Prima de comprador en subasta, 53
Probabilidad de ventas, 754-755
Producción agrícola, 600
Producción de bebidas, 768
Producción de madera, 169
Producción de petróleo, 395, 600
Producción en fábrica, 152, 155, 156, 161-162, 167, 168, 169, 171, 173, 174, 265, 569, 573
Producción, 367, 395, 486, 505, 506, 673, 733, 738, 743, 767
Productividad marginal, 517-518, 520
Protección de garantía, 735-765·
Publicidad, 119, 133, 198, 230, 335, 344, 366, 395, 411
Refrigeración, 167-168
Rendimiento agrícola, 55, 260, 395
Renta de autos, 38, 51
Renta de equipo, 24 (Prob. 42), 40
Retornos constantes a escala, 507
Servicio a clientes, 733, 743
Tarifas de admisión, 54, 394, 440
Ubicación de almacén, 527-528
Utilidad de publicidad, 57
Utilidad marginal, 367, 379, 380, 395
Utilidad por un invento, 426
Utilidad promedio, 573
Utilidad, 793
Valor de máquina, 589-590
Ventas de seguros, 769-770
Ventas, 132, 214, 294, 344, 366, 407, 541, 573, 578, 803, 804, 822, 825
Vida útil de una máquina 414-415, 424

PROBLEMAS ECONÓMICOS

Ajuste de precios, 614-616, 648
Ajuste de tiempo, 624
Cambio neto en demanda, 437
Cambio neto en ingreso, 437
Compensación a empleados, 760
Consumo nacional, 247
Costo promedio, 70, 237-238, 245
Crecimiento de ingreso per cápita, 325-326
Curva de Lorentz (e índice de Gini) 405, 439, 463
Demanda de consumidor, 13, 145, 175, 518, 519
Demanda e ingreso, 132, 487, 541
Demanda promedio, 462
Demanda, 246, 271, 376-377, 380, 814
Desempleo e inflación, 96-97, 109
Desempleo, 33-35, 41
Distribución de ingreso, 405, 412, 441, 463, 482-483
Efecto de impuestos sobre monopolio, 265
Efecto multiplicador, 666-667, 670, 701
Elasticidad de demanda de ingreso, 248
Elasticidad de demanda de precio, 241, 243-244, 245, 246, 248, 270, 271, 318-319, 376-377
Emigración de mano de obra, 703
Equilibrio de mercado, 48-49, 55
Excedente de consumidores, 422-423, 424, 425, 437, 439, 440, 463, 482
Excedente de productores, 422-423, 424, 482
Exceso de utilidad neta, 402-403, 411
Exportaciones, 321, 326 (Prob. 75)
Función de costo, 6, 26, 43-44
Función de utilidad, 5-6, 23, 46-47, 101-102, 108, 132, 270
Gasto de consumidor, 23, 85, 325
Gasto, 667
Impuesto a la propiedad, 87, 119, 155, 171, 573
Impuesto sobre la renta, 54
Inflación, 175
Ingreso futuro, 440
Ingreso máximo, 18-19, 193-194, 256-258, 342
Ingreso nacional, 645
Ingreso promedio, 245, 440
Ingreso y consumo desechables, 543
Ley de Pareto, 602
Ley de rendimientos que se reducen, 520
Minimización de costo, 250-252, 255-256, 263
Modelo de deuda Domar, 624
Modelo de telaraña, 639-641, 646
Numismática, 724

www.FreeLibros.com

Oferta y demanda, 55, 56, 84, 648
Oferta, 379-380, 632, 814
Porcentaje de demanda, 167, 168
Precio promedio, 440
Productividad marginal, 518
Producto interno bruto, 114, 120, 153, 173, 198, 294, 309, 347, 543-544
Producto marginal de mano de obra, 577
Propensión marginal a consumo, 367
Renovación de moneda, 646
Utilidad bajo un monopolio, 198, 530
Utilidad máxima, 236-237, 245, 252-253, 267-268, 345, 526-527
Utilidad neta, 482
Utilidad, 507 (Probs. 38 y 39), 557
Valor de propiedad, 573

PROBLEMAS DE FINANZAS E INVERSIONES

Administración de cartera de valores, 766
Ahorros, 611, 624, 644, 701
Amortización de deuda, 296, 637-638
Análisis de inversiones, 425, 542
Anualidad de retiro, 424-425
Captación de fondos, 424, 462
Contabilidad, 40
Costo capitalizado de un activo, 471
Crecimiento de inversión, 484, 599, 648
Decisión de construcción, 424
Depreciación, 38, 324, 335, 344 (Prob. 46), 379, 395, 439
Doble saldo que declina, 340 (Prob. 61)
Ecuaciones diferenciales vinculadas, 620-621
Endeudamiento, 471
Especulación de mercado de acciones, 644
Evaluación de inversiones, 462
Exceso neto de utilidad, 402-403, 411
Fondo de amortización, 645
Ingreso de retiro, 650
Interés compuesto, 71 (Prob. 46), 146, 489, 293, 294, 309, 324, 344, 345
Inversión en bienes raíces, 294, 412, 413, 440, 610
Inversión en un periodo bajo de mercado, 441
Juegos de casino, 722
Lotería, 716, 722, 766
Pago de lotería, 426
Pagos de finanzas, 296
Pagos de hipoteca, 296, 644-645
Pagos iniciales, 645
Plan de inversión, 610-611
Precios de acciones, 38
Promedio de mercado de acciones, 543
Regla del, 70, 345
Renovación de moneda, 624
Revaluación de activos, 39
Rueda de la fortuna, 766
Tasa efectiva de interés, 295, 344
Tiempo de duplicación, 304-305
Tiempo óptimo de retención, 329, 336-337, 338-339, 345
Valor de terreno, 379, 394
Valor futuro de flujo de ingreso, 415-417, 424, 437, 440
Valor futuro de inversiones, 462, 481, 604-605
Valor neto de activos, 439, 486
Valor presente de anualidad, 345, 667-668
Valor presente de activos, 484-485
Valor presente de flujo de ingreso, 417-418, 440, 467-468
Valor presente de franquicia, 425, 471, 480
Valor presente de inversión, 290, 293, 425, 471, 486, 670-671, 700, 701
Valor presente de propiedad en renta, 471
Valor promedio de inversión, 411
Verdad al prestar, 296
Verificación de cuentas, 56

PROBLEMAS DE CIENCIAS BIOLÓGICAS, SALUD Y AMBIENTALES

Acumulación de medicamento, 668-669, 671, 700, 701
Agotamiento de recursos energéticos, 425
Agotamiento de reservas, 671
Agotamiento del ozono, 346
Alometría, 311, 544-545, 601
Análisis del medio ambiente, 85
Ángulo óptimo para ramificación vascular, 810-813
Área superficial de una celda de abeja, 818
Área superficial del cuerpo humano, 441, 506, 518, 556, 573
Arteriosclerosis, 156
Ataques de tiburones, 762
Atención de salud mental, 480-481
Bacteriología, 762-763
Biología marina, 272
Biología, 70, 638-640, 733, 803
Biomasa de una especie, 114-115
Bioquímica, 56
Biorritmos, 793
Cambio de temperatura, 11, 441
Cambio neto en biomasa, 366, 391, 395, 440
Circulación sanguínea, 520
Clima, 81, 803, 816, 824
Colonia de bacterias (población), 84, 133, 229, 268, 291-292, 294, 309, 362-363
Comportamiento de animales, 70, 108, 145
Comportamiento de aves, 264, 815
Concentración de glucosa en la sangre, 650-651, 339, 346, 379, 395, 438, 462, 485, 599, 608-609, 612, 622, 648, 651
Concentración de soluto en una célula (ley de Fick), 346, 601-602
Consumo de agua, 38, 395
Contaminación del agua, 82, 146, 165, 168, 379, 394, 623, 648
Contaminación del aire, 12, 39, 119, 142, 145, 155, 173, 345, 379, 394, 507
Contaminación, 803, 824-825
Control de animales, 765
Control de contaminación, 122, 133, 168, 174, 198, 254-255, 481-482
Control de enfermedades, 763
Control sobre abuso de alcohol, 40, 325
Crecimiento de árboles, 366, 379, 440
Crecimiento de bacterias, 174, 342, 345, 411, 434, 544, 599
Crecimiento de insectos, 146
Crecimiento de mamíferos, 146-146
Crecimiento de plantas, 325
Crecimiento de población, 650, 651, 819-820, 825
Crecimiento de tejidos, 215
Crecimiento de un niño, 39
Crecimiento de un tumor, 119, 167, 171
Crecimiento de una célula, 156
Crecimiento de una especie, 197, 246, 632
Crecimiento incontrolado, 623
Crecimiento logístico, 645-646
Decaimiento de biomasa, 485, 650
Demografía de animales, 345
Derrame de petróleo, 164
Desechos nucleares, 433, 440, 471, 579
Dosis de medicamento pedriático, 53
Dosis de medicamento, 134, 576
Ecología en una isla, 12
Ecología tropical, 734, 743
Ecología, 324, 768, 843
Edad óptima para reproducción, 333, 337
Efectividad de medicamento, 434-435
Efecto térmico de alimentos, 412
Eliminación de basura, 761
Eliminación de desechos peligrosos, 770
Energía del viento, 509
Energía gastada en vuelo, 435
Enfermedad de Alzheimer, 818
Enfriamiento del cuerpo de un animal, 579
Entomología, 39, 310-311
Epidemia de sida, 173, 483, 544
Epidemiología, 229
Especies en peligro, 325, 366, 395, 434
Estatura de una mujer, 748
Estatura, 82 (Prob. 56)
Exposición a enfermedades, 573-574
Extinción de población, 632
Farmacología, 56
Figuras de hielo y temperatura en la edad de hielo, 508
Figuras en alas de mariposa, 532
Flora acuática, 295
Flujo sanguíneo, 11-12, 23, 156, 169, 174, 246, 368, 429-430, 433, 507, 518, 519-520, Prob. 49, 819
Fluoración del agua, 612-613
Gasto diario de energía, 508
Genética de población, 634
Genética, 530, 645, 698-699, 702
Histograma epidémico, 714
Inmunización, 12, 230
Investigación de cáncer, 339, 578-579
Investigación médica, 743
Longitud de peces, 755
Luz diurna, 825
Manejo de desechos peligrosos, 558
Medicina deportiva, 768
Medicina pedriática, 761, 766-767
Medicina veterinaria, 760, 761
Medicina, 156, 168, 198, 471, 576, 734, 761, 765, 768, 793, 803-804, 817
Medición de la respiración, 435
Medición de un tumor, 151-152
Medición pedriática, 53
Metabolismo femenino, 804, 822
Metabolismo masculino, 804
Metabolismo, 804
Microbiología, 85, 556
Moluscos, 578
Mutación, 84
Nivel diario promedio de dióxido de carbono, 9
Nutrición, 39-40, 763
Ornitología, 120-121, 247
Ósmosis inversa, 509
Población de animales con caza, 644
Población, 645
Poblaciones de insectos, 735

www.FreeLibros.com

Poblaciones estacionales, 800-801, 813-814, 817, 824
Presión sanguínea, 108-109, 822
Producción de células sanguíneas, 134
Producción de sangre, 247
Pronóstico del clima, 762
Propagación de una epidemia, 52, 119, 120, 215, 277-280, 332, 335, 336, 339, 340, 346, 433, 463, 596-597, 600-601, 624, 644
Prueba de medicamentos, 762
Purificación del aire, 611
Quemotaxis, 624
Radio de la tráquea, 234-235
Radiología, 310
Rapidez de una iguana, 168
Reacción de medicación, 413
Reciclado, 56, 263, 644
Recursos renovables, 107
Reducción de contaminación del aire, 651
Regulación del colesterol, 433-434
Respiración humana, 813
Respiración, 248
Respuesta a estímulos, 337, 529, 601
Ritmo aeróbico, 336, 411-412
Ritmo metabólico basal, 168
Salida cardiaca, 156, 431-432, 433, 463, 481, 493-494
Salud personal, 767
Salud pública, 542, 612-613, 671, 769
Sensibilidad a medicamentos, 247
Servicios de salud, 471, 735, 744
Sistema cardiovascular, 174-175
Supervivencia de fauna acuática, 247
Tamaño de un tumor, 174
Temperatura promedio, 408, 410, 578
Terapia de cáncer, 367, 531
Toxina (efecto sobre el crecimiento de una población), 125-126, 337, 428-429, 441
Trayectorias ortogonales, 618-619
Ubicación de una planta, 755
Virología, 743
Volumen de biomasa, 568
Volumen de sangre durante la sístole, 413

PROBLEMAS DE CIENCIAS FÍSICAS Y GEOMETRÍA

Absorción de luz, 622
Aceleración, 134
Acidez (pH) de una solución, 347
Aerodinámica, 247
Altura y alcance de un proyectil, 817
Amplitud de oscilación, 248
Ángulo óptimo de observación, 817-818
Área bajo curva, 383-384, 386, 391-393
Área de círculo, 174 (Prob. 43)
Área de paquete, 386
Área de rectángulo, 260 (Prob. 11 y 12), 261, (Prob. 13)
Área de triángulo, 261 (Prob. 14)
Área entre dos curvas, 399-401, 439 (Prob. 31-38)
Área y volumen, 804
Área, 52
Arquitectura, 814
Astronomía, 40-41
Caída de linterna, 176 (Prob. 64)
Cambio de temperatura, 52, 600
Carrera de relevos a campo traviesa, 531
Centro de una región, 463-464
Circuito eléctrico, 520
Cobertizo de mantenimiento, 530
Construcción de una caja de joyería, 549-550, 556
Construcción, 814-815, 825-826
Consumo de energía, 813, 820
Conversión de temperatura, 39
Cristalografía, 272-273
Curva catenaria, 340 (Prob. 60)
Curvas logísticas, 601
Decaimiento radiactivo, 52, 294, 309, 345, 599
Descongelación, 366-367
Desplazamiento para alambre, 70 (Prob. 39)
Determinación de fecha geológica, 703
Determinación de fecha por carbono, 306-307, 342, 345, 347
Diamante de béisbol, 176 (Prob. 65)
Difusión a través de una membrana, 622
Dilución, 600, 606-607, 611, 648, 650
Diseño arquitectónico, 573
Diseño mecánico, 818-819
Disolución de azúcar, 600, 622
Distancia, 25 (Prob. 46), 55, 176 (Prob. 60), 261, 364, 368, 392, 441, 462, 480, 842
Electricidad, 247
Elevación promedio, 573
Empaque, 52, 261, 262, 519, 555
Escalera apoyada contra pared, 176 (Prob. 63)
Espacio habitable, 532
Esquiar en agua, 817
Expansión de material, 156-157
Física de partículas, 529, 557
Guerra en el desierto, 683
Iluminación desde una fuente de luz, 806-808, 815
Intensidad de campo eléctrico, 81
Inversión térmica, 108
Ley de Boyle, 168
Ley de Newton de enfriamiento, 310, 324, 335, 616-618, 622
Líneas paralelas, 41
Líneas perpendiculares, 41
Luz polarizada, 818
Metalurgia, 768
Método de Newton de aproximación de raíces de ecuación, 157
Minimización de tiempo de viaje, 808-810
Modelo de dilución de salud pública, 612-613
Movimiento de un proyectil, 23, 117, 121, 816
Movimiento de un proyectil, 392
Movimiento de una línea, 171, 177 (Prob. 74)
Niveles de sonido, 310
Observación de un avión, 796-797
Óptica, 556, 819
Órbita de satélite, 816
Paisaje, 52, 803, 814
Pelota que rebota, 701
  distancia recorrida por, 671
  tiempo de recorrido por, 671
Perímetro de ventana, 271 (Prob. 45)
Porcentajes relacionados, 804
Posición de un objeto en movimiento, 12
Presión atmosférica, 622
Presión de aire, 311
Problema de boya, 176 (Prob. 62)
Problema de una cometa, 176 (Prob. 61)
Prueba de materiales, 683
Química física, 120, 272
Química, 169, 507, 519
Radiación, 157
Radio de esfera, 175 (Prob. 58)
Radio de la Tierra, 88 (Prob. 49)
Radiología, 347
Rapidez de reacción química (ecuación de Arrhenius), 346, 351-354
Rapidez relativa de cambio, 825
Reflexión de luz, 810
Refracción de luz por agua, 793, 815-816
Reglamentos postales (paquetería), 555
Sismología, 310, 311
Sombra de hombre, 168 (Prob. 49)
Temperatura promedio, 576
Tendido de cerca, 42, 52, 249-250, 260, 529, 547-548, 555
Ubicación de almacén, 527-528
Velocidad de la luz, 246
Velocidad de objeto, 97-98, 108, 116, 117, 129, 134, 146-147 (Prob. 67), 146 (Prob. 66), 177 (Prob. 67), 368 (Prob. 67), 441, 480
Vida media, 305-306
Vida útil de máquina, 732, 742
Vida útil de una máquina, 732, 742
Volumen de balón de fútbol, 176 (Prob. 59)
Volumen de cubo, 174

PROBLEMAS DE CIENCIAS SOCIALES

Abuso de drogas, 541
Accidentes en carretera, 769
Adiestramiento militar, 766
Administración de planta de corrección, 367
Administración de tiempo, 731, 735, 744, 769, 770
Administración de tránsito, 767
Admisiones a universidad, 39, 540
Adopción de tecnología, 229
Aprendizaje en infancia, 336
Aprendizaje, 86, 246, 294, 325, 366, 367, 391-392, 530, 593-594, 646, 743
Área de picnic, 547-548
Arqueología, 306-307, 309, 347
Cambio de votante, 541
Cambio legislativo, 471, 770
Circulación de diario, 85, 119, 155
Circulación de tránsito, 233-234, 732-733, 742
Comportamiento de población, 225-226
Consumo de energía, 82, 433
Control de tránsito, 270, 411, 767
Corrupción en gobierno, 600-601
Corrupción política, 53
Costo de agua en sequía, 44-45
Costo de educación, 13
crecimiento de población, 11, 45, 52, 107, 120, 133, 155, 173, 175, 215, 293, 294, 311, 324, 326, 335, 344, 366, 368 (Prob. 66), 395, 412, 432, 433, 437-438, 462, 471, 600
Cuotas de membresía, 38
Curva de aprendizaje (recordar de memoria), 146, 310, 329-330, 335, 600
Delincuencia urbana, 273
Demografía (función de Gompertz), 602
Demografía, 310, 317, 486, 701, 767
Densidad de población, 12, 173-174, 294, 307, 433, 698
Determinación de fecha por computadora, 433
Diseño de carteles, 54, 262

www.FreeLibros.com

Duración de llamada telefónica, 723-724, 738
Ecuación de Fibonacci, 651-652
Emigración de población, 623
Encuestas políticas, 230, 246, 762
Entretenimiento, 734, 765
Espacio habitable, 859
Esperanza de vida, 435
Estudios de población, 724
Éxitos de sitios web, 763
Extinción de incendios, 346, 622
Fábula antigua, 38-39
Falsificación de obras de arte, 309
Financiamiento educativo, 85
Fórmula de Babilonia para raíz cuadrada de N, 157-158
Influencia política, 651
Ingeniería de tránsito, 683
Inmigración de población, 623
Internet, 725, 744
Juego limpio, 723
Juegos de azar, 724
Juegos de mesa, 721, 723
Lingüística, 295, 702
Llamadas de telemercadeo, 758-759
Llegadas de aviones, 734, 742
Membresía de grupo, 245-246, 432, 434, 463, 671
Opciones sociales, 529
Patrones sociales, 761
Periodismo, 769
Planeación de ciudad, 530
Planeación urbana, 263-264
Población de Estados Unidos, 347 (Prob. 77)
Población mundial, 336
Población promedio, 411, 441
Porcentajes de mortalidad, 339, 347, 483-484
Predicción de población, 542, 636-637
Propagación de un rumor, 270, 337, 600
Prueba académica, 760, 761, 765, 768
Prueba educativa, 119
Prueba sicológica, 486
Radioemisión, 245
Rapidez de cambio de población, 113
Recordar de memoria, 600, 650
Registro de curso, 38
Relato de espías, 55, 121, 261, 310, 367, 556, 611, 672, 734, 817
Respuesta a estímulos, 573
Seguridad de tránsito, 175
Seguridad en camino, 23
Seguridad en carreteras, 722-723
Seguridad en centro comercial, 464
Selección de jurado, 724
Semáforo, 723, 737-738
Sicología experimental, 11, 70, 229, 733-734, 743
Sicología, 506
Supervivencia y renovación, 427-428, 432, 486
Telecomunicaciones, 744
Tendencias de población, 434
Tendencias políticas, 433
Teoría de aprendizaje, 338
Teoría de conflicto, 336
Tiempo mínimo de viaje, 270
Tiro de una moneda al aire, 712-713, 715-716, 717, 720-721, 723
Tránsito rápido, 173
Transportación, 734
Transporte público, 119, 440
Valor a costo de educación, 14
Valor de educación, 13-14
Viaje en avión, 723
Viaje por avión, 55
Viaje suburbano, 733, 742

www.FreeLibros.com

CONTENIDO

Prefacio xi



CAPÍTULO 1 Funciones, gráficas y límites

1 Funciones 2
2 Gráfica de una función 14
3 Funciones lineales 26
4 Modelos funcionales 41
5 Límites 57
6 Límites laterales y continuidad 71
Resumen del capítulo 83
Términos importantes, símbolos y fórmulas 83
Revisión del capítulo 1 83
Problemas de repaso 84
¡Explore! Actualización 89
Reflexione acerca de . . . 91



CAPÍTULO 2 Derivación: conceptos básicos

1 La derivada 96
2 Técnicas de derivación 110
3 Reglas del producto y del cociente; derivadas de orden superior 122
4 La regla de la cadena 135
5 Análisis marginal y aproximaciones por incrementos 147
6 Derivación implícita y tasas relacionadas 158
Resumen del capítulo 170
Términos importantes, símbolos y fórmulas 170
Revisión del capítulo 2 171
Problemas de repaso 172
¡Explore! Actualización 178
Reflexione acerca de . . . 180



CAPÍTULO 3 Aplicaciones adicionales de la derivada

1 Funciones crecientes y decrecientes; extremos relativos 184
2 Concavidad y puntos de inflexión 199
3 Trazado de curvas 216
4 Optimización 231
5 Aplicaciones adicionales de la optimización 249
Resumen del capítulo 266
Términos importantes, símbolos y fórmulas 266
Revisión del capítulo 3 267
Problemas de repaso 268
¡Explore! Actualización 274
Reflexione acerca de . . . 277

www.FreeLibros.com

CAPÍTULO 4 Funciones exponenciales y logarítmicas



1 Funciones exponenciales 282
2 Funciones logarítmicas 297
3 Derivación de funciones logarítmicas y exponenciales 312
4 Modelos exponenciales adicionales 326
Resumen del capítulo 340
Términos importantes, símbolos y fórmulas 340
Revisión del capítulo 4 342
Problemas de repaso 343
¡Explore! Actualización 349
Reflexione acerca de... 351

CAPÍTULO 5 Integración



1 Antiderivación: la integral indefinida 356
2 Integración por sustitución 368
3 La integral definida y el teorema fundamental del cálculo 380
4 Aplicación de la integración definida: área entre curvas y valor promedio 396
5 Aplicaciones adicionales de negocios y economía 414
6 Aplicaciones adicionales de las ciencias sociales y de la vida 426
Resumen del capítulo 436
Términos importantes, símbolos y fórmulas 436
Revisión del capítulo 5 437
Problemas de repaso 438
¡Explore! Actualización 442
Reflexione acerca de... 445

CAPÍTULO 6 Temas adicionales de integración



1 Integración por partes; tablas de integrales 450
2 Integrales impropias 464
3 Integración numérica 472
Resumen del capítulo 484
Términos importantes, símbolos y fórmulas 484
Revisión del capítulo 6 484
Problemas de repaso 485
¡Explore! Actualización 488
Reflexione acerca de... 490

CAPÍTULO 7 Cálculo de varias variables



1 Funciones de varias variables 496
2 Derivadas parciales 510
3 Funciones de optimización de dos variables 521
4 El método de mínimos cuadrados 533
5 Optimización con restricciones: método de los multiplicadores de Lagrange 545

www.FreeLibros.com



6 Integrales dobles 559
Resumen del capítulo 575
Términos importantes, símbolos y fórmulas 575
Revisión del capítulo 7 575
Problemas de repaso 576
¡Explore! Actualización 580
Reflexione acerca de... 582

CAPÍTULO 8 Ecuaciones diferenciales



1 Introducción a las ecuaciones diferenciales 588
2 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden 602
3 Aplicaciones adicionales de ecuaciones diferenciales 612
4 Soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales 625
5 Ecuaciones en diferencias 632
Resumen del capítulo 647
Términos importantes, símbolos y fórmulas 647
Revisión del capítulo 8 647
Problemas de repaso 648
¡Explore! Actualización 653
Reflexione acerca de... 656

CAPÍTULO 9 Aproximaciones por series infinitas y series de Taylor



1 Series infinitas 662
2 Criterios de convergencia 672
3 Funciones como series de potencias; series de Taylor 684
Resumen del capítulo 699
Términos importantes, símbolos y fórmulas 699
Revisión del capítulo 9 700
Problemas de repaso 700
¡Explore! Actualización 704
Reflexione acerca de... 706

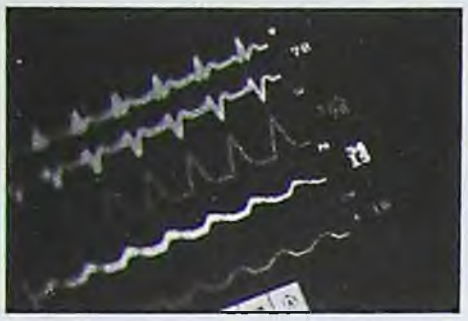
CAPÍTULO 10 Probabilidad y cálculo



1 Variables aleatorias discretas 710
2 Variables aleatorias continuas 725
3 Valor esperado y varianza de variables aleatorias continuas 736
4 Distribuciones de probabilidad normal y de Poisson 745
Resumen del capítulo 764
Términos importantes, símbolos y fórmulas 764
Revisión del capítulo 10 765
Problemas de repaso 766
¡Explore! Actualización 771
Reflexione acerca de... 773

www.FreeLibros.com

CAPÍTULO 11 Funciones trigonométricas



1 Las funciones trigonométricas 780
2 Derivación e integración de funciones trigonométricas 794
3 Aplicaciones adicionales de las funciones trigonométricas 805
Resumen del capítulo 821
Términos importantes, símbolos y fórmulas 821
Revisión del capítulo 11 822
Problemas de repaso 823
¡Explore! Actualización 828
Reflexione acerca de... 830

APÉNDICE A Repaso de álgebra

1 Breve repaso de álgebra 834
2 Factorización de polinomios y resolución de sistemas de ecuaciones 844
3 Evaluación de límites con la regla de L'Hôpital 851
Resumen del apéndice 856
Términos importantes, símbolos y fórmulas 856
Problemas de repaso 856
Reflexione acerca de... 859

TABLAS

I Potencias de e 860
II El logaritmo natural (base e) 861
III Funciones trigonométricas 862

SOLUCIONES

Respuestas a problemas impares, problemas de repaso y problemas de revisión 863

Índice 964

www.FreeLibros.com

PREFACIO

Presentación a la octava edición aumentada

Esta octava edición aumentada de *Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales* (© 2004) incluye cuatro capítulos adicionales:

- Capítulo 8, Ecuaciones diferenciales
- Capítulo 9, Aproximaciones a series infinitas y series de Taylor
- Capítulo 10, Probabilidad y cálculo
- Capítulo 11, Funciones trigonométricas

Cálculo aplicado para administración, economía, y ciencias sociales satisface las necesidades del maestro que trabaje sobre temas en uno o más de estos cuatro capítulos, junto con los temas que cubren los siete capítulos iniciales en un curso de un semestre, o las necesidades de quien imparta un curso de dos semestres que cubra el material de los 11 capítulos de este libro. (La palabra "aplicado" del título distingue este volumen de la edición más breve.) Nuestro libro introduce cálculo en un contexto práctico; nuestra meta principal es dar un conocimiento lógico e intuitivo de conceptos básicos que los estudiantes necesitan cuando hagan carreras en negocios, ciencias biológicas y ciencias sociales. Nos esforzamos por enseñar técnicas de derivación y cálculo integral sin sacrificar la precisión matemática. Expresamos de manera cuidadosa y completa los principales resultados, motivando y explicando al estudiante en forma intuitiva o geométrica cuando es posible. Hemos tratado de hacer que cada concepto sea tan fácil de entender como sea posible. El logro de estas metas ha sido validado por el uso continuo y exitoso de nuestros libros en un gran número de universidades.

La edición previa de *Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales* fue muy exitosa. En los últimos cinco años, más de 75 000 estudiantes se han preparado con este libro y más de un cuarto de millón de estudiantes han aprendido cálculo aplicado de ediciones anteriores. Para ayudar a construir ese éxito, hemos considerado las sugerencias de numerosos usuarios. Formamos un extenso panel de revisores para guiarnos en la elaboración de textos de la octava edición. Los revisores ayudaron a confirmar la necesidad de temas adicionales tratados en este volumen aumentado. También nos han ayudado a concentrarnos en los temas más importantes y aplicaciones que hacen que este libro sea apropiado para uso de estudiantes de administración, economía y ciencias sociales. Además, nuestros revisores nos han ayudado a diseñar las características que hacen a este texto una eficaz herramienta para enseñar y aprender cálculo aplicado. Los revisores nos han ayudado a mantener este libro actualizado y a la vanguardia al darnos sugerencias para tratar en él nuevas aplicaciones.

Al seguir el consejo de nuestros revisores, hemos construido sobre estos puntos fuertes al mismo tiempo que nos esforzamos en mejorar la presentación. Hemos agregado numerosos recuadros nuevos de procedimientos, definiciones e ilustraciones para aclarar los temas. Hemos escrito nuevas introducciones para muchos temas y hemos agregado innumerables ejemplos aplicados para motivar conceptos. Nuestros revisores también nos indicaron que nuestros conjuntos de ejercicios son excelentes y nos hicieron sugerencias para mejorarlos aun más. Para satisfacer sus necesidades, hemos agregado un número importante de problemas de rutina para obtener un conocimiento más gradual de aptitudes al trabajar con los procedimientos y conceptos presentados.

Cuando se les preguntó: "¿Qué hace que nuestro texto sea más didáctico en un curso?", los revisores señalaron nuestra orientación aplicada a conceptos, nuestro método de resolución de problemas y el estilo sencillo de escritura. La meta siempre ha sido ayudar al maes-

www.FreeLibros.com

tro a organizar la materia de modo que cada sección del texto corresponda a una sola clase y que cada capítulo contenga la cantidad correcta de material para un examen. Los estudiantes necesitan saber la forma en que el cálculo se aplica a su particular campo de interés. Para ayudar al maestro a relacionar aplicaciones a una audiencia en especial, hemos organizado secciones de aplicación según los grados de utilidad en negocios y economía o en ciencias sociales y biológicas. La octava edición incluye gran cantidad de ejercicios aplicados.

Mejoras a esta edición

Hemos hecho varias mejoras considerables e importantes dentro de la octava edición, en respuesta a recomendaciones de usuarios y sugerencias hechas por nuestro panel de revisores.

Mejor cobertura de temas

Cada sección de este texto fue sometida a un cuidadoso análisis y revisión a fondo para asegurar la presentación más benéfica y clara. Por ejemplo, el tratamiento de cantidades y optimización se han mejorado con la adición de muchos ejemplos y ejercicios nuevos. El tratamiento de límites se ha mejorado con la inclusión de límites al infinito en el capítulo 1. Más adelante en este prefacio se puede hallar una lista más detallada de cambios capítulo por capítulo.

Presentación eficaz de la integración

Esta edición presenta una exposición mejorada de la integración. La integración definida se introduce ahora inmediatamente después de antiderivación y sustitución del capítulo 5, seguida de una nueva sección sobre modelado con la integral definida. Para máxima flexibilidad, las aplicaciones de la integral definida están organizadas en secciones separadas para administración y economía y para ciencias biológicas y sociales. El capítulo 6 amplía el desarrollo de integración definida para incluir integración por partes, así como una nueva cobertura de integración usando tablas e integración numérica. Las secciones sobre integración por sustitución e integración por partes se han modificado a fondo.

Conjuntos mejorados de ejercicios

Se han agregado varios cientos de nuevos ejercicios aplicados y de rutina a los ya extensos conjuntos de problemas. Con base en retroalimentación de usuarios, se han agregado ejercicios de rutina en donde era necesario para asegurar que los estudiantes tengan práctica más que suficiente para dominar conocimientos básicos. Además, un gran número de nuevos ejercicios aplicados se ha agregado para ayudar a demostrar lo práctico que es el material. Estos nuevos ejercicios vienen de muchos campos de estudio, incluyendo economía, negocios, biología, medicina y otros campos de ciencias biológicas. Se ha ampliado un gran número de nuevos ejercicios que comprenden integración, teniendo cuidado de asegurarnos que los ejercicios usan sólo conjuntos actualizados de datos.

Cobertura ampliada de aplicaciones a la economía

Esta edición se extiende aún más sobre la ya considerable exposición de economía de la edición previa. En particular, ya antes se introducen funciones económicas y se usan en ejemplos y ejercicios en forma más amplia. También hay una nueva exposición ampliada de elasticidad de demanda en precios.

Cobertura ampliada de aplicaciones a las ciencias sociales

Un nuevo y muy importante aspecto es la cobertura ampliada de aplicaciones del cálculo a ciencias biológicas. Entre los nuevos temas tratados son la alometría (crecimiento relativo de una parte con respecto a todo un organismo), modelado matemático de epidemias, difusión de poblaciones de animales y varias aplicaciones de otras ramas de las ciencias biológicas, que incluyen fisiología, medicina, nutrición y ecología.

www.FreeLibros.com

Extensa verificación de precisión

Esta nueva edición se ha beneficiado de un intenso esfuerzo por asegurar su precisión. El libro ha sido revisado por varios revisores técnicos que han verificado ejemplos, ejercicios y cálculos. No sólo se ha verificado extensamente el nuevo material, sino que también se ha hecho una doble verificación del material incluido de la edición previa.

Repaso justo a tiempo

Una nueva característica de la octava edición es el Repaso justo a tiempo, que se utiliza para recordar que los estudiantes recuerden de manera inmediata conceptos de álgebra universitaria o precálculo cuando se usen en ejemplos y estudios. Cada uno de estos repasos aparecen a manera de ladillos junto al texto en donde se emplea el material revisado del tema. Un estudio ampliado de estos conceptos se puede hallar además en el apéndice "Repaso de álgebra" al final del libro, pero estos recordatorios rápidos alertan a los estudiantes respecto a datos clave sin distraerlos del material bajo estudio. Los temas seleccionados para estos repasos provienen de experiencia en salones de clase y sugerencias hechas por revisores.

Modelado matemático

El papel del modelado matemático se ha ampliado considerablemente en la octava edición. El modelado se introdujo en el capítulo 1 y aparece como tema recurrente en todo el texto en aplicaciones que comprenden ciencias administrativas y biológicas. El tema del modelado está reforzado por numerosos nuevos ejemplos y ejercicios que se refieren a porcentajes, optimización y la integral definida. Para complementar la cobertura del modelado, al principio se introduce el análisis de datos. En particular, se anticipa la aproximación de mínimos cuadrados en el capítulo 1 y luego se desarrolla con mayor detalle en el capítulo 7, que también incluye una introducción a la regresión no lineal. El modelado con ecuaciones diferenciales y de diferencia se expone en el capítulo 8. El uso de funciones trigonométricas para modelar fenómenos periódicos se aborda en el capítulo 11.

Módulos "Reflexione acerca de..."

Cada capítulo concluye con un nuevo ensayo llamado "Reflexione acerca de" que se basa en modelado. Estos ensayos son mucho más sustanciales que los de la edición previa, y están diseñados para mostrar al estudiante la forma en que el material introducido en el capítulo se puede usar para construir modelos matemáticos útiles. Tomados en su conjunto, los ensayos ilustran cómo se construyen modelos, cómo dan soluciones útiles pero sólo aproximadas a problemas, y cómo el proceso continúa con la construcción de modelos más refinados. Los ejercicios que siguen a cada ensayo son un excelente punto inicial para estudio independiente y se pueden exponer en el salón de clases o servir como base para proyectos en grupo. Las soluciones a estos ejercicios se pueden hallar en el sitio web www.mhhe.com/hoffmann.

Tecnología

Cada una de las secciones "¡Explore!" de la octava edición se ha actualizado para mejorar la compatibilidad con calculadoras actuales, y se ha reescrito para enfocarse con más claridad en ejemplos específicos dentro del texto. Cada sección "¡Explore! Actualización", al final de capítulo, se ha reescrito para dar sugerencias más detalladas y soluciones a secciones "¡Explore!" seleccionadas.

Orientación a calculadoras graficadoras

Nueva a la octava edición es una extensa introducción a calculadoras graficadoras que aparece en las páginas XXIII a XXXIII de este prefacio. El material incluye instrucciones referentes a teclas comunes, terminología e introducciones a aplicaciones de calculadoras más avanzadas que se desarrollan en detalle en lugares apropiados en el texto. La "Introducción a las calculadoras" puede servir como manual para estudiantes no familiarizados con el uso

www.FreeLibros.com

de calculadoras graficadoras, o como guía para un uso mejorado para quienes tengan alguna experiencia con calculadoras.

Equipo ampliado de colaboradores del autor

Para reforzar su ya fuerte equipo, Kenneth H. Rosen colaboró en la octava edición y es coautor de esta octava edición aumentada. Ken ha trabajado en la industria y en actividades docentes, siendo autor de libros de computación entre los que se incluye *Discrete Mathematics and its Applications,* quinta edición, publicado por McGraw-Hill. Muchos maestros gustan en especial de la combinación de conceptos y aplicaciones relevantes que expone Kenneth. Su creatividad, atención a detalles y experiencia en la industria contribuyen a una adaptación natural para ampliar el método aplicado de este texto.

Cambios capítulo por capítulo

Los usuarios de la séptima edición de *Cálculo para administración, economía y ciencias sociales* encontrarán útil la siguiente lista detallada de cambios. Esta lista destaca cambios hechos a los capítulos 1 al 7. Estas mejoras fueron posibles por aportación de revisores y retroalimentación de usuarios.

Capítulo 1: Funciones, gráficas y límites

- Introducción temprana y uso de funciones económicas.
- Vista preliminar de regresión lineal en la sección 1.3 y un análisis de su uso.
- Se introduce y estudia el modelado matemático en la sección 1.4.
- Se introducen límites que comprenden el infinito, con otros límites, en la sección 1.5.
- Límites de un lado introducidos en la sección 1.6 y empleados como parte de una nueva exposición gráfica que ilustra el significado de continuidad y discontinuidad.
- Un nuevo ensayo de "Reflexione acerca de..." sobre alometría.

Capítulo 2: Derivación: Conceptos básicos

- La regla de la cadena se introduce inmediatamente después de la regla del producto y la regla del cociente (en la sección 2.4).
- Derivadas de orden superior introducidas en una subsección de la sección 2.3.
- Numerosos ejercicios nuevos de rutina y ejercicios aplicados que comprenden porcentajes.

Capítulo 3: Aplicaciones adicionales de la derivada

- Procedimiento de gráficas modificado para uso más fácil.
- Varios ejemplos de gráficas con otra redacción para mejorar la claridad.
- Una nueva lista de procedimientos para ayudar a estudiantes a resolver problemas de optimización.
- Un análisis más amplio de elasticidad de demanda en precios.
- Numerosos y nuevos problemas aplicados y de rutina, así como otros de trazado de curvas y optimización.
- Un nuevo ensayo de "Reflexione acerca de..." en el modelado de fallecimientos por el SIDA (con uso de regresión).

Capítulo 4: Funciones exponenciales y logarítmicas

- Varios ejemplos nuevos aplicados.
- Análisis aumentado de logaritmos y gráficas logísticas.
- Muchos y nuevos ejercicios aplicados y de rutina, en especial los relacionados a ciencias biológicas.

www.FreeLibros.com

- Un nuevo ensayo de "Reflexione acerca de..." sobre el modelo de Arrhenius de investigación del chirrido de grillos.

Capítulo 5: Integración

- Reorganización del material de integración. El capítulo 5 se inicia con la antiderivación y el método de sustitución (como en la séptima edición), pero ahora estos temas son seguidos inmediatamente por la integral definida y sus aplicaciones. La integración por partes está ahora en el capítulo 6.
- Una sección 5.2 extensamente modificada sobre el método de sustitución.
- El modelado con la integral definida se estudia en la sección 5.4, con aplicaciones de interés general tal como área entre curvas, valor promedio y análisis de la curva de Lorentz.
  Las aplicaciones más especializadas de la integral definida se dividen en dos secciones separadas: la sección 5.5 para administración y economía, y la sección 5.6 para ciencias biológicas y sociales.
- Nuevos ejemplos aplicados, así como ejemplos ampliamente modificados tomados de la séptima edición.
- Se han agregado numerosos ejercicios aplicados y de rutina.
- Un nuevo ensayo de "Reflexione acerca de..." sobre diferencias que apenas se notan.

Capítulo 6: Temas adicionales de integración

- Material extensamente modificado sobre integración por partes en la sección 6.1.
- Nuevo material sobre integración con uso de tablas.
- Cobertura mejorada de material sobre integrales impropias en la sección 6.2.
- Una nueva sección sobre integración numérica que ilustra la forma en que la regla del trapecio y la regla de Simpson se pueden usar para estimar integrales definidas que representan cantidades como área, valor promedio y valor presente de un flujo de ingreso.
- Numerosos ejercicios adicionales aplicados y de rutina.
- Un nuevo ensayo de "Reflexione acerca de..." sobre el ritmo cardíaco.
- La cobertura de probabilidad continua se ha cambiado al capítulo 9.

Capítulo 7: Cálculo de varias variables

- Un nuevo estudio y resumen de la prueba de segundas parciales.
- Expansión del material sobre aproximación de mínimos cuadrados en toda una sección.
- Nuevo material sobre regresión no lineal (log-lineal).
- Un nuevo ensayo de "Reflexione acerca de..." sobre modelos de difusión de población.
- La cobertura ampliada ahora incluya integrales dobles sobre regiones no rectangulares.
- Se ha agregado la aplicación de integrales dobles al cálculo de volúmenes, al igual que el uso de integrales dobles para calcular valores promedio de funciones de dos variables.

Apéndice

- Los límites de evaluación con la regla de L'Hôpital se tratan ahora en el apéndice A.

Los maestros familiarizados con *Cálculo para administración, economía y ciencias sociales*, interesados en los capítulos agregados a esta edición aumentada, encontrarán útiles los siguientes detalles:

Capítulo 8: Ecuaciones diferenciales

Este capítulo está diseñado para enseñar a los estudiantes a usar ecuaciones diferenciales, concentrarse en cómo usarlas para estudiar aplicaciones importantes a la administración, economía y ciencias sociales. Se introduce la noción básica de una ecuación diferencial, al

www.FreeLibros.com

igual que técnicas para resolver ecuaciones diferenciales separables y de primer orden. Entre las aplicaciones tratadas están el crecimiento logístico, la propagación de epidemias, modelos de ajuste de precios, modelado de carta de valores financieros y la ley de enfriamiento de Newton. También se ha abordado la solución aproximada de ecuaciones diferenciales con el uso del método de Euler. Por último, este capítulo introduce los conceptos básicos de ecuaciones de diferencia con aplicaciones a amortización de préstamos, administración de pesca y modelos de aprendizaje. La interacción entre oferta y demanda se estudia usando un modelo de telaraña. El capítulo también explica los primeros pasos de modelar con uso de ecuaciones diferenciales y de diferencia.

Capítulo 9: Aproximaciones por series infinitas y series de Taylor

El papel de este capítulo es llevar a estudiantes la idea de una serie infinita convergente para demostrar la forma en que se usan series infinitas en aplicaciones. Se estudian aplicaciones de series geométricas infinitas a economía y a ciencias biológicas. Se introducen la serie armónica y su aplicación a la frecuencia con la que se rompen marcas (como en atletismo). La sección 9.2 examina la convergencia de series con términos positivos con el uso de pruebas integrales y de comparación, motivada con razonamiento geométrico. Por último, se estudia la noción de la aproximación de funciones con el uso de la serie de Taylor.

Capítulo 10: Probabilidad y cálculo

La meta de este capítulo es desarrollar los aspectos más importantes de probabilidad para estudiantes en negocios y economía y en ciencias biológicas. El capítulo empieza por introducir variables aleatorias discretas, cubriendo funciones de densidad de probabilidad discretas, histogramas, valores esperados y variables. Con todo detalle se estudian variables aleatorias geométricas y sus aplicaciones a temas como es la confiabilidad de productos. Se introducen variables aleatorias continuas, así como funciones de densidad exponencial y uniforme. Las funciones de densidad de probabilidad conjunta se estudian usando integrales dobles. Se motivan y definen el valor esperado y la varianza de variables aleatorias continuas. El capítulo muestra la forma de aplicar la distribución normal para estudiar problemas en negocios y ciencias biológicas. Se introduce la distribución de Poisson y también se explican sus amplias aplicaciones.

Capítulo 11: Funciones trigonométricas

Este capítulo cubre los aspectos más importantes del cálculo de las funciones trigonométricas. Después de un breve repaso de las funciones trigonométricas y sus propiedades, se estudia la derivación e integración de estas funciones. Finalmente, se estudian aplicaciones de las funciones trigonométricas, incluyendo aplicaciones que comprenden periodicidad. Los primeros pasos de modelado con funciones trigonométricas también se introducen.

www.FreeLibros.com

CARACTERÍSTICAS CLAVE DE ESTE TEXTO

Si $Q(x)$ es una función derivable de x, observe que

$$\frac{d}{dx}(\ln Q) = \frac{Q'(x)}{Q(x)}$$

donde la razón a la derecha es la razón de cambio relativa de $Q(x)$. Es decir, *la razón de cambio relativa de una cantidad $Q(x)$ se puede calcular encontrando la derivada de* ln Q. Esta clase especial de derivación logarítmica se puede utilizar para simplificar los cálculos de varias razones de crecimiento, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4.3.14

Un país exporta tres bienes, trigo W, acero S y petróleo O. Suponga que en determinado momento, $t = t_0$, el ingreso (en miles de millones de dólares) derivado de cada uno de estos bienes es

$$W(t_0) = 4 \qquad S(t_0) = 7 \qquad O(t_0) = 10$$

y que S crece a 8%, O crece a 15%, en tanto que W disminuye a 3%. ¿A qué razón relativa crece el ingreso total de las exportaciones en este momento?

Solución

Sea $R = W + S + O$. En el tiempo $t = t_0$, se sabe que

$$R(t_0) = W(t_0) + S(t_0) + O(t_0) = 4 + 7 + 10 = 21$$

y

$$\frac{W'(t_0)}{W(t_0)} = -0.03 \qquad \frac{S'(t_0)}{S(t_0)} = 0.08 \qquad \frac{O'(t_0)}{O(t_0)} = 0.15$$

de manera que

$$W'(t_0) = -0.03W(t_0) \qquad S'(t_0) = 0.08S(t_0) \qquad O'(t_0) = 0.15\ O(t_0)$$

Aplicaciones

En todo el texto se hace un gran esfuerzo para asegurarnos de que las técnicas se aplican a problemas prácticos poco después de su introducción, dando métodos para manejar cálculos de rutina y problemas aplicados. Estos métodos y estrategias para resolución de problemas se introducen en ejemplos aplicados y se practican en los conjuntos de ejercicios. A esta octava edición se agregaron nuevos ejemplos aplicados, desde una amplia variedad de fuentes con cuidadosa atención a datos obsoletos o anticuados.

Procedimiento para resolver problemas de tasas relacionadas

1. Se dibuja una figura (si es apropiado) y se asignan variables.
2. Se determina una fórmula que relacione las variables.
3. Se usa la derivación implícita para determinar cómo se relacionan las tasas.
4. Se sustituye cualquier información numérica dada en la ecuación del paso 3 para encontrar la razón de cambio deseada.

A continuación se presentan cuatro problemas prácticos que implican tasas relacionadas.

EJEMPLO 2.6.5

El gerente de una compañía determina que cuando se producen q cientos de unidades de cierto bien, el costo total de producción es C miles de dólares, donde $C^2 - 3q^3 = 4\,275$. Cuando se producen 1 500 unidades, el nivel de producción se incrementa a una razón de 20 unidades por semana. ¿Cuál es el costo total en este momento y a qué razón cambia?

Solución

Se desea determinar $\frac{dC}{dt}$ cuando $q = 15$(1 500 $\frac{dq}{dt}$

por semana). Derivando implícitamente en la

Ejemplos de procedimiento y recuadros

Este texto intenta abordar cada nuevo tema con cuidadosa claridad al presentar técnicas paso a paso para resolver problemas. Estas técnicas se demuestran en numerosos ejemplos de procedimiento que trabajan estos problemas, así como en frecuentes recuadros de resumen de procedimiento que destacan las técnicas demostradas.

Definiciones

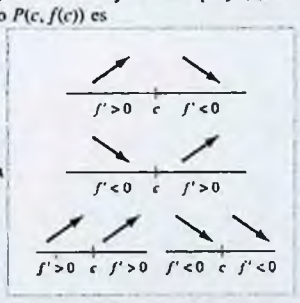
Las definiciones y conceptos clave se ponen de relieve en cajas sombreadas para dar fácil referencia al estudiante.

Criterio de la primera derivada para extremos relativos Sea c un número crítico para $f(x)$ [es decir, $f(c)$ está definido y se tiene que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe]. Entonces el punto crítico $P(c, f(c))$ es

Un máximo relativo si $f'(x) > 0$ a la izquierda de c y $f'(x) < 0$ a la derecha de c

Un mínimo relativo si $f'(x) < 0$ a la izquierda de c y $f'(x) > 0$ a la derecha de c

No es un extremo relativo si $f'(x)$ tiene el mismo signo a ambos lados de c



EJEMPLO 3.1.3

Encuentre todos los números críticos de la función

$$f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$$

y clasifique cada punto crítico como un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguna de las dos cosas.

www.FreeLibros.com

Repaso justo a tiempo

Nuevas en esta edición, estas referencias se usan para que los estudiantes recuerden rápidamente los conceptos del álgebra universitaria, o el precálculo, sin distraerlos del material bajo estudio. También se pueden hallar estudios más detallados en el apéndice A, "Repaso de álgebra".

Ejercicios

Siempre una característica fuerte de ediciones pasadas, la octava edición aumentada ofrece más de 1 000 nuevos ejercicios para aumentar la efectividad de estas secciones. Los ejercicios de rutina se han agregado donde es necesario para estar seguros que los estudiantes tendrán suficiente práctica en dominar conocimientos básicos, y se ha agregado una gran cantidad de nuevos ejercicios aplicados para ayudar a demostrar lo práctico del material. Las respuestas a problemas impares de fin de sección y de repaso de capítulo se pueden hallar al final de este texto, con soluciones completas en el *Manual de soluciones para el estudiante* (consulte con su representante local).

Ejercicios de escritura

Todo conjunto de ejercicios incluye problemas de escritura que están relacionados con otros problemas que aparecen en los ejemplos y ejercicios, designados por el icono de escritura . Estos problemas desafían la capacidad de pensamiento crítico del estudiante y lo invitan a investigar temas por sí mismo, explorando el lenguaje de las matemáticas.

Ejercicios con calculadora

Cada una de las secciones incluye numerosos problemas que se pueden completar sólo por medio del uso de una calculadora graficadora. Estos ejercicios están marcados claramente con el icono de calculadora .

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Términos importantes, símbolos y fórmulas

Función (2)
Notación de función $f(x)$ (2)
Dominio y rango de una función (2)
Convención del dominio (4)
Variables independientes y dependientes (3)
Funciones usadas en economía:
- Demanda (5)
- Oferta (47)
- Costo (5)
- Ingreso (5)
- Utilidad (5)

Composición de funciones: $g(h(x))$ (6)
Gráfica de una función: los puntos $(x, f(x))$ (15)
Intersecciones con los ejes x y y (17)
Función definida en partes (4)
Función de potencia (20)
Polinomio (20)
Función racional (21)
Criterio de la recta vertical (23)
Proporcionalidad conjunta: $Q = kxy$ (35)
Equilibrio de mercado: ley de la oferta y la demanda (47)
Escasez y abundancia (47)
Análisis del punto de equilibrio (47)
Límite de una función $\lim_{x \to c} f(x)$ (58)
Límites al infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) \quad (64)$$

Regla del recíproco de la potencia:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{A}{x^k} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{A}{x^k} = 0 \quad k > 0 \quad (65)$$

Límites al infinito de una función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$:
Divida todos los términos de $f(x)$ entre la potencia más alta x^k en el denominador $q(x)$ y utilice la regla del recíproco de la potencia. (66)
Asíntota horizontal (65)
Límite infinito: $\lim_{x \to c} f(x) =$
Límites laterales:

Repaso de capítulo

Esencial para la comprensión del estudiante es el material de "Repaso de capítulo" que ayuda a sintetizar los conceptos importantes presentados dentro del capítulo. Los términos, símbolos y fórmulas importantes dan una lista maestra de todos los términos técnicos clave y matemáticas que se estudian en el capítulo.

Revisión de capítulo

Una nueva "Revisión de capítulo" presenta un rápido examen para estudiantes para probar su comprensión de los conceptos introducidos en el capítulo. Todas las respuestas a este examen aparecen en las "Respuestas clave" al final del libro.

Verificación para el capítulo 2

1. En cada caso, determine la derivada $\frac{dy}{dx}$.
   a. $y = 3x^4 - 4\sqrt{x} + \frac{5}{x^2} - 7$
   b. $y = (3x^3 - x + 1)(4 - x^2)$
   c. $y = \frac{5x^2 - 3x + 2}{1 - 2x}$
   d. $y = (3 - 4x + 3x^2)^{3/2}$
2. Determine la segunda derivada de la función $f(t) = t(2t + 1)^2$.
3. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 2x + 1$ en el punto donde $x = -1$.
4. Determine la tasa de cambio de la función $f(x) = \frac{x + 1}{1 - 5x}$ con respecto a x cuando $x = 1$.

...) Los ...00, el ...a una ...le una ...+ 1 800 ...o a la ...)03? ...el im- ...n objeto ...na que su ...= $2t^3$ − ...ación $a(t)$

b) ¿Cuándo el objeto está estacionario? ¿Cuándo avanza? ¿Cuándo retrocede?
c) ¿Cuál es la distancia total recorrida por el objeto para $0 \le t \le 2$?

7. COSTO DE PRODUCCIÓN Suponga que el costo de producción de x unidades de cierto bien es $C(x) = 0.04x^2 + 5x + 73$ cientos de dólares.
   a) Use el costo marginal para calcular el costo de producción de la sexta unidad.
   b) ¿Cuál es el costo real de producción de la sexta unidad?
8. PRODUCCIÓN INDUSTRIAL En cierta fábrica, la producción diaria es $Q = 500L^{3/4}$ unidades, donde L denota el tamaño de la fuerza laboral en horas-trabajador. Actualmente, se emplean 2 401 horas-trabajador cada día. Utilice el cálculo (incrementos) para estimar el efecto que tiene sobre la producción el incrementar el tamaño de la fuerza laboral en 200 horas-trabajador.
9. MEDICIÓN PEDIÁTRICA Los pediatras emplean la fórmula $S = 0.2029w^{0.425}$ para calcular el área superficial S (m^2) de un niño de 1 m de altura que pesa w kilogramos (kg). Un niño pesa 30 kg y gana peso a una razón de 0.13 kg por semana mientras permanece de 1 metro de altura. ¿A qué razón cambia el área superficial del niño?
10. CRECIMIENTO DE UN TUMOR Un tumor canceroso tiene forma aproximadamente esférica. Calcule el error porcentual que se puede permitir en la medición del radio r para garantizar que no se cometa un error mayor al 8% en el cálculo del

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Problemas de repaso

En los problemas 1 y 2 utilice la definición de la derivada para determinar $f'(x)$.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 1$
2. $f(x) = \frac{1}{x - 2}$

En los problemas 3 a 13 encuentre la derivada de la función dada.

3. $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 2x + \sqrt{2}$
4. $f(x) = x^3 - \frac{1}{3x^5} + 2\sqrt{x} - \frac{3}{x} + \frac{1 - 2x}{x^3}$
5. $y = \frac{2 - x^2}{3x^2 + 1}$
6. $y = (x^5 + 2x - 7)(3 + x - x^2)$
7. $f(x) = (5x^4 - 3x^2 + 2x + 1)^{10}$
8. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
9. $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{5}{\sqrt{3x}}$
10. $y = \left(\frac{x + 1}{1 - x}\right)^2$
11. $f(x) = (3x + 1)\sqrt{6x + 5}$
12. $f(x) = \frac{(3x + 1)^3}{(1 - 3x)^4}$
13. $y = \sqrt{\frac{1 - 2x}{3x + 2}}$

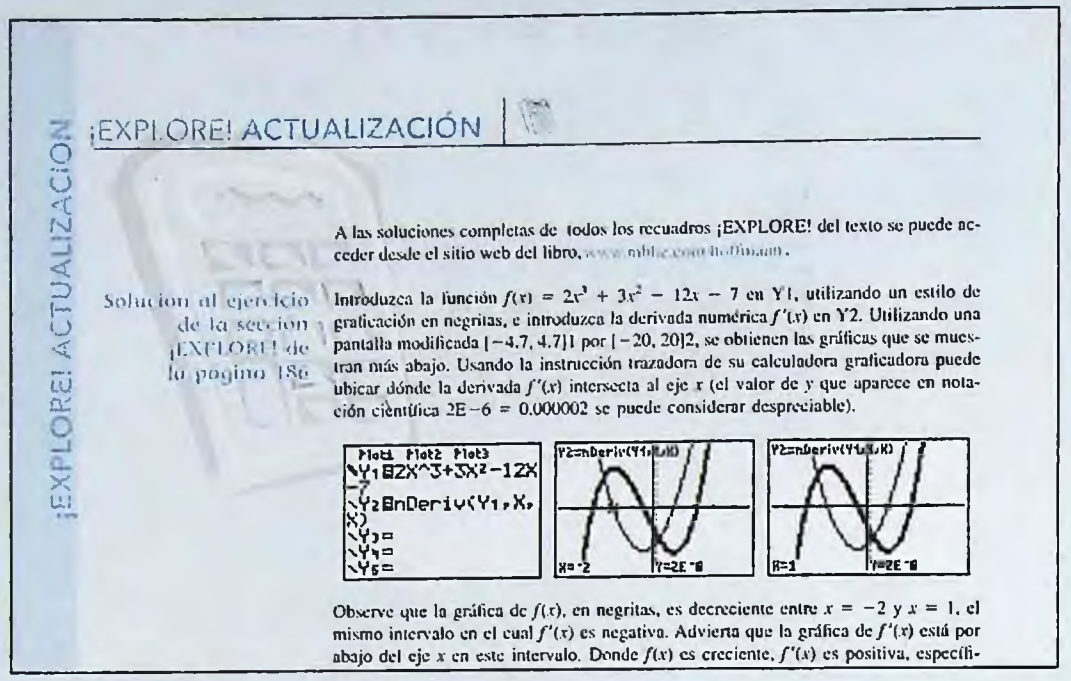
En los problemas 14 a 17 determine una ecuación para la recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto indicado.

14. $f(x) = x^2 - 3x + 2; x = 1$
15. $f(x) = \frac{4}{x - 3}; x = 1$
16. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}; x = 0$
17. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}; x = -2$
18. En cada uno de los casos siguientes determine la tasa de cambio de $f(t)$ con respecto a t en el valor dado de t.
   a) $f(t) = t^3 - 4t^2 + 5t\sqrt{t} - 5$ en $t = 4$
   b) $f(t) = \frac{2t^2 - 5}{1 - 3t}$ en $t = -1$
   c) $f(t) = t^3(t^2 - 1)$ en $t = 0$
   d) $f(t) = (t^2 - 3t + 6)^{1/2}$ en $t = 1$
19. En cada uno de los casos siguientes, encuentre la tasa de cambio porcentual de la función $f(t)$ con respecto a t en el valor dado de t.
   a) $f(t) = t^2 - 3t + \sqrt{t}$ en $t = 4$
   b) $f(t) = t^2(3 - 2t)^3$ en $t = 1$
   c) $f(t) = \frac{1}{t + 1}$ en $t = 0$
20. Utilice la regla de la cadena para determinar $\frac{dy}{dx}$.
   a) $y = 5u^2 + u - 1; u = 3x + 1$
   b) $y = \frac{1}{u^2}; u = 2x + 3$
21. Utilice la regla de la cadena para determinar $\frac{dy}{dx}$ para el valor dado de x.
   a) $y = u^3 - 4u^2 + 5u + 2; u = x^2 + 1$; para $x = 1$
   b) $y = \sqrt{u}, u = x^2 + 2x - 4$; para $x = 2$
22. Encuentre la segunda derivada de cada una de estas funciones:
   a) $f(x) = 6x^5 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + \frac{1}{x}$
   b) $z = \frac{2}{1 + x^2}$
   c) $y = (3x^2 + 2)^4$
   d) $f(x) = 2x(x + 4)^3$
   e) $f(x) = \frac{x - 1}{(x + 1)^2}$
23. Determine $\frac{dy}{dx}$ mediante derivación implícita.
   a) $5x + 3y = 12$
   b) $x^2y = 1$
   c) $(2x + 3y)^5 = x + 1$
   d) $(1 - 2xy^3)^5 = x + 4y$
24. Utilice la derivación implícita para encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado.
   a) $xy^3 = 8$; (1, 2)
   b) $x^2y - 2xy^3 + 6 = 2x + 2y$; (0, 3)

Problemas de repaso

Una gran variedad de problemas adicionales de rutina y aplicados aparecen en los conjuntos de ejercicios de fin de capítulo, ofreciendo más oportunidades para practicar.

www.FreeLibros.com



Tecnología

Para quienes incluyan un enfoque de gráficas en su curso, los recuadros "¡Explore!" dan una trayectoria opcional del material. Estas exploraciones, unidas a ejemplos específicos, continúan guiando a estudiantes en el uso de calculadoras graficadoras y desafían su comprensión de los temas presentados. Cada capítulo concluye con una sección "¡Explore! Actualización" que da soluciones y sugerencias a recuadros seleccionados en todo el capítulo.

Reflexione acerca de...

Los ensayos "Reflexione acerca de...", que se basan en modelado, muestran al estudiante la forma en que el material introducido en el capítulo se puede emplear para construir modelos matemáticos cuidadosos, al mismo tiempo que explican el proceso del modelado. Los ejercicios que siguen a cada ensayo de éstos son un excelente punto de partida para proyectos del estudiante y se pueden cubrir en el salón de clases o servir como base para proyectos de grupos.



www.FreeLibros.com

Material complementario

- Este texto cuenta con varios materiales complementarios de apoyo, para mayor información contacte a su representante local.

Reconocimientos

Al igual que en ediciones anteriores, hemos elaborado una lista de los maestros que utilizan este texto que nos han retroalimentado; así como de quienes usan otros textos, para señalar posibles áreas a mejorarse. Nuestro extenso panel de maestros proporcionó una gran cantidad de detallada información sobre el contenido de este libro y los cambios necesarios de su curso. Numerosos cambios hechos en esta octava edición son el resultado directo de un consenso entre este panel. Agradecemos a todas las personas que tomaron parte en este proceso.

Revisores de la octava edición

Faiz Al-Rubaee, *University of North Florida*
George Anastassiou, *University of Memphis*
Neal Brand, *University of North Texas*
Paul W. Britt, *Louisiana State University–Baton Rouge*
Beverly Broomell, *SUNY–Suffolk*
Steven Castillo, *Los Angeles Valley College*
Deanna Caveny, *College of Charleston*
Terry Cheng, *Irvine Valley College*
Lynn Cleaveland, *University of Arkansas*
Dominic Clemence, *North Carolina A&T State University*
Cecil Coone, *Southwest Tennessee Community College*
Jean F. Davis, *Texas State University–San Marcos*
John Davis, *Baylor University*
Margaret Ehrlich, *Georgia State University*
Haitao Fan, *Georgetown University*
Klaus Fischer, *George Mason University*
Michael Freeze, *University of North Carolina–Wilmington*
Constantine Georgakis, *DePaul University*
Sudhir Goel, *Valdosta State University*
Lauren Gordon, *Bucknell University*
Angela Grant, *University of Memphis*
Doug Hardin, *Vanderbilt University*
Jonathan Hatch, *University of Delaware*
Matthew Hudock, *St. Philips College*
Zonair Issac, *Vanderbilt University*
Shafiu Jibrin, *Northern Arizona University*
Victor Kaftal, *University of Cincinnati*
Georgia Katsis, *DePaul University*
Fritz Keinert, *Iowa State University*
Donna Krichiver, *Johnson County Community College*
W. Conway Link, *Louisiana State University–Shreveport*
Yingjie Liu, *University of Illinois at Chicago*
Jeanette Martin, *Washington State University*
Kailash Misra, *North Carolina State University*
Rebecca Muller, *Southeastern Louisiana University*
Karla Neal, *Louisiana State University*
Devi Nichols, *Purdue University–West Lafayette*
Ray Otto, *Wright State University*
Virginia Parks, *Georgia Perimeter College*
Shahla Peterman, *University of Missouri–St. Louis*
Lefkios Petevis, *Kirkwood Community College*
Mohsen Razzaghi, *Mississippi State University*
Arthur Rosenthal, *Salem State College*
Mansour Samimi, *Winston-Salem State University*
Anthony Shershin, *Florida International University*
Ken Shores, *Arkansas Tech University*
Brian Smith, *Parkland College*
Nancy Smith, *Kent State University*
Charles Stanton, *California State University–San Bernardino*
Jim Stein, *California State University–Long Beach*
Hugo Sun, *California State University–Fresno*
Dinh Van Huynh, *Ohio University*
Maria Elena Verona, *University of Southern California*
Kimberly Vincent, *Washington State University*
Hiroko Warshauer, *Southwest Texas State University*
Xiao-Dong Zhang, *Florida Atlantic University*
Jay Zimmerman, *Towson University*

Revisores de ediciones anteriores

Dan Anderson, *University of Iowa*
Don Bensy, *Suffolk County Community College*
Randall Brian, *Vincennes University*
James F. Brooks, *Eastern Kentucky University*
Laura Cameron, *University of New Mexico*
Rick Carey, *University of Kentucky*
Gerald R. Chachere, *Howard University*
William Chin, *DePaul University*
Charles C. Clever, *South Dakota State University*
Peter Colwell, *Iowa State University*
Raúl Curto, *University of Iowa*
Karabi Datts, *Northern Illinois University*
Ken Dodaro, *Florida State University*
Dan Dodero, *Florida State University*
Eugene Don, *Queens College*
Dora Douglas, *Wright State University*
Bruce Edwards, *University of Florida*
Maurice Ekwo, *Texas Southern University*
George Evanovich, *St. Peters' College*
Ronnie Goolsby, *Winthrop College*

www.FreeLibros.com

John Gresser, *Bowling Green State University*
Murli Gupta, *George Washington University*
William Hintzman, *San Diego State University*
Joel W. Irish, *University of Southern Maine*
Erica Jen, *University of Southern California*
Sheldon Kamienny, *University of Southern California*
Melvin Kiernan, *St. Peter's College*
Harvey Lambert, *University of Nevada*
Donald R. LaTorre, *Clemson University*
Melvin Lax, *California State University at Long Beach*
James E. McClure, *University of Kentucky*
Mark McCombs, *University of North Carolina*
Ann B. Megaw, *University of Texas at Austin*
Fabio Milner, *Purdue University*
Mohammad Moazzam, *Salisbury State University*
James Osterburg, *University of Cincinnati*
Hiram Paley, *University of Illinois*
Murray Peterson, *College of Marin*
Cyril Petras, *Lord Fairfax Community College*
Natalie Priebe, *Rensselaer Polytechnic Institute*
Georgia Pyrros, *University of Delaware*
Richard Randell, *University of Iowa*
Nathan P. Ritchey, *Youngstown State University*
Judith Ross, *San Diego State University*
Robert Sacker, *University of Southern California*
Katherine Safford, *St. Peter's College*
Dolores Schaffner, *University of South Dakota*
Thomas J. Sharp, *West Georgia College*
Robert E. Sharpton, *Miami-Dade Community College*
Minna Shore, *University of Florida International University*
Jane E. Sieberth, *Franklin University*
Joseph F. Stokes, *Western Kentucky University*
Keith Stroyan, *University of Iowa*
Martin Tangora, *University of Illinois at Chicago*
Tuong Ton-That, *University of Iowa*
Lee Topham, *North Harris Community College*
George Trowbridge, *University of New Mexico*
Charles C. Votaw, *Fort Hays State University*
Pam Warton, *Bowling Green State University*
Jonathan Weston-Dawkes, *University of North Carolina*
Henry Wyzinski, *Indiana University–Northwest*

Nuestro agradecimiento espacial a quienes revisaron la precisión de problemas y páginas, incluyendo Devilyn Nichols, Paul Lorczak, Henri Feiner, Mary-Ellen Oliver y Jaqui Bradley. Reginald Luke fue clave para desarrollar el material de "¡Explore!" de esta edición. Finalmente, deseamos agradecer al equipo de McGraw-Hill, Bob Ross, Nancy Anselment y Vicki Krug por su paciencia, dedicación y continuo apoyo.

www.FreeLibros.com

INTRODUCCIÓN A LAS CALCULADORAS

El siguiente análisis tiene la finalidad de ser una breve introducción a las funciones estándar de una calculadora graficadora que se hallan en casi todas las máquinas de este tipo. Las calculadoras graficadoras típicas que se pueden adquirir comercialmente son los modelos TI-83 Plus o la TI-84 Plus, producidas por Texas Instruments, Inc. Esta introducción y las siguientes secciones "¡Explore! Actualización" y soluciones, usan como base la calculadora TI-83 Plus (edición Silver). El teclado común incorpora las teclas estándar numéricas, de edición y de flechas de cursor, así como las teclas para acceso a operaciones matemáticas y científicas, y funciones gráficas y de programación. Para instrucciones más específicas, consulte el manual que acompaña a su calculadora.

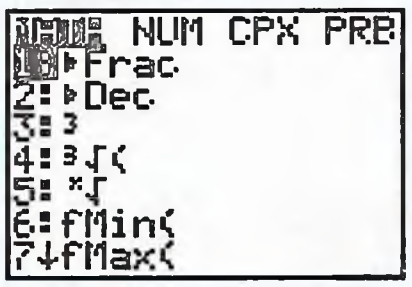


FIGURA 1

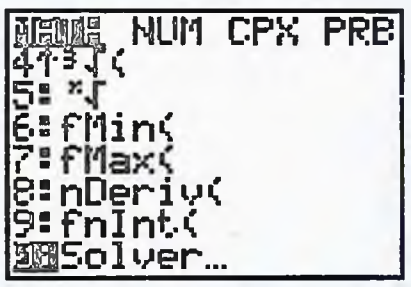


FIGURA 2

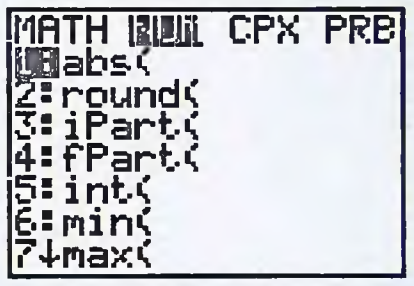


FIGURA 3

Acceso general

Al presionar la tecla **MATH,** por ejemplo, aparece una pantalla descendente con múltiples opciones de menú (figuras 1 y 2), que se pueden seleccionar por número o moviendo la tecla hacia abajo del cursor a la selección deseada y presionando la tecla **ENTER.** Note que hay selecciones adicionales que se obtienen con la flecha hacia abajo, tales como las opciones **8:nDeriv(** y **0:Solver.** Al presionar la tecla de flecha derecha se tiene el uso de más pantallas (figura 3) donde la función de valor absoluto es el primer renglón que aparece bajo el menú numérico **NUM.** Los números complejos **(CPX)** y probabilidad **(PRB)** redondean el resto de pantallas de menú.

Dos teclas de color del teclado dan entrada a capas adicionales de funciones de la calculadora: la tecla verde **ALPHA** da acceso al alfabeto y otros símbolos, mientras que la tecla de función **2nd** color oro da entrada a comandos de color oro. Por ejemplo, presionar la tecla de función **2nd** y luego **MODE (QUIT)** permite acceso a una "pantalla inicial" en la que se puede escribir texto o cálculos. Trate de escribir la pantalla que se muestra en la figura 4. Use 2nd **ALPHA** para bloquear la tecla **ALPHA** y obtener el espacio en blanco con el uso de la tecla 0 (en modo **ALPHA**). El signo igual se pude tener como primer elemento de la **TEST (2nd MATH),** como en la figura 5. En realidad, usamos la capacidad de memoria de las variables alpha para ejecutar cálculos numéricos. Por ejemplo, use la tecla **STO→** (columna inferior izquierda del teclado) para crear la pantalla que se muestra en la figura 6, en la que se obtiene la longitud de la hipotenusa de un triángulo recto.

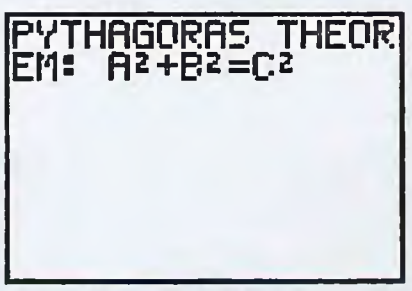


FIGURA 4

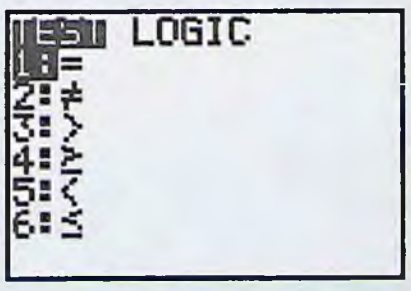


FIGURA 5

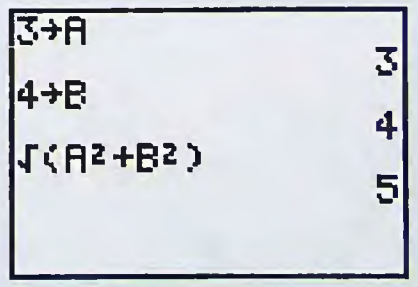


FIGURA 6

www.FreeLibros.com

Solucionador de ecuaciones

Un método más eficiente para resolver ecuaciones es accesible por medio **EQUATION SOLVER** de la tecla **MATH,** donde hemos escrito la ecuación de Pitágoras que se ve en la figura 7, con todos los términos del lado derecho de la ecuación. Al presionar **ENTER** se obtiene la figura 8, con valores de entrada de 5 para A y 13 para C, en un intento por despejar el valor de B. Ponga ahí un valor inicial razonable y luego ejecute el comando de color verde **SOLVE (ALPHA ENTER)** para obtener la solución anticipada (figura 9). Note que tenemos la facilidad de despejar cualquier variable faltante, dados los valores deseados o pedidos para las otras variables.

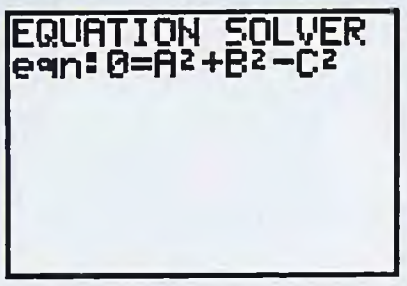


FIGURA 7

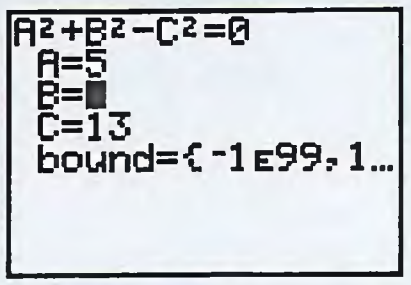


FIGURA 8

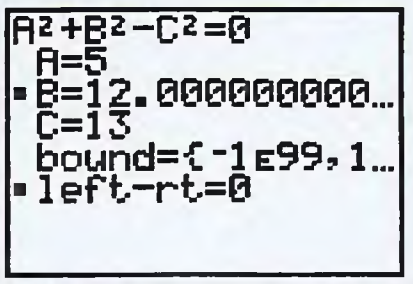


FIGURA 9

Modo

La característica predominante de una calculadora es su facilidad para presentar, exhibir visualmente y analizar las muchas funciones que hay en cálculo. Supongamos que el lector está interesado en la relación entre las dos funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 5 - x$. Presione la tecla **MODE**, y observe los ajustes predeterminados que se ven en la figura 10. De la fila 4 observamos que estamos en el modo de función **(Func)**, en oposición a paramétrico **(Par)**, polar **(Pol)**, o secuencia **(Seq).** La posición de **Connected** de la fila 5 se refiere al hecho de que las gráficas se van a generar de un modo conectado en lugar de con puntos intermitentes. La posición de **Sequential** de la fila 6 se refiera al orden en que se van a generar las gráficas, una después de la previa y no todas al mismo tiempo (simultáneamente). Ahora presiona la tecla **Y=**, llamada "editor de ecuaciones," localizada en la esquina superior izquierda del teclado, y escriba $f(x)$ en Y1 y $g(x)$ en Y2, como se ve en la figura 11.

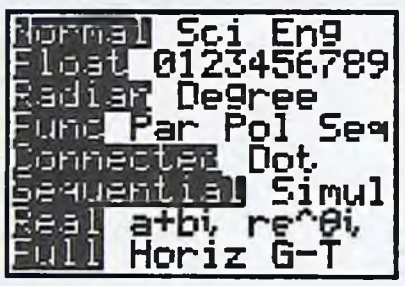


FIGURA 10

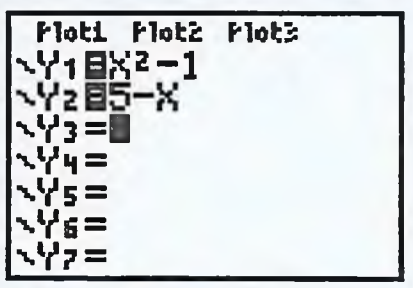


FIGURA 11

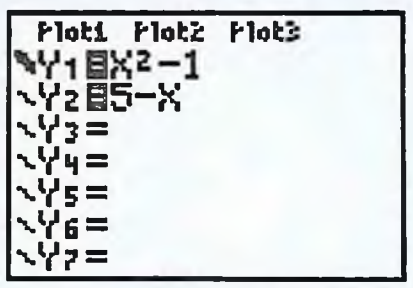


FIGURA 12

Estilo de gráficas

Se seleccionan diferentes estilos de gráficas para cada función, al mover el cursor a la izquierda del símbolo de función Y, y presionando la tecla **ENTER** en sucesión. Las opciones de estilo de gráfica que aparecen en orden son negritas, sombreado arriba de la función, sombreado abajo, esfera con línea que sigue, esfera sola, línea desconectada y luego regresa al estilo de gráfica inicial regular estándar. Si se presiona una vez la tecla **ENTER** cuando el cursor está a la izquierda de Y1 se obtiene un estilo de gráfica en negritas para $f(x) = x^2 - 1$, como se ve en la figura 12.

Pantallas

La mayor parte de las calculadoras graficadoras tienen varias pantallas opcionales puestas para dimensiones prescritas. En la TI-83 Plus, a estas pantallas se tiene acceso por medio de la tecla **ZOOM** (situada en la parte media de la fila superior del teclado). Si se presiona esta tecla se obtiene la figura 13. Una pantalla estándar, **6:Zstandard,** genera una gráfica que se muestra en la figura 14. Las dimensiones de esta "pantalla estándar" son $-10 \le X \le 10$ y $-10 \le Y \le 10$, con los ejes a escala en marcas unitarias designadas por $X_{scl} = 1$ y $Y_{scl} = 1$, respectivamente. Presione **WINDOW** y vea la pantalla que se muestra en la figura 15.

www.FreeLibros.com

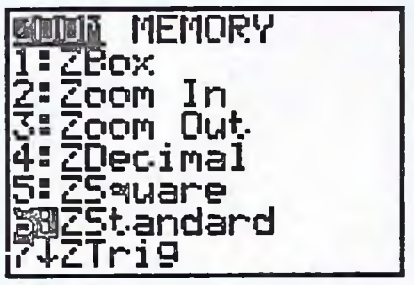


FIGURA 13

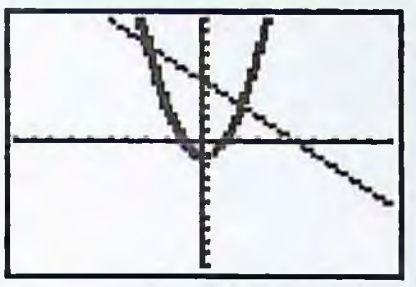


FIGURA 14

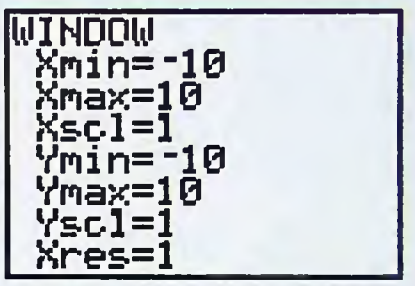


FIGURA 15

Pantalla decimal

Otro tipo útil de rectángulo de observación es la "pantalla decimal", a la que se tiene acceso por el menú **ZOOM, 4:Zdecimal.** Las dimensiones de la pantalla decimal están denotadas [−4.7, 4.7]1 por [−3.1, 3.1]1 para designar intervalos de valores X y Y, respectivamente, donde los valores 1 después de los paréntesis indican que $X_{scl} = 1$ y $Y_{scl} = 1$ (vea la figura 16). Las dimensiones especiales de la pantalla decimal permiten que el cursor pueda rastrear valores decimales de la variable X, en incrementos de 0.1. La modificación de las dimensiones Y de esta ventana permite una mejor observación de las gráficas de ambas funciones, como se ve en la figura 17, donde $-2 \leq Y \leq 10$. Cuando las dimensiones de la ventana se modifican, la tecla **GRAPH** (ubicada arriba a la derecha del teclado) debe usarse para obtener la gráfica deseada, como se muestra en la figura 18.

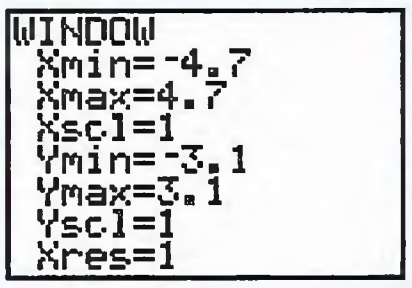


FIGURA 16

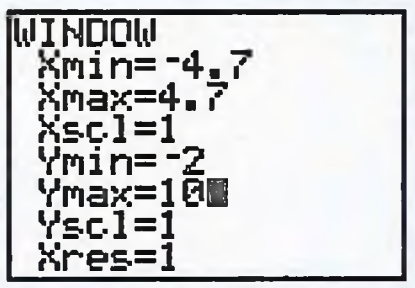


FIGURA 17

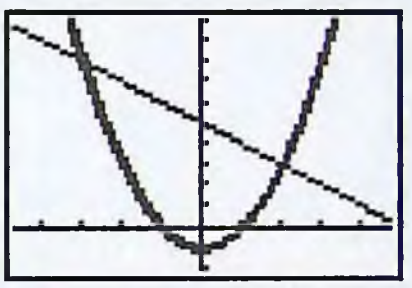


FIGURA 18

Trazo

El movimiento a lo largo de la gráfica de la función se maneja con el uso de la tecla **TRACE** (fila superior del teclado), maniobrando a derecha o izquierda en una gráfica con el uso de las teclas de flecha apropiadas derecha o izquierda, como se ve en la figura 19. Observe que los valores x del punto de trazo son decimales, puesto que la gráfica se generó usando una ventana decimal modificada. Use las teclas de flecha arriba o abajo para saltar de esta función a la otra, en este caso la función $g(x) = 5 - x$, como se ve en la figura 20. Podríamos continuar haciendo trazos en ambas gráficas para hallar el punto de intersección, que parece ser el punto (2, 3), que se puede confirmar fácilmente en forma analítica.

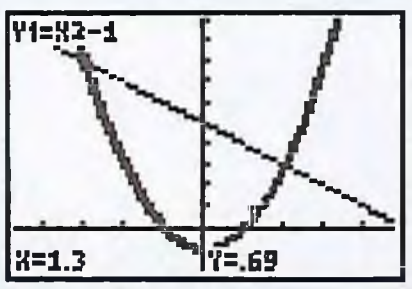


FIGURA 19

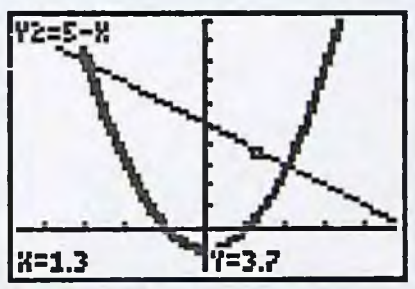


FIGURA 20

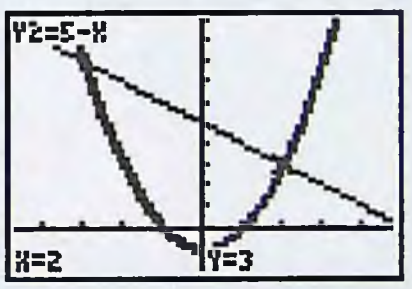


FIGURA 21

Función para hallar intersección

Para demostrar una de las funciones de calculadoras de gráficas, mostramos la función de hallar intersecciones de la TI-83 Plus, que se calcula con la tecla **CALC (2nd TRACE)**, como se ve en la figura 22. Note que también podemos hallar valores funcionales, raíces, valores de mínimo y máximo, así como algunas operaciones de cálculo. Encontremos el otro punto de intersección de $f(x)$ y $g(x)$. Seleccione **5:intersect** e identifique las dos curvas y un punto de intersección estimado, presionando **ENTER** sucesivamente para alcanzar el siguiente paso del proceso. Entonces la calculadora tratará de buscar el punto exacto de intersección, como se ve en la figura 24.

www.FreeLibros.com

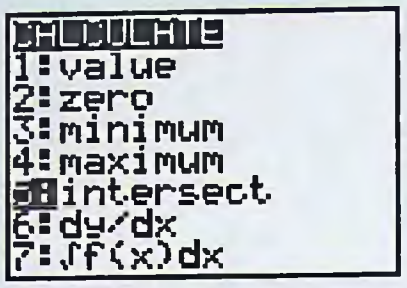


FIGURA 22

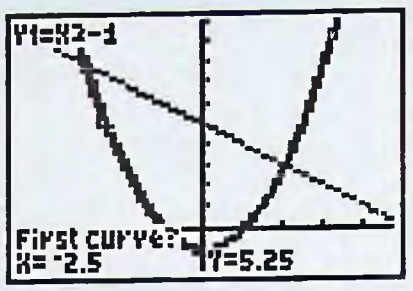


FIGURA 23

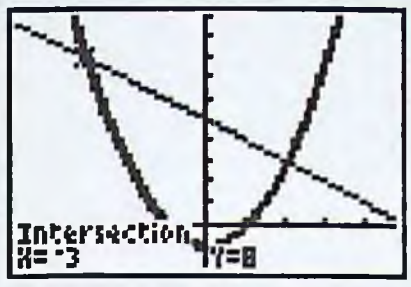


FIGURA 24

Representación simbólica

Otra función útil de una calculadora graficadora es su capacidad de representar funciones simbólicamente. Ya hemos puesto funciones en Y1 y Y2 del editor de ecuaciones, **Y=**. Hay muchas ocasiones cuando necesitamos usar estos símbolos en ecuaciones y expresiones. Por ejemplo, suponga que deseamos escribir Y1(5) para evaluar $f(x) = x^2 - 1$ en $x = 5$. ¿Cómo se hace esto? El símbolo **Y1** se puede hallar por medio de la tecla **VARS,** y moviendo la tecla de flecha derecha a **Y-VARS,** seleccionando **1:Function,** y luego escogiendo **Y1** o **Y2**. Estos pasos se ilustran en la secuencia de pantallas que se ve en las figuras de la 25 a la 27.

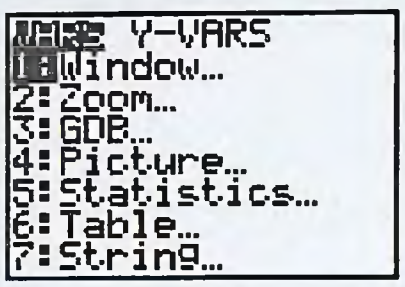


FIGURA 25

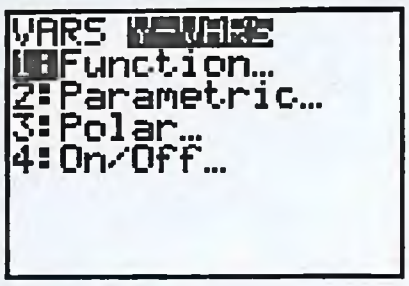


FIGURA 26



FIGURA 27

Los símbolos Y1 y Y2 se pueden manipular en combinaciones funcionales, como lo haríamos con $f(x)$ y $g(x)$. Por ejemplo, sumas, productos y combinaciones así como traslaciones y transformaciones se construyen fácilmente. Con Y1 y Y2 como se define, escrita Y3 = Y1(X + 2). Primero, sin embargo, borre la selección de Y1 y Y2, de modo que sus gráficas no aparezcan en la pantalla. Esto se hace al mover el cursor al signo de igualdad y presionando **ENTER** para quitar la selección de la función deseada, como se hace en la figura 28, donde a Y1 y Y2 se les ha quitado la selección. La gráfica resultante, usando una pantalla estándar **ZOOM** y con la tecla **TRACE** activada, aparece en la figura 29. ¿Qué ecuación tiene esta función? Finalmente, quite la selección de Y3 y escriba Y4 = Y1(Y2), la combinación de $f(g(x))$. Su gráfica aparece en la figura 30. De nuevo, ¿cuál función es ésta?

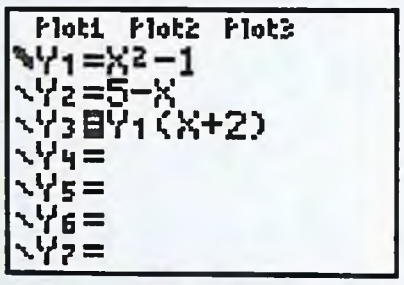


FIGURA 28

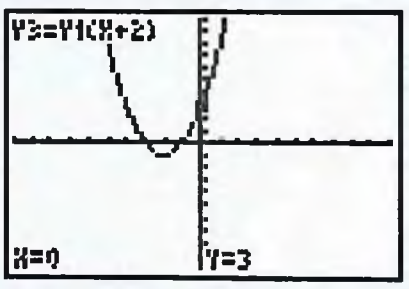


FIGURA 29

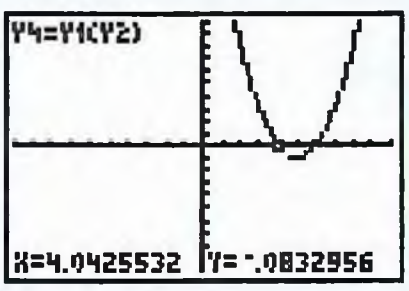


FIGURA 30

Selección de pantallas

Uno de los desafíos clave para presentar gráficamente una función es crear la mejor pantalla para ver la parte importante de esta gráfica. La pantalla estándar o la decimal disponibles por medio de la tecla **ZOOM** no pueden exhibir la gráfica en forma apropiada. Ver una tabla de valores puede ser el mejor primer paso para obtener un fijo en comportamiento funcional. Como ejemplo, exploremos cómo presentar las mejores dimensiones de pantalla para la gráfica de la función $f(x) = 15 + 30x/(x^2 + 1)$, que ponemos en Y1. Primero, creamos un ajuste de tabla para poder ver el comportamiento de la función alrededor del origen. Presione **2nd WINDOW (TBL SET)** y cambie los ajustes de tabla para obtener un valor inicial x de $x = -3$ en valores de incremento unitarios, es decir, fije TblStart = −3 y ΔTbl = 1, como se ve en la figura 31. Ahora presione la tecla **TABLE (2nd GRAPH)** para obtener la tabla de valores que se muestra en la figura 32.

www.FreeLibros.com



FIGURA 31

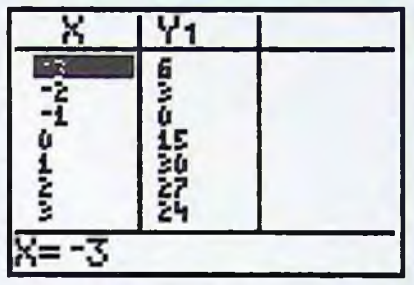


FIGURA 32

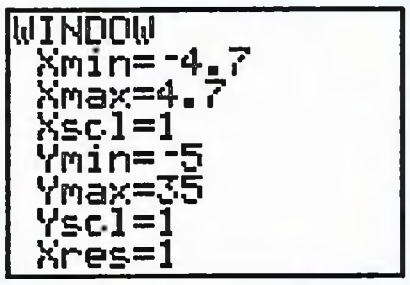


FIGURA 33

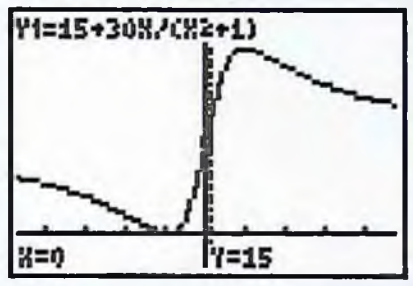


FIGURA 34

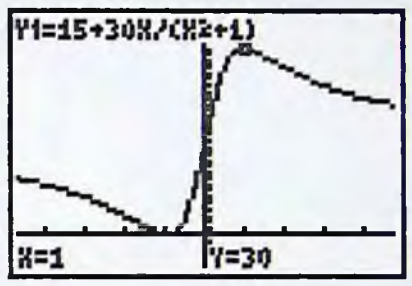


FIGURA 35

La observación de la tabla de valores da una buena idea de los márgenes de valores funcionales y un dominio razonable con el cual trabajar. Parece que deberíamos fijar el margen de valores *y* un poco mayores a [0, 30], por ejemplo $-5 \leq Y \leq 35$. Como el dominio de los valores *x* debe estar fuera de $x = -3$ a 3, usamos una pantalla decimal modificada, por ejemplo $-4.7 \leq X \leq 4.7$. Presione las siguientes teclas: **ZOOM, 4:Zdecimal,** y luego **WINDOW**, y cambie los ajustes como se dan en la figura 33. Estas dimensiones quedarían expresadas como [−4.7, 4.7]1 por [-5, 35]1. Finalmente, al presionar **GRAPH** se crea la gráfica que se ve en la figura 34, donde la tecla **TRACE** identifica la función y puntos específicos en la gráfica.

La gráfica mostrada en la figura 34 tiene un punto máximo aparente, ubicado alrededor de $x = 1$. La tecla **TRACE** puede ser aquí muy útil, especialmente, porque la pantalla decimal modificada permite trazar sobre valores decimales, como se ve en la figura 35. Casi todas las calculadoras graficadoras tienen una función de búsqueda máxima para ayudar a localizar este importante punto. Presione la tecla **CALC (2nd TRACE), 4:maximum**, como se ve en la figura 36. Será necesario especificar un límite izquierdo razonable, límite derecho, y estimar, presionando la tecla **ENTER** según sea necesario, antes que el programa rectifique sobre el punto máximo, que se identifica como $x = 0.99999881$, como en la figura 40. Note que este punto es técnicamente $x = 1$ dentro de los límites de tolerancia de la calculadora, pero esto se puede verificar en forma analítica por métodos de cálculo como $x = 1$ exactamente, como se demostrará más adelante en el capítulo 3.



FIGURA 36

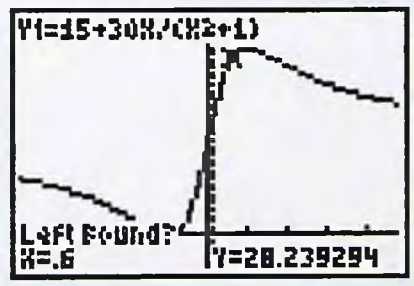


FIGURA 37

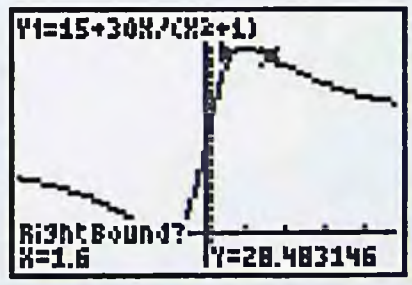


FIGURA 38



FIGURA 39

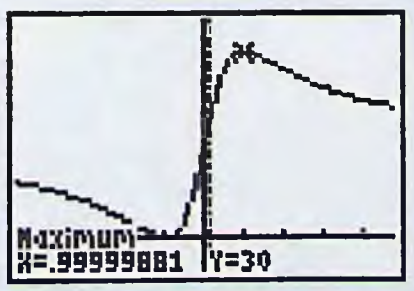


FIGURA 40

www.FreeLibros.com

Listas y secuencias

Un importante concepto en matemáticas es el de una secuencia, un conjunto de números que, por lo general, está indizado por los números naturales, o enteros positivos. En cálculo, se encuentran secuencias en aproximaciones y generalmente asociados con límites y empleados para formar series (para un estudio de series, vea el capítulo 9). Un ejemplo de una secuencia finita sencilla de enteros es {1, 4, 7, 10, 13, 16}. ¿Cómo puede introducirse esto en la calculadora? El comando de secuencia se encuentra por medio de la tecla **LIST** (2nd **STAT**), usando el menú **OPS**, renglón **5.:seq(**, como se ve en la figura 41. La sintaxis para este comando es **seq(rule, variable, beginning index, ending index, increment)**, aun cuando el valor de incremento puede omitirse. La figura 42 muestra tres intentos diferentes de construir la secuencia de ejemplo al determinar la regla o ajustando los índices, sólo dos de los cuales son correctos.

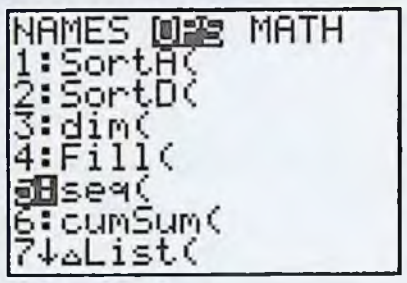


FIGURA 41

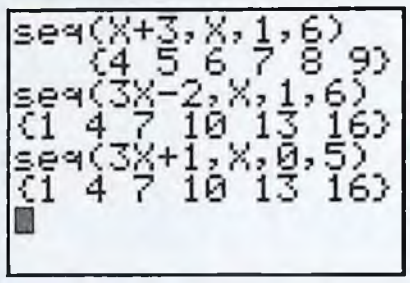


FIGURA 42

También es útil exhibir secuencias como listas en una calculadora graficadoras. Presione la tecla **STAT**, situada hacia la parte media del teclado, y seleccione la primera opción **1:Edit** para exhibir las primeras tres de seis posibles listas, L1 a L6. (El usuario puede tener que analizar la opción **5:SetUpEdidtor,** si algunas de estas listas están ocultas o faltantes.) List 1 contiene la lista de enteros del 1 al 6 (figura 43), y List 2 se generó al escribir **L2 = seq(3X−2,X, 1,6)** en la línea de comando de la parte superior de la columna (figura 43). Si hay otras listas de datos no deseados, por ejemplo como en List 3, mueva el cursor a la parte superior de esa lista (figura 44), presione la tecla **CLEAR,** y luego presione la tecla de flecha abajo. Esto borrará todos los datos anteriores y estará lista para los nuevos datos, como se hace para List 3 (figura 45).

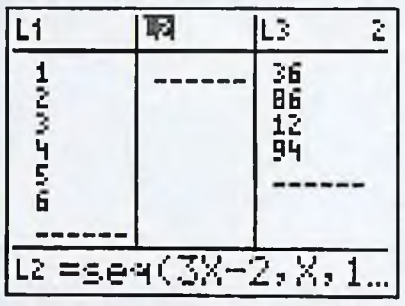


FIGURA 43

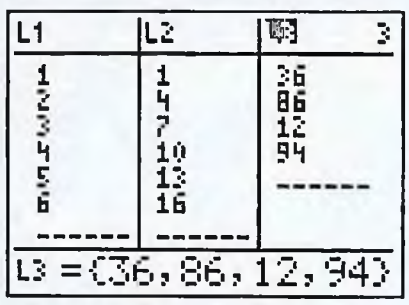


FIGURA 44

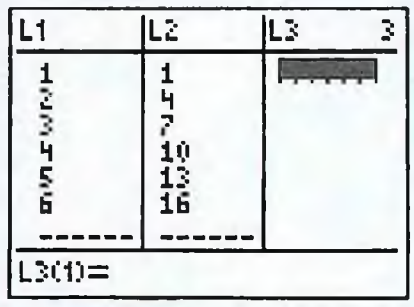


FIGURA 45

En cálculo, el proceso de límite requiere el uso de secuencias infinitas. Un ejemplo sencillo es el de los recíprocos de cuadrados de enteros positivos, $\{1/n^2: n = 1, 2, 3, \ldots\}$, que aparecen en la teoría de sumas de Riemann. En esta secuencia, los términos decrecen en magnitud y parecen tener un límite de cero. Una pregunta clásica es si la suma acumulativa de estos términos, llamada la secuencia de sumas parciales, y denotada $\{\Sigma(1/k^2)\}$, sumada de 1 a n, alcanza una suma infinita o crece sin límite. El capítulo 9 de este texto considera esto y otras preguntas relacionadas.

Por ahora podemos explorar cómo es que la calculadora graficadora nos ayuda a manejar series infinitas. Guarde la función $f(x) = 1/x^2$ en **Y1** del editor de ecuaciones de su calculadora. En List 1 del stat editor, genere la secuencia de enteros positivos de 1 a 50, por ejemplo, usando el comando **L1 = seq(X, X, 1, 50).** En List 2, escriba **L2 = Y1(L1)** para generar los términos de la secuencia, como se ve en la figura 46. Para generar sumas acumulativas en List 3, tenga acceso al menú **OPS** de la tecla **LIST** (2nd **STAT**) y seleccione la opción **6:cumSum(.** Ahora escriba **L3 = cumSum(L2)** con el cursor hasta la línea del extremo

www.FreeLibros.com

superior de List 3, como se ve en la figura 47. Si se presiona **ENTER** se obtiene una lista de sumas parciales en **L3**, como en la figura 48. Al mover con la tecla de flecha abajo a la fila 50, se observa que la serie $S(1/n^2)$ sólo suma hasta el valor de aproximadamente 1.625 para los primeros 50 términos. ¿Cómo se comportará cuando n se aproxime al infinito? Vea el capítulo 9.

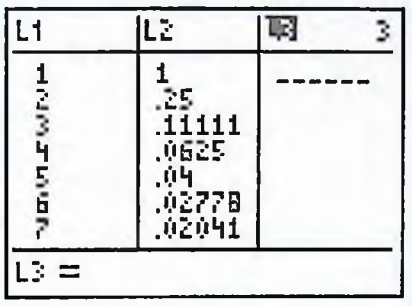


FIGURA 46

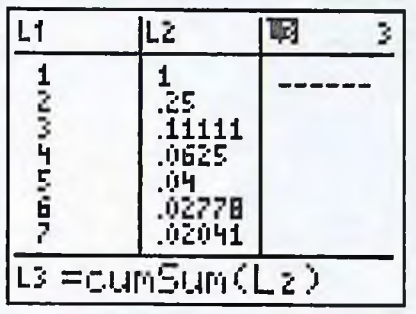


FIGURA 47

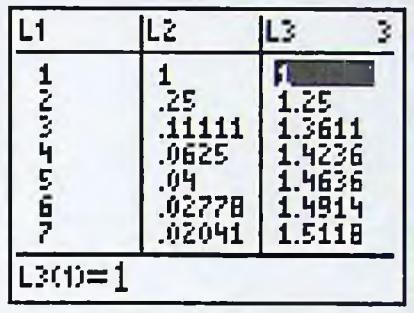


FIGURA 48

Las secuencias también pueden ser representadas en forma repetitiva por reglas que generan los términos de una secuencia por medio de alguna combinación de términos previos. Una secuencia repetitiva muy famosa es la de Fibonacci (un gran matemático de la Edad Media) {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...}. La regla repetitiva para generar esta secuencia es $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, donde $u_1 = 1$ y $u_2 = 1$. Para construir secuencias en forma repetitiva en la calculadora graficadoras, el **MODE** debe ponerse en modo de secuencia, mostrado en la figura 49. El símbolo u se encuentra arriba del número 7 como opción de la función **2nd**, mientras que el símbolo n se obtiene de la tecla **[X,T,θ,n]**. El editor de ecuaciones **(Y=)** ahora exhibirá funciones en forma repetitiva, como en la figura 50. En esta pantalla, ponga $\mathbf{u_{min} = 1}$, $\mathbf{u(n) = u(n-1) + u(n-2)}$, y $\mathbf{u(u_{min}) = \{1,1\}}$, como en la figura 50. Por último, al escribir **seq(u(n), n, 1, 10)** en la pantalla de inicio se generan los primeros 10 términos de la secuencia de Fibonacci, como en la figura 51.

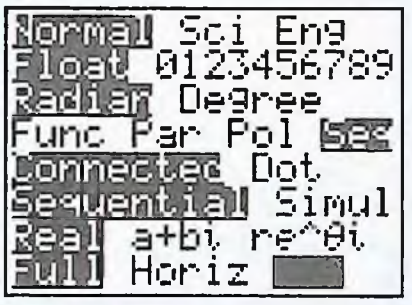


FIGURA 49

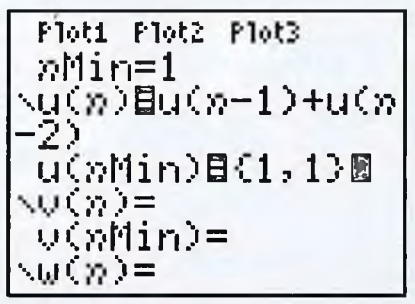


FIGURA 50

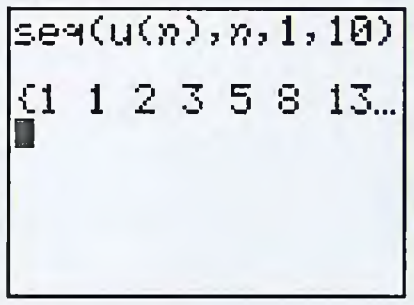


FIGURA 51

Modelado

Otra función importante de una calculadora graficadora es su facilidad de modelar datos estadísticos, es decir, hallar y exhibir la mejor función para representar un conjunto de datos obtenidos en forma experimental o teórica. Considere la siguiente tabla de datos, la población de Estados Unidos (en millones) de las encuestas del U.S. Census para las pasadas varias décadas, como se cita en el *Britannica Almanac 2003*.

Año	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Pobl. U.S.	131.67	151.33	179.32	203.30	226.54	248.72	281.42

El primer paso es guardar estos datos de población en las listas de la calculadora graficadora. Introduzca el stat editor por medio de la tecla **STAT** y presione **1:Edit** (figura 52). Ponga los años 1940 a 2000 en List 1 y la población de Estados Unidos en List 2 (figura 53).

www.FreeLibros.com

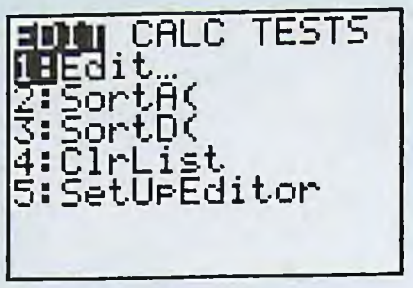


FIGURA 52

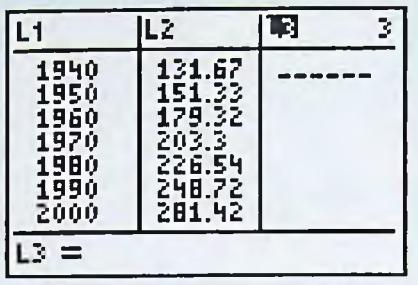


FIGURA 53

La segunda fase del proceso de presentación de datos es establecer las gráficas estadísticas. Presione la tecla **STAT PLOT** (**2nd Y=**) para dejar ver una pantalla con tres selecciones de gráfica, como se ve en la figura 54. Escoja la primera opción y seleccione los valores, línea por línea para los 5 renglones, para coincidir con la exhibición de la pantalla de la figura 55. En Line2, especificamos el tipo de datos al mover la tecla de flecha a la derecha y presionar la tecla **ENTER** para seleccionar, en orden, una de las siguientes opciones: gráfica de dispersión, gráfica de línea, histograma, gráfica de caja con resultados aislados identificados, gráfica de caja regular, gráfica normal. Hemos escogido la primera selección, gráfica de dispersión, para nuevos datos bivariados. La variable Año en List 1 es nuestra **Xlist,** mientras que la población de U.S. es List2 como **Ylist.** La marca de gráfica es un pequeño símbolo cuadrado.



FIGURA 54



FIGURA 55

Ahora que los valores de gráfica se han seleccionado, usamos la función **ZOOM** de la TI-83 Plus, seleccionando **9:ZoomStat,** como se ve en la figura 56, para obtener una gráfica instantánea, como se muestra en la figura 57, para la cual se puede presionar la tecla **TRACE** para identificar los valores de cada uno de los puntos de datos. La forma de la gráfica parece lineal, de modo que intentamos hallar la mejor recta de la forma $Y = aX + b$, que se ajuste a los datos de población. Este proceso se denomina de regresión lineal, con base en el método de mínimos cuadrados de Gauss, que produce los coeficientes de regresión a y b para la función lineal que mejor aproxima los puntos de datos. Presione la tecla **STAT**, una vez la tecla de flecha a la derecha a **CALC,** y seleccione la opción **4:LinReg(ax+b),** que se muestra en la figura 58. Prepare una pantalla clara, presione esta selección, y luego escriba los tres símbolos: L1, L2, y Y1, separados por comas, como se muestra en la figura 59. Recuerde que Y1 se obtiene por medio de la secuencia: **VARS, Y-VARS, 1:Function, 1:Y1.** Por último, presione **ENTER** para obtener los resultados deseados, como se muestra en la figura 60.



FIGURA 56

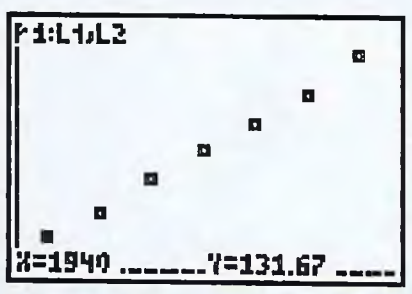


FIGURA 57



FIGURA 58

www.FreeLibros.com

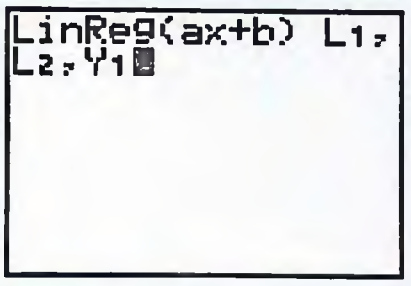


FIGURA 59

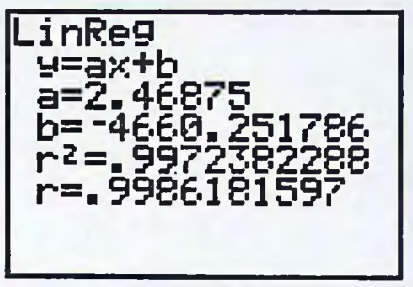


FIGURA 60

El coeficiente de regresión a representa la pendiente de la función Y1, y su valor, $a = 2.47$, indica que en Estados Unidos hubo un promedio de aumento anual de 2.46 millones de habitantes en el periodo. El punto de intersección con el eje y, $b = -4\,660$, no tiene interpretación relevante, siendo la población supuesta de Estados Unidos en el año cero, bastante fuera del alcance de los datos. El valor r es el coeficiente de correlación, un valor entre -1 y 1, que indica lo bien que la ecuación lineal se adapta a los datos. Como $r = 0.9986$, esto es un ajuste muy bueno, como veremos en la siguiente pantalla.

Presione las teclas **ZOOM** y **9:ZoomStat** y observe la gráfica de dispersión y función de regresión lineal de la figura 61. La tecla **TRACE** muestra que, como ejemplo, cuando X = 1970, la población real era Y = 203.30 millones, como se ve en la figura 61, mientras que la población pronosticada, basada en la ecuación lineal, es 203.19 millones de habitantes, como se muestra en la figura 62. En el modo **TRACE**, use las flechas hacia arriba/abajo para cambiar entre la gráfica de dispersión y la recta de regresión. Con el cursor en la recta, podemos también escribir cualquier valor para X centro de los márgenes de datos, por ejemplo $X = 2003$, y aparecerá el valor pronosticado Y, en este caso 284.65 millones de habitantes (figura 63).

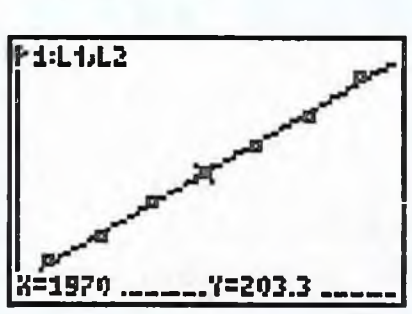


FIGURA 61

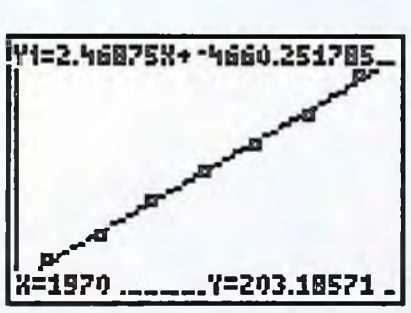


FIGURA 62

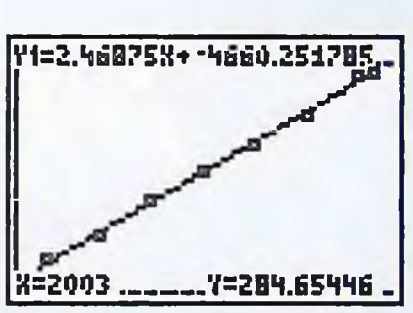


FIGURA 63

Los demógrafos esperan que la población crezca de manera exponencial, porque el porcentaje de crecimiento de una población particular suele ser proporcional a la población misma. Tratemos de ajustar una curva exponencial a los datos. Presione **STAT**, flecha a la derecha a **CALC**, y luego la flecha hacia arriba a la opción **0:ExpReg**, como en la figura 64. Agregue L1, L2, Y2 después del comando ExpReg, de modo que la curva exponencial se pondrá en la ubicación Y2 del editor de ecuaciones; aparecerá esta exhibición de la figura 65. En la figura 66, hemos quitado la selección Y1 y cambiado Y2 a un estilo de gráfica en negritas para mostrar lo que sería la población pronosticada en 2003, con base en esta curva exponencial.



FIGURA 64

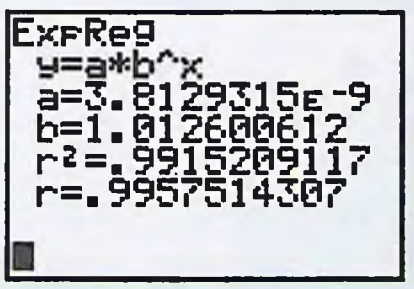


FIGURA 65

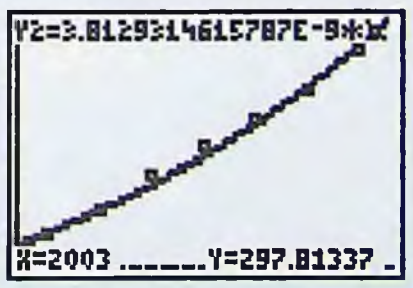


FIGURA 66

www.FreeLibros.com

Regresión de polinomios

Concluimos este ejemplo de análisis de datos al ajustar una función de polinomios a los datos de población. Hay suficientes curvas en la figura de los datos para intentar una curva de la forma, $Y3 = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$, polinomio de cuarto grado llamado forma de regresión cuártica. Presione **STAT,** tecla de flecha a la derecha a **CALC,** y escoja la selección **7:Quart-Reg**, como se muestra en la figura 64. Prepare la pantalla que se exhibe en la figura 67, que da las figuras 68 y 69.

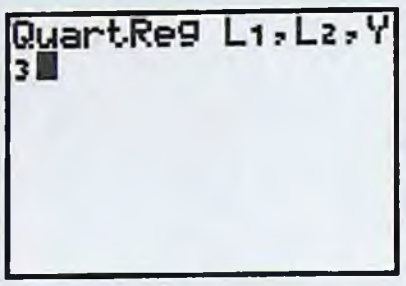


FIGURA 67



FIGURA 68

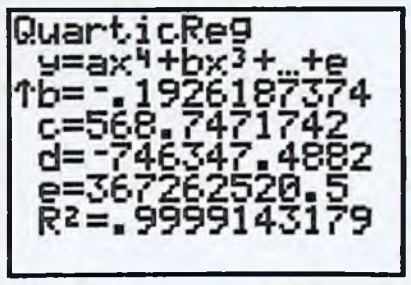


FIGURA 69

Finalmente, presiones **Y=** y quite la selección de Y1 y Y2 y sólo muestre Y3, como se ve en la figura 70. Al hacer rastreo al año 2003 se obtiene el valor pronosticado de 295.36 millones de habitantes, con base en la ecuación de regresión cuártica, como se ve en la figura 71.

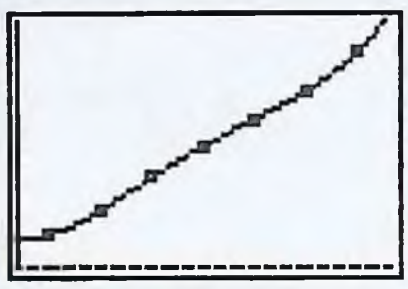


FIGURA 70

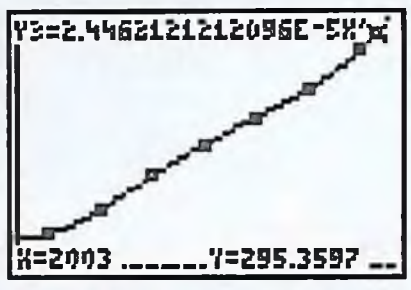


FIGURA 71

La U.S. Census Bureau utiliza refinadas técnicas de modelado para pronosticar más poblaciones de Estados Unidos [*Projections of the Population of the U.S. by Age, Sex, and Location: 1995-2050K (2002)*, U.S. Bureau of the Census]. ¿Cómo se comparan los tres modelos de regresión con esta proyección? La tabla siguiente presenta las comparaciones:

Modelo que pronostica población en millones	2010	R^2
Regresión lineal	301.94	0.998618
Regresión exponencial	325.10	0.995751
Regresión cuártica	339.71	0.999914
Proyección de la U.S. Census Bureau	299.86	

Con base en los 7 puntos de datos (U.S. Population for Decades, 1940-2000), los tres modelos de regresión estiman demasiado la proyección de la U.S. Census Bureau, siendo la estimación lineal la más cercana. La regresión cuártica se ajusta mejor a los puntos, donde R^2 sirve como medida del ajuste del modelo.

Programación simple

En la sección "¡Explore! Actualización" de algunos capítulos de este libro de texto, se incluye programas sencillos para crear histogramas estadísticos y diagramas de campo pendiente. Así, es oportuna una breve introducción a las teclas de calculadora relacionadas con programación. Presione la tecla **PRGM** de la parte media del teclado para obtener una lista de programas ya escritos o copiados (figura 72). Con flecha pase a **NEW** para iniciar, seleccione **1:CreatNew**, y escriba un **Name** para el nuevo programa (figura 73). Entonces los pasos pa-

www.FreeLibros.com

ra el programa se pueden escribir después de cada punto y coma. Un ejemplo de algunas líneas de programa para histogramas con binomios aparecen en la figura 74.

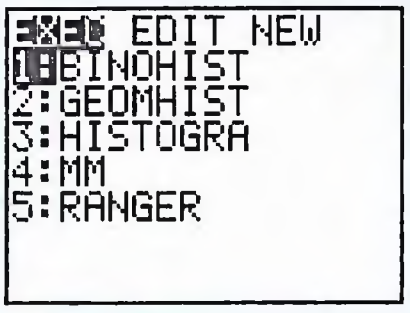


FIGURA 72

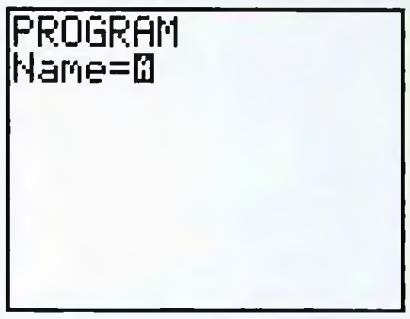


FIGURA 73

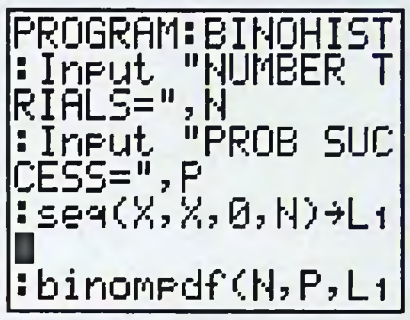


FIGURA 74

Al estar dentro del programa, si se presiona la tecla **PRGM** se tendrá acceso al necesario control y comandos de entrada/salida requeridos para escribir las líneas, como se muestra en las figuras 75 a la 77. Vea el manual de su calculadora para más instrucciones sobre cómo escribir programas en su máquina.

FIGURA 75

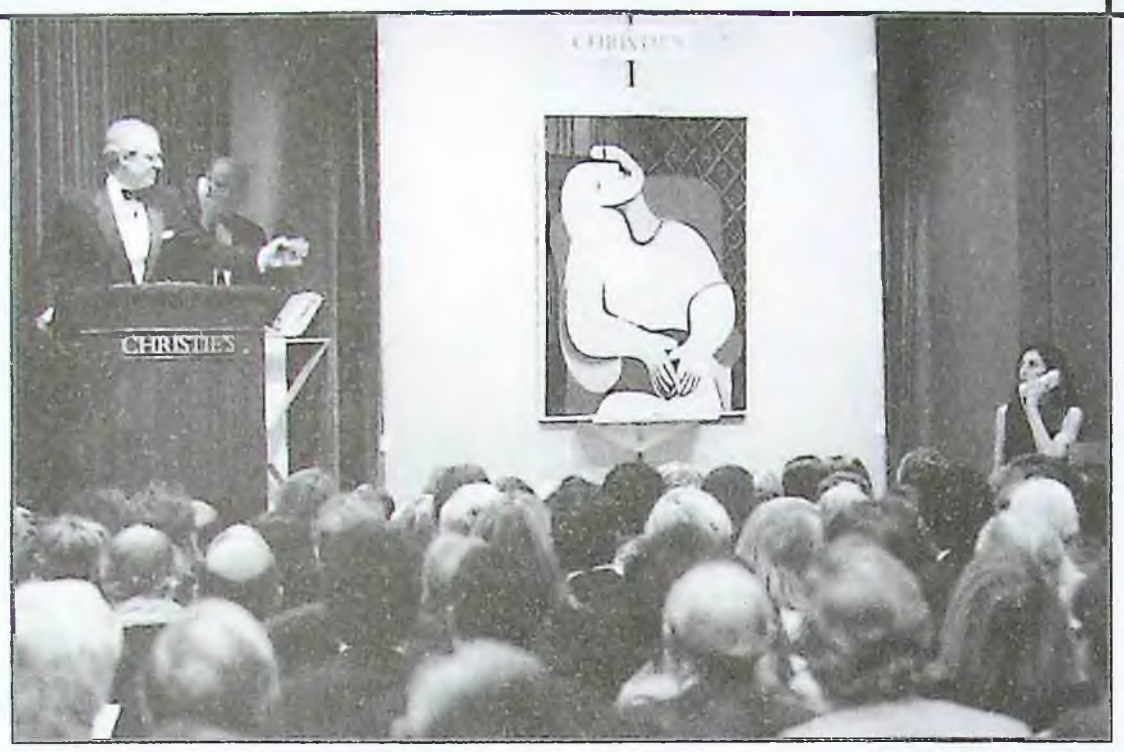
FIGURA 76

FIGURA 77

www.FreeLibros.com

www.FreeLibros.com

CAPÍTULO 1



El precio de un bien en el mercado es una función de la cantidad demandada por los consumidores.

FUNCIONES, GRÁFICAS Y LÍMITES

1 Funciones
2 Gráfica de una función
3 Funciones lineales
4 Modelos funcionales
5 Límites
6 Límites laterales y continuidad
Resumen del capítulo
Términos importantes, símbolos y fórmulas
Problemas de verificación del capítulo 1
Problemas de repaso
¡Explore! Actualización
Reflexiones acerca de...

www.FreeLibros.com

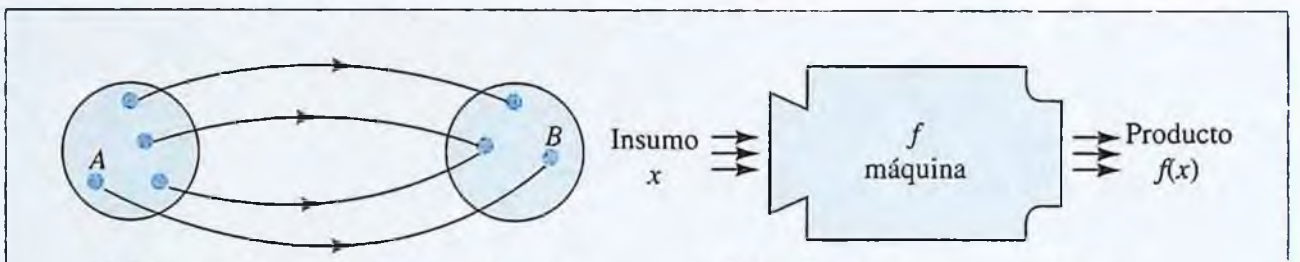
SECCIÓN 1.1 | Funciones

En muchas situaciones prácticas, el valor de una magnitud puede depender del valor de una segunda magnitud. Por ejemplo, la demanda del consumidor de carne puede depender del precio actual en el mercado; la cantidad de contaminación en el aire de un área metropolitana puede depender del número de automóviles en los caminos; o el valor de una moneda rara puede depender de su antigüedad. Con frecuencia estas relaciones pueden representarse matemáticamente como **funciones**.

Dicho con sencillez, una función consta de dos conjuntos y una regla que relaciona los elementos en un conjunto con los elementos del otro. Por ejemplo, suponga que quiere determinar el efecto del precio sobre el número de unidades de un artículo en particular que se venderá a ese precio. Para estudiar esta relación, se necesita conocer el conjunto de precios permisibles, el conjunto de niveles de venta posibles y un criterio para asociar cada precio con un nivel de ventas particular. La definición de función que se utilizará es

Función ■ Una **función** es una regla que asigna a cada objeto de un conjunto A exactamente un objeto de un conjunto B. El conjunto A se llama **dominio** de la función y el conjunto de objetos asignados de B se denomina **rango**.

Para la mayoría de las funciones en este libro, el dominio y rango serán conjuntos de números reales y la función misma se denotará con una letra f. El valor que la función f asigna al número x en el dominio se denota por $f(x)$ (y se lee como "f de x"), que es a menudo dada por una fórmula, tal como $f(x) = x^2 + 4$.



(a) Una función como correspondencia (b) Una función como una máquina

FIGURA 1.1 Interpretación de la función $f(x)$.

Puede ser útil pensar que la función es como una "transformación" de los números de A en los números de B (figura 1.1a), o como una "máquina" que toma un número dado de A y lo convierte en un número de B a través de un proceso indicado por la regla funcional (figura 1.1b). Por ejemplo, la función $f(x) = x^2 + 4$ se puede considerar como una "máquina f" que acepta una entrada x, luego lo eleva al cuadrado y le suma 4 para producir una salida $y = x^2 + 4$. No importa cómo decida considerar una relación funcional, es importante recordar que asigna uno y sólo un número del rango (salida) a cada número del dominio (entrada). Por ejemplo.

¡EXPLORE!

Guarde $f(x) = x^2 + 4$ en su calculadora graficadora. Calcule para $x = -3, -1, 0, 1$ y 3. Elabore una tabla de valores. Repita usando $g(x) = x^2 - 1$. Explique en qué se diferencian los valores de $f(x)$ y de $g(x)$ en cada valor de x.

EJEMPLO | 1.1.1

Encuentre $f(3)$ si $f(x) = x^2 + 4$.

Solución

$$f(3) = 3^2 + 4 = 13$$

www.FreeLibros.com

Observe la conveniencia y la simplicidad de la notación funcional. En el ejemplo 1.1.1, la fórmula compacta $f(x) = x^2 + 4$, define completamente la función, y se puede indicar que 13 es el número que la función asigna al 3 escribiendo simplemente $f(3) = 13$.

Con frecuencia es conveniente expresar una relación funcional con una ecuación $y = f(x)$, y en este contexto, x y y se denominan **variables**. En particular, como el valor numérico de y se determinó por el valor de x, entoncesse dice que y es la **variable dependiente** y que x es la **variable independiente**. Observe que no son exclusivos los símbolos x y y. Por ejemplo, la función $y = x^2 + 4$ se puede representar por $s = t^2 + 4$ o por $w = u^2 + 4$.

La notación funcional también se puede usar para describir datos tabulados. Por ejemplo, la tabla 1.1 lista los promedios del costo de colegiaturas e inscripciones de universidades privadas con carreras de 4 años, a intervalos de 5 años, desde 1973 a 2003.

TABLA 1.1 Costo promedio de inscripción y colegiaturas para universidades privadas con carreras de 4 años

Año académico que termina en	Periodo n	Costo de inscripción y colegiaturas
1973	1	$1 898
1978	2	$2 700
1983	3	$4 639
1988	4	$7 048
1993	5	$10 448
1998	6	$13 785
2003	7	$18 273

FUENTE: *Annual Survey of Colleges*, The College Board, Nueva York.

Se pueden describir estos datos como una función f definida por la regla

$$f(n) = \begin{bmatrix} \text{promedio del costo de colegiatura e inscripción al} \\ \text{comienzo del periodo de 5 años} \end{bmatrix}$$

Así, $f(1) = 1\,898, f(2) = 2\,700, \ldots, f(7) = 18\,273$. Observe que el dominio de f es el conjunto de enteros $A = \{1, 2, \ldots, 7\}$.

El uso de la notación funcional se ilustra también en los ejemplos 1.1.2 y 1.1.3. Se advierte que en el ejemplo 1.1.2 se usan letras diferentes de f y x para denotar la función y su variable independiente.

EJEMPLO | 1.1.2

Si $g(t) = (t - 2)^{1/2}$, encuentre (si es posible) $g(27)$, $g(5)$, $g(2)$ y $g(1)$.

Solución

Reescriba la función como $g(t) = \sqrt{t - 2}$. (Si se requiere un repaso de potencias fraccionarias, consulte el análisis de notación exponencial en el "Repaso de álgebra" que se encuentra al final de este libro). Entonces,

$$g(27) = \sqrt{27 - 2} = \sqrt{25} = 5$$

$$g(5) = \sqrt{5 - 2} = \sqrt{3} \approx 1.7321$$

y

$$g(2) = \sqrt{2 - 2} = \sqrt{0} = 0$$

REPASO

Justo-a-tiempo

Recuerde que $x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a}$ siempre que a y b sean enteros positivos. El ejemplo 1.1.2 usa el caso cuando $a = 1$ y $b = 2$; $x^{1/2}$ es otra forma de expresar $\sqrt{x}$.

www.FreeLibros.com

Sin embargo, $g(1)$ no está definida ya que

$$g(1) = \sqrt{1-2} = \sqrt{-1}$$

y los números negativos no tienen raíces cuadradas reales.

A menudo la funciones se definen usando más de una fórmula, donde cada fórmula describe la función sobre un subconjunto del dominio. Una función definida así generalmente se llama **función definida por partes**. A continuación se presenta un ejemplo de tal función.

¡EXPLORE!

Introduzca $g(x) = \sqrt{x-2}$ en el editor de funciones de su calculadora graficadora como Y1 = $\sqrt{(x-2)}$. Ahora en **HOME SCREEN** construya Y1(27), Y1(5) y Y1(2), o alternativamente Y1({27, 5, 2}), donde las llaves se usan para encerrar una lista de valores. ¿Qué sucede cuando usted escribe Y1(1)?

EJEMPLO | 1.1.3

Encuentre $f\left(-\frac{1}{2}\right), f(1)$ y $f(2)$ si

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ 3x^2 + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

¡EXPLORE!

Cree una función simple, definida por partes, usando la instrucción de álgebra booleana de la calculadora graficadora. Escriba Y1 = 2(X < 1) + (−1)(X ≥ 1) en el editor de funciones. Examine la gráfica de esta función, usando la pantalla decimal **ZOOM**. ¿Qué observa en X = 1? ¿Qué valores de Y1 se obtienen en X = −2, 0, 1 y 3?

Solución

Como $x = -\frac{1}{2}$ satisface $x < 1$, se usa la parte superior de la fórmula para encontrar

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{-1/2 - 1} = \frac{1}{-3/2} = -\frac{2}{3}$$

Sin embargo, $x = 1$ y $x = 2$ satisfacen $x \geq 1$, de manera que $f(1)$ y $f(2)$ se determinan usando la parte inferior de la fórmula

$$f(1) = 3(1)^2 + 1 = 4 \qquad \text{y} \qquad f(2) = 3(2)^2 + 1 = 13$$

Convenio para calcular el dominio ■ A menos que se especifique otra cosa, si una fórmula (o varias, como sucede en el ejemplo 1.1.3) se usa para definir una función f, entonces se supone que el dominio de f es el conjunto de todos los números para los cuales $f(x)$ está definida (como un número real). A esto se le llama **dominio natural** de f. La determinación del dominio natural de una función con frecuencia excluye todos los números x que resulten al dividir entre 0, o al obtener la raíz cuadrada de un número negativo. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 1.1.4.

¡EXPLORE!

Introduzca en su calculadora graficadora $f(x) = 1/(x-3)$ como Y1, y despliegue esta gráfica usando la pantalla decimal **ZOOM**. Utilice la instrucción **TRACE** para buscar los valores de la función desde X = 2.5 hasta 3.5. ¿Qué observa en X = 3? Ahora guarde $g(x) = \sqrt{(x-2)}$ en Y1, y grafíquela usando una ventana decimal **ZOOM**. Use **TRACE** para hallar los valores desde X = 0 a 3, en incrementos de 0.1. ¿Cuándo comienzan a aparecer los valores de Y?, ¿y qué le indican acerca del dominio de $g(x)$?

EJEMPLO | 1.1.4

Encuentre el dominio y rango de cada una de estas funciones

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ **b)** $g(t) = \sqrt{t-2}$

Solución

a) Como es posible la división por cualquier número diferente de 0, el dominio de f es el conjunto de todos los números $x \neq 3$. El rango de f es el conjunto de todos los números y, excepto 0, porque para cualquier $y \neq 0$, hay una x tal que $y = \dfrac{1}{x-3}$; en particular, $x = 3 + \dfrac{1}{y}$.

www.FreeLibros.com

b) Como los números negativos no tienen raíces cuadradas reales, $g(t)$ puede evaluarse sólo cuando $t - 2 \geq 0$, de manera que el dominio de g es el conjunto de todos los números t tales que $t \geq 2$. El rango de g es el conjunto de todos los números no negativos: para cualquiera de esos números $y \geq 0$, hay un t tal que $y = \sqrt{t-2}$; en particular, $t = y^2 + 2$.

Funciones usadas en economía

Hay varias funciones básicas que aparecen con frecuencia en aplicaciones relacionadas con la economía. Una **función demanda** $p = D(x)$ es una función que relaciona el precio unitario p de un artículo en particular con el número de unidades x demandadas por los consumidores a ese precio. El **ingreso total** está dado por el producto

$$\begin{aligned} R(x) &= (\text{ número de artículos vendidos})(\text{precio por artículo}) \\ &= xp = xD(x) \end{aligned}$$

Si $C(x)$ es el **costo total** de producir x unidades, entonces la **utilidad** derivada de su venta al precio unitario p está dada por la función

$$P(x) = R(x) - C(x) = xD(x) - C(x)$$

Estos términos se utilizan en el ejemplo 1.1.5.

EJEMPLO | 1.1.5

La investigación de mercado indica que los consumidores comprarán x miles de unidades de un tipo particular de productor de café cuando el precio unitario es

$$p = -0.27x + 51$$

dólares. El costo de producir las x miles unidades es

$$C(x) = 2.23x^2 + 3.5x + 85$$

miles de dólares.

a) ¿Cuáles son las funciones de ingreso y de utilidad, $R(x)$ y $P(x)$ de este proceso de producción?

b) ¿Para qué valores de x es redituable la producción de los fabricantes de café?

Solución

a) La función demanda es $D(x) = -0.27x + 51$, de manera que el ingreso es

$$R(x) = xD(x) = -0.27x^2 + 51x$$

miles de dólares, y la utilidad es

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= -0.27x^2 + 51x - (2.23x^2 + 3.5x + 85) \\ &= -2.5x^2 + 47.5x - 85 \end{aligned}$$

miles de dólares.

b) La producción es redituable cuando $P(x) > 0$. Se calcula que

$$\begin{aligned} P(x) &= -2.5x^2 + 47.5x - 85 \\ &= -2.5(x^2 - 19x + 34) \\ &= -2.5(x - 2)(x - 17) \end{aligned}$$

www.FreeLibros.com

REPASO

Justo-a-tiempo

El producto de dos números es positivo si tienen el mismo signo y es negativo si tienen signos diferentes. Es decir, $ab > 0$ si $a > 0$ y $b > 0$, y también si $a < 0$ y $b < 0$. Por otra parte, $ab < 0$ si $a < 0$ y $b > 0$, o si $a > 0$ y $b < 0$.

Como el coeficiente -2.5 es negativo, se deduce que $P(x) > 0$ sólo si los términos $(x - 2)$ y $(x - 17)$ tienen signos diferentes; esto es, cuando $x - 2 > 0$ y $x - 17 < 0$. Por tanto, la producción es redituable para $2 < x < 17$.

En el ejemplo 1.1.6 se ilustra cómo se usa la notación funcional en una situación práctica. Observe que para interpretar una fórmula algebraica con más facilidad, las letras que representan magnitudes prácticas importantes se usan para la función y su variable independiente. (En este ejemplo, la letra C significa "costo" y q significa "cantidad" fabricada.)

EJEMPLO | 1.1.6

Suponga que el costo total en dólares de fabricar q unidades de un cierto producto está dado por la función $C(q) = q^3 - 30q^2 + 500q + 200$.

a) Calcule el costo de fabricar 10 unidades del producto.

b) Calcule el costo de fabricar la décima unidad del producto.

¡EXPLORE!

Remítase al ejemplo 1.1.6, y guarde la función de costo $C(q)$ en Y1 como $X^3 - 30X^2 + 500X + 200$. Construya una TABLA de valores para $C(q)$ usando su calculadora, fijando TblStart en X = 5, con un incremento ΔTbl = 1 unidad. En la tabla de valores observe el costo de fabricación de la décima unidad.

Solución

a) El costo de fabricar 10 unidades es el valor de la función de costo total cuando $q = 10$. Es decir,

$$\begin{aligned}\text{Costo de 10 unidades} &= C(10)\\ &= (10)^3 - 30(10)^2 + 500(10) + 200\\ &= \$3\,200\end{aligned}$$

b) El costo de fabricación de la décima unidad es la diferencia entre el costo de fabricar 10 unidades y el costo de fabricar 9 unidades. Esto es

$$\text{Costo de la décima unidad} = C(10) - C(9) = 3\,200 - 2\,999 = \$201$$

Composición de funciones

Hay muchas situaciones en las que una magnitud se expresa como una función de una variable, que a su vez, se puede escribir como una función de una segunda variable. Al combinar las funciones en una forma apropiada, se puede expresar la magnitud original como una función de la segunda variable. Este proceso se denomina **composición de funciones** o **composición funcional**.

Por ejemplo, suponga que los ambientalistas estiman que cuando p miles de personas viven en determinada ciudad, el nivel diario promedio de monóxido de carbono en el aire es $c(p)$ partes por millón, y que los estudios demográficos independientes indican que la población en t años será de $p(t)$ miles. ¿Qué nivel de contaminación se espera en t años? Se puede responder a esta pregunta sustituyendo $p(t)$ en la fórmula de la contaminación $c(p)$ para expresar c como una función compuesta de t.

El problema de la contaminación se retomará en el ejemplo 1.1.11 con fórmulas específicas para $c(p)$ y $p(t)$, pero primero es necesario analizar algunos ejemplos sobre cómo se forman y se evalúan las funciones compuestas. A continuación se da una definición de composición funcional.

Composición de funciones ■ Dadas las funciones $f(u)$ y $g(x)$, la composición $f(g(x))$ es la función de x formada al sustituir $u = g(x)$ por u en la fórmula de $f(u)$.

www.FreeLibros.com

Observe que la función compuesta $f(g(x))$ "tiene sentido" sólo si el dominio de f contiene el rango de g. En la figura 1.2, la definición de la función compuesta se muestra como una "línea de montaje" en la cual el ingreso de "materia prima", x, primero se convierte en un producto transitorio $g(x)$ que actúa como el insumo que la máquina f utiliza para producir $f(g(x))$.

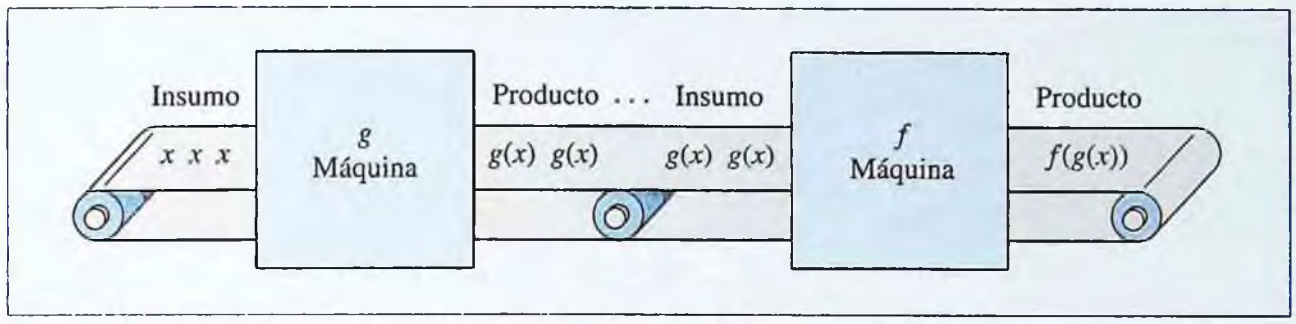


FIGURA 1.2 La composición $f(g(x))$ como una línea de ensamble.

EJEMPLO | 1.1.7

Encuentre la función compuesta $f(g(x))$, donde $f(u) = u^2 + 3u + 1$ y $g(x) = x + 1$.

Solución

Remplace u por $x + 1$ en la fórmula de $f(u)$ para obtener

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= (x + 1)^2 + 3(x + 1) + 1 \\ &= (x^2 + 2x + 1) + (3x + 3) + 1 \\ &= x^2 + 5x + 5 \end{aligned}$$

¡EXPLORE!

Introduzca las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 3$ en Y1 y Y2, respectivamente, con el editor de funciones. Deseleccione (apague) Y1 y Y2. Haga Y3 = Y1(Y2) y Y4 = Y2(Y1). Demuestre gráficamente (usando el **ZOOM** estándar) y analíticamente (mediante una tabla de valores) que $f(g(x))$, representada por Y3, y $g(f(x))$, representada por Y4, no son las mismas funciones. ¿Cuáles son las ecuaciones explícitas para ambas funciones compuestas?

NOTA Al invertir los papeles de f y g en la definición de función compuesta, se puede definir la composición $g(f(x))$ y, en general, $f(g(x))$y $g(f(x))$ *no* serán iguales. Por ejemplo, con las funciones del ejemplo 1.1.7, primero se escribe

$$g(w) = w + 1 \qquad \text{y} \qquad f(x) = x^2 + 3x + 1$$

Y luego se remplaza w por $x^2 + 3x + 1$ para obtener

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= (x^2 + 3x + 1) + 1 \\ &= x^2 + 3x + 2 \end{aligned}$$

que es igual a $f(g(x)) = x^2 + 5x + 5$ sólo cuando $x = -3/2$ (esto debe verificarse). ■

El ejemplo 1.1.7 se hubiera podido reescribir de manera más compacta como sigue: Encuentre la función compuesta $f(x + 1)$ donde $f(u) = u^2 + 3u + 1$. El uso de esta notación compacta se ilustra al detalle en el siguiente ejemplo.

¡EXPLORE!

Remítase al ejemplo 1.1.8. Introduzca $f(x) = 3x^2 + 1/x + 5$ en Y1. Escriba Y2 = Y1(X – 1). Construya una tabla de valores para Y1 y Y2 de X = 0, 1 a 6. ¿Qué observa acerca de los valores de Y1 y Y2?

EJEMPLO | 1.1.8

Encuentre $f(x - 1)$ si $f(x) = 3x^2 + \dfrac{1}{x} + 5$.

Solución

A primera vista, este problema puede parecer confuso porque la letra x aparece tanto como la variable independiente en la fórmula que define a f, como parte de la expresión

www.FreeLibros.com

$x - 1$. Debido a esto, puede ser útil empezar escribiendo la fórmula para f en términos más generales, como

$$f(\square) = 3(\square)^2 + \frac{1}{\square} + 5$$

Para encontrar $f(x - 1)$, simplemente se necesita insertar la expresión $x - 1$ dentro de cada cuadro, para obtener

$$f(x - 1) = 3(x - 1)^2 + \frac{1}{x - 1} + 5$$

En ocasiones, se tiene que "separar" una función compuesta dada $g(h(x))$ e identificar la "función exterior" $g(u)$ y la "función interior" $h(x)$ que la formaron. El procedimiento se demuestra en el ejemplo 1.1.9.

EJEMPLO | 1.1.9

Si $f(x) = \dfrac{5}{x - 2} + 4(x - 2)^3$, encuentre las funciones $g(u)$ y $h(x)$ tales que $f(x) = g(h(x))$.

Solución

La forma de la función dada es

$$f(x) = \frac{5}{\square} + 4(\square)^3$$

donde cada cuadro contiene la expresión $x - 2$. Así, $f(x) = g(h(x))$, donde

$$g(u) = \frac{5}{u} + 4u^3 \quad \text{y} \quad h(x) = x - 2$$

función exterior *función interior*

De hecho, en el ejemplo 1.1.9, hay muchos pares de funciones $g(u)$ y $h(x)$ que se pueden combinar para formar $g(h(x)) = f(x)$. [Por ejemplo, $g(u) = \dfrac{5}{u + 1} + 4(u + 1)^3$ y $h(x) = x - 3$]. En particular el par seleccionado en la solución de este ejemplo es el más natural y refleja claramente la estructura de la función original $f(x)$.

EJEMPLO | 1.1.10

Un **cociente incremental** es una expresión de la forma general

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

donde f es una función dada de x, y h es un número. El cociente incremental se usará en el capítulo 2 para definir la *derivada*, uno de los conceptos fundamentales del cálculo. Encuentre el cociente incremental para $f(x) = x^2 - 3x$.

Solución

Se calcula como sigue

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{[(x + h)^2 - 3(x + h)] - [x^2 - 3x]}{h}$$

www.FreeLibros.com

$$= \frac{[x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h] - [x^2 - 3x]}{h} \quad \textit{se expande el numerador}$$

$$= \frac{2xh + h^2 - 3h}{h} \quad \textit{se combinan los términos en el numerador}$$

$$= 2x + h - 3 \quad \textit{se divide entre } h$$

En el ejemplo 1.1.11 se ilustra cómo puede surgir una función compuesta en un problema aplicado.

EJEMPLO | 1.1.11

Un estudio ambiental de cierta comunidad sugiere que el nivel promedio diario de monóxido de carbono en el aire será de $c(p) = 0.5p + 1$ partes por millón cuando la población sea p miles. Se estima que dentro de t años la población de la comunidad será $p(t) = 10 + 0.1t^2$ miles.

a) Exprese el nivel de monóxido de carbono en el aire como una función del tiempo.

b) ¿Cuándo el nivel del monóxido de carbono alcanzará 6.8 partes por millón?

Solución

a) Como el nivel de monóxido de carbono está relacionado con la variable p mediante la ecuación

$$c(p) = 0.5p + 1$$

y la variable p está relacionada con la variable t mediante la ecuación

$$p(t) = 10 + 0.1t^2$$

se deduce que la función compuesta,

$$c(p(t)) = c(10 + 0.1t^2) = 0.5(10 + 0.1t^2) + 1 = 6 + 0.05t^2$$

expresa el nivel de monóxido de carbono en el aire como una función de la variable t.

b) Iguale $c(p(t))$ a 6.8 y despeje t para obtener

$$6 + 0.05t^2 = 6.8$$
$$0.05t^2 = 0.8$$
$$t^2 = \frac{0.8}{0.05} = 16$$
$$t = \sqrt{16} = 4 \quad \textit{Se descarta } t = -4$$

Es decir, dentro de 4 años el nivel de monóxido de carbono será 6.8 partes por millón.

PROBLEMAS | 1.1

En los problemas 1 a 11, calcule los valores indicados de la función dada.

1. $f(x) = 3x^2 + 5x - 2; f(0), f(-2), f(1)$

2. $h(t) = (2t + 1)^3; h(-1), h(0), h(1)$

3. $g(x) = x + \frac{1}{x}; g(-1), g(1), g(2)$

4. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}; f(2), f(0), f(-1)$

5. $h(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 4}; h(2), h(0), h(-4)$

6. $g(u) = (u + 1)^{3/2}; g(0), g(-1), g(8)$

www.FreeLibros.com

7. $f(t) = (2t - 1)^{-3/2}; f(1), f(5), f(13)$

8. $g(x) = 4 + |x|; g(-2), g(0), g(2)$

9. $f(x) = x - |x - 2|; f(1), f(2), f(3)$

10. $h(x) = \begin{cases} -2x + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}; h(3), h(1), h(0), h(-3)$

11. $f(t) = \begin{cases} 3 & \text{si } t < -5 \\ t + 1 & \text{si } -5 \leq t \leq 5 \\ \sqrt{t} & \text{si } t > 5 \end{cases}; f(-6), f(-5), f(16)$

En los problemas 12 a 15, determine si la función dada tiene al conjunto de todos los números reales como su dominio.

12. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 1}$

13. $g(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

14. $h(t) = \sqrt{t^2 + 1}$

15. $f(t) = \sqrt{1 - t}$

En los problemas 16 a 21, determine el dominio de la función dada.

16. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$

17. $g(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x + 2}$

18. $f(t) = \dfrac{t + 1}{t^2 - t - 2}$

19. $f(x) = \sqrt{2x + 6}$

20. $h(s) = \sqrt{s^2 - 4}$

21. $f(t) = \dfrac{t + 2}{\sqrt{9 - t^2}}$

En los problemas 22 a 29, halle la función compuesta $f(g(x))$.

22. $f(u) = u^2 + 4, g(x) = x - 1$

23. $f(u) = 3u^2 + 2u - 6, g(x) = x + 2$

24. $f(u) = (2u + 10)^2, g(x) = x - 5$

25. $f(u) = (u - 1)^3 + 2u^2, g(x) = x + 1$

26. $f(u) = \dfrac{1}{u}, g(x) = x^2 + x - 2$

27. $f(u) = \dfrac{1}{u^2}, g(x) = x - 1$

28. $f(u) = u^2, g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

29. $f(u) = \sqrt{u + 1}, g(x) = x^2 - 1$

En los problemas 30 a 33, halle el cociente incremental de f, de la forma, $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

30. $f(x) = 2x + 3$

31. $f(x) = x^2$

32. $f(x) = 4x - x^2$

33. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

En los problemas 34 a 37, obtenga las funciones compuestas $f(g(x))$ y $g(f(x))$, y encuentre todos los valores de x (si los hay) tales que $f(g(x)) = g(f(x))$.

34. $f(x) = x^2 + 1, g(x) = 1 - x$

35. $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 1 - 3x$

36. $f(x) = \dfrac{1}{x}, g(x) = \dfrac{4 - x}{2 + x}$

37. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 1}, g(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$

En los problemas 38 a 45, halle la función compuesta indicada.

38. $f(x + 1)$ donde $f(x) = x^2 + 5$

39. $f(x - 2)$ donde $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

40. $f(x + 3)$ donde $f(x) = (2x - 6)^2$

41. $f(x - 1)$ donde $f(x) = (x + 1)^5 - 3x^2$

www.FreeLibros.com

42. $f\left(\frac{1}{x}\right)$ donde $f(x) = 3x + \frac{2}{x}$

43. $f(x^2 + 3x - 1)$ donde $f(x) = \sqrt{x}$

44. $f(x^2 - 2x + 9)$ donde $f(x) = 2x - 20$

45. $f(x + 1)$ donde $f(x) = \frac{x - 1}{x}$

En los problemas 46 a 51, encuentre las funciones $h(x)$ y $g(u)$ tales que $f(x) = g(h(x))$.

46. $f(x) = (x^5 - 3x^2 + 12)^3$

47. $f(x) = (x - 1)^2 + 2(x - 1) + 3$

48. $f(x) = \sqrt{3x - 5}$

49. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

50. $f(x) = \sqrt{x + 4} - \frac{1}{(x + 4)^3}$

51. $f(x) = \sqrt[3]{2 - x} + \frac{4}{2 - x}$

52. COSTO DE FABRICACIÓN Se supone que el costo total en dólares de fabricar q unidades de cierto artículo está dado por la función

$$C(q) = q^3 - 30q^2 + 400q + 500.$$

a) Calcule el costo de fabricar 20 unidades.

b) Calcule el costo de fabricar la vigésima unidad.

53. EFICIENCIA DE LOS TRABAJADORES Un estudio de eficiencia en el turno de la mañana de cierta fábrica indica que un trabajador promedio que llega a las 8:00 a.m. habrá ensamblado

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$$

televisores x horas después.

a) ¿Cuántos televisores habrá ensamblado un trabajador a las 10:00 a.m.? [*Sugerencia*: A las 10:00 a.m., $x = 2$]

b) ¿Cuántos televisores habrá ensamblado un trabajador entre las 9:00 y las 10:00 a.m.?

54. CAMBIO DE TEMPERATURA Suponga que t horas después de la medianoche, la temperatura en Miami era $C(t) = -\frac{1}{6}t^2 + 4t + 10$ grados Celsius.

a) ¿Cuál fue la temperatura a las 200 p.m.?

b) ¿Cuánto aumentó o disminuyó la temperatura entre las 6:00 y las 9:00 p.m.?

55. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN Se estima que dentro de t años la población de cierta comunidad suburbana será $P(t) = 20 - \frac{6}{t + 1}$ miles.

a) ¿Cuál será la población de la comunidad dentro de 9 años?

b) ¿Cuánto aumentará la población durante el noveno año?

c) ¿Qué le sucede a $P(t)$ a medida que t crece cada vez más? Interprete el resultado.

56. PSICOLOGÍA EXPERIMENTAL Para estudiar la tasa a la que aprenden los animales, un estudiante de psicología llevó a cabo un experimento en el que se enviaba a una rata reiteradamente a través de un laberinto. Se supone que el tiempo requerido por la rata para atravesar el laberinto en el n-ésimo intento era aproximadamente

$$f(n) = 3 + \frac{12}{n}$$

minutos.

a) ¿Cuál es el dominio de la función f?

b) ¿Para qué valores de n tiene significado $f(n)$ en el contexto del experimento de psicología?

c) ¿Cuánto tiempo tardó la rata en atravesar el laberinto en el tercer intento?

d) ¿En qué intento atravesó la rata el laberinto en 4 minutos o menos?

e) De acuerdo con la función f, ¿qué sucederá con el tiempo necesario para que la rata atraviese el laberinto a medida que aumenta el número de intentos? ¿ Será capaz la rata de atravesar el laberinto en menos de 3 minutos alguna vez?

57. FLUJO SANGUÍNEO Los biólogos han encontrado que la velocidad de la sangre en una arteria es una función de la distancia de la sangre desde el eje central de la arteria. De acuerdo con la **ley de Poiseuille**,[1] la velocidad (en centímetros por segundo) de la sangre localizada a r centímetros del eje central de una arteria está dada por la función $S(r) = C(R^2 - r^2)$, donde C es una constante y R es el radio de la arteria. Suponga que para cierta arteria, $C = 1.76 \times 10^5$ y $R = 1.2 \times 10^{-2}$ centímetros.

a) Calcule la velocidad de la sangre en el eje central de esta arteria.

[1] E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 3a. ed., Nueva York, Springer-Verlag, 1976, pp. 101-103.

www.FreeLibros.com

b) Calcule la velocidad de la sangre en un punto medio entre la pared de la arteria y el eje central.

58. COSTO DE DISTRIBUCIÓN Suponga que el número de horas-trabajador necesarias para distribuir los nuevos directorios telefónicos a $x\%$ de casas en cierta comunidad rural está dado por la función

$$f(x) = \frac{600x}{300 - x}.$$

a) ¿Cuál es el dominio de la función f?
b) En este contexto, ¿para qué valores de x tiene $f(x)$ una interpretación práctica?
c) ¿Cuántas horas-trabajador se necesitaron para distribuir los nuevos directorios telefónicos al primer 50% de las viviendas?
d) ¿Cuántas horas-trabajador se necesitaron para distribuir los directorios telefónicos a toda la comunidad?
e) ¿Qué porcentaje de viviendas de la comunidad recibió los nuevos directorios telefónicos después de 150 horas-trabajador?

59. ISLA ECOLÓGICA Se ha observado que sobre una isla de área A millas cuadradas, el número promedio de especies animales es aproximadamente igual a $s(A) = 2.9\sqrt[3]{A}$.

a) En promedio, ¿cuántas especies animales se podría esperar encontrar sobre una isla de 8 millas cuadradas?
b) Si s_1 es el número promedio de especies sobre una isla de área A y s_2 es el número promedio de especies sobre una isla de área $2A$, ¿cuál es la relación entre s_1 y s_2?
c) ¿Qué tan grande debe ser una isla para tener un promedio de 100 especies animales?

60. DENSIDAD DE POBLACIÓN Se ha observado que para mamíferos herbívoros, se puede estimar el número de animales por kilómetro cuadrado, N, mediante la fórmula $N = \frac{91.2}{m^{0.73}}$, en la que m es la masa promedio del animal en kilogramos.

a) Suponiendo que un alce promedio en una reserva tiene una masa de 300 kg aproximadamente, ¿cuántos alces por kilómetro cuadrado se espera encontrar en la reserva?
b) Usando esa fórmula, se estima que hay menos de un animal de cierta especie por kilómetro cuadrado. ¿Qué tan grande puede ser el animal promedio de esta especie?
c) Una especie de grandes mamíferos tiene el doble de la masa promedio que una segunda especie. Si una reserva en particular contiene 100 animales de grandes especies, ¿cuántos animales de la especie más pequeña esperaría encontrar ahí?

61. INMUNIZACIÓN suponga que durante un programa nacional para inmunizar a la población contra cierta variedad de influenza, los funcionarios de salud pública calcularon que el costo de vacunar a $x\%$ de la población era aproximadamente

$$f(x) = \frac{150x}{200 - x} \text{ millones de dólares.}$$

a) ¿Cuál es el dominio de la función f?
b) ¿Para qué valores de x tiene $f(x)$ una interpretación práctica en este contexto?
c) ¿Cuál fue el costo de vacunar al primer 50% de la población?
d) ¿Cuál fue el costo de vacunar al segundo 50% de la población?
e) ¿Qué porcentaje de la población había sido vacunada cuando se habían gastado 37.5 millones de dólares?

62. POSICIÓN DE UN OBJETO EN MOVIMIENTO Se deja caer una bola desde la parte superior de un edificio. Su altura (en pies) después de t segundos está dada por la función $H(t) = -16t^2 + 256$.

a) ¿Cuál es la altura de la pelota después de 2 segundos?
b) ¿Qué distancia recorrerá la pelota durante el tercer segundo?
c) ¿Cuál es la altura del edificio?
d) ¿Cuándo la pelota golpeará el suelo?

63. CONTAMINACIÓN DEL AIRE Un estudio ambiental de cierta comunidad suburbana sugiere que el nivel diario promedio de monóxido de carbono en el aire será $c(p) = 0.4p + 1$ partes por millón cuando la población sea p miles. Se estima que en t años la población de la comunidad será $p(t) = 8 + 0.2t^2$ miles.

a) Exprese el nivel de monóxido de carbono en el aire como una función del tiempo.
b) ¿Cuál será el nivel de monóxido de carbono en 2 años, a partir de hoy?
c) ¿Cuándo alcanzará el nivel de monóxido de carbono las 6.2 partes por millón?

64. COSTO DE FABRICACIÓN En una fábrica, el costo total de elaborar q unidades durante un día de trabajo es $C(q) = q^2 + q + 900$ dólares. En un día típico de trabajo, durante las primeras t horas se fabrican $q(t) = 25t$ unidades.

a) Exprese el costo de fabricación total como una función de t.
b) ¿Cuánto se habrá gastado en la producción al final de la tercera hora?
c) ¿Cuándo llegará el costo total de fabricación a los \$11 000?

www.FreeLibros.com

En los problemas 65 y 66, la función de demanda $D(x)$ y la función de costo total $C(x)$ de un artículo en particular están dadas en términos del nivel de producción x. En cada caso encuentre

a) El ingreso $R(x)$ y la utilidad $P(x)$.

b) Todos los valores de x para los cuales es redituable la producción del artículo.

65. $D(x) = -0.02x + 29$ y
$C(x) = 1.43x^2 + 18.3x + 15.6$

66. $D(x) = -0.37x + 47$ y
$C(x) = 1.38x^2 + 15.15x + 115.5$

67. DEMANDA DEL CONSUMIDOR Un importador de café brasileño estima que los consumidores locales comprarán aproximadamente $Q(p) = \dfrac{4\,374}{p^2}$ kilogramos de café por semana, cuando el precio sea de p dólares por kilogramo. Se estima que en t semanas el precio del café será

$$p(t) = 0.04t^2 + 0.2t + 12$$

dólares por kilogramo.

a) Exprese la demanda de consumo semanal de café como una función de t.

b) ¿Cuántos kilogramos de café comprarán los consumidores al importador al cabo de 10 semanas?

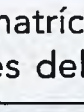
c) ¿Cuándo será la demanda de café de 30.375 kilogramos?

68. COSTO DE LA EDUCACIÓN En la tabla 1.2 se indican los promedios de los costos fijos totales anuales (matrícula, inscripción y pensión completa) para estudiantes universitarios según el tipo de institución, en dólares constantes de 2002 (ajustada a la inflación) para los años académicos desde 1987-1988 hasta 2002-2003. Se define el **índice del costo de educación** (ICE) de un año académico dado como el cociente del costo fijo total para ese año entre el costo fijo total del año académico base, que es el que termina en 1990. Por ejemplo, para instituciones públicas de 4 años, en el año académico que terminó en el 2000, el índice de costo de educación es

$$\text{CEI}(2000) = \frac{8\,311}{6\,476} = 1.28$$

a) Calcule el ICE en el tipo de institución donde usted se encuentra para cada uno de los 16 años académicos mostrados en la tabla. ¿Cuál es el aumento anual promedio en el ICE para el periodo de 16 años en ese tipo de institución?

b) Calcule el ICE en los cuatro tipos de instituciones para el año académico que terminó en 2003 e interprete los resultados.



c) Escriba un párrafo acerca del índice del costo de educación. ¿Puede continuar aumentando como lo ha hecho? ¿Qué piensa que sucederá en el futuro?

69. VALOR DE LA EDUCACIÓN La tabla 1.3 indica el ingreso promedio en dólares constantes del 2002 (ajustada la inflación), por logros educacionales para personas de al menos 18 años de edad de la década de 1991-2000. Se define el **índice del valor de educación** (IVE) para que un nivel particular de educación en determinado año sea el cociente del ingreso promedio obtenido ese año entre el ingreso promedio obtenido por el nivel de educación más bajo (sin diploma de preparatoria) durante el mismo año. Por ejemplo, para una persona que haya terminado su carrera en 1995, el índice del valor de educación es

$$\text{IVE}(1995) = \frac{43\,450}{16\,465} = 2.64$$

a) Calcule el IVE para cada año en la década 1991-2000 para el nivel de educación que usted espera obtener.

b) Compare el IVE del año 2000 para los diferentes cuatro niveles educacionales que requieren al menos de un diploma de preparatoria. Interprete sus resultados.

TABLA 1.2 Costos promedio totales fijos anuales (matrícula, inscripción, pensión completa) según el tipo de institución, en dólares constantes del 2002 (ajustada la inflación)

Sector/Año	87-88	88-89	89-90	90-91	91-92	92-93	93-94	94-95	95-96	96-97	97-98	98-99	99-00	00-01	01-02	02-03
2 años pública	1 112	1 190	1 203	1 283	1 476	1 395	1 478	1 517	1 631	1 673	1 701	1 699	1 707	1 752	1 767	1 914
2 años privada	10 640	11 159	10 929	11 012	11 039	11 480	12 130	12 137	12 267	12 328	12 853	13 052	13 088	13 213	13 375	14 202
4 años pública	6 382	6 417	6 476	6 547	6 925	7 150	7 382	7 535	7 680	7 784	8 033	8 214	8 311	8 266	8 630	9 135
4 años privada	13 888	14 852	14 838	15 330	15 747	16 364	16 765	17 216	17 560	17 999	18 577	18 998	19 368	19 636	20 783	21 678

Todos los datos son **promedios ponderados** e intentan reflejar los precios promedio de las instituciones.
FUENTE: *Annual Survey of Colleges*. The College Board, Nueva York, NY.

www.FreeLibros.com

TABLA 1.3 Ingreso anual promedio por nivel educacitivo en dólares constantes de 2002

Nivel de educación/Año	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Sin diploma de preparatoria	16 582	16 344	15 889	16 545	16 465	17 135	17 985	17 647	17 346	18 727
Con diploma de preparatoria	24 007	23 908	24 072	24 458	25 180	25 289	25 537	25 937	26 439	27 097
Carrera trunca	27 017	26 626	26 696	26 847	28 037	28 744	29 263	30 304	30 561	31 212
Carrera terminada	41 178	41 634	43 529	44 963	43 450	43 505	45 150	48 131	49 149	51 653
Posgrado	60 525	62 080	69 145	67 770	66 581	69 993	70 527	69 777	72 841	72 175

FUENTE: Census Bureau de EUA (obtenido en línea): (www.census.gov/hhes/income/histinc/p28).

70. VALOR DEL COSTO DE EDUCACIÓN Se define el **índice del valor del costo de educación** (IVCE) como el cociente del ingreso promedio obtenido por una persona con un determinado nivel de educación durante el primer año después de su graduación entre el costo anual promedio para conseguir ese nivel de educación. Por ejemplo, en la tabla 1.3 se indica que en promedio, una persona que terminó su carrera universitaria en 1999 ganó \$51 653 por año, comenzando en el 2000. La tabla 1.2 indica que si este mismo estudiante entró a una institución pública de 4 años durante el año académico 1995-1996 y se graduó en 1999, él pudo haber gastado un promedio de

$$\frac{\$7\,680 + \$7\,784 + \$8\,033 + \$8\,214}{4} = \frac{\$31\,711}{4} \approx \$7\,928$$

por año de su educación. Por tanto, el índice del valor del costo de educación para tal estudiante sería

$$\text{IVCE}(2000) = \frac{51\,653}{7\,928} = 6.52$$

Calcule el IVCE de los años 1995 y 2000 para los cuatros tipos de instituciones indicados en la tabla 1.2. Suponga que la categoría "carrera trunca" dada en la tabla 1.3 se aplica a estudiantes con 2 años en universidades públicas y privadas, mientras que "carrera terminada" se aplica a graduados de 4 años en universidades públicas y privadas. Interprete los resultados.

71. ¿Cuál es el dominio de $f(x) = \dfrac{4x^2 - 3}{2x^2 + x - 3}$?

72. ¿Cuál es el domino de $f(x) = \dfrac{7x^2 - 4}{x^3 - 2x + 4}$?

73. Para $f(x) = 2\sqrt{x - 1}$ y $g(x) = x^3 - 1.2$, encuentre $f(g(2.3))$. Use dos cifras decimales.

74. Para $f(x) = 2\sqrt{x - 1}$ y $g(x) = x^3 - 1.2$, encuentre $g(f(4.8))$. Use dos cifras decimales.

SECCIÓN 1.2 Gráfica de una función

Las gráficas tienen impacto visual. También revelan información que puede no ser evidente de las descripciones verbales o algebraicas. En la figura 1.3 se muestran dos gráficas que representan relaciones prácticas.

La gráfica de la figura 1.3a describe la variación de la producción industrial total en cierto país durante un periodo de 4 años. Observe que el punto más alto en la gráfica se alcanza cerca del final del tercer año, lo cual indica que la producción fue la mayor en ese momento.

www.FreeLibros.com

La gráfica de la figura 1.3b representa el crecimiento demográfico cuando los factores ambientales imponen un límite superior en el tamaño posible de la población. Esta indica que la *tasa* de crecimiento demográfico se incrementa al comienzo y luego disminuye a medida que el tamaño de la población se aproxima cada vez más al límite superior.

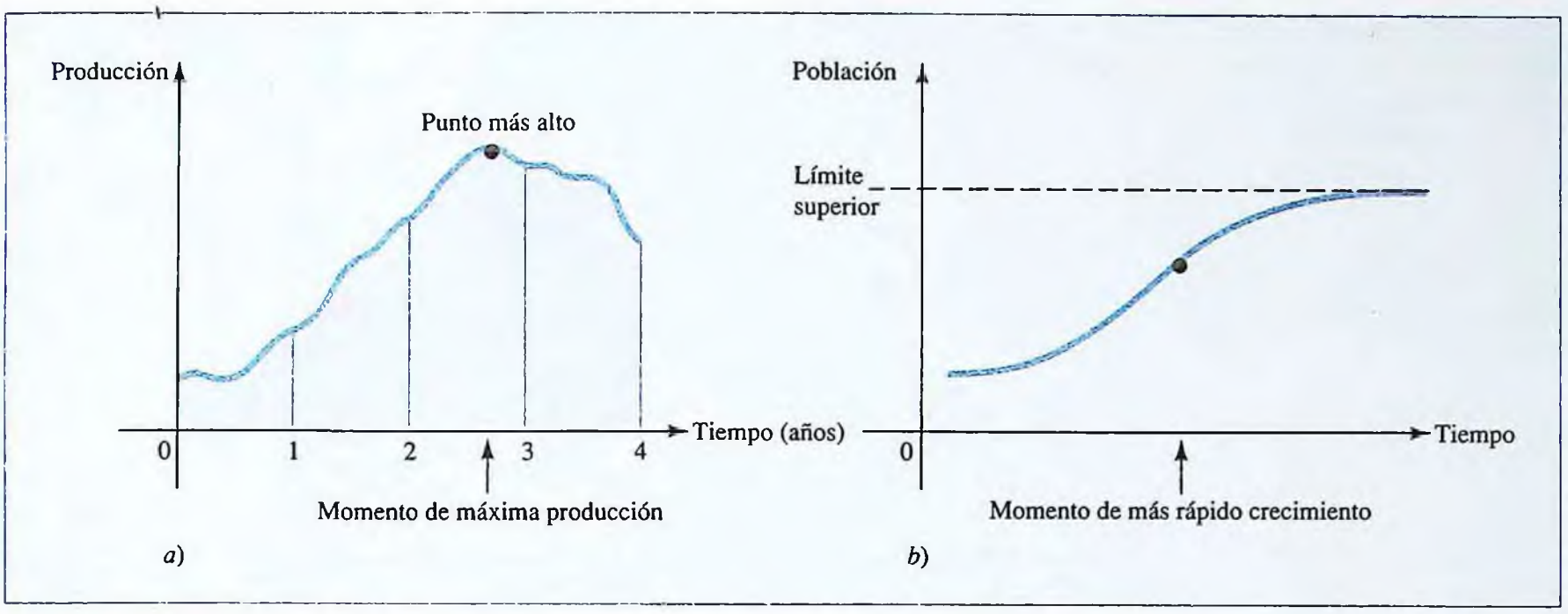


FIGURA 1.3 *a*) Una función de producción. *b*) Un crecimiento demográfico acotado.

Para representar geométricamente una función $y = f(x)$ como una gráfica, es común usar un sistema coordenado rectangular en el que se marcan las unidades para la variable independiente x en el eje horizontal, y las unidades de la variable dependiente y en el eje vertical.

Gráfica de una función ▪ La gráfica de una función f consta de todos los puntos (x, y), donde x está en el dominio de f y $y = f(x)$; esto es, todos los puntos de la forma $(x, f(x))$.

En el capítulo 3 se estudiarán técnicas eficientes del cálculo que se pueden usar para dibujar con precisión las gráficas de las funciones. Sin embargo, para muchas funciones, se puede lograr una buena gráfica trazando unos cuantos puntos, tal como se ilustra en el ejemplo 1.2.1.

EJEMPLO | 1.2.1

Grafique la función $f(x) = x^2$.

Solución

Comience por construir la tabla.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

Después marque los puntos (x, y) y conéctelos con una curva suave como la que se muestra en la figura 1.4.

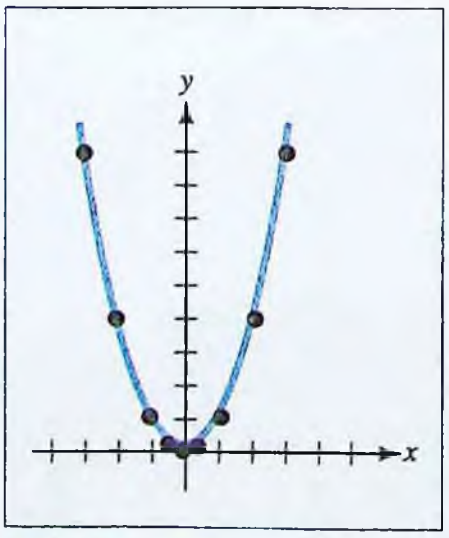


FIGURA 1.4 La gráfica de $y = x^2$.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Introduzca $f(x) = x^2$ en Y1 del editor de ecuaciones, usando negritas. Represente $g(x) = x^2 + 2$ mediante Y2 = Y1 + 2 y $h(x) = x^2 - 3$ mediante Y3 = Y1 − 3. Use el **ZOOM** de graficación decimal para mostrar cómo se relacionan las gráficas de $g(x)$ y $h(x)$ con la de $f(x)$. Ahora elimine Y2 y Y3 y escriba Y4 = Y1(X + 2) y Y5 = Y1(X − 3). Explique cómo se relacionan las gráficas de Y1, Y4 y Y5.

NOTA Muchas curvas diferentes pasan por los puntos del ejemplo 1.2.1. Varias de estas curvas se muestran en la figura 1.5. No hay forma de garantizar que la curva que trazamos a través de los puntos marcados sea la gráfica real de f. Sin embargo, en general, entre más puntos se representen, más probable será que la gráfica resulte más precisa. ▮

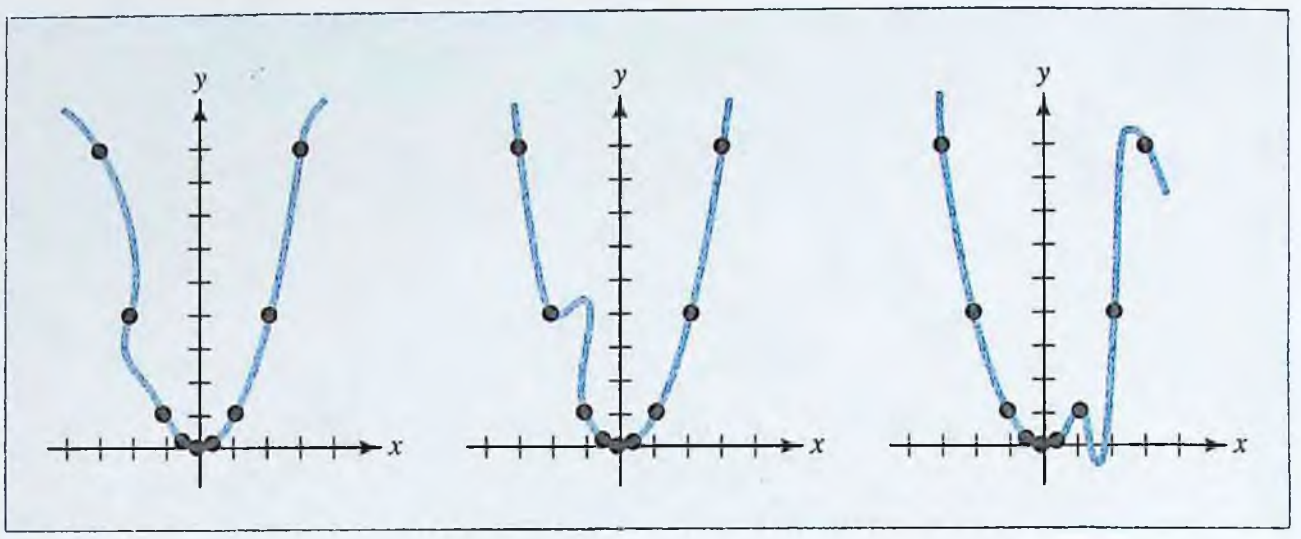


FIGURA 1.5 Otras gráficas que pasan por los puntos del ejemplo 2.1.

En el ejemplo 1.2.2 se ilustra cómo dibujar la gráfica de una función definida por más de una fórmula.

¡EXPLORE!

Ciertas funciones que son definidas por partes se pueden introducir en una calculadora graficadora usando el indicador de funciones en secciones. Por ejemplo, la función de valor absoluto,

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

puede ser representada mediante Y1 = X(X ≥ 0) + (−X)(X < 0). Ahora represente la función del ejemplo 1.2.2, usando el indicador de funciones, y grafíquela en una pantalla con dimensiones apropiadas. [*Sugerencia* Se necesitará representar el intervalo, 0 < X < 1, mediante la expresión booleana (lógica), (0 < X)(X < 1).]

EJEMPLO | 1.2.2

Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2/x & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ 3 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Solución

Cuando se hace una tabla de valores para esta función, se debe usar la fórmula apropiada para cada valor particular de x. Usando la fórmula $f(x) = 2x$ cuando $0 \leq x < 1$, la fórmula $f(x) = \dfrac{2}{x}$ cuando $1 \leq x < 4$, y la fórmula $f(x) = 3$ cuando $x \geq 4$, se puede construir la siguiente tabla:

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	1	2	1	$\frac{2}{3}$	3	3	3

Ahora se representan los puntos correspondientes $(x, f(x))$ y se dibuja la gráfica como en la figura 1.6. Observe que las partes para $0 \leq x < 1$ y $1 \leq x < 4$ se conectan una con la otra en (1, 2) pero que la parte para $x \geq 4$ está separada del resto de la gráfica. [El "punto abierto" en $\left(4, \frac{1}{2}\right)$ indica que la gráfica se aproxima a este punto, aunque dicho punto en realidad no está sobre la gráfica].

www.FreeLibros.com

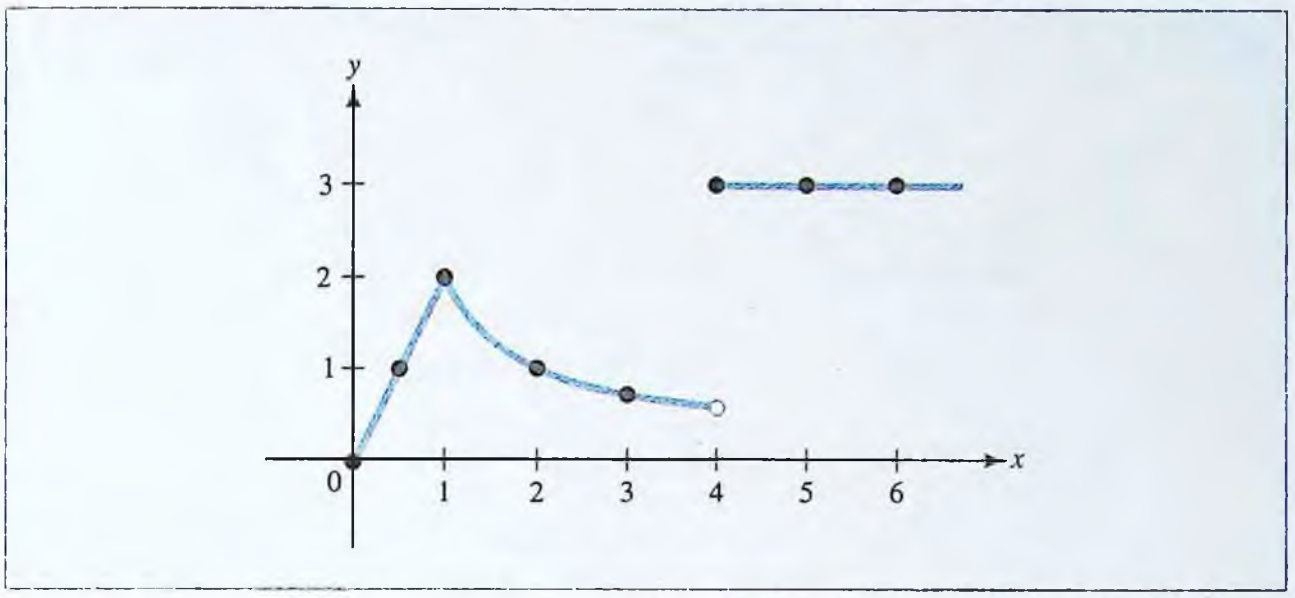


FIGURA 1.6 La gráfica de $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x < 1 \\ \dfrac{2}{x} & 1 \le x < 4. \\ 3 & x \ge 4 \end{cases}$

Intersecciones

Los puntos (si los hay) donde una gráfica corta al eje x se llaman **intersecciones con el eje x**, y de manera similar, una **intersección con el eje y** es un punto donde la gráfica corta al eje y. Las intersecciones son características clave de una gráfica y se pueden determinar usando el álgebra o la tecnología junto con los criterios que se muestran a continuación.

¡EXPLORE!

Usando su calculadora graficadora, localice las intersecciones de $f(x) = -x^2 + x + 2$ con el eje x. Esas intersecciones se pueden localizar primero usando el botón **ZOOM** y después pueden ser verificadas usando el comando raíz de la calculadora graficadora. Haga lo mismo para $g(x) = x^2 + x - 4$. ¿Qué forma de radical tienen estas raíces?

Cómo hallar las intersecciones con los ejes x y y

Para hallar cualquier intersección de $y = f(x)$, con el eje y se hace $x = 0$ y se calcula y. Para hallar cualquier intersección de $y = f(x)$ con el eje x, se hace $y = 0$ y se calcula x. La única intersección posible de una función con el eje y es $y_0 = f(0)$, sin embargo, las intersecciones con el eje x pueden ser difíciles de hallar.

EJEMPLO | 1.2.3

Grafique la función $f(x) = -x^2 + x + 2$. Incluya todas las intersecciones con los ejes x y y.

Solución

La intersección con el eje y es $f(0) = 2$. Para hallar las intersecciones con el eje x, resuelva la ecuación $f(x) = 0$. Al factorizar, se obtiene que

$$-x^2 + x + 2 = 0$$
$$-(x + 1)(x - 2) = 0$$
$$x = -1, \; x = 2$$

Entonces, las intersecciones con el eje x son $(-1, 0)$ y $(2, 0)$.
Ahora se crea una tabla de valores y se dibujan los puntos correspondientes $(x, f(x))$.

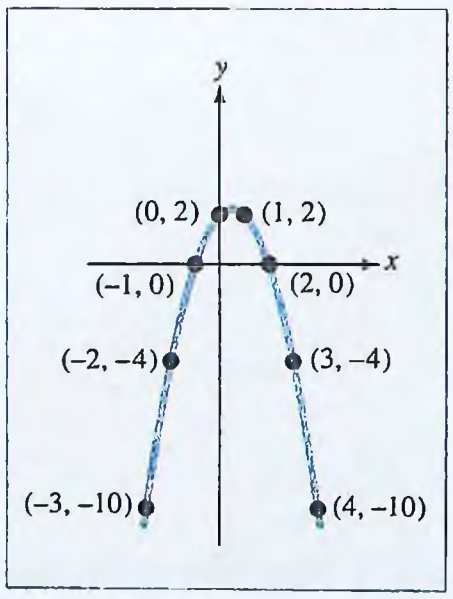


FIGURA 1.7 La gráfica de $f(x) = -x^2 + x + 2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-10	-4	0	2	2	0	-4	-10

La gráfica de f se muestra en la figura 1.7.

www.FreeLibros.com

NOTA La factorización en el ejemplo 1.2.3 es muy directa, pero en otros problemas se puede necesitar revisar el procedimiento de factorización que se encuentra en el apéndice A2.

Gráficas de parábolas

Las gráficas de las figuras 1.4 y 1.7 reciben el nombre de **parábolas**. En general, la gráfica de $y = Ax^2 + Bx + C$ es una parábola siempre y cuando $A \neq 0$. Todas las parábolas tiene "forma de U", y la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$ abre hacia arriba si $A > 0$ y hacia abajo si $A < 0$. El "pico" o "valle" de la parábola se denomina **vértice**, y siempre se encuentra donde $x = \dfrac{-B}{2A}$ (figura 1.8; véase también el problema 48). Dichas características de la parábola se deducen mediante los métodos del cálculo desarrollados en el capítulo 3. Observe que para obtener un trazo razonable de la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$, es necesario determinar tres características clave

1. La localización del vértice $\left(\text{donde } x = \dfrac{-B}{2A}\right)$
2. Si la parábola abre hacia arriba ($A > 0$) o hacia abajo ($A < 0$).
3. Cualquier intersección con los ejes de coordenadas.

Así, en el ejemplo 1.2.3, la parábola $y = -x^2 + x + 2$ abre hacia abajo (dado que $A = -1$ es negativa) y tiene su vértice (punto más alto) en $x = \dfrac{-B}{2A} = \dfrac{-1}{2(-1)} = \dfrac{1}{2}$.

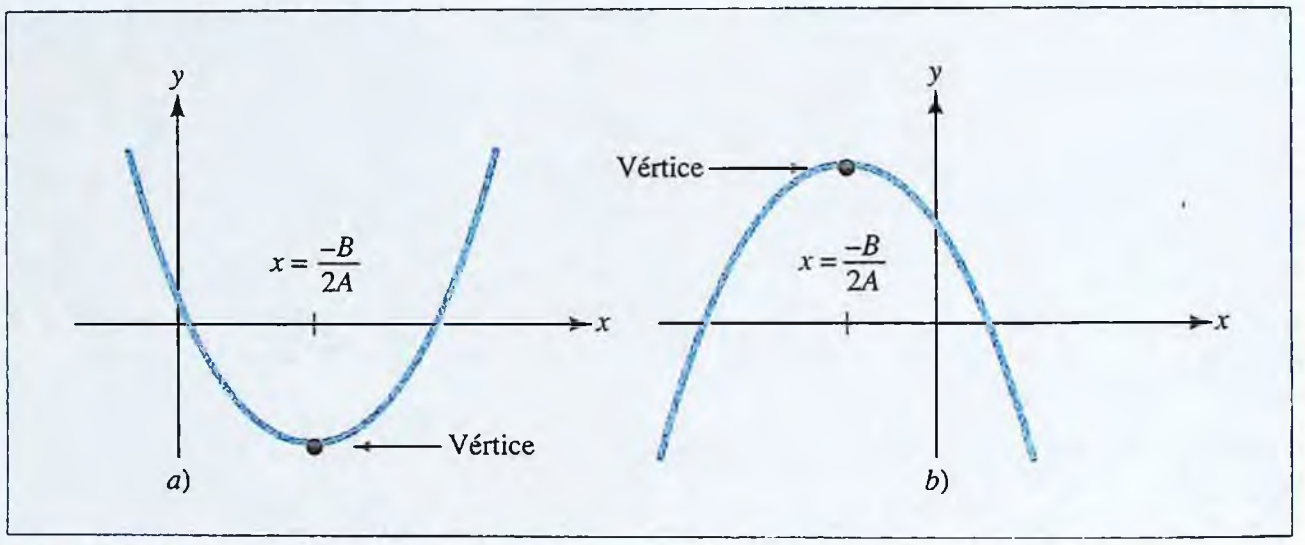


FIGURA 1.8 La gráfica de la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$. *a*) Si $A > 0$, la parábola abre hacia arriba. *b*) Si $A < 0$, la parábola abre hacia abajo.

En el capítulo 3, se estudiará un procedimiento mediante el cual la gráfica de una función de interés práctico se obtiene gracias a técnicas del cálculo, y luego se interpreta para obtener información útil acerca de la función, tal como sus valores mayor y menor. En el ejemplo 1.2.4 se usará lo que se conoce acerca de la gráfica de una parábola para determinar el ingreso máximo obtenido en un proceso de producción.

EJEMPLO | 1.2.4

Un fabricante determina que cuando se producen x cientos de unidades de un artículo en particular, todos ellos se pueden vender a un precio unitario dado por la función demanda $p = 60 - x$ dólares. ¿A qué nivel de producción se maximiza el ingreso? ¿Cuál es el ingreso máximo?

www.FreeLibros.com

Solución

El ingreso derivado de producir x cientos de unidades y venderlos todos a $60 - x$ dólares es $R(x) = x(60 - x)$ cientos de dólares. Observe que $R(x) \geq 0$ sólo para $0 \leq x \leq 60$. La gráfica de la función ingreso

$$R(x) = x(60 - x) = -x^2 + 60x$$

es una parábola que abre hacia abajo (ya que $A = -1 < 0$) y tiene su punto más alto (vértice) en

$$x = \frac{-B}{2A} = \frac{-60}{2(-1)} = 30$$

como se muestra en la figura 1.9. Así, el ingreso se maximiza cuando se producen $x = 30$ cientos de unidades, y el ingreso máximo correspondiente es

$$R(30) = 30(60 - 30) = 900$$

cientos de dólares. El fabricante debe producir 3 000 unidades y a ese nivel de producción, debe esperar un ingreso máximo de \$90 000.

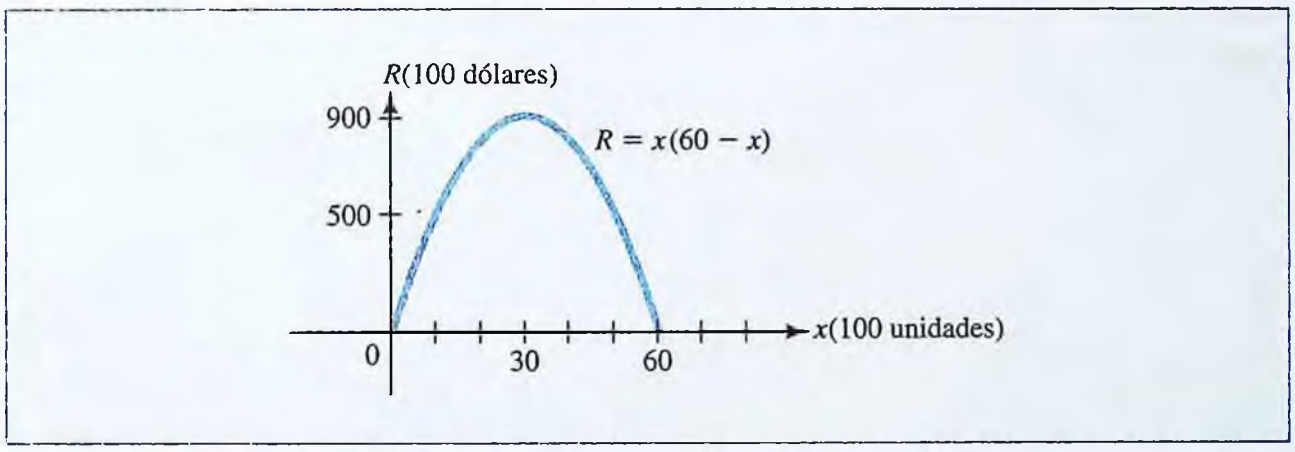


FIGURA 1.9 Una función ingreso.

Observe que también se puede encontrar el valor más grande de $R(x) = -x^2 + 60x$ completando el cuadrado

$$\begin{aligned} R(x) &= -x^2 + 60x = -(x^2 - 60x) && \text{se factoriza } -1, \text{ que es el coeficiente de } x \\ &= -(x^2 - 60x + 900) + 900 && \text{se completa el cuadrado dentro del paréntesis sumando } (-60/2)^2 = 900 \\ &\qquad\qquad -900 + 900 \\ &= -(x - 30)^2 + 900 \end{aligned}$$

De esta manera, $R(30) = 0 + 900 = 900$, y si c es cualquier número diferente de 30, entonces

$$R(c) = -(c - 30)^2 + 900 < 900 \qquad \text{ya que } -(c - 30)^2 < 0$$

así que el ingreso máximo es 900 cuando $x = 30$.

¡EXPLORE!

Remítase al ejemplo 1.2.5. Use su calculadora graficadora para hallar todos los puntos de intersección de las gráficas de $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = x^2$. También encuentre las raíces de $g(x) - f(x) = x^2 - 3x - 2$. ¿Qué puede concluir?

Intersecciones de gráficas

A veces es necesario determinar cuándo dos funciones son iguales. Por ejemplo, un economista desea calcular el precio de mercado en el que la demanda del consumidor para un artículo sea igual a la oferta. O un analista político quisiera predecir cuánto tardará un aspirante en alcanzar la popularidad de un titular. En la sección 1.4 se analizarán algunas de esas aplicaciones.

www.FreeLibros.com

En términos geométricos, los valores de x para los cuales las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son iguales son las coordenadas x de los puntos donde intersecan sus gráficas. En la figura 1.10, la gráfica de $y = f(x)$ interseca a la de $y = g(x)$ en dos puntos, identificados como P y Q. Para hallar los puntos de intersección algebraicamente, se iguala $f(x)$ a $g(x)$ y se resuelve la ecuación obtenida para x. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 1.2.5.

REPASO

Justo-a-tiempo

La **fórmula cuadrática** se usa en el ejemplo 1.2.5. Recuerde que este resultado indica que la ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$ tiene soluciones reales si y solo si $B^2 - 4AC \geq 0$, en cuyo caso, las soluciones son

$$r_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

y

$$r_2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

En el apéndice A2 puede encontrar un repaso de la fórmula cuadrática.

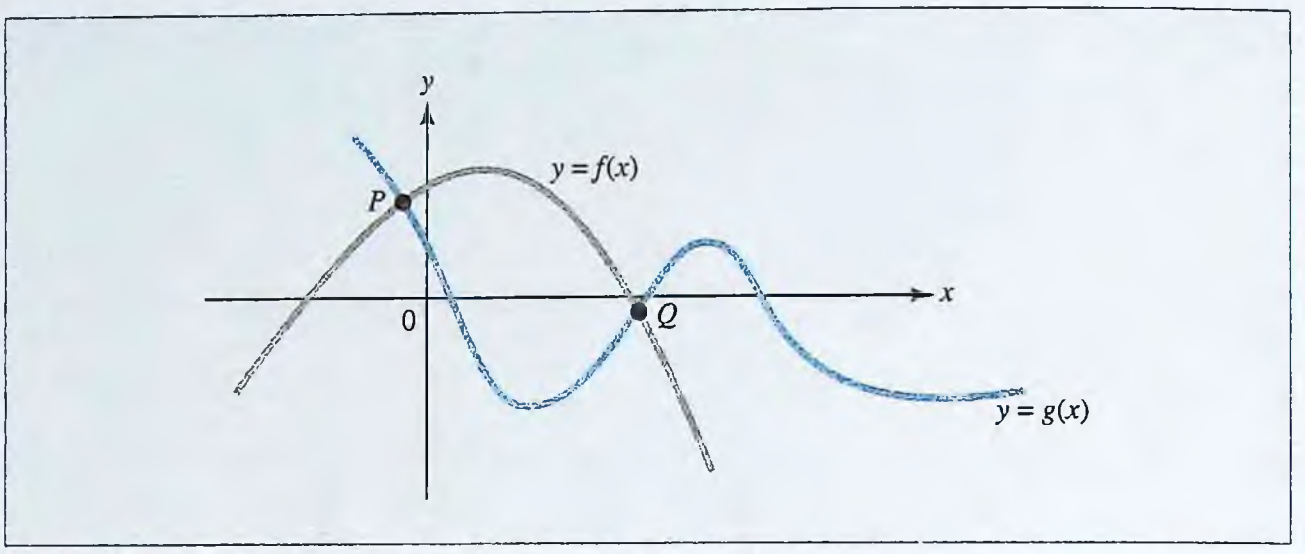


FIGURA 1.10 Las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x)$ intersecan a P y Q.

EJEMPLO | 1.2.5

Encuentre todos los puntos de intersección de las gráficas de $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = x^2$.

Solución

Hay que resolver la ecuación $x^2 = 3x + 2$. Reescriba la ecuación de la forma $x^2 - 3x - 2 = 0$ y aplique la fórmula cuadrática para obtener

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Las soluciones son

$$x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \approx 3.56 \quad \text{y} \quad x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \approx -0.56$$

(Los cálculos se hicieron en una calculadora, y los resultados se redondearon a dos cifras decimales.)

Al calcular las coordenadas correspondientes de y a partir de la ecuación $y = x^2$, hallará que los puntos de intersección son aproximadamente (3.56, 12.67) y (−0.56, 0.31). [Como resultado de los errores de redondeo, se pueden obtener valores ligeramente diferentes para las coordenadas de y si se sustituye en la ecuación $y = 3x + 2$]. En la figura 1.11 se muestran las gráficas y los puntos de intersección.

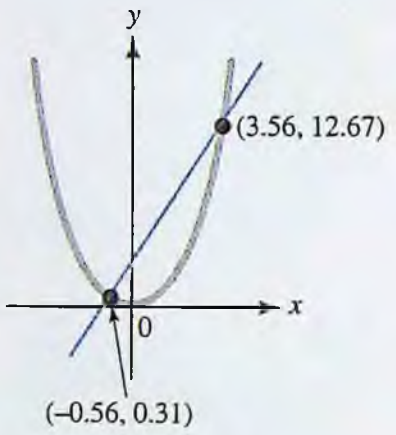


FIGURA 1.11 La intersección de las gráficas de $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = x^2$.

Funciones potencia, polinomios y funciones racionales

Una **función potencia** es una función de la forma $f(x) = x^n$, donde n es un número real. Por ejemplo, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^{-3}$, y $f(x) = x^{1/2}$ son funciones potencia. También lo son $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ya que pueden reescribirse como $f(x) = x^{-2}$ y $f(x) = x^{1/3}$ respectivamente.

Un **polinomio** es una función de la forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Use su calculadora para graficar el polinomio de tercer grado $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 3$. Haga conjeturas sobre los valores de las intersecciones con el eje x y confírmelos usando el procedimiento de determinación de raíces de su calculadora.

donde n es un entero no negativo y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son constantes. Si $a_n \neq 0$, el entero n se denomina el **grado** del polinomio. Por ejemplo, $f(x) = 3x^5 - 6x^2 + 7$ es un polinomio de grado 5. Puede demostrarse que la gráfica de un polinomio de grado n es una curva ininterrumpida que cruza el eje x no más de n veces. Para ilustrar algunas de las posibilidades, en la figura 1.12 se muestran las gráficas de tres polinomios de grado 3.

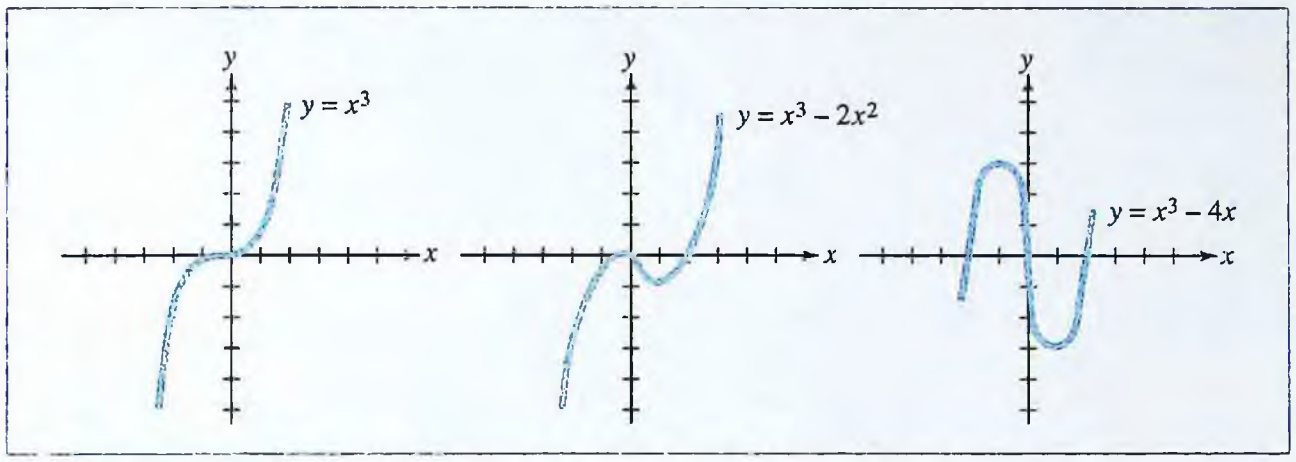


FIGURA 1.12 Tres polinomios de grado 3.

Un cociente $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ de dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ es llamado **función racional**. Tales funciones aparecen en todo este libro en los ejemplos y ejercicios. En la figura 1.13 se muestran las gráficas de tres funciones racionales. Se aprenderá a dibujar esas gráficas en la sección 3.3 del capítulo 3.

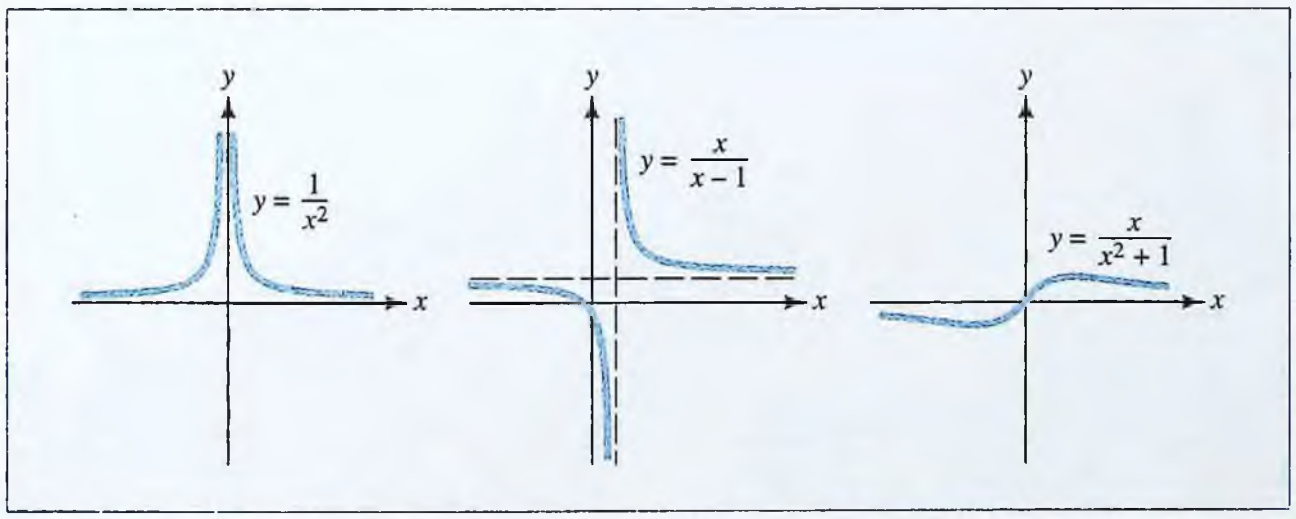


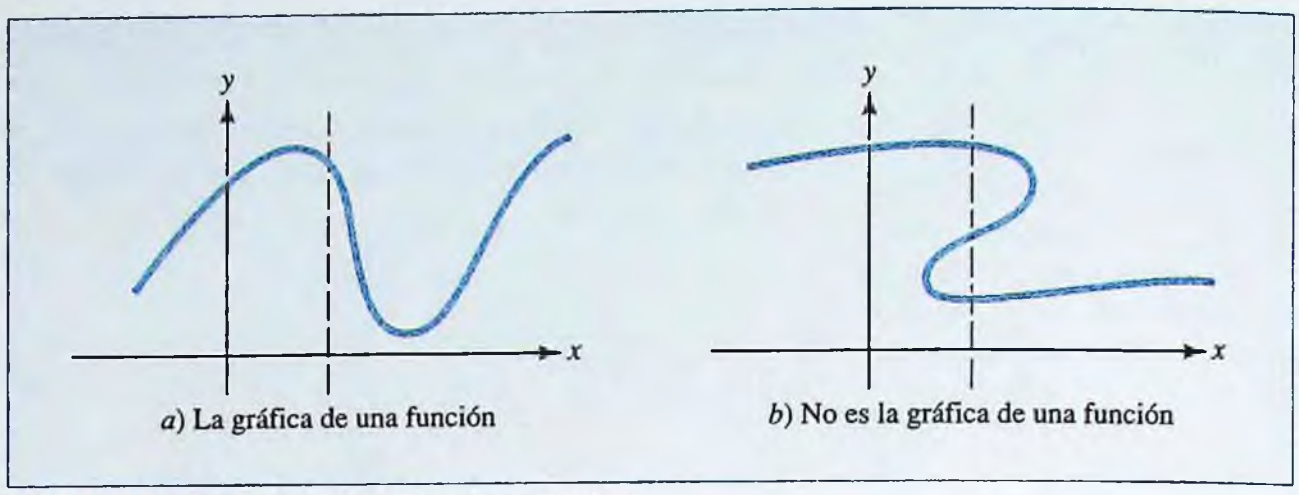
FIGURA 1.13 Gráficas de tres funciones racionales.

Criterio de la recta vertical

Hay que tomar en cuenta que no toda curva es la gráfica de una función (figura 1.14). Por ejemplo, suponga que el círculo $x^2 + y^2 = 5$ es la gráfica de alguna función $y = f(x)$. Entonces, como los puntos $(1, 2)$ y $(1, -2)$ yacen ambos en el círculo, se tendrá $f(1) = 2$ y $f(1) = -2$, lo que contradice la condición de que una función asigna uno y *sólo* un valor a cada número de su dominio. A continuación se verá una regla geométrica para determinar si una curva es la gráfica de una función o no.

Criterio de la recta vertical ■ Una curva es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical la interseca más de una vez.

www.FreeLibros.com



a) La gráfica de una función

b) No es la gráfica de una función

FIGURA 1.14 Criterio de la recta vertical.

PROBLEMAS | 1.2

En los problemas 1 y 2 clasifique cada función como un polinomio, una función potencia o una función racional. Si la función no es ninguno de esos tipos, clasifíquela como "diferente".

1. *a*) $f(x) = x^{1.4}$

b) $f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 8$

c) $f(x) = (3x - 5)(4 - x)^2$

d) $f(x) = \dfrac{3x^2 - x + 1}{4x + 7}$

2. *a*) $f(x) = -2 + 3x^2 + 5x^4$

b) $f(x) = \sqrt{x} + 3x$

c) $f(x) = \dfrac{(x - 3)(x + 7)}{-5x^3 - 2x^2 + 3}$

d) $f(x) = \left(\dfrac{2x + 9}{x^2 - 3}\right)^3$

En los problemas 3 a 18 dibuje la gráfica de la función dada. Incluya todas las intersecciones con el eje x y con el eje y.

3. $f(x) = x$

4. $f(x) = x^2$

5. $f(x) = x^3$

6. $f(x) = x^4$

7. $f(x) = 2x - 1$

8. $f(x) = 2 - 3x$

9. $f(x) = x(2x + 5)$

10. $f(x) = (x - 1)(x + 2)$

11. $f(x) = -x^2 - 2x + 15$

12. $f(x) = x^2 + 2x - 8$

13. $f(x) = \sqrt{x}$

14. $f(x) = -x^3 + 1$

15. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

16. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

17. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3 & \text{si } x < 1 \\ 1 - 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} 9 - x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 + x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

En los problemas 19 a 24 encuentre los puntos de intersección (si los hay) del par de curvas dado y dibuje las gráficas.

19. $y = 3x + 5$ y $y = -x + 3$

20. $y = 3x + 8$ y $y = 3x - 2$

21. $y = x^2$ y $y = 3x - 2$

22. $y = x^2 - x$ y $y = x - 1$

23. $3y - 2x = 5$ y $y + 3x = 9$

24. $2x - 3y = -8$ y $3x - 5y = -13$

www.FreeLibros.com

En cada uno de los problemas 25 a 28, se da la gráfica de una función $f(x)$. En cada caso encuentre:

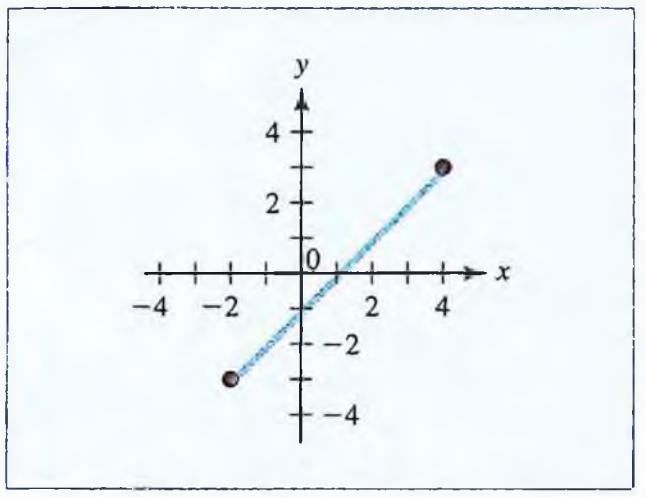
a) La intersección con el eje y.

b) Todas las intersecciones con el eje x.

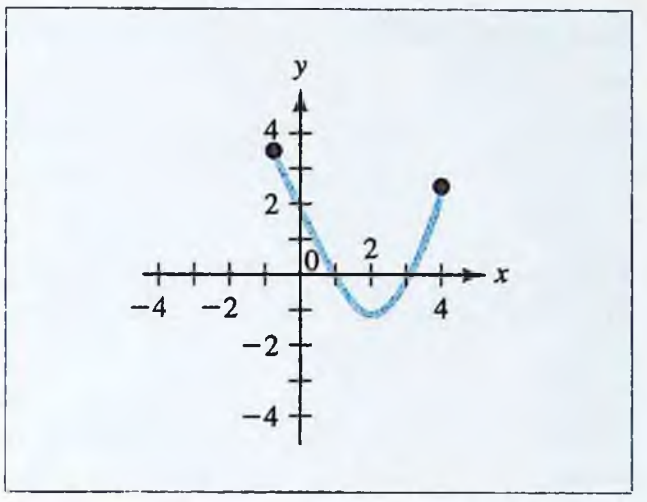
c) El mayor valor de $f(x)$ y el valor o valores de x para los que este se alcanza.

d) El menor valor de $f(x)$ y el valor o valores de x para los que este se alcanza.

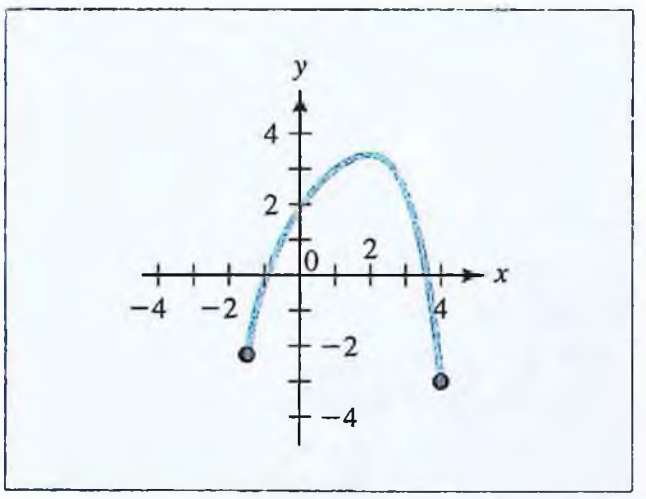
25.



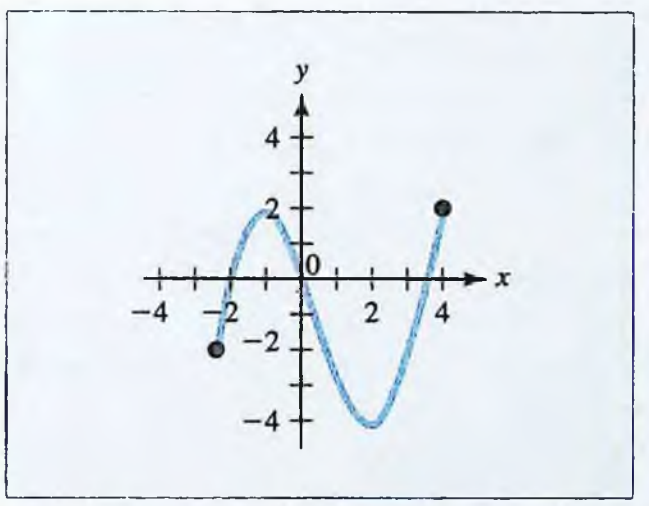
26.



27.



28.



29. COSTO DE FABRICACIÓN Un fabricante puede producir grabadoras a un costo de $40 dólares cada una. Se estima que si las grabadoras se venden a p dólares la pieza, los consumidores comprarán $120 - p$ de ellas al mes. Exprese la utilidad mensual del fabricante como una función del precio, grafique esta función y utilícela para estimar el precio óptimo de venta.

30. VENTAS AL POR MENOR Una librería puede obtener de la editorial un atlas a un costo de $10 dólares por ejemplar; se estima que si se vende el atlas a x dólares por ejemplar, se venderán aproximadamente $20(22 - x)$ copias cada mes. Exprese la utilidad mensual de la librería por la venta del atlas como una función del precio, grafique esta función y úsela para estimar el precio óptimo de venta.

31. GASTO DE CONSUMO Suponga que $x = -200p + 12\,000$ unidades de un artículo en particular se venden cada mes cuando el precio del mercado es p dólares por unidad. El gasto de consumo total mensual, E, es la cantidad total de dinero gastada por los consumidores durante cada mes.

a) Exprese el gasto de consumo total mensual, E, como una función del precio unitario p, y dibuje la gráfica de $E(p)$.

b) Analice el significado económico de las intersecciones con el eje p de la función de gasto $E(p)$.

c) Use la gráfica del inciso *a)* para determinar el precio de mercado que genera el mayor gasto de consumo total mensual.

www.FreeLibros.com

32. MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL Si se lanza un objeto verticalmente hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de 160 pies por segundo, su altura (en pies) t segundos después está dada por la función $H(t) = -16t^2 + 160t$.

a) Grafique la función $H(t)$.

b) Use la gráfica del inciso *a)* para determinar cuándo chocará el objeto con el suelo.

c) Use la gráfica del inciso *a)* para estimar la altura que alcanzará el objeto.

33. UTILIDAD Se supone que cuando el precio de cierto artículo es p dólares por unidad, entonces los consumidores comprarán x cientos de unidades, donde $p = -0.05x + 38$. El costo de producir x cientos de unidades es $C(x) = 0.02x^2 + 3x + 574.77$ cientos de dólares.

a) Exprese la utilidad P obtenida de la venta de x unidades como una función de x. Dibuje la gráfica de la función utilidad.

b) Use la curva de utilidad obtenida en el inciso *a)* para determinar el nivel de producción x que resulte en una utilidad máxima. ¿Qué precio unitario p corresponde a la utilidad máxima?

34. FLUJO SANGUÍNEO Refiérase al problema 57, sección 1.1, en el que la velocidad de la sangre localizada a r centímetros del eje central de una arteria está dada por la función $S(r) = C(R^2 - r^2)$, donde C es una constante y R es el radio de la arteria.[2] ¿Cuál es el dominio de esta función? Dibuje la gráfica de $S(r)$.

35. CAMINO SEGURO Cuando se conduce un automóvil a v millas por hora, el conductor promedio requiere D pies de visibilidad para frenar con seguridad, donde $D = 0.065v^2 + 0.148v$. Dibuje la gráfica de $D(v)$.

36. TARIFAS POSTALES El costo de enviar una carta o un paquete por correo de primera clase es de 37 centavos de dólar por la primera onza y 23 centavos por cada onza adicional o fracción de una onza. Sea $P(w)$ el costo de enviar un paquete que pesa w onzas, para $0 \leq w \leq 10$.

a) Describa $P(w)$ como una función definida por partes.

b) Dibuje la gráfica de P.

37. ¿Qué dimensiones de pantalla deberán usarse para obtener una gráfica adecuada para la función cuadrática

$$f(x) = -9x^2 + 3\,600x - 358\,200?$$

38. ¿Qué dimensiones de pantalla deberán usarse para graficar adecuadamente la función cuadrática

$$f(x) = 4x^2 - 2\,400x + 355\,000?$$

39. *a)* Grafique las funciones $y = x^2$ y $y = x^2 + 3$. ¿Cómo se relacionan?

b) Grafique la función $y = x^2 - 5$ sin efectuar cálculos adicionales.

c) Suponga que $g(x) = f(x) + c$, donde c es una constante. ¿Cómo se relacionan las gráficas de f y g? Explique.

40. *a)* Grafique las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$. ¿Cómo se relacionan las graficas?

b) Suponga que $g(x) = -f(x)$. ¿Cómo se relacionan las gráficas de f y g? Explique.

41. *a)* Grafique las funciones $y = x^2$ y $y = (x - 2)^2$. ¿Cómo se relacionan las gráficas?

b) Grafique la función $y = (x + 1)^2$ sin efectuar cálculos adicionales

c) Suponga que $g(x) = f(x - c)$, donde c es una constante. ¿Cómo se relacionan las gráficas de f y g? Explique.

42. Alquilar una pieza de un equipo cuesta \$90 dólares, más \$21 por cada día de uso.

a) Elabore una tabla que muestre el número de días en que el equipo está alquilado y el costo del alquiler para 2 días, 5 días, 7 días y 10 días.

b) Escriba una expresión algebraica que represente el costo y como una función del número de días x.

c) Grafique la expresión del inciso *b)*.

43. Grafique $g(x) = -3x^3 + 7x + 4$ y encuentre las intersecciones con el eje x.

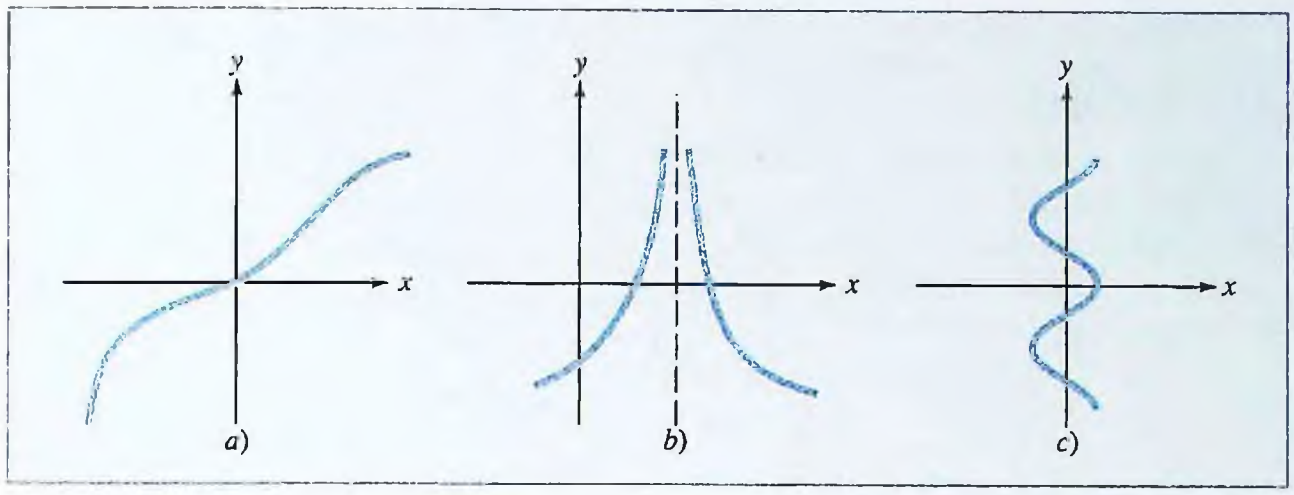
44. Use su calculadora gráfica para graficar $y = x^4$, $y = x^4 - x$, $y = x^4 - 2x$ y $y = x^4 - 3x$ sobre los mismos ejes de coordenadas, usando $[-2, 2]1$ por $[-2, 5]$. ¿Qué efecto tiene en la forma de la gráfica el término sumado que contiene x? Repita el procedimiento usando $y = x^4$, $y = x^4 - x^3$, $y = x^4 - 2x^3$ y $y = x^4 - 3x^3$. Ajuste apropiadamente las dimensiones de la pantalla.

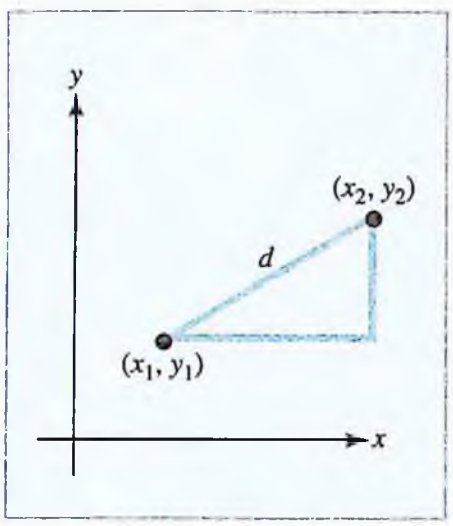
[2] E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 3a. ed., Nueva York, Springer-Verlag, 1976, pp. 101-103.

www.FreeLibros.com

45. En cada uno de los casos mostrados en la figura, use el criterio de la recta vertical para determinar si la curva dada es la gráfica de una función o no.

PROBLEMA 45





PROBLEMA 46

46. Demuestre que la distancia d entre dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por la fórmula

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

[*Sugerencia* Aplique el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el segmento de recta que une los dos puntos dados.] Después use la fórmula de la distancia para hallar la distancia entre los puntos

a) $(5, -1)$ y $(2, 3)$

b) $(2, 6)$ y $(2, -1)$

47. Use la fórmula de la distancia del problema 46 para demostrar que el círculo con centro (a, b) y radio R corresponde a la ecuación

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

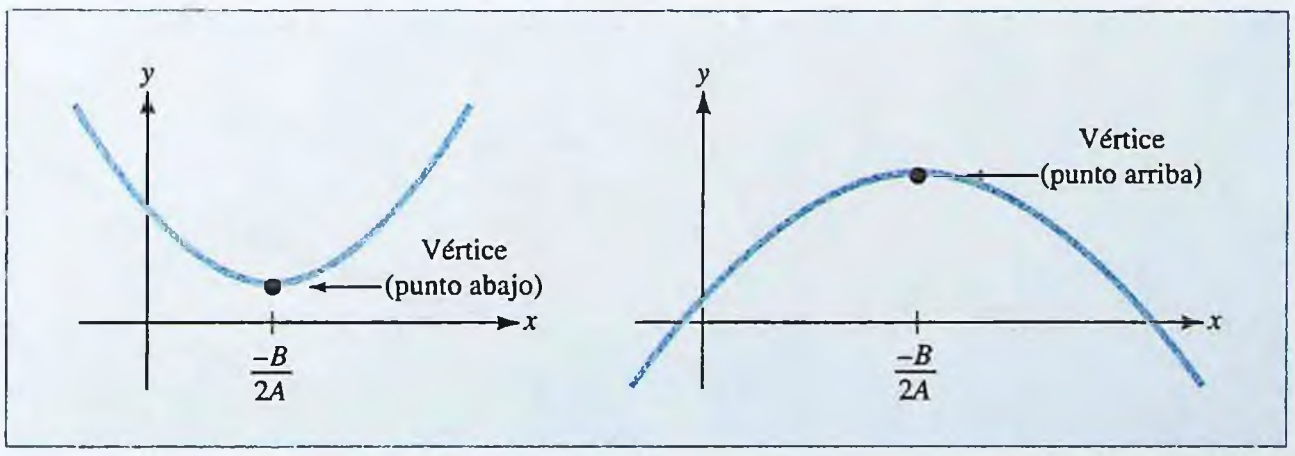
48. Demuestre que el vértice de la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$ $(A \neq 0)$ se alcanza en el punto donde $x = \dfrac{-B}{2A}$.

[*Sugerencia* Primero compruebe que

$$Ax^2 + Bx + C = A\left[\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(\frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A^2}\right)\right]$$

Después, observe que el mayor valor o el menor de $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ se debe alcanzar donde $x = \dfrac{-B}{2A}$.]

PROBLEMA 48



49. Grafique $f(x) = \dfrac{-9x^2 - 3x - 4}{4x^2 + x - 1}$. Determine los valores de x para los cuales la función está definida.

50. Grafique $f(x) = \dfrac{8x^2 + 9x + 3}{x^2 + x - 1}$. Determine los valores de x para los cuales la función está definida.

www.FreeLibros.com

SECCIÓN 1.3 | Funciones lineales

En muchas situaciones prácticas, la razón de cambio de una magnitud con respecto a otra es constante. A continuación se presenta un ejemplo de economía.

¡EXPLORE!

Introduzca la función de costo, Y1 = 50*x* + {200, 300, 400}, en el editor de ecuaciones; use los paréntesis para listar los diferentes costos indirectos. Ajuste las dimensiones de la pantalla con el menú WINDOW a [0, 5]1 por [−100, 700]100 para ver el efecto de variar los gastos indirectos.

EJEMPLO | 1.3.1

El costo total de un fabricante consiste en unos costos indirectos fijos de $200 dólares, más los costos de producción de $50 por unidad. Exprese el costo total como una función del número de unidades producidas y dibuje la gráfica.

Solución

Sea x el número de unidades producidas y $C(x)$ el costo total correspondiente. Entonces,

$$\text{Costo total} = (\text{costo por unidad})(\text{número de unidades}) + \text{costos fijos}$$

donde

$$\text{Costo por unidad} = 50$$

$$\text{Número de unidades} = x$$

$$\text{Costos fijos} = 200$$

Por tanto,

$$C(x) = 50x + 200$$

La gráfica de función de costo se dibuja en la figura 1.15.

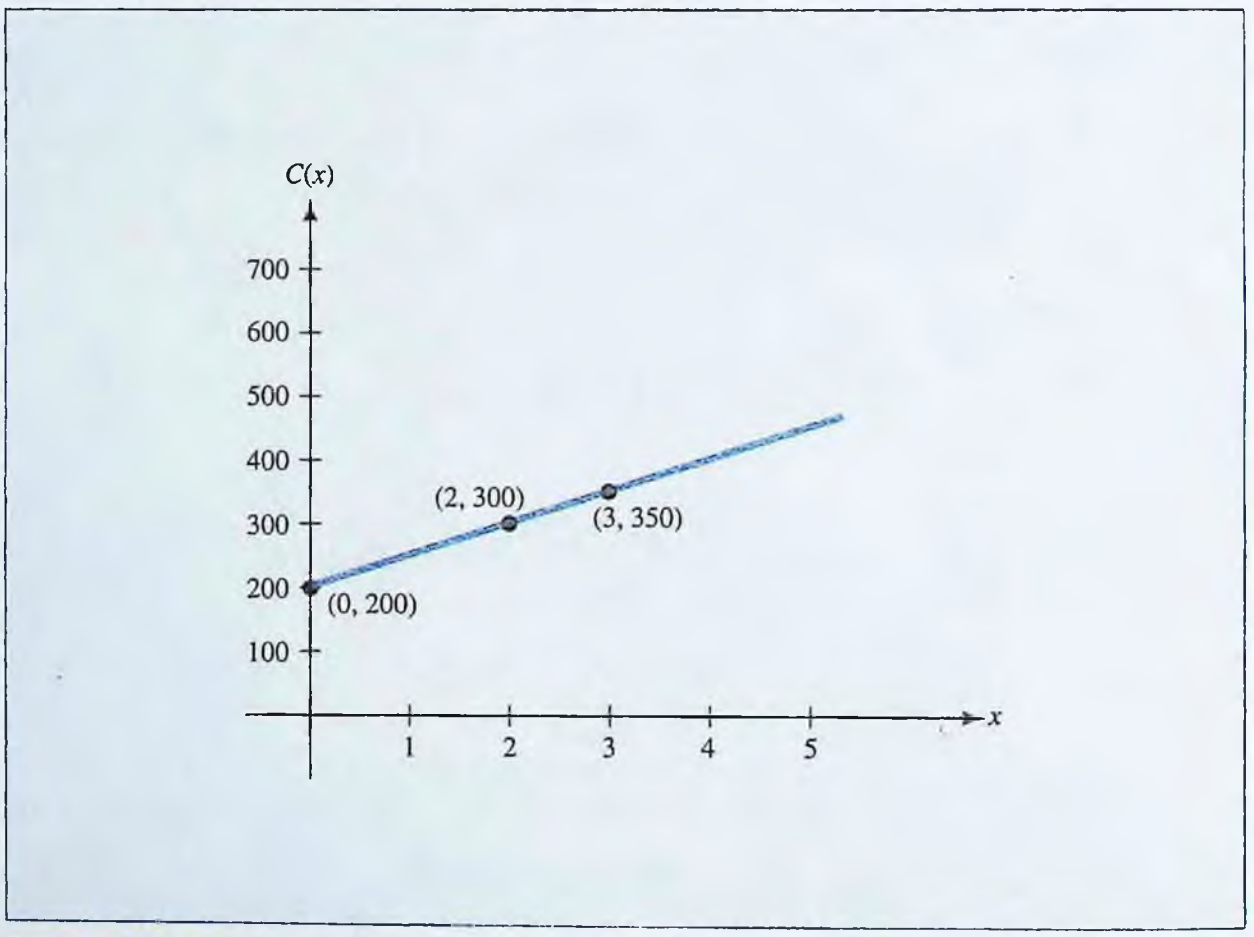


FIGURA 1.15 La función costo $C(x) = 50x + 200$.

www.FreeLibros.com

El costo total del ejemplo 1.3.1 aumenta a una tasa constante de \$50 por unidad. Como resultado, su gráfica en la figura 1.15 es una línea recta que aumenta en altura 50 unidades por cada unidad de incremento de x.

En general, una función cuyos valores cambian a razón constante con respecto a su variable independiente se dice que es una **función lineal**. Esto es porque la gráfica de tal función es una línea recta. En términos algebraicos, una función lineal es una función de la forma

$$f(x) = a_1x + a_0$$

donde a_0 y a_1 son constantes. Por ejemplo, las funciones $f(x) = \frac{3}{2} + 2x, f(x) = -5x$, y $f(x) = 12$ son lineales. Las funciones lineales se escriben tradicionalmente en la forma

$$y = mx + b$$

donde m y b son constantes. Esta notación estándar se utilizará en el siguiente análisis.

Funciones lineales ■ Una función lineal es una función que cambia a una razón constante con respecto a su variable independiente.

La gráfica de una función lineal es una línea recta.

La ecuación de una función lineal se puede escribir en la forma

$$y = mx + b$$

donde m y b son constantes.

La pendiente de una recta

Un agrimensor puede decir que una colina con una "elevación" de 2 pies por cada pie de "recorrido" tiene una **pendiente** de

$$m = \frac{\text{elevación}}{\text{recorrido}} = \frac{2}{1} = 2$$

Así mismo la inclinación de una recta se puede medir por la pendiente. En particular, suponga que (x_1, y_1) y (x_2, y_2) están sobre una recta, tal como se indica en la figura 1.16. Entre esos puntos, x cambia en $x_2 - x_1$ y y en $y_2 - y_1$. La pendiente es el cociente

$$\text{Pendiente} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Algunas veces es conveniente usar el símbolo Δy en lugar de $y_2 - y_1$ para denotar el cambio en y. El símbolo Δy se lee "delta y". De manera similar, el símbolo Δx se usa para denotar el cambio $x_2 - x_1$.

Pendiente de una recta ■ La pendiente de una recta no vertical que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) está dada por la fórmula

$$\text{Pendiente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

www.FreeLibros.com

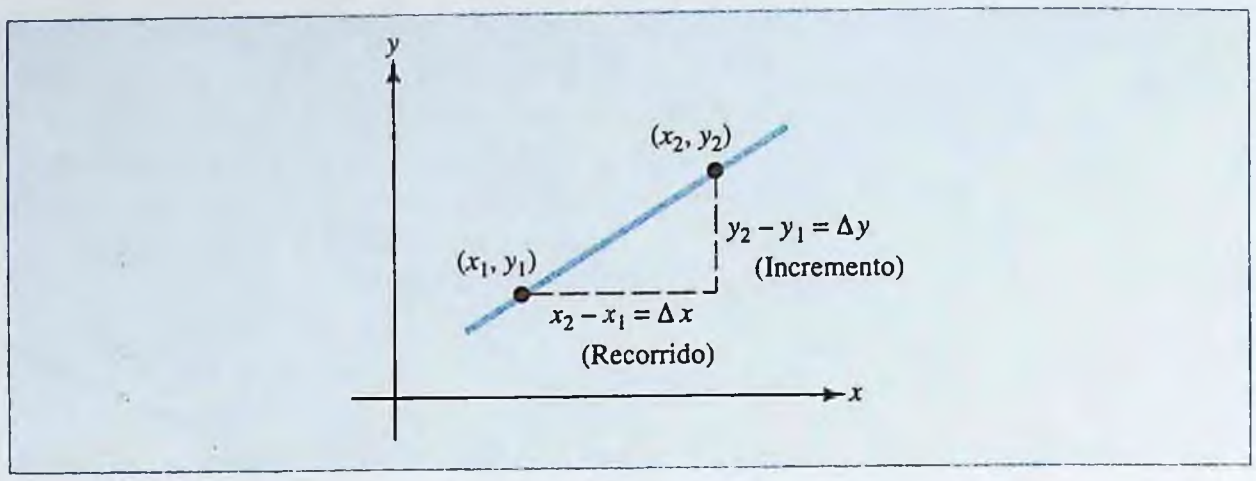


FIGURA 1.16 Pendiente $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

El uso de esta fórmula se ilustra en el ejemplo 1.3.2.

EJEMPLO | 1.3.2

Encuentre la pendiente de la recta que une los puntos $(-2, 5)$ y $(3, -1)$.

Solución

$$\text{Pendiente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - 5}{3 - (-2)} = \frac{-6}{5}$$

La recta se muestra en la figura 1.17.

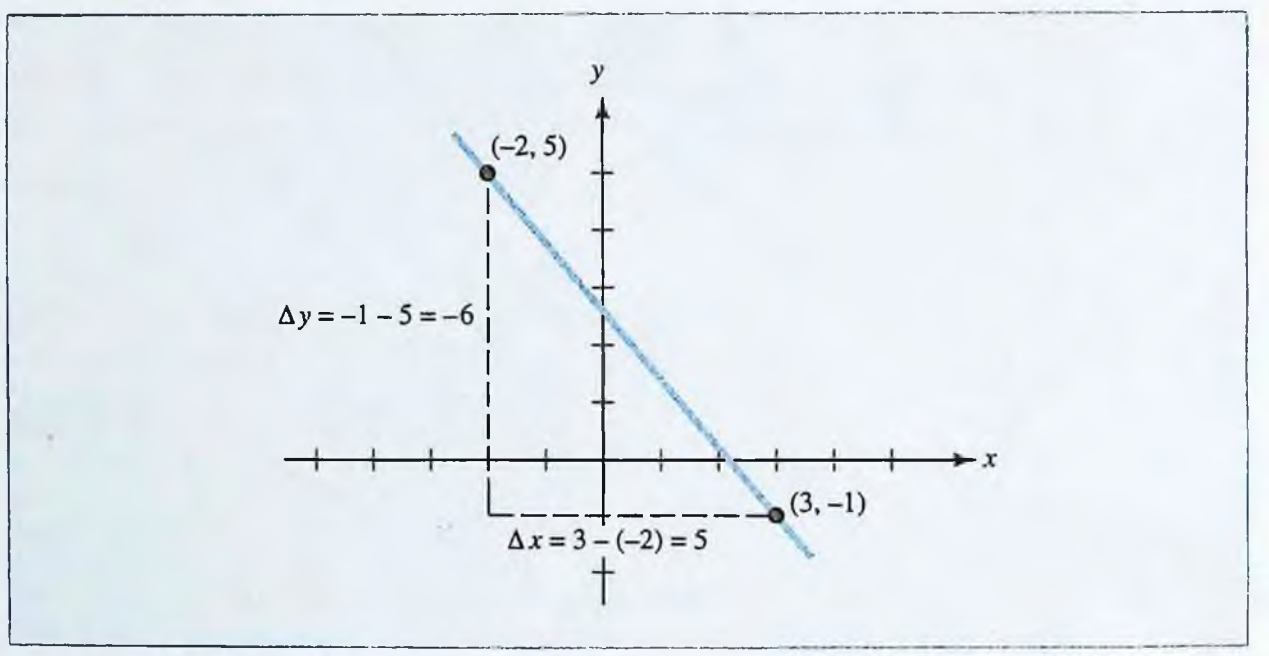


FIGURA 1.17 La recta que une $(-2, 5)$ y $(3, -1)$.

El signo y la magnitud de la pendiente de una recta indican la dirección y la inclinación de la recta, respectivamente. La pendiente es positiva si la altura de la recta aumenta a medida que x aumenta, y es negativa si la altura disminuye a medida que x aumenta. El valor absoluto de la pendiente es grande si la inclinación de la recta es severa y pequeño si la inclinación de la recta es gradual. Esta situación se ilustra en la figura 1.18.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Introduzca los valores variables de pendiente {2, 1, 0.5, −0.5, −1, −2} en List 1, usando el menú **STAT** y la opción **EDIT**. Genere una familia de líneas rectas que pasen por el origen, similar a las de la figura 1.18, esto se puede hacer escribiendo Y1 = L1 * X en el editor de ecuaciones de su calculadora. Grafique usando un **ZOOM** con la pantalla decimal y **TRACE** los valores para las diferentes rectas en X = 1.

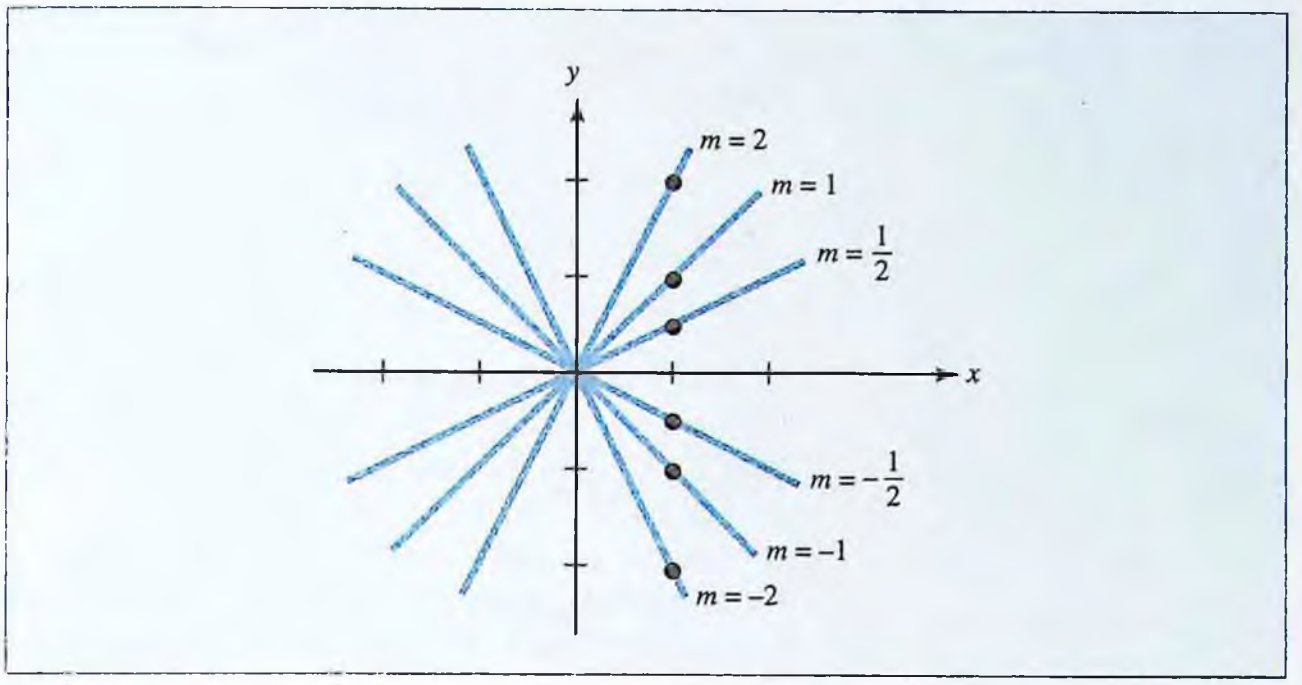


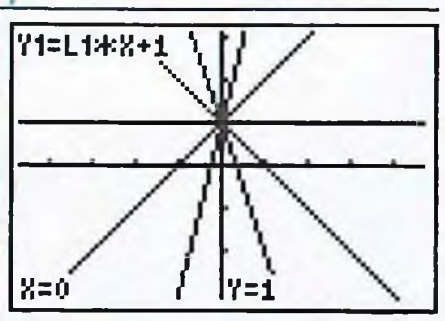
FIGURA 1.18 La dirección y la inclinación de una recta.

Rectas horizontales y verticales

Las rectas horizontales y verticales (figuras 1.19a y 1.19b) tienen, de manera particular, ecuaciones simples. Las coordenadas y de todos los puntos sobre una recta horizontal son las mismas. Por tanto, una recta horizontal es la gráfica de una función lineal de la forma $y = b$, donde b es una constante. La pendiente de una recta horizontal es cero, ya que los cambios en x no producen cambios en y.

La coordenada x de todos los puntos sobre una recta vertical es la misma. Por tanto, las rectas verticales se caracterizan por ecuaciones de la forma $x = c$, donde c es una constante. La pendiente de una recta vertical no está definida. Esto es porque para los puntos de una recta vertical sólo pueden cambiar las coordenadas y, de manera que el denominador del cociente $\dfrac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}$ es cero.

¡EXPLORE!



Determine los tres valores de pendiente que deben introducirse en List 1 de manera que Y1 = L1*X + 1 produzca la gráfica que aquí se ilustra.

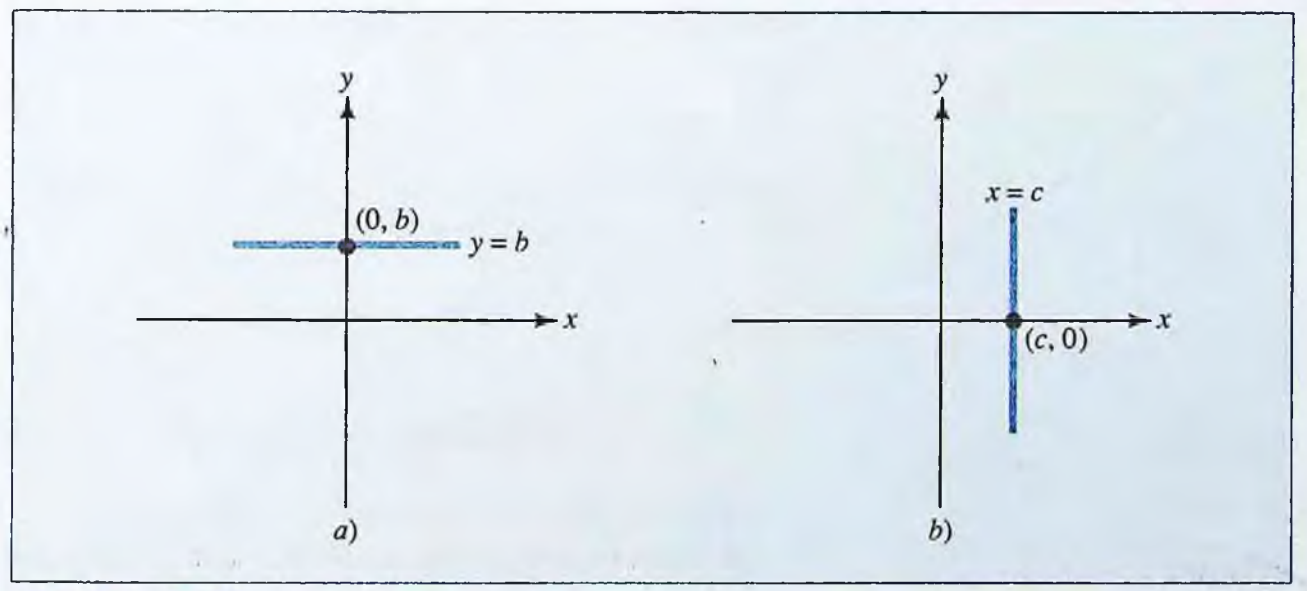


FIGURA 1.19 Rectas horizontales y verticales.

www.FreeLibros.com

La forma intercepto-pendiente de la ecuación de una recta

Las constantes m y b en la ecuación $y = mx + b$ de una recta no vertical tienen interpretaciones geométricas. El coeficiente m es la pendiente de la recta. Para ver esto, se supone que (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos sobre la recta $y = mx + b$. Entonces, $y_1 = mx_1 + b$ y $y_2 = mx_2 + b$, así que

$$\text{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(mx_2 + b) - (mx_1 + b)}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{mx_2 - mx_1}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

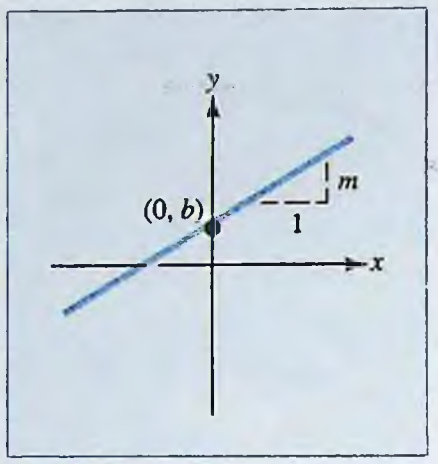


FIGURA 1.20 La pendiente y el intercepto de la recta $y = mx + b$.

La constante b en la ecuación $y = mx + b$ es el valor de y correspondiente a $x = 0$. Por tanto, b es la altura a la cual la recta $y = mx + b$ cruza el eje y, y el punto correspondiente $(0, b)$ es la intersección de la recta con el eje y. La situación se ilustra en la figura 1.20.

Como las constantes m y b de la ecuación $y = mx + b$ corresponden a la pendiente y a la intersección con el eje y, respectivamente, dicha forma de la ecuación de una recta se conoce como la **forma intercepto-pendiente**.

Forma intercepto-pendiente de la ecuación de una recta ■ La ecuación

$$y = mx + b$$

es la ecuación de la recta cuya pendiente es m y cuya intersección con el eje y es $(0, b)$.

La forma intercepto-pendiente de la ecuación de una recta es particularmente útil para determinar la información geométrica acerca de la recta (es decir, su pendiente o su intersección con el eje y) a partir de su representación algebraica. A continuación se da un ejemplo típico.

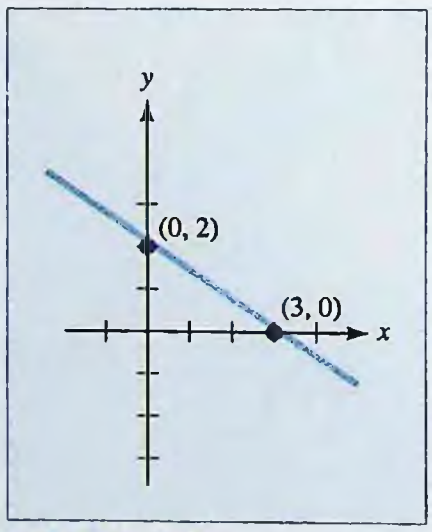


FIGURA 1.21 La recta $3y + 2x = 6$.

EJEMPLO | 1.3.3

Encuentre la pendiente y la intersección con el eje y de la recta $3y + 2x = 6$ y dibuje la gráfica.

Solución

Primero escriba la ecuación $3y + 2x = 6$ en la forma intercepto-pendiente $y = mx + b$. Después despeje y para obtener

$$3y = -2x + 6 \qquad \text{o} \qquad y = -\frac{2}{3}x + 2$$

Se deduce que la pendiente es $-\frac{2}{3}$ y que la intersección con el eje y es $(0, 2)$.

Para graficar una función lineal, marque dos de sus puntos y dibuje un línea recta que pase por ellos. En este caso, ya se conoce un punto, la intersección con el eje y $(0, 2)$. Un valor conveniente para la coordenada x del segundo punto es $x = 3$, puesto que la coordenada y correspondiente es $y = -\frac{2}{3}(3) + 2 = 0$. Dibuje la recta que pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(3, 0)$ para obtener la gráfica que aparece en la figura 1.21.

REPUBLICA B. UNIVERSID. Estado Trujillo LOS ANDES VENEZUELA Núcleo Universitario Rafael Rangel Procesos Técnicos BIBLIOTECA

www.FreeLibros.com

Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta

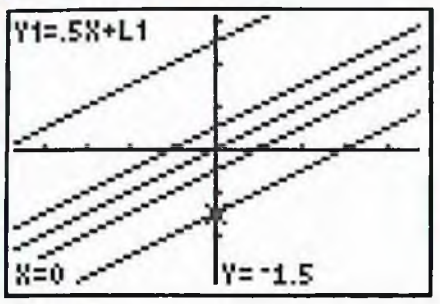
La información geométrica sobre una recta se puede obtener con facilidad de la fórmula intercepto-pendiente $y = mx + b$. Sin embargo, en los problemas donde se conocen las propiedades geométricas de una recta y el objetivo es hallar su ecuación, existe otra forma para la ecuación de la recta que generalmente es más útil.

Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta ■ La ecuación

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

es la ecuación de la recta que pasa por el punto (x_0, y_0) y que tiene pendiente igual a m.

¡EXPLORE!



Determine los valores de las intersecciones con el eje y necesarios en List L1 de manera que la función Y1 = .5X + L1 genere la gráfica aquí mostrada.

La forma punto-pendiente de la ecuación de una recta es simplemente la fórmula sin despejar la pendiente. Para demostrarlo, se supone que el punto (x, y) está sobre la recta que pasa por un punto dado (x_0, y_0) y que tiene pendiente m. Usando los puntos (x, y) y (x_0, y_0) para determinar la pendiente, se obtiene

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$$

la cual se puede escribir en la forma punto-pendiente

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

simplemente multiplicando ambos lados por $x - x_0$.
El uso de la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta se ilustra en los ejemplos 1.3.4 y 1.3.5.

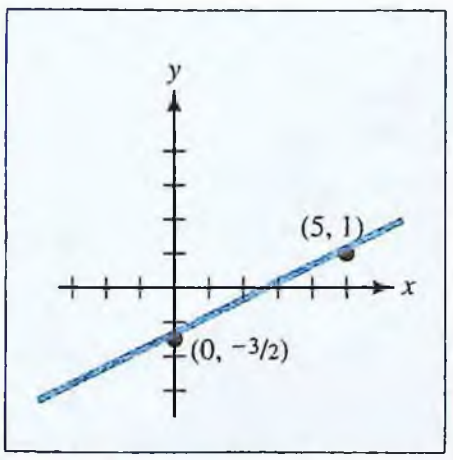


FIGURA 1.22 La recta $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

EJEMPLO | 1.3.4

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (5, 1) y cuya pendiente es igual a $\frac{1}{2}$.

Solución

Use la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$ con $(x_0, y_0) = (5, 1)$ y $m = \frac{1}{2}$ para obtener

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 5)$$

lo cual se puede reescribir como

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

La gráfica se muestra en la figura 1.22.

Como ejercicio de práctica, resuelva la problema 1.3.4 usando la fórmula intercepto-pendiente. Advierta que la solución basada en la fórmula punto-pendiente es más eficiente.

www.FreeLibros.com

En el capítulo 2, se usará frecuentemente la forma punto-pendiente para hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función en un punto dado. El ejemplo 1.3.5 ilustra cómo se puede usar la fórmula punto-pendiente para encontrar la ecuación de una recta que pase por dos puntos dados.

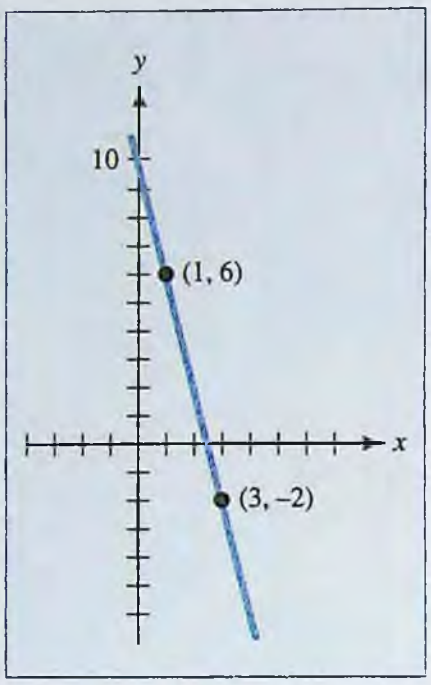


FIGURA 1.23 La recta $y = -4x + 10$.

EJEMPLO | 1.3.5

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(3, -2)$ y $(1, 6)$.

Solución

Primero calcule la pendiente

$$m = \frac{6 - (-2)}{1 - 3} = \frac{8}{-2} = -4$$

Luego, use la fórmula punto-pendiente con $(1, 6)$ como el punto dado (x_0, y_0) para obtener

$$y - 6 = -4(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = -4x + 10$$

Compruebe que la ecuación resultante sería la misma si se hubiera escogido $(3, -2)$ como el punto dado (x_0, y_0). La gráfica se muestra en la figura 1.23.

NOTA La forma general de la ecuación de una recta es $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son constantes, con A y B no iguales a cero. Si $B = 0$, la recta es vertical, y cuando $B \neq 0$, la ecuación $Ax + By + C = 0$ se puede escribir como

$$y = \left(\frac{-A}{B}\right)x + \left(\frac{-C}{B}\right)$$

Al comparar esta ecuación con la forma intercepto-pendiente $y = mx + b$, se puede ver que la pendiente de la recta está dada por $m = -A/B$ y que la intersección con el eje y es $b = -C/B$. La recta es horizontal (pendiente 0) cuando $A = 0$. ■

Aplicaciones prácticas

Si la razón de cambio de una magnitud respecto a una segunda magnitud es constante, entonces la función que relaciona las dos magnitudes debe ser lineal. La razón de cambio constante es la pendiente de la recta correspondiente. Los ejemplos 1.3.6 y 1.3.7 ilustran las técnicas que se pueden utilizar para hallar las funciones lineales apropiadas en tales situaciones.

EJEMPLO | 1.3.6

Desde el comienzo del año, el precio del pan integral de trigo en un supermercado ha ido en aumento a una razón constante de 2 centavos por mes. Para el 1º de noviembre, el precio llegó a \$1.56 por unidad. Exprese el precio del pan como una función del tiempo y determine el precio al comienzo del año.

Solución

Sea x el número de meses que han transcurrido desde el primer día del año y y el precio del paquete de pan (en centavos). Como y cambia a una razón constante con respecto a x, la función que relaciona y con x debe ser lineal, y su gráfica es una línea recta. Puesto que el precio y aumenta en 2 centavos cada vez que x aumenta en 1, la pendiente de la recta debe ser 2. El hecho de que el precio fuera 156 centavos (\$1.56) el 1º de noviembre, 10 meses después del primer día del año, implica que la recta pasa por el punto (10,

www.FreeLibros.com

156). Para escribir una ecuación que defina y como una función de x, use la fórmula punto-pendiente

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Con $$m = 2,\ x_0 = 10,\ y_0 = 156$$

para obtener $$y - 156 = 2(x - 10) \quad \text{o} \quad y = 2x + 136$$

La recta correspondiente se muestra en la figura 1.24. Observe que la intersección con el eje y es (0, 136), lo cual implica que el precio del pan al comienzo del año era \$1.36 por unidad.

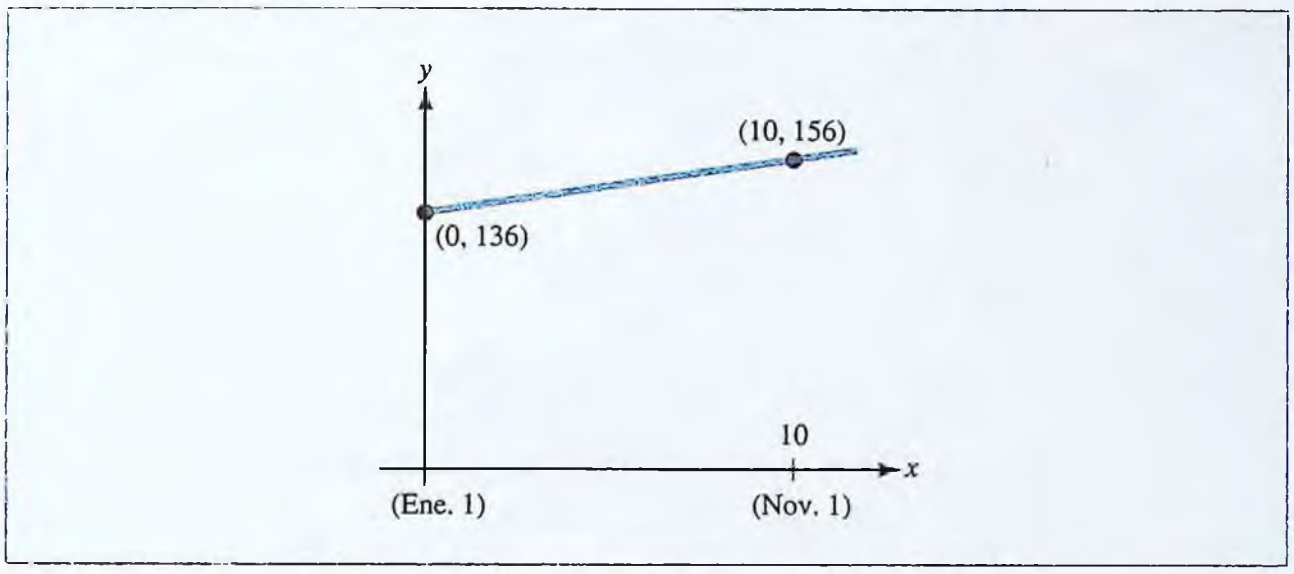


FIGURA 1.24 El precio creciente del pan: $y = 2x + 136$.

A veces, con sólo examinar los datos es difícil saber cómo se relacionan dos magnitudes x y y en un conjunto de datos. En tales casos, es de utilidad graficar los datos para ver si los puntos (x, y) siguen un patrón claro (es decir, se sitúan a lo largo de una recta). A continuación se presenta un ejemplo de este procedimiento.

EJEMPLO | 1.3.7

En la tabla 1.4 se lista el porcentaje de fuerza laboral que estuvo desempleada durante la década de 1991-2000. Dibuje una gráfica con el tiempo (años después de 1991) sobre el eje x, y porcentaje de desempleo sobre el eje y. ¿Siguen los puntos un patrón claro? Con base en esos datos, ¿qué se esperaría como porcentaje de desempleo en el año 2005?

Solución

La gráfica se muestra en la figura 1.25. Observe que excepto por el punto inicial (0, 6.8), el patrón es más o menos lineal. No hay suficiente evidencia para inferir que el desempleo está linealmente relacionado con el tiempo, pero el patrón sugiere que se puede obtener información útil determinando la recta que "mejor ajusta" los datos en cierto sentido. Uno de esos procedimientos, llamado "método de mínimos cuadrados", determina la recta que aproxima los datos de manera que la suma de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos dados a la recta sea mínima. El método de mínimos cuadrados, que se analizará en la sección 7.4 del capítulo 7, puede ejecutarse en su calculado-

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Introduzca los datos de la tabla 1.4 en L1 y L2 usando el editor de datos **STAT** de su calculadora graficadora, donde L1 es el número de años desde 1991 y L2 es el porcentaje de desempleo. Luego, siguiendo las instrucciones de la calculadora para gráficas estadísticas, use los botones **STAT** y **STAT PLOT** para verificar la gráfica de dispersión y la recta de mejor ajuste como la mostrada en la figura 1.25.

TABLA 1.4 Porcentaje de desempleo civil durante 1991–2000

Año	Número de años desde 1991	Porcentaje de desempleados
1991	0	6.8
1992	1	7.5
1993	2	6.9
1994	3	6.1
1995	4	5.6
1996	5	5.4
1997	6	4.9
1998	7	4.5
1999	8	4.2
2000	9	4.0

FUENTE EUA Bureau of Labor Statistics, Bulletin 2307; and *Employment and Earnings*, mensual.

ra. Cuando este procedimiento es aplicado a los datos de desempleo del ejemplo, se obtiene la "recta de mejor ajuste" $y = -0.389x + 7.338$, como se muestra en la figura 1.25. Esta fórmula se puede utilizar para intentar predecir la tasa de desempleo en el año 2005 (cuando $x = 14$)

$$y(14) = -0.389(14) + 7.338 = 1.892$$

De esta manera, con base en la extrapolación, mediante mínimos cuadrados, a partir de los datos dados, la mejor suposición es que en 2005 habrá aproximadamente una tasa de desempleo de 1.9%.

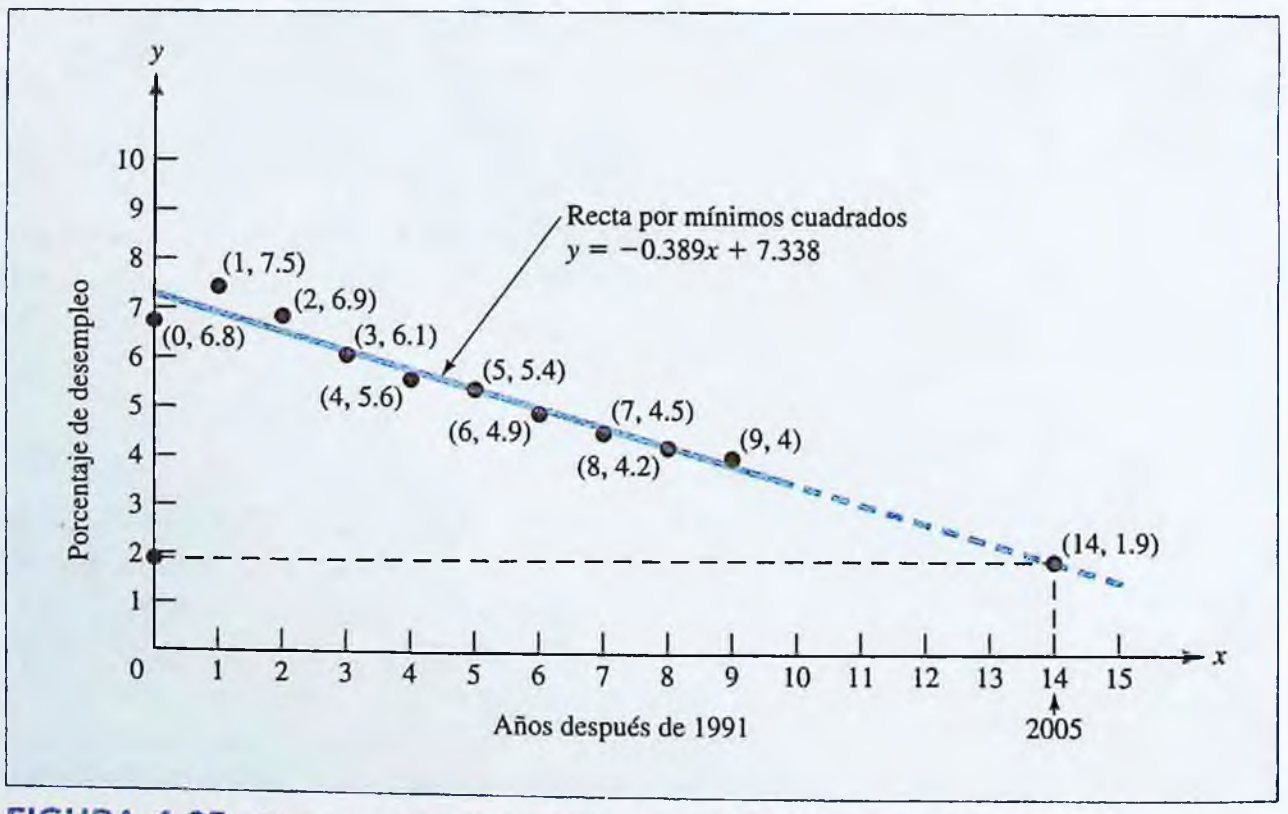


FIGURA 1.25 Porcentaje de desempleo en Estados Unidos durante 1991-2000.

www.FreeLibros.com

NOTA Se debe tener cuidado cuando se hagan predicciones extrapolando a partir de datos conocidos, especialmente cuando el conjunto de datos es tan pequeño como el del ejemplo 1.37. En particular, la economía comenzó a debilitarse después del año 2000, pero la recta de mínimos cuadrados de la figura 1.25 predice una tasa uniforme de desempleo decreciente. ¿Es esto razonable? En el problema 59, se pide explorar este asunto, primero usando la internet para obtener información acerca del desempleo en los años posteriores al 2000, y luego, comparando estos nuevos datos con los valores que se predicen mediante la recta de mínimos cuadrados. ■

Rectas paralelas y perpendiculares

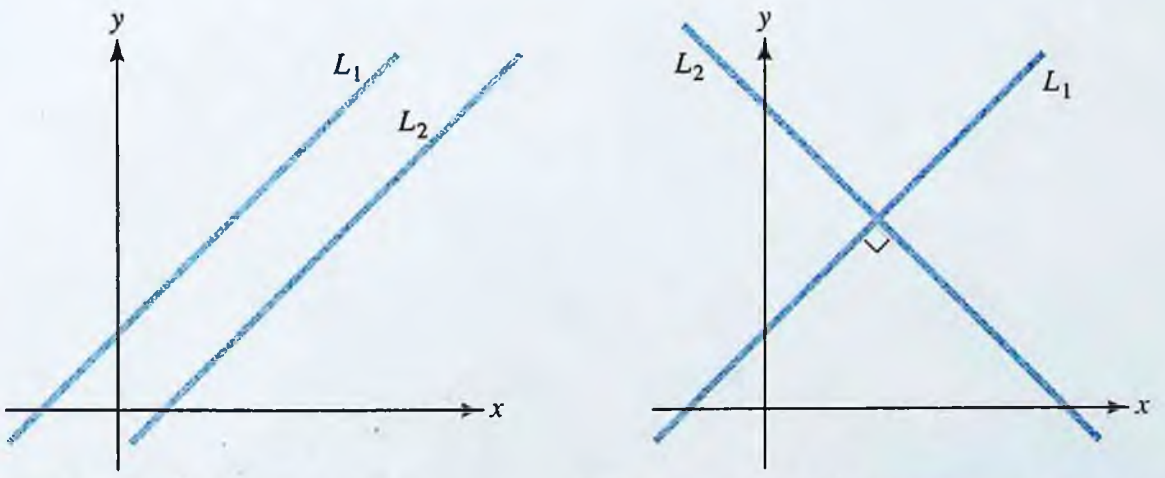
En las aplicaciones, algunas veces es necesario o útil saber si dos rectas dadas son paralelas o perpendiculares. Una recta vertical es paralela sólo a otras rectas verticales y es perpendicular a cualquier recta horizontal. En los casos que incluyen rectas no verticales pueden emplearse los siguientes criterios.

Rectas paralelas y perpendiculares ■ Sea m_1 y m_2 las pendientes de las rectas no verticales L_1 y L_2. Entonces

L_1 y L_2 son **paralelas** si y sólo si $m_1 = m_2$

L_1 y L_2 son **perpendiculares** si y sólo si $m_2 = \dfrac{-1}{m_1}$

Estos criterios se ilustran en la figura 1.26. Las pruebas geométricas se presentan en los ejercicios 60 y 61. Esta sección se cierra con un ejemplo que ilustra una forma de utilizar esos criterios.



a) Las rectas paralelas tienen $m_1 = m_2$ *b*) Las rectas perpendiculares tienen $m_2 = -1/m_1$

FIGURA 1.26

EJEMPLO | 1.3.8

Sea L la recta $4x + 3y = 3$.

a) Encuentre la ecuación de una recta L_1, paralela a L, y que pasa por $P(-1, 4)$.

b) Encuentre la ecuación de una recta L_2, perpendicular a L, y que pasa por $Q(2, -3)$.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Escriba Y1 = AX + 2 y Y2 = (−1/A)X + 5 en el editor de ecuaciones de su calculadora graficadora. En la pantalla principal (home), guarde diferentes valores en A, y luego grafique ambas rectas usando una pantalla cuadrada **ZOOM**. ¿Qué observa para los diferentes valores de A ($A \neq 0$)? ¿Puede resolver el problema para el punto de intersección en términos del valor de A)?

Solución

Al reescribir la ecuación $4x + 3y = 3$ en la forma intercepto-pendiente $y = -\frac{4}{3}x + 1$, se observa que L tiene pendiente $m_L = -\frac{4}{3}$.

a) Toda recta paralela a L también debe tener como pendiente $m = -\frac{4}{3}$. La recta buscada L_1 contiene al punto $P(-1, 4)$, entonces

$$y - 4 = -\frac{4}{3}(x + 1)$$

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$$

b) Una recta perpendicular a L debe tener como pendiente $m = -1/m_L = \frac{3}{4}$. Como la recta buscada L_2 contiene al punto $Q(2, -3)$, se tiene

$$y + 3 = \frac{3}{4}(x - 2)$$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{2}$$

La recta dada L y las rectas buscadas L_1 y L_2 se muestran en la figura 1.27.

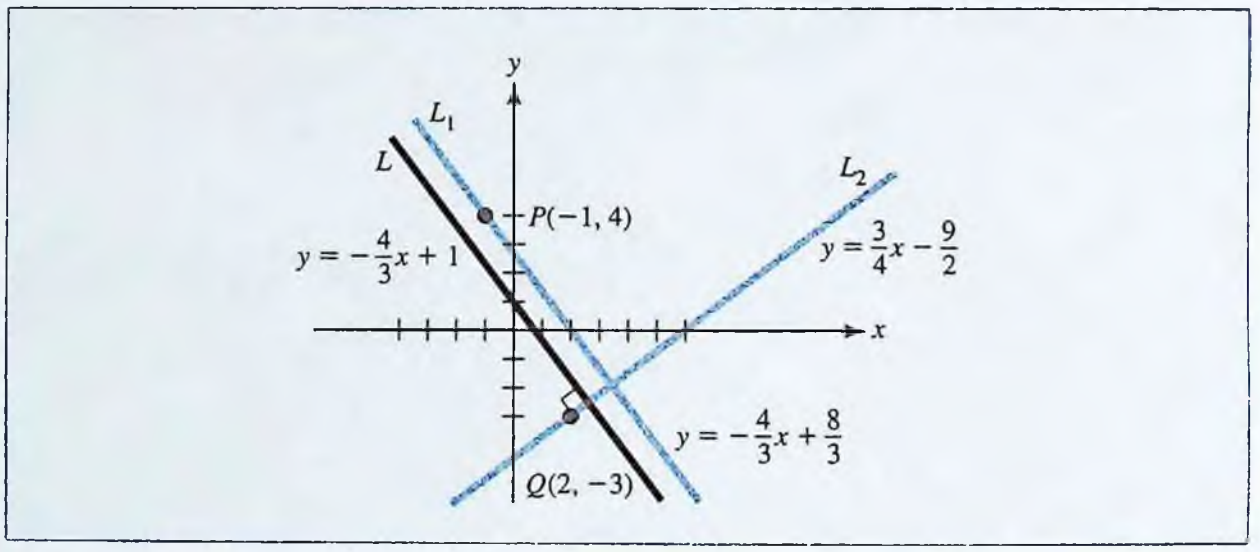


FIGURA 1.27 Rectas paralelas y perpendiculares a una recta L dada.

PROBLEMAS | 1.3

En los problemas 1 a 6, halle la pendiente (si es posible) de la recta que pasa por el par de puntos dado.

1. (2, −3) y (0, 4)

2. (−1, 2) y (2, 5)

3. (2, 0) y (0, 2)

4. (5, −1) y (−2, −1)

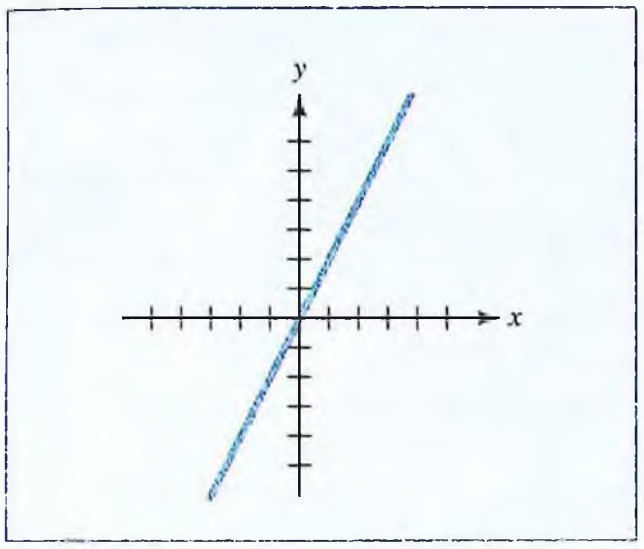
5. (2, 6) y (2, −4)

6. $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{5}\right)$ y $\left(-\frac{1}{7}, \frac{1}{8}\right)$

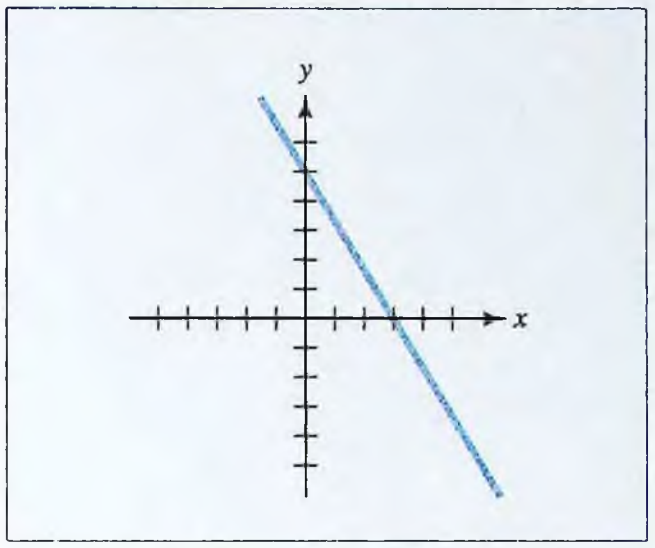
www.FreeLibros.com

En los problemas 7 a 10, halle la pendiente y las intersecciones de la recta mostrada. Luego determine una ecuación para la recta.

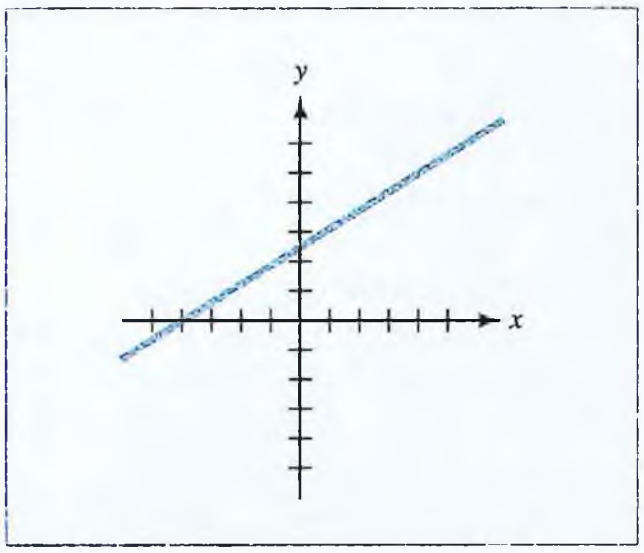
7.



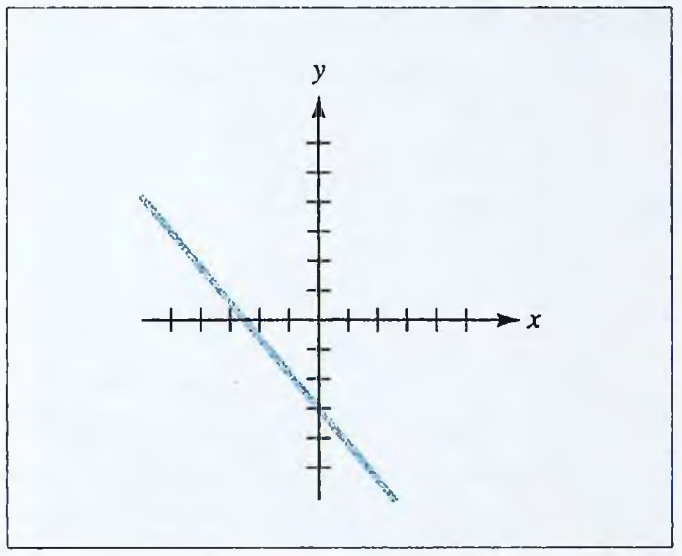
8.



9.



10.



En los problemas 11 a 18, halle la pendiente y las intersecciones de la recta cuya ecuación se da, y dibuje la gráfica de la recta.

11. $x = 3$

12. $y = 5$

13. $y = 3x$

14. $y = 3x - 6$

15. $3x + 2y = 6$

16. $5y - 3x = 4$

17. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{5} = 1$

18. $\dfrac{x+3}{-5} + \dfrac{y-1}{2} = 1$

En los problemas 19 a 34, escriba una ecuación para la recta con las propiedades indicadas.

19. Pasa por (2, 0) y su pendiente es 1

20. Pasa por $(-1, 2)$ y su pendiente es $\dfrac{2}{3}$

21. Pasa por $(5, -2)$ y su pendiente es $-\dfrac{1}{2}$

22. Pasa por (0, 0) y su pendiente es 5

23. Pasa por (2, 5) y es paralela al eje x

24. Pasa por (2, 5) y es paralela al eje y

25. Pasa por (1, 0) y (0, 1)

26. Pasa por (2, 5) y $(1, -2)$

27. Pasa por $\left(-\dfrac{1}{5}, 1\right)$ y $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{4}\right)$

28. Pasa por $(-2, 3)$ y (0, 5)

29. Pasa por (1, 5) y (3, 5)

30. Pasa por (1, 5) y $(1, -4)$

31. Pasa por (4, 1) y es paralela a la recta $2x + y = 3$

32. Pasa por $(-2, 3)$ y es paralela a la recta $x + 3y = 5$

33. Pasa por (3, 5) y es perpendicular a la recta $x + y = 4$

34. Pasa por $\left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$ y es perpendicular a la recta $2x + 5y = 3$

www.FreeLibros.com

35. COSTO DE FABRICACIÓN El costo total de un fabricante consiste de gastos indirectos fijos de $5 000, más costos de producción de $60 por unidad. Exprese el costo total como una función del número de unidades producidas y dibuje la gráfica.

36. RENTA DE AUTOMÓVILES Cierta agencia de renta de automóviles cobra $35 por día más 55 centavos de dólar por milla.

a) Exprese el costo de rentar un automóvil en esta agencia durante 1 día como una función del número de millas recorridas y dibuje la gráfica.

b) ¿Cuánto cuesta rentar un automóvil para un viaje de 1 día de 50 millas?

c) ¿Cuántas millas se recorrieron si el costo de la renta de un día fue de $72?

37. INSCRIPCIÓN A CURSOS Durante el verano los estudiantes de una universidad estatal pueden preinscribirse por correo para sus clases de otoño. Los que no lo hagan deben inscribirse en persona durante el mes de septiembre. La persona encargada de las inscripciones puede procesar 35 estudiantes por hora durante el periodo de registro de septiembre. Se supone que al cabo de 4 horas en septiembre, se han registrado 360 estudiantes (incluidos los que se habían inscrito previamente).

a) Exprese el número de estudiantes inscritos como una función del tiempo y dibuje la gráfica.

b) ¿Cuántos estudiantes se inscribieron después de 3 horas?

c) ¿Cuántos estudiantes se registraron previamente en el verano?

38. CUOTAS DE MEMBRESÍA La membresía de un club de natación cuesta $250 por las 12 semanas de la temporada de verano. Si un miembro se inscribe después del inicio de la temporada, el costo se prorratea; es decir, se reduce linealmente.

a) Exprese el costo de la membresía como una función del número de semanas que han transcurrido hasta el momento en que se paga la membresía y dibuje la gráfica.

b) Calcule el costo de una membresía que se paga 5 semanas después de haber iniciado la temporada.

39. DEPRECIACIÓN LINEAL Un médico posee libros de medicina cuyo valor es de $1 500; para efectos de impuestos, se supone que ese valor se deprecia linealmente a cero en un periodo de 10 años. Esto es, el valor de los libros disminuye a razón constante de manera que será igual a cero al final de los 10 años. Exprese el valor de los libros como una función del tiempo y dibuje la gráfica.

40. DEPRECIACIÓN LINEAL Un fabricante compra $20 000 en maquinaria que se deprecia linealmente, de manera que su valor comercial al cabo de 10 años será de $1 000.

a) Exprese el valor de la maquinaria como una función de su antigüedad y dibuje la gráfica.

b) Calcule el valor de la maquinaria al cabo de 4 años.

c) ¿Cuándo será cero el valor de la maquinaria? Tal vez el fabricante no espere tanto para desechar la maquinaria. Analice los aspectos a considerar por el fabricante para decidir cuándo venderla.

41. CONSUMO DE AGUA Desde el comienzo del mes, una presa ha estado perdiendo agua a razón constante. En el día 12 del mes la presa tenía 200 millones de galones de agua, y el día 21 tenía 164 millones de galones.

a) Exprese la cantidad de agua en la presa como una función del tiempo y dibuje la gráfica.

b) ¿Cuánta agua tenía la presa el octavo día del mes?

42. COSTO DE IMPRESIÓN Un editor estima que el costo de producir entre 1 000 y 10 000 ejemplares de cierto libro es $50 por ejemplar; entre 10 001 y 20 000, el costo es $40 por ejemplar; y entre 20 001 y 50 000, el costo es $35 por ejemplar.

a) ¿Qué función $F(N)$ da el costo total de producir N ejemplares del libro para $1\,000 \leq N \leq 50\,000$?

b) Dibuje la gráfica de la función $F(N)$ que se determinó en el inciso *a*).

43. PRECIO DE LAS ACCIONES Ciertas acciones tenían un precio inicial de oferta pública de $10 por acción, y se negocian las 24 horas. Dibuje la gráfica del precio de la acción para un periodo de 2 años en cada uno de los siguientes casos

a) El precio aumenta uniformemente a $50 por acción para los primeros 18 meses y luego disminuye uniformemente a $25 por acción para los siguientes 6 meses.

b) Le toma justo 2 meses aumentar el precio a razón constante de $15 por acción, luego bajar lentamente a $8 en los siguientes 9 meses antes de aumentar uniformemente a $20.

c) El precio aumenta uniformemente a $60 por acción durante el primer año, pero en ese tiempo se descubre un escándalo financiero. El precio baja a $25 la acción, luego disminuye uniformemente a $5 en los siguientes 3 meses antes de aumentar a razón constante para cerrar a $12 al final del periodo de los 2 años.

44. UNA FÁBULA ANTIGUA En la fábula de Esopo, acerca de la carrera entre la tortuga y la liebre, la tortuga apenas camina a razón constante desde el inicio hasta la meta. La liebre comienza a correr

www.FreeLibros.com

uniformemente con paso mucho más rápido, pero a medio camino de la meta, se detiene y toma una siesta. Finalmente, la liebre despierta, ve a la tortuga cerca de la de la meta, y de manera desesperada corre lo más rápido posible pero pierde por un pelo. En un plano coordenado, grafique las distancias recorridas respectivamente por la tortuga y la liebre desde la línea de inicio, como funciones del tiempo.

45. CRECIMIENTO DE UN NIÑO La altura promedio H, en centímetros, de un niño de A años de edad se puede estimar mediante la función lineal $H = 6.5A + 50$. Utilice esta fórmula para responder a las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la altura promedio de los niños de 7 años?

b) ¿A qué edad la altura promedio de los niños es de 150 cm?

c) ¿Cuál es la altura promedio de los recién nacidos? ¿Le parece razonable esta respuesta?

d) ¿Cuál es la altura promedio de las personas de 20 años? ¿Le parece razonable esta respuesta?

46. ACUERDO ENTRE AUTOMOVILISTAS Para animar a los automovilistas a realizar acuerdos para transportarse en grupos, la dirección de tránsito de cierta área metropolitana ofrece un descuento especial en los peajes para los vehículos que llevan cuatro o más pasajeros. Cuando comenzó el programa hace 30 días, 157 vehículos calificaron para la tarifa reducida durante la hora más congestionada de la mañana. Desde entonces el número de vehículos que han calificado se ha incrementado a una razón constante y hoy día hay 247 vehículos calificados.

a) Exprese el número de vehículos que califican cada mañana para obtener la tarifa de descuento como una función del tiempo y dibuje la gráfica.

b) Si la tendencia continúa, ¿cuántos vehículos calificarán dentro de 14 días durante la hora de mayor congestión en la mañana?

47. CONVERSIÓN DE TEMPERATURA

a) La temperatura medida en grados Fahrenheit es una función lineal de la temperatura medida en grados Celsius. Utilice el hecho de que 0° Celsius es igual a 32° Fahrenheit y 100° Celsius es igual a 212° Fahrenheit para escribir una ecuación que represente esta función lineal.

b) Utilice la función obtenida en el inciso *a*) para convertir 15° Celsius en grados Fahrenheit.

c) Convierta 68° Fahrenheit en grados Celsius.

d) ¿Qué temperatura es la misma en ambas escalas (Celsius y Fahrenheit)?

48. ENTOMOLOGÍA Se ha observado que el número de chirridos que produce un grillo cada minuto depende de la temperatura. Los grillos no producen chirridos si la temperatura es de 38°F o menos, y las observaciones arrojaron los siguientes datos

Número de chirridos (C)	0	5	10	20	60
Temperatura T (°F)	38	39	40	42	50

a) Exprese T como una función lineal de C.

b) ¿Cuántos chirridos se esperaría escuchar si la temperatura fuera de 75°F? Si se escuchan 37 chirridos en un periodo de 30 segundos, ¿cuál es la temperatura aproximada?

49. APRECIACIÓN DE BIENES El valor de cierto libro raro se duplica cada 10 años. En 1900, el libro valía $100.

a) ¿Cuánto valía en 1930?, ¿en 1990?, ¿y cuánto en el año 2000?

b) Es el valor del libro una función lineal de su antigüedad? Responda a esta pregunta interpretando la gráfica adecuada.

50. CONTAMINACIÓN DEL AIRE En ciertas partes del mundo, se ha observado que el número de muertes por semana, N, está linealmente relacionado con la concentración promedio de dióxido de sulfuro en el aire, x. Suponga que hay 97 muertes cuando $x = 100$ mg/m^3 y 110 muertes cuando $x = 500$ mg/m^3.

a) ¿Cuál es la relación funcional entre N y x?

b) Utilice la función del inciso *a*) para hallar el número de muertes por semana cuando $x = 300$ mg/m^3. ¿Qué concentración de dióxido de sulfuro corresponde a 100 muertes por semana?

c) Realice una investigación acerca de cómo la contaminación del aire afecta a la tasa de mortalidad en una población.[3] Resuma sus resultados en un pequeño ensayo.

51. ADMISIONES UNIVERSITARIAS Los puntajes medios en el examen SAT de matemáticas para los estudiantes que ingresan a una facultad de artes se han reducido a una razón constante en los últimos años. En 1995, el puntaje promedio en el SAT fue 575, mientras que en el 2000 fue de 545.

a) Exprese el puntaje promedio en el SAT como una función del tiempo.

b) Si la tendencia continúa, ¿cuál será el puntaje promedio en el SAT de los estudiantes que ingresen en el año 2005?

[3] Pueden resultar útiles los artículos: D. W.Dockery, J. Schwartz, and J. D. Spengler, "Air Pollution and Daily Mortality: Associations with Particulates and Acid Aerosols", *Environ. Res.*, Vol. 59, 1992, pp. 362-373; Y. S. Kim, "Air Pollution, Climate, Socioeconomics Status and Total Mortality in the United States", *Sci. Total Environ.*, vol. 42, 1985, pp. 245-256.

www.FreeLibros.com

c) Si la tendencia continúa, ¿cuándo será 527 el puntaje promedio en el SAT?

52. NUTRICIÓN Cada onza de alimento I contiene 3 gramos de carbohidratos y 2 gramos de proteína, y cada onza del alimento II contiene 5 gramos de carbohidratos y 3 gramos de proteína. Se supone que x onzas del alimento I se mezclan con y onzas del alimento II. Los alimentos se combinan para producir una mezcla que contiene exactamente 73 gramos de carbohidratos y 46 gramos de proteína.

a) Explique por qué hay $3x + 5y$ gramos de carbohidratos en la mezcla y por qué $3x + 5y = 73$. Determine una ecuación similar para la cantidad de proteína. Dibuje las gráficas de ambas ecuaciones.

b) ¿Dónde se intersecan las dos gráficas obtenidas en el inciso *a)*? Interprete el significado de este punto de intersección.

53. CONTABILIDAD Para propósitos de impuestos, el valor contable de ciertos bienes se determina depreciando linealmente el valor original del bien en un periodo fijo. Suponga que un bien valía originalmente V dólares y que se deprecia linealmente en un periodo de N años, al final del cual tiene un valor de rescate de S dólares.

a) Exprese el valor contable B de un bien en el año t dentro del periodo de depreciación de N años, como una función lineal de t. [*Sugerencia* Observe que $B = V$ cuando $t = 0$ y $B = S$ cuando $t = N$].

b) Suponga que un equipo de \$50 000 se deprecia linealmente en un periodo de 5 años, con un valor de rescate de \$18 000. ¿Cuál es el valor contable del equipo al cabo de tres años?

54. El cuerpo humano metaboliza el alcohol etílico a una razón constante (independientemente de la concentración). Suponga que la razón es 10 ml por hora.

a) ¿Cuánto tiempo se requiere para eliminar los efectos de un litro de cerveza que contiene 3% de alcohol etílico?

b) Exprese el tiempo T requerido para metabolizar los efectos de tomar alcohol etílico como una función de la cantidad A de alcohol etílico consumido.

c) Analice cómo se puede utilizar la función obtenida en el inciso *b)* para determinar un valor "extremo" razonable para la cantidad de alcohol etílico A que cada persona puede consumir en una fiesta.

55. Grafique $y = \frac{25}{7}x + \frac{13}{2}$ y $y = \frac{144}{45}x + \frac{630}{229}$ en el mismo sistema de ejes coordenados usando $[-10, 10]1$ por $[-10, 10]1$. ¿Son paralelas las rectas?

56. Grafique $y = \frac{54}{270}x - \frac{63}{19}$ y $y = \frac{139}{695}x - \frac{346}{14}$ en el mismo sistema de ejes coordenados usando inicialmente un rango de pantalla de $[-10, 10]1$ por $[-10, 10]1$. Ajuste la configuración del rango hasta que se muestren ambas rectas. ¿Son paralelas las dos rectas?

57. RENTA DE EQUIPO Una compañía de renta de equipos alquila un equipo por una cuota fija de \$60 más un valor de \$5 por hora.

a) Elabore un cuadro que muestre el número de horas que el equipo ha estado rentado, así como el costo de rentar el equipo durante 2 horas, 5 horas, 10 horas y t horas.

b) Escriba una expresión algebraica que represente el costo y como una función del número de horas t. Suponga que t se puede calcular para cualquier fracción decimal de una hora. (En otras palabras, suponga que t es un número real no negativo.)

c) Grafique la expresión hallada en el inciso *b)*.

d) Utilice la gráfica para aproximar, con dos cifras decimales, el número de horas que el equipo fue rentado si la cuenta es de \$216.25 (antes de impuestos).

58. ASTRONOMÍA En la siguiente tabla se indica la duración del año, L, (en años terrestres), de cada planeta del sistema solar junto con la distancia media D del planeta al Sol, en unidades astronómicas (1 unidad astronómica es la distancia media de la Tierra al Sol).

Planeta	Distancia media desde el Sol, D	Duración del año, L
Mercurio	0.388	0.241
Venus	0.722	0.615
Tierra	1.000	1.000
Marte	1.523	1.881
Júpiter	5.203	11.862
Saturno	9.545	29.457
Urano	19.189	84.013
Neptuno	30.079	164.783
Plutón	39.463	248.420

FUENTE: Kendrick Frazier, *The Solar System*, Alexandria, VA: Time/Life Books, p. 37.

www.FreeLibros.com

a) Marque el punto (D, L) para cada planeta en un plano de coordenadas. ¿Estas magnitudes parecen estar linealmente relacionadas?

b) Para cada planeta calcule el cociente $\frac{L^2}{D^3}$.

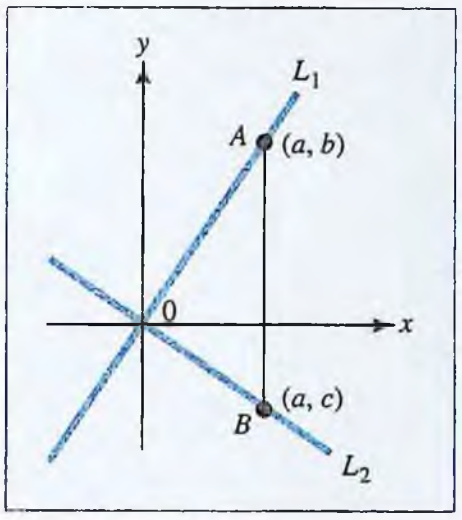
Interprete lo obtenido al expresar L como una función de D.

c) La expresión que se obtuvo en el inciso *b*) es una de las leyes de Kepler, llamada así en honor del astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630). Lea un artículo acerca de Kepler y describa qué lugar ocupa en la historia de la ciencia.

59. TASA DE DESEMPLEO En la solución del ejemplo 1.3.7 se observó que la recta que mejor ajusta los datos para ese ejemplo mediante la aproximación de mínimos cuadrados tiene ecuación de la forma $y = -0.389x + 7.338$. Interprete la pendiente de esa recta en términos de la tasa de desempleo. Los últimos datos en el ejemplo fueron para el año 2000. Utilice el Internet para hallar los datos de desempleo después del año 2000. ¿La recta de aproximación por mínimos cuadrados predice bien los nuevos datos? Explique.

60. RECTAS PARALELAS Demuestre que dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

61. RECTAS PERPENDICULARES Demuestre que si una recta no vertical L_1 con pendiente m_1 es perpendicular a una recta L_2 con pendiente m_2, entonces $m_2 = -1/m_1$. [*Sugerencia* Encuentre las expresiones para las pendientes de las rectas L_1 y L_2 en la figura adjunta. Luego aplique el teorema de Pitágoras, junto con la fórmula de la distancia del problema 46, sección 1.2, al triángulo rectángulo OAB para obtener la relación requerida entre m_1 y m_2].



PROBLEMA 61

SECCIÓN 1.4 | Modelos funcionales

Con frecuencia, los problemas prácticos en negocios, en economía y en las ciencias físicas o de la vida son demasiado complicados para ser descritos con precisión mediante fórmulas simples. Una práctica común para analizarlos es hacer suposiciones acerca del problema de manera que lo simplifique lo suficiente como para permitir una descripción matemática. Este proceso se denomina **modelación matemática** y al problema modificado con base en las suposiciones de simplificación se le llama **modelo matemático**. Una vez que se han elegido las suposiciones del problema , se usan métodos matemáticos apropiados, como el cálculo, para analizar el modelo. Los modelos matemáticos son sólo aproximaciones de la realidad, y en ocasiones, un modelo particular no es muy exacto, por lo que las suposiciones en las que se basa se van ajustando para hacer el modelo más real, pero sin introducir demasiada complejidad matemática.

En las secciones anteriores, se presentaron modelos que representaban magnitudes como el costo de fabricación, los niveles de contaminación del aire, el tamaño de la población, la oferta y la demanda; sin duda usted se encontrará muchos más modelos, tanto en ejemplos resueltos como en ejercicios propuestos. Una de las habilidades más importantes que se aprende en el cálculo es construir y analizar modelos matemáticos, y el proceso comienza con el aprendizaje de cómo plantear y resolver los problemas descritos con palabras. En los ejemplos 1.4.1 y 1.4.8 se ilustra una variedad de técnicas para afrontar tales problemas.

Eliminación de variables

En los ejemplos 1.4.1 y 1.4.2 la magnitud que se está buscando se expresa de manera más natural en términos de dos variables. Es necesario eliminar una de esas variables antes de escribir la magnitud como una función de una sola variable.

www.FreeLibros.com

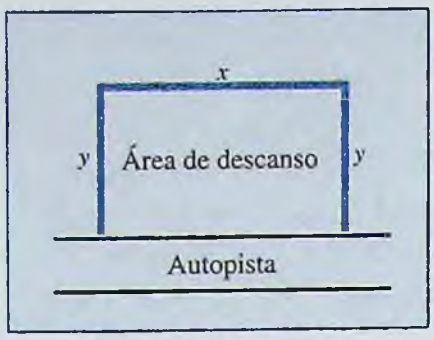


FIGURA 1.28 Área rectangular de descanso.

EJEMPLO | 1.4.1

El departamento de comunicaciones y transportes planea crear un área de descanso para los automovilistas, a lo largo de una autopista. La superficie será rectangular con un área de 5 000 yardas cuadradas, y se va a cercar por los tres lados no adyacentes a la autopista. Exprese el número de yardas de cerca que se requiere como una función de la longitud del lado no cercado.

Solución

Es natural comenzar introduciendo dos variables, x y y, para denotar las longitudes de los lados del área de descanso (figura 1.28). Expresando el número de yardas de cerca requerida, F, en términos de estas dos variables, se tiene

$$F = x + 2y$$

Como la meta es expresar el número de yardas de cercado como una función sólo de x, se debe encontrar una forma de expresar y en términos de x. Para hacer esto, utilice el hecho de que el área debe ser de 5 000 yardas cuadradas y escriba

$$\underbrace{xy}_{\text{área}} = 5\,000$$

Despeje y de esta ecuación

$$y = \frac{5\,000}{x}$$

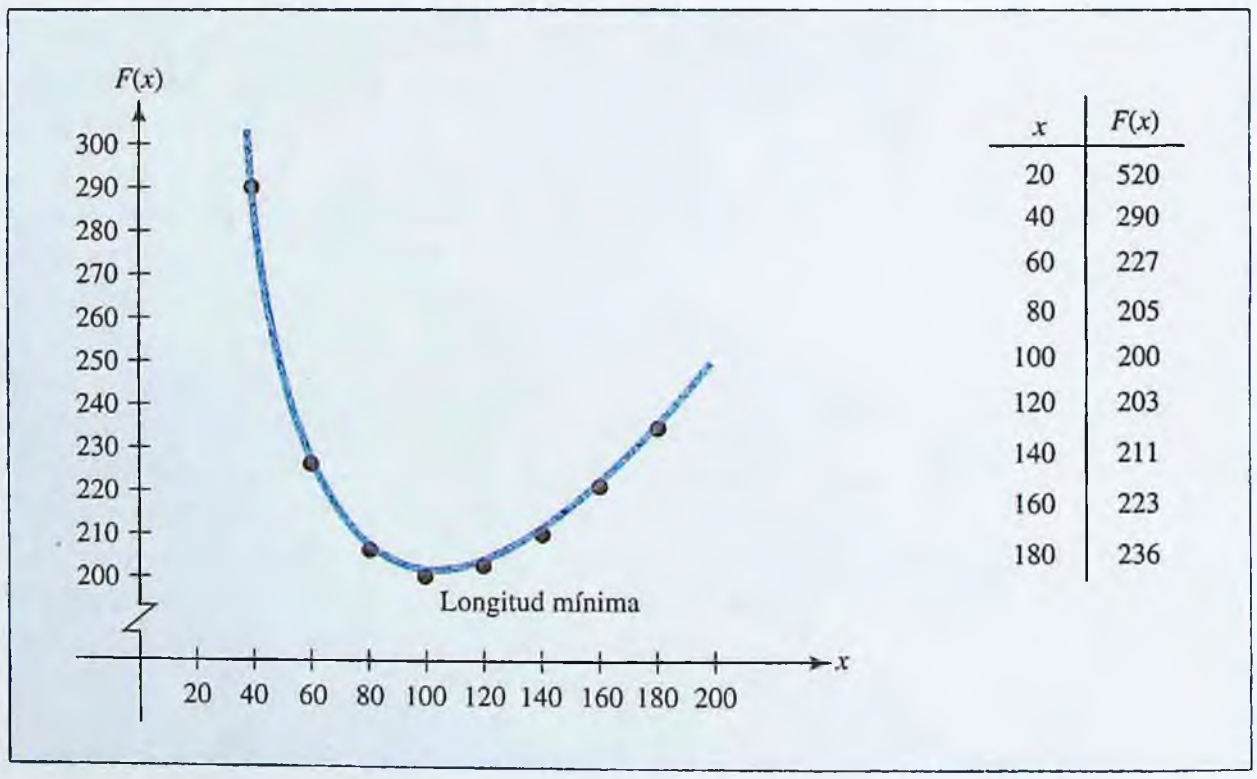
y sustituya la expresión resultante para y en la fórmula de F para obtener

$$F(x) = x + 2\left(\frac{5\,000}{x}\right) = x + \frac{10\,000}{x}$$

En la figura 1.29 aparece la gráfica de una parte significativa de esta función racional. Observe que hay una longitud x para la cual la cantidad de cercado requerido es mínimo. En el capítulo 3, se calculará este valor óptimo de x usando el cálculo.

¡EXPLORE!

Introduzca $f(x) = x + \dfrac{10\,000}{x}$ en el editor de ecuaciones de la calculadora graficadora. Utilice la instrucción de tablas **(TBLSET)** para explorar dónde $f(x)$ puede alcanzar un valor mínimo . Por ejemplo, como alternativa intente fijar el valor inicial de x en cero **(TblStart)**, realizando incrementos **(ΔTbl)** de 100, 50 y 10. Por último, utilice lo que resulte para fijar las dimensiones apropiadas de la pantalla para ver $f(x)$ y responder a la pregunta sobre las dimensiones del área de descanso que requiere el mínimo cercado.



x	$F(x)$
20	520
40	290
60	227
80	205
100	200
120	203
140	211
160	223
180	236

FIGURA 1.29 Longitud del cercado: $F(x) = x + \dfrac{10\,000}{x}$.

www.FreeLibros.com

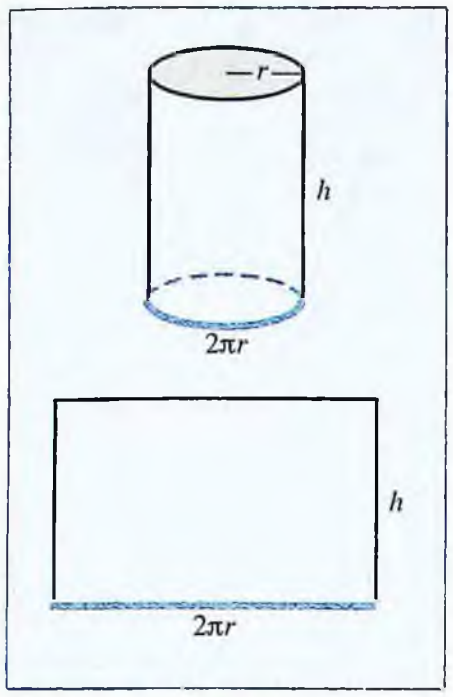


FIGURA 1.30 Lata cilíndrica para el ejemplo 1.4.2.

EJEMPLO | 1.4.2

Una lata cilíndrica debe tener una capacidad (volumen) de 24π pulgadas cúbicas. El costo del material utilizado en las partes superior e inferior de la lata es de 3 centavos por pulgada cuadrada, y el costo del material utilizado para la parte lateral es de 2 centavos por pulgada cuadrada. Exprese el costo de fabricación de la lata como una función de su radio.

Solución

Sea r el radio de las partes circulares superior e inferior, h la altura de la lata y C el costo (en centavos) de fabricación de la lata. Entonces,

$$C = \text{costo de la parte superior} + \text{costo de la parte inferior} + \text{costo de la parte lateral}$$

donde, para cada componente del costo,

$$\begin{aligned}\text{Costo} &= (\text{costo por pulgada cuadrada})(\text{número de pulgadas cuadradas}) \\ &= (\text{costo por pulgada cuadrada})(\text{área})\end{aligned}$$

El área de la parte superior (o inferior) es πr^2, y el costo por pulgada cuadrada de la parte superior (o inferior) es de 3 centavos. Por tanto,

$$\text{Costo de la parte superior} = 3\pi r^2 \quad \text{y} \quad \text{Costo de la parte inferior} = 3\pi r^2$$

Para hallar el área lateral, imagine que se pueden quitar las partes superior e inferior de la lata y que se puede cortar y extender la parte lateral para formar un rectángulo, tal como se muestra en la figura 1.30. La altura del rectángulo es la altura h de la lata. La longitud del rectángulo es la circunferencia $2\pi r$ de la parte superior (o inferior) de la lata. De aquí que, el área del rectángulo (o parte lateral) es $2\pi rh$ pulgadas cuadradas. Como el costo del lado es 2 centavos por pulgada cuadrada, se deduce que

$$\text{Costo del lado} = 2(2\pi rh) = 4\pi rh$$

Al incluir todas las partes,

$$C = 3\pi r^2 + 3\pi r^2 + 4\pi rh = 6\pi r^2 + 4\pi rh$$

Puesto que el objetivo es expresar el costo como una función sólo del radio, se debe expresar la altura h en términos de r. Para hacerlo, se tiene en cuenta que el volumen, $V = \pi r^2 h$, debe ser 24π. Es decir, se iguala $\pi r^2 h$ a 24π y se despeja h:

$$\pi r^2 h = 24\pi \qquad \text{o} \qquad h = \frac{24}{r^2}$$

Ahora se sustituye esta expresión de h en la fórmula de C:

$$C(r) = 6\pi r^2 + 4\pi r\left(\frac{24}{r^2}\right)$$

o

$$C(r) = 6\pi r^2 + \frac{96\pi}{r}$$

En la figura 1.31 se representa la gráfica de la parte significativa de esta función de costo. Observe que hay un radio r para el cual el costo es mínimo. En el capítulo 3, se estudiará cómo hallar ese radio óptimo utilizando el cálculo.

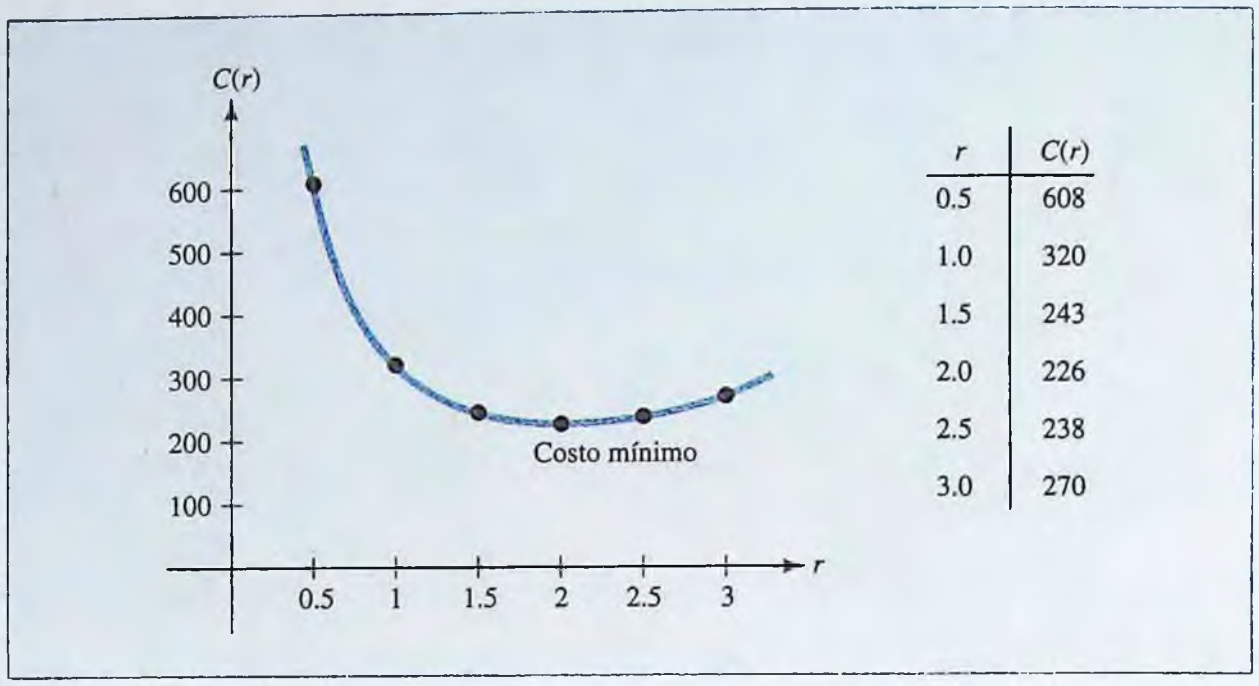
¡EXPLORE!

Utilice la instrucción **(TBLSET)** de su calculadora graficadora para descubrir las dimensiones apropiadas de la pantalla para graficar

$$C(r) = 6\pi r^2 + \frac{96\pi}{r}$$

Ahora emplee las funciones **TRACE, ZOOM** o métodos para el cálculo de mínimos de la calculadora para hallar el radio donde el costo es mínimo. ¿Cuáles son las dimensiones de la lata? Utilice las características **TRACE** o **ZOOM** de su calculadora para hallar el radio para el cual el costo es de \$3.00. ¿Existe algún radio para el cual el costo sea de \$2.00?

www.FreeLibros.com



r	$C(r)$
0.5	608
1.0	320
1.5	243
2.0	226
2.5	238
3.0	270

FIGURA 1.31 La función de costo: $C(r) = 6\pi r^2 + \dfrac{96\pi}{r}$.

EJEMPLO | 1.4.3

Durante una sequía, los residentes del condado de Marin, California, enfrentaron una severa escasez de agua. Para evitar el uso excesivo de agua, la oficina de agua del condado inició incrementos drásticos en las tarifas. La tarifa mensual para una familia de cuatro personas era de \$1.22 por cada 100 pies cúbicos de agua para los primeros 1 200 pies cúbicos, \$10 por cada 100 pies cúbicos para los siguientes 1 200 pies cúbicos y \$50 por cada 100 pies cúbicos más. Exprese el valor del recibo mensual para una familia de cuatro personas como una función de la cantidad de agua utilizada.

Solución

Sea x el número de unidades de 100 pies cúbicos de agua utilizadas por la familia durante el mes, y $C(x)$ el costo correspondiente en dólares. Si $0 \le x \le 12$, entonces el costo es simplemente el costo por unidad multiplicado por el número de unidades usadas:

$$C(x) = 1.22x$$

Si $12 \le x \le 24$, cada una de las primeras 12 unidades cuesta \$1.22, y entonces el costo total de esas 12 unidades es $1.22(12) = 14.64$ dólares. Cada una de las $x - 12$ unidades restantes cuesta \$10, y por tanto el costo total de esas unidades es $10(x - 12)$ dólares. El costo de todas las x unidades es la suma

$$C(x) = 14.64 + 10(x - 12) = 10x - 105.36$$

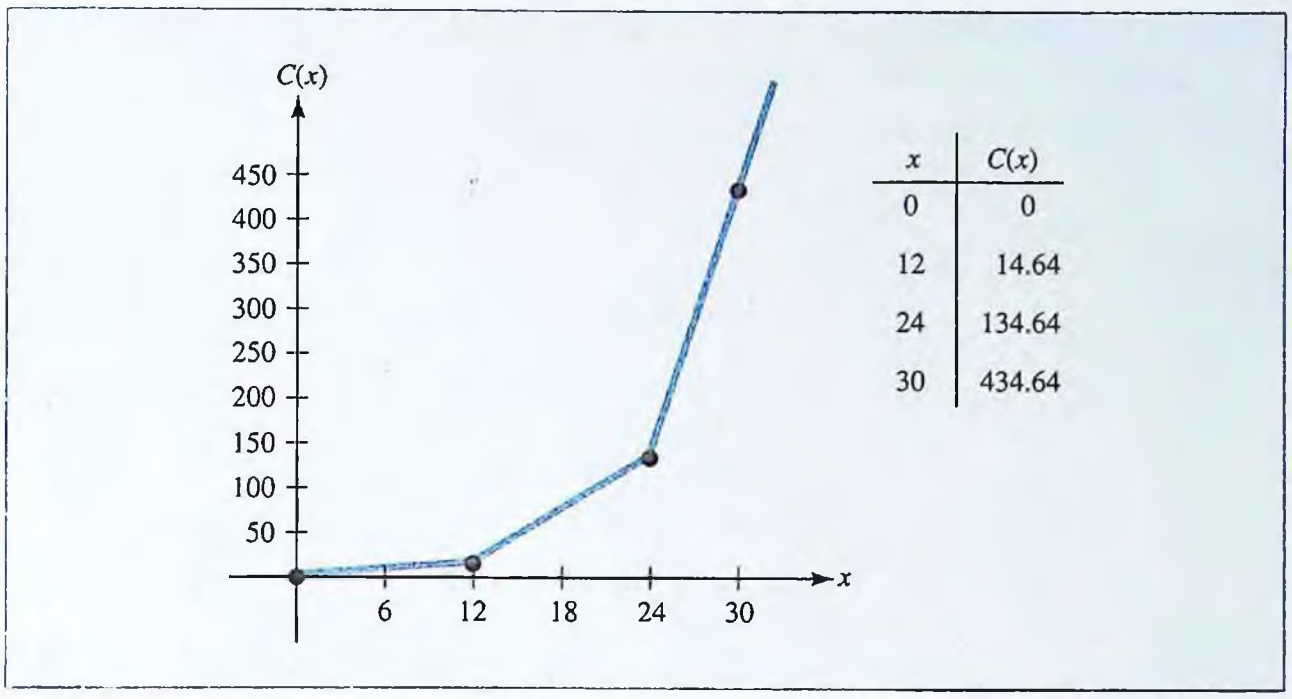
Si $x > 24$, entonces el costo de las primeras 12 unidades es $1.22(12) = 14.64$ dólares; el costo de las siguientes 12 unidades es $10(12) = 120$ dólares, y el de las $x - 24$ unidades restantes es $50(x - 24)$ dólares. El costo de todas las x unidades es la suma

$$C(x) = 14.64 + 120 + 50(x - 24) = 50x - 1\,065.36$$

Combinando estas tres ecuaciones, se obtiene

$$C(x) = \begin{cases} 1.22x & \text{si } 0 \le x \le 12 \\ 10x - 105.36 & \text{si } 12 < x \le 24 \\ 50x - 1\,065.36 & \text{si } x > 24 \end{cases}$$

www.FreeLibros.com



x	$C(x)$
0	0
12	14.64
24	134.64
30	434.64

FIGURA 1.32 Costo de agua en el condado de Marin.

La gráfica de esta función se muestra en la figura 1.32. Observe que la gráfica consiste de tres segmentos de recta, cada uno más inclinado que el anterior. ¿Qué aspecto de la situación práctica es reflejado por el incremento de la inclinación de las rectas?

Proporcionalidad

Cuando se construyen modelos matemáticos, frecuentemente resulta importante considerar las relaciones de proporcionalidad. Tres de los tipos más importantes de proporcionalidad se definen de la siguiente forma:

Proporcionalidad ▪ Se dice que la magnitud Q es

directamente proporcional a x si $Q = kx$ para alguna constante k

inversamente proporcional a x si $Q = k/x$ para alguna constante k

conjuntamente proporcional a x y y si $Q = kxy$ para alguna constante k

A continuación se presenta un ejemplo de biología.

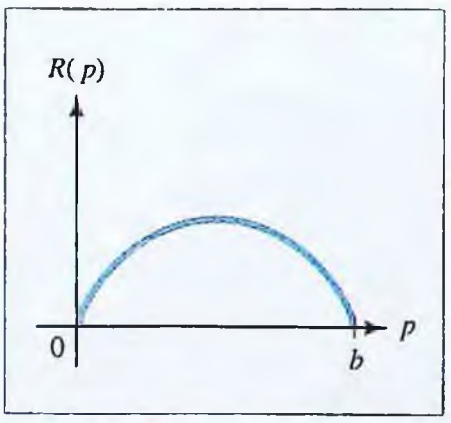


FIGURA 1.33 Tasa de crecimiento demográfico para una población acotada: $R(p) = kp(b - p)$.

EJEMPLO | 1.4.4

Cuando los factores ambientales imponen un límite superior en el tamaño de una población, ésta crece a una tasa conjuntamente proporcional al tamaño actual y a la diferencia entre su tamaño actual y el límite superior. Exprese la tasa de crecimiento demográfico como una función del tamaño de la población.

Solución

Sea p el tamaño de la población $R(p)$ la correspondiente tasa de crecimiento demográfico, y sea b el límite superior impuesto en la población por el medio ambiente. Así

$$\text{Diferencia entre población y su límite} = b - p$$

entonces

$$R(p) = kp(b - p)$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

En la figura 1.33 se presenta una gráfica de este polinomio factorizado. En el capítulo 3, se utilizará el cálculo para calcular el tamaño de la población para el cual la tasa de crecimiento demográfico es máxima.

www.FreeLibros.com

Modelación en administración y economía

Con frecuencia los modelos en administración y economía involucran cuestiones como precio, control de costos y optimización de la utilidad. En el capítulo 3, se examinará una variedad de tales modelos. A continuación se muestra un ejemplo donde la utilidad se expresa como una función del precio de venta de un producto particular.

EJEMPLO | 1.4.5

Un fabricante puede producir cintas de video a un costo de $2 por casete. Los casetes se han estado vendiendo a $5 la pieza, y a ese precio, los consumidores han estado comprando 4 000 casetes al mes. El fabricante planea aumentar el precio de los casetes y estima que por cada $1 de aumento en el precio, se venderán 400 casetes menos cada mes.

a) Exprese la utilidad mensual del fabricante como una función del precio al cual se vendieron los casetes.

b) Dibuje la gráfica de la función de utilidad. ¿Qué precio corresponde a la utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad máxima?

Solución

a) Comience planteando la relación deseada con palabras:

$$\text{Utilidad} = (\text{número de casetes vendidos})(\text{utilidad por casete})$$

Como el propósito es expresar la utilidad como una función del precio, entonces la variable independiente es el precio y la variable dependiente es la utilidad. Sea p el precio al cual se venderá cada casete y $P(p)$ la utilidad mensual correspondiente.

Ahora, exprese el número de casetes vendidos en términos de la variable p. Se sabe que cada mes se venden 4 000 casetes cuando el precio es $5 y que se venderán 400 casetes menos cada mes por cada aumento de $1 en el precio. Como el número de aumentos de $1 es la diferencia $p - 5$ entre los precios de venta nuevo y anterior, se tiene

$$\begin{aligned}\text{Número de casetes vendidos} &= 4\,000 - 400(\text{número de aumentos de \$1}) \\ &= 4\,000 - 400(p - 5) \\ &= 6\,000 - 400p\end{aligned}$$

La utilidad por casete es simplemente la diferencia entre el precio de venta p y el costo $2. Así,

$$\text{Utilidad por casete} = p - 2$$

y la utilidad total es

$$\begin{aligned}P(p) &= (\text{número de casetes vendidos})(\text{utilidad por casete}) \\ &= (6\,000 - 400p)(p - 2) \\ &= -400p^2 + 6\,800p - 12\,000\end{aligned}$$

b) La gráfica de $P(p)$ es la parábola que abre hacia abajo, mostrada en la figura 1.34. La utilidad máxima se alcanzará en el valor de p que corresponde al punto más alto en la gráfica de utilidad. Éste es el vértice de la parábola, que se sabe que está donde

$$p = \frac{-B}{2A} = \frac{-(6\,800)}{2(-400)} = 8.5$$

¡EXPLORE!

Introduzca la función Y1 = $-400X^2 + 6\,800X - 12\,000$ en el editor de ecuaciones de la calculadora graficadora. Utilice la instrucción **TBLSET** para fijar el valor inicial de x en 5 en Tblstar con incremento unitario (1) para ΔTbl. De aquí, construya una pantalla con dimensiones apropiadas para la gráfica de esta función de utilidad. Ahora, en la calculadora graficadora, emplee las instrucciones **TRACE**, **ZOOM** o el método de calculo de mínimos para confirmar el costo y la utilidad óptimo, mostrados en la figura 1.34.

www.FreeLibros.com

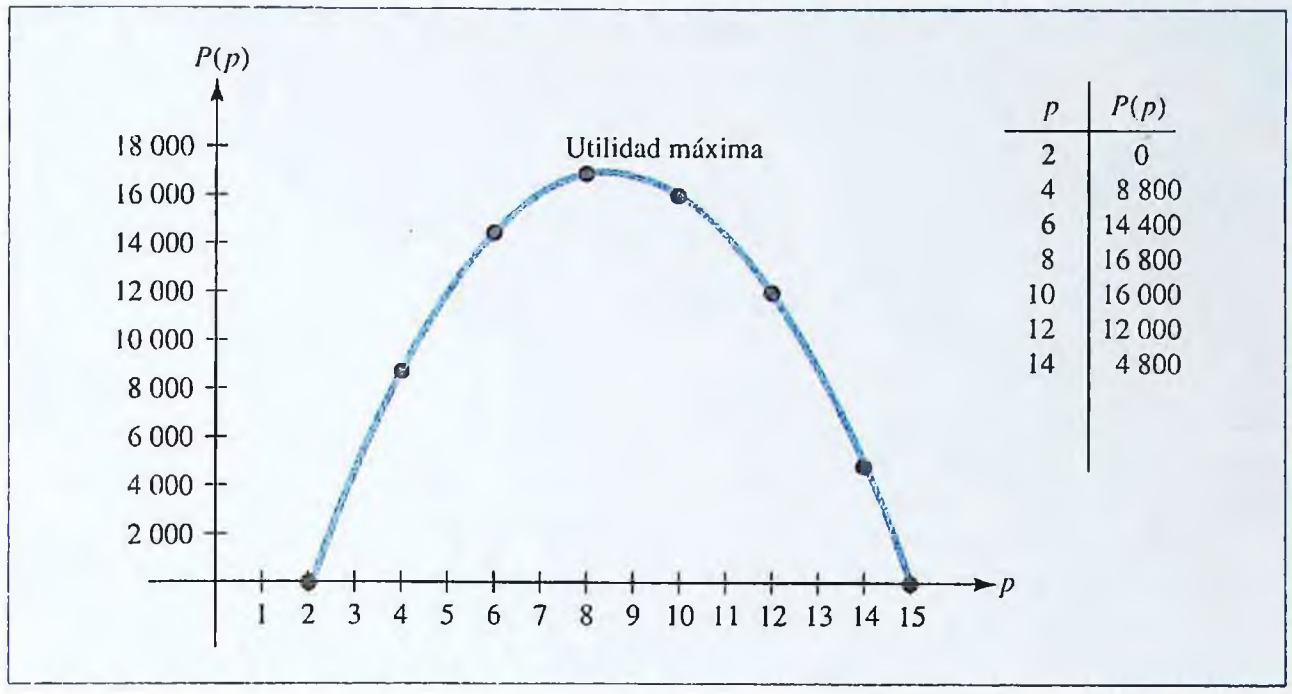


FIGURA 1.34 Función utilidad $P(p) = (6\,000 - 400p)(p - 2)$.

Así, la utilidad se maximiza cuando el fabricante cobra \$8.50 por cada casete, y la utilidad máxima mensual es

$$P_{\text{máx}} = P(8.5) = -400(8.5)^2 + 6\,800(8.5) - 12\,000$$
$$= \$16\,000$$

Equilibrio de mercado

Recuerde de la sección 1.1, que la función de demanda para un artículo, $D(x)$, relaciona el número de unidades que se producen, x, con el precio unitario, $p = D(x)$, al cual todas las x unidades serán demandadas (vendidas) en el mercado. De manera similar, la **función de oferta,** $S(x)$, indica el precio correspondiente $p = S(x)$ al cual los productores están dispuestos a ofertar x unidades.

La **ley de la oferta y la demanda** postula que, en un ambiente de mercado competitivo, la oferta tiende a ser igual a la demanda, y cuando esto ocurre, se dice que el mercado está en **equilibrio**. Así, el equilibrio del mercado ocurre precisamente en el nivel

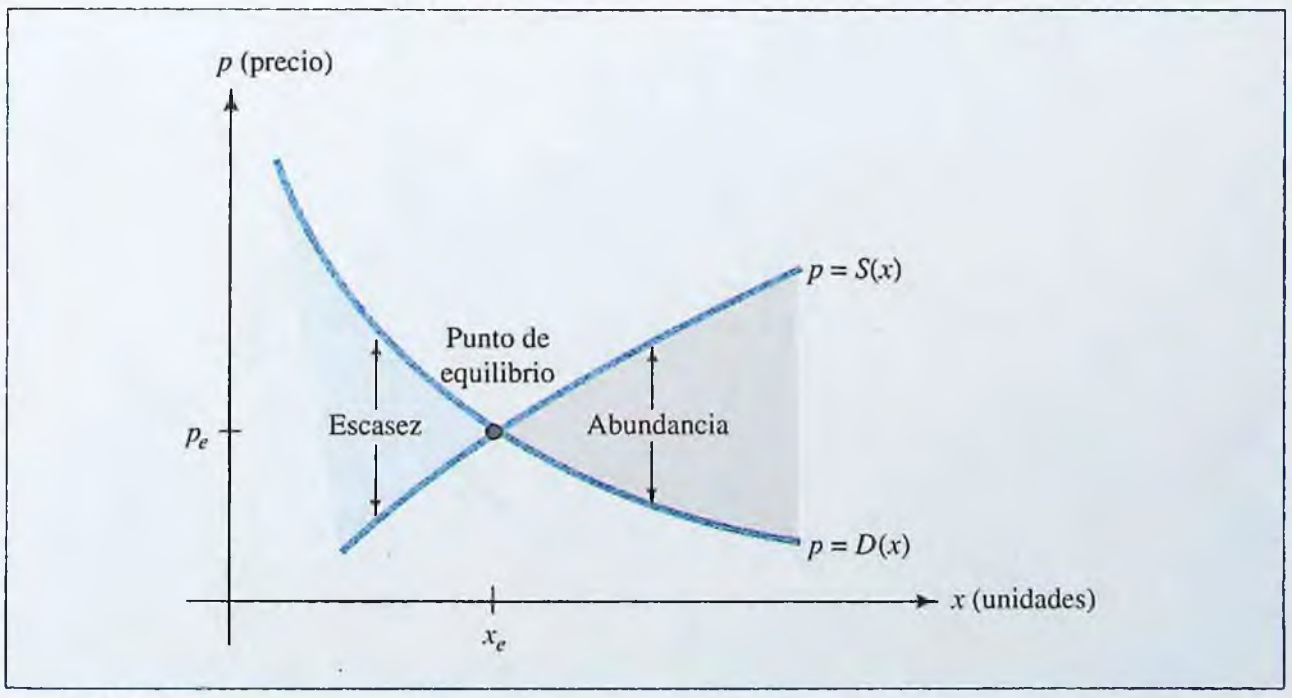


FIGURA 1.35 El equilibrio del mercado ocurre cuando la oferta es igual a la demanda.

www.FreeLibros.com

de producción x_e, donde $S(x_e) = D(x_e)$. El precio unitario correspondiente p_e se denomina **precio de equilibrio**; es decir,

$$p_e = D(x_e) = S(x_e)$$

Cuando el mercado no está en equilibrio, se tiene una **escasez**, si la demanda excede a la oferta $[D(x) > S(x)]$, y una **abundancia** si la oferta excede a la demanda $[S(x) > D(x)]$. Esta terminología se ilustra en la figura 1.35 y en el ejemplo 1.4.6.

¡EXPLORE!

Siguiendo el ejemplo 1.4.6, introduzca $S(x) = x^2 + 14$ en Y1 y $D(x) = 174 - 6x$ en Y2. Utilice las dimensiones de la pantalla [5, 35]5 por [0, 200]50 para observar los sectores de escasez y abundancia. Compruebe que su calculadora puede sombrear esos sectores mediante el comando **SHADE (Y2, Y1)**. ¿Qué sector es éste?

EJEMPLO | 1.4.6

Una investigación de mercado indica que los fabricantes ofertarán x unidades de un artículo particular en el mercado cuando el precio es $p = S(x)$ dólares por unidad, y que el mismo número de unidades serán demandadas (vendidas) por los consumidores cuando el precio es $p = D(x)$ dólares por unidad, donde las funciones de oferta y demanda están dadas por

$$S(x) = x^2 + 14 \qquad \text{y} \qquad D(x) = 174 - 6x$$

a) ¿A qué nivel de producción x y a qué precio unitario p el mercado alcanza el equilibrio?

b) Dibuje las curvas de oferta y demanda, $p = S(x)$ y $p = D(x)$, en la misma gráfica e interprétela.

Solución

a) El equilibrio de mercado ocurre cuando

$$S(x) = D(x)$$
$$x^2 + 14 = 174 - 6x$$
$$x^2 + 6x - 160 = 0 \qquad \textit{restando } 174 - 6x \textit{ de ambos miembros}$$
$$(x - 10)(x + 16) = 0 \qquad \textit{factorizando}$$
$$x = 10 \text{ o } x = -16$$

Como sólo los valores positivos del nivel de producción x tienen sentido, se desecha $x = -16$ y se concluye que el equilibrio ocurre cuando $x_e = 10$. El pre-

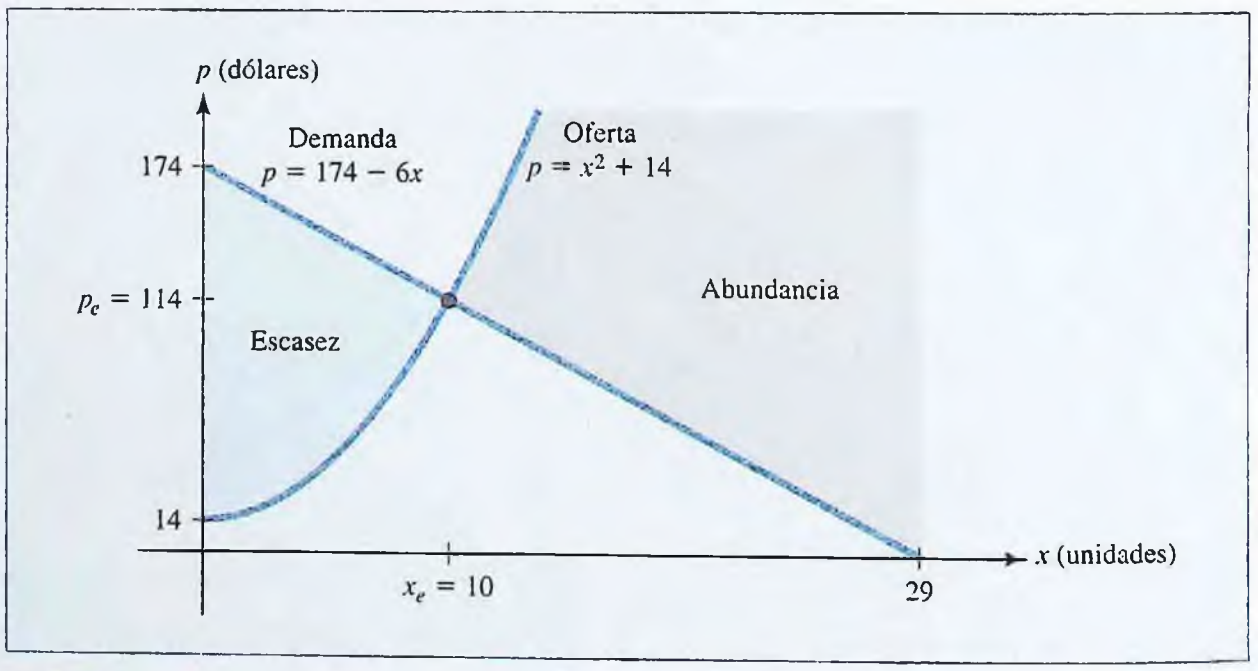


FIGURA 1.36 Oferta, demanda y punto de equilibrio para el ejemplo 1.4.6.

www.FreeLibros.com

cio de equilibrio correspondiente puede ser obtenido sustituyendo $x = 10$ en cualquiera de las funciones de oferta o demanda. De esta manera,

$$p_e = D(10) = 174 - 6(10) = 114$$

b) La curva de oferta es una parábola y la curva de demanda es una recta, tal como se muestra en la figura 1.36. Observe que no se ofertan unidades al mercado hasta que los precios llegan a \$14 por unidad y que 174 unidades son demandadas cuando el precio es 0. Para $0 \leq x < 10$, hay una escasez en el mercado ya que la curva de oferta está por debajo de la curva de demanda. La curva de oferta cruza la curva de demanda en el punto de equilibrio (10, 114), y para $10 < x \leq 29$, hay abundancia en el mercado.

Análisis de equilibrio

Las intersecciones de gráficas aparecen en los negocios en el contexto del **análisis de equilibrio**. En una situación típica, un fabricante desea determinar cuántas unidades de cierto artículo tienen que venderse para que el ingreso total sea igual al costo. Suponga que x denota el número de unidades fabricadas y vendidas, y sean $C(x)$ y $R(x)$ el costo total y el ingreso total, respectivamente. En la figura 1.37 se ilustran un par de curvas de costo e ingreso.

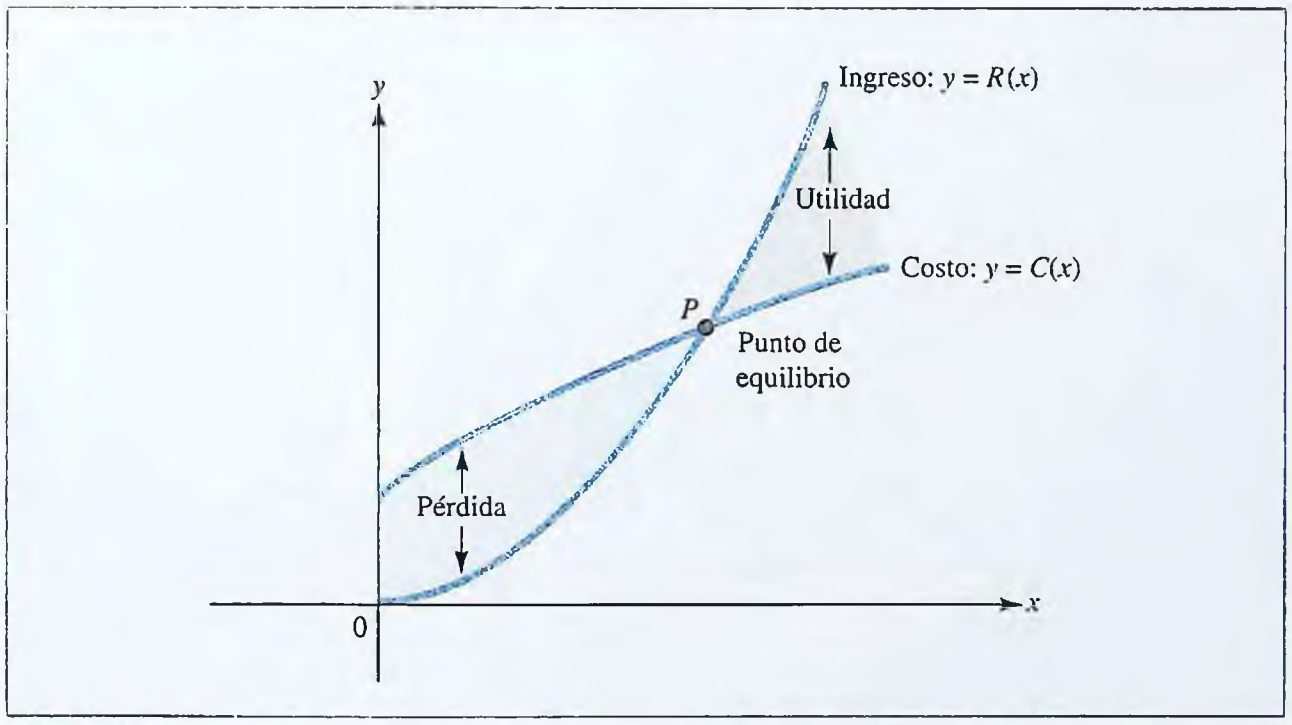


FIGURA 1.37 Curvas de costo e ingreso, con un punto de equilibrio en P.

Debido a los gastos fijos, la curva de costo total al inicio está por encima de la curva de ingreso. Por tanto, a bajos niveles de producción, el fabricante sufre una pérdida. Sin embargo, a altos niveles de producción la curva de ingreso total es la que está por encima y el fabricante tiene una utilidad. Al punto en el cual las dos curvas se cruzan se le llama **punto de equilibrio**, ya que cuando el ingreso total iguala al costo total, el fabricante queda en equilibrio; no tiene ni utilidad ni pérdida. A continuación se presenta un ejemplo.

EJEMPLO | 1.4.7

Un fabricante puede vender cierto producto en \$110 por unidad. El costo total consiste de un costo fijo indirecto de \$7 500 más los costos de producción de \$60 por unidad.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Siguiendo el ejemplo 1.4.7, introduzca $C(x) = 7\,500 + 60x$ en Y1 y $R(x) = 110x$ en Y2, use la pantalla con dimensiones [0, 250]50 por [−1 000, 20 000] 5 000. Utilice las instrucciones de la calculadora graficadora **TRACE** y **ZOOM** o la de determinación de intersecciones, para confirmar el punto de equilibrio.

a) ¿Cuántas unidades debe vender el fabricante para llegar al equilibrio?

b) ¿Cuál es la utilidad del fabricante o la pérdida si se venden 100 unidades?

c) ¿Cuántas unidades debe vender el fabricante para tener una utilidad de $1 250?

Solución

Si x es el número de unidades fabricadas y vendidas, el ingreso total está dado por $R(x) = 110x$ y el costo total por $C(x) = 7\,500 + 60x$.

a) Para hallar el punto de equilibrio, iguale $R(x)$ a $C(x)$ y se resuelva:

$$110x = 7\,500 + 60x$$

$$50x = 7\,500$$

de manera que $$x = 150$$

De ahí que el fabricante tendrá que vender 150 unidades para llegar al punto de equilibrio (*véase* la figura 1.38).

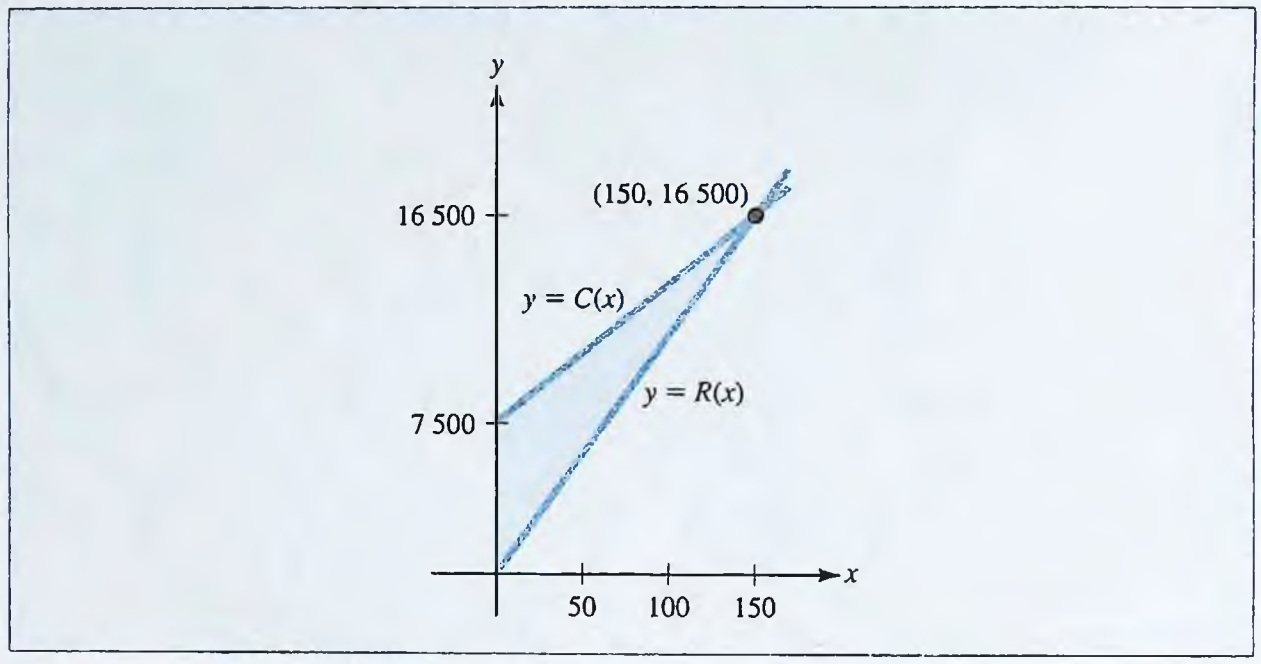


FIGURA 1.38 Ingreso $R(x) = 110x$ y costo $C(x) = 7{,}500 + 60x$.

b) La utilidad $P(x)$ es el ingreso menos el costo. Por tanto,

$$P(x) = R(x) - C(x) = 110x - (7{,}500 + 60x) = 50x - 7\,500$$

La utilidad de la venta de 100 unidades es

$$P(100) = 50(100) - 7\,500$$

$$= -2\,500$$

El signo menos indica una utilidad negativa (o pérdida), que era de esperar, a pues 100 unidades es menos que 150 unidades que es la cantidad en el punto de equilibrio. De este modo, si se venden 100 unidades el fabricante perderá $2 500.

c) Para determinar el número de unidades que se debe vender para generar una utilidad de $1 250, se iguala la fórmula para la utilidad $P(x)$ a 1250 y se resuelve para x. Así se tiene que

www.FreeLibros.com

$$P(x) = 1\,250$$
$$50x - 7\,500 = 1\,250$$
$$50x = 8\,750$$
$$x = \frac{8\,750}{50} = 175$$

de donde se concluye que se deben vender 175 unidades para generar la utilidad deseada.

El ejemplo 1.4.8 ilustra cómo se puede usar el análisis de equilibrio como una herramienta para la toma de decisiones.

¡EXPLORE!

Revise el ejemplo 1.4.8. Introduzca $C_1(x) = 25 + 0.6x$ en Y1 y $C_2(x) = 30 + 0.5x$ en Y2 del editor de ecuaciones de la calculadora graficadora. Utilice la pantalla con dimensiones [−25, 250]25 por [−10, 125]50 para determinar el rango de millas en las cuales cada agencia ofrece la mejor oferta. Si una persona va a recorrer más de 100 millas, ¿cuál es la mejor oferta: $C_1(x)$, $C_2(x)$ o $C_3(x) = 23 + 0.55x$?

EJEMPLO | 1.4.8

Una agencia de renta de autos cobra \$25, más 60 centavos por milla. Una segunda agencia cobra \$30, más 50 centavos por milla. ¿Cuál agencia ofrece la mejor oferta?

Solución

La respuesta depende del número de millas que se recorra. Para viajes cortos la primera agencia cobra menos que la segunda, pero para viajes largos la segunda agencia cobra menos. Puede utilizar un análisis de equilibrio para hallar el número de millas en las que las dos agencias cobran lo mismo.

Suponga que el auto va a recorrer x millas. Entonces, la primer agencia cobrará $C_1(x) = 25 + 0.60x$ dólares y la segunda agencia cobrará $C_2(x) = 30 + 0.50x$ dólares. Si se igualan esas dos expresiones y se resuelve para x, se obtiene

$$25 + 0.60x = 30 + 0.50x$$

de manera que $0.1x = 5$ o $x = 50$

Esto implica que las dos agencias cobran la misma cantidad si el carro recorre 50 millas. Para distancias más cortas, la primera agencia ofrece la mejor oferta, y para distancias más largas la segunda agencia es mejor. La situación se ilustra en la figura 1.39.

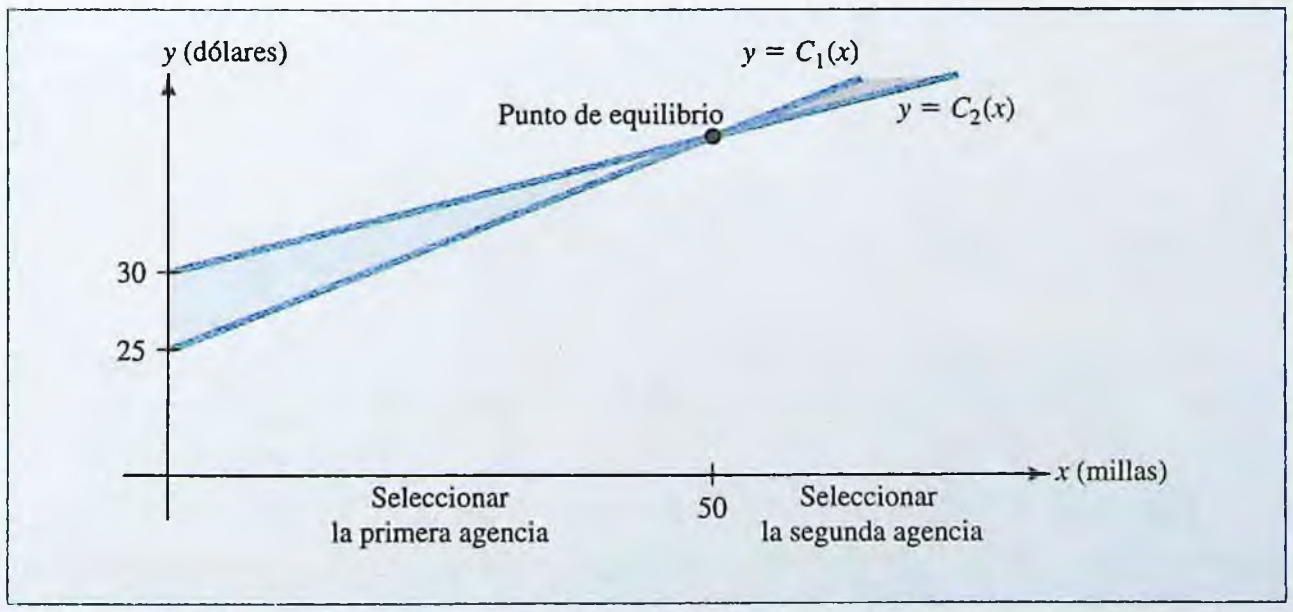


FIGURA 1.39 Costo de renta de autos en agencias competitivas.

www.FreeLibros.com

PROBLEMAS | 1.4

1. CERCADO Un granjero desea cercar un campo rectangular con 1 000 pies de cerca. Si el lado más largo del campo limita con un arroyo (y no requiere cerca), exprese el área del campo como una función de su ancho.
2. JARDINERÍA ORNAMENTAL Un diseñador de jardines planea hacer un jardín rectangular de manera que el largo sea dos veces el ancho. Exprese el área del jardín como una función de su ancho.
3. La suma de dos números es 18. Exprese el producto de dos números como una función del número menor.
4. El producto de dos números es 318. Exprese la suma de los números como una función del número menor.
5. INGRESOS POR VENTAS Cada unidad de cierto artículo cuesta $p = 35x + 15$ centavos cuando se producen x unidades del artículo. Si a ese precio se venden las x unidades en su totalidad, exprese el ingreso derivado de las ventas como una función de x.
6. CERCADO El departamento de recreación de una ciudad planea construir un campo de juego rectangular de 3 600 metros cuadrados de área. El campo de juegos estará cercado. Exprese la longitud de la cerca como una función de la longitud de uno de los lados del campo de juego, dibuje la gráfica, y calcule las dimensiones del campo de juego que requiere la cantidad mínima de cercado.
7. ÁREA Exprese el área de un campo rectangular cuyo perímetro es 320 metros como una función de la longitud de uno de sus lados. Dibuje la gráfica y calcule las dimensiones del campo de área máxima.
8. EMPAQUE Una caja cerrada con una base cuadrada va a tener un volumen de 1 500 pulgadas cúbicas. Exprese el área de su superficie como una función de la longitud de su base.
9. EMPAQUE Una caja cerrada con una base cuadrada tiene un área de superficie de 4 000 centímetros cuadrados. Exprese su volumen como una función de la longitud de su base.

En los problemas 10 a 14, es necesario saber que un cilindro de radio r *y altura* h *tiene volumen* $V = \pi r^2 h$. *También, se debe recordar que un círculo de radio* r *tiene área* $A = \pi r^2$ *y circunferencia* $C = 2\pi r$.

10. EMPAQUE Una lata de refresco contiene 12 onzas de líquido (aproximadamente 6.89π pulgadas cúbicas). Exprese el área de superficie de la lata como una función de su radio.
11. EMPAQUE Una lata cilíndrica cerrada tiene un área superficial de 120π pulgadas cuadradas. Exprese el volumen de la lata como una función de su radio.
12. EMPAQUE Una lata cilíndrica cerrada tiene radio r y altura h.
    a) Si el área de la superficie de la lata, S, es una constante, exprese el volumen V de la lata en términos de S y r.
    b) Si el volumen V de la lata es una constante, exprese el área de la superficie S en términos de V y r.
13. EMPAQUE Una lata cilíndrica contiene 4π pulgadas cúbicas de jugo de naranja congelado. El costo por pulgada cuadrada en la fabricación de las partes superior e inferior de metal es el doble del costo por pulgada cuadrada en la fabricación de la parte lateral de cartón. Exprese el costo de fabricar la lata como una función del radio si el costo de la parte lateral es 0.02 centavos por pulgada cuadrada.
14. EMPAQUE Se fabricó una lata cilíndrica sin tapa con 27π pulgadas cuadradas de metal. Exprese el volumen de la lata como una función del radio.
15. CRECIMIENTO DEMOGRÁFICO En ausencia de restricciones ambientales, la población crece a una tasa proporcional a su tamaño. Exprese la tasa de crecimiento demográfico como una función del tamaño de la población.
16. DECAIMIENTO RADIACTIVO Una muestra de radio decrece a una tasa que es proporcional a la cantidad de radio remanente. Exprese la tasa de decrecimiento de la muestra como una función de la cantidad remanente.
17. CAMBIO DE TEMPERATURA La tasa de cambio de la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su propia temperatura y la temperatura del medio que lo rodea. Exprese esta tasa como una función de la temperatura del objeto.
18. PROPAGACIÓN DE UNA EPIDEMIA La tasa de propagación de una epidemia en una comunidad es conjuntamente proporcional al número de personas que han contraído la enfermedad y al número de personas que no la han contraído. Exprese esta tasa como una función del número de personas que han contraído la enfermedad.
19. CORRUPCIÓN POLÍTICA La tasa a la cual las personas resultan implicadas en un escándalo gubernamental es conjuntamente proporcional al número de personas que ya han sido implicadas y al número de personas involucradas pero que no han

www.FreeLibros.com

sido implicadas aún. Exprese esta tasa como una función del número de personas implicadas.

20. COSTO DE PRODUCCIÓN En cierta fábrica, el costo de puesta en marcha es directamente proporcional al número de máquinas utilizadas y el costo de operación es inversamente proporcional al número de máquinas utilizadas. Exprese el costo total como una función del número de máquinas utilizadas.

21. COSTO DE TRANSPORTE Se contrata un camión para transportar productos de una fábrica a una bodega. Los sueldos del conductor se calculan por hora y por tanto son inversamente proporcionales a la velocidad con que se conduce el camión. El costo de la gasolina es directamente proporcional a la velocidad. Exprese el costo total de operación del camión como una función de la velocidad a la cual se conduce.

DOSIS PEDIÁTRICA DE MEDICAMENTO *Se han propuesto diferentes fórmulas para determinar la dosis de medicamento apropiada para un niño en términos de la dosis para un adulto. Suponga que A miligramos (mg) es la dosis de cierto medicamento para un adulto y C es la dosis adecuada para un niño de N años de edad. Entonces, la* regla de Cowling *indica que*

$$C = \left(\frac{N+1}{24}\right)A$$

mientras que la regla de Friend *indica que*

$$C = \frac{2NA}{25}$$

En los problemas 22 a 24 se necesitan estas fórmulas.

22. Si la dosis de ibuprofeno para un adulto es 300 mg, ¿qué dosis sugiere la regla de Cowling para un niño de 11 años? ¿Qué dosis sugiere la regla de Friend para el mismo niño?

23. Suponga que la dosis para un adulto es $A = 300$ mg, de manera que la regla de Cowling y la de Friend son funciones de la edad N del niño. Dibuje las gráficas de estas dos funciones.

24. ¿Para qué edad del niño son iguales las dosis sugeridas por la regla de Cowling y por la regla de Friend? ¿Para qué edades la regla de Cowling sugiere una mayor dosis que la regla de Friend? ¿Para qué edades la regla de Friend sugiere una dosis mayor?

25. DOSIS PEDIÁTRICA DE MEDICAMENTO Como una alternativa a las reglas de Friend y de Cowling, algunas veces los pediatras usan la fórmula

$$C = \frac{SA}{1.7}$$

a fin de calcular una dosis de medicamento apropiada para un niño cuya área superficial es S metros cuadrados, cuando la dosis de droga del adulto es A miligramos (mg). A su vez, el área superficial del cuerpo de un niño se calcula mediante la fórmula

$$S = 0.0072W^{0.425}H^{0.725}$$

donde W y H son el peso del niño (kg) y su altura (cm), respectivamente.

a) La dosis de cierto medicamento para un adulto es 250 mg. ¿Cuánto medicamento se le debe administrar a un niño que tiene una altura de 91 cm y pesa 18 kg?

b) Se prescribe una droga para dos niños, uno de ellos es el doble de alto y dos veces más pesado que el otro niño. Demuestre que el niño más grande debe recibir aproximadamente 2.22 veces más droga que el niño pequeño.

26. IMPUESTO AL COMPRADOR DE UNA SUBASTA Usualmente, cuando un comprador compra algo en una subasta, este paga no solamente el precio con el que ganó la subasta sino también un impuesto al comprador. En una casa de subastas, el impuesto al comprador es 17.5% del precio ganador para compras de hasta $50 000. Para compras mayores, el impuesto al comprador es 17.5% para los primeros $50 000 más 10% de la cantidad que excede los $50 000.

a) Encuentre el precio total que paga un comprador (precio de subasta más impuesto al comprador) en esta casa de subastas para compras de $1 000, $25 000 y $100 000.

b) Exprese el precio total de la compra de un lote en esta casa de subastas como una función del precio final (ganador). Dibuje la gráfica de esta función.

27. COSTO DE TRANSPORTE Una compañía de autobuses adoptó la siguiente política de precios para grupos que desean contratar sus vehículos. A los grupos de no más de 40 personas se les cobrará una cantidad fija de $2 400 (40 multiplicado por $60). Los grupos que tienen entre 40 y 80 personas, pagarán $60, menos 50 centavos por cada persona adicional a 40. La tarifa más baja de la compañía, $40 por persona, se ofrecerá a grupos de 80 o más personas. Exprese el ingreso de la compañía de autobuses como una función del tamaño del grupo. Dibuje la gráfica.

www.FreeLibros.com

28. IMPUESTO SOBRE EL INGRESO En la siguiente tabla se muestra la tasa de impuestos federales del 2002 para contribuyentes solteros.

a) Exprese el impuesto sobre el ingreso de un individuo como una función del ingreso gravable x para $0 \le x \le 141{,}250$ y dibuje la gráfica.

b) La gráfica del inciso *a)* debe constar de tres segmentos de recta. Calcule la pendiente de cada segmento. ¿Qué sucede a estas pendientes a medida que aumenta el ingreso gravable? Explique el comportamiento de las pendientes en términos prácticos.

Si el ingreso es gravable		El impuesto es	
Más de (límite inferior)	Pero no más de		Del excedente del límite inferior
0	$6 000	10%	0
$6 000	$27 950	$600 + 15%	$6 000
$27 950	$67 700	$3 893 + 27%	$27 950
$67 700	$141 250	$14 626 + 30%	$67 700

FUENTE: Bankrate.com

29. CUOTA DE ADMISIÓN Un museo de historia natural cobra la admisión a grupos de acuerdo con la siguiente política: Los grupos con menos de 50 personas pagan $3.50 por persona, mientras que grupos con 50 personas o más pagan una tarifa reducida de $3 por persona.

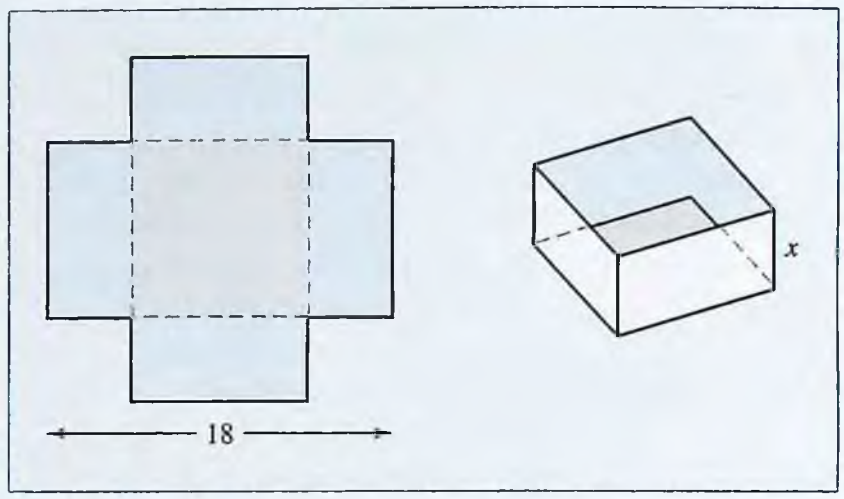
a) Exprese la cantidad que pagará un grupo por la admisión como una función del tamaño y dibuje la gráfica.

b) ¿Cuánto dinero ahorrará un grupo de 49 personas en el costo de admisión si pudiera incluir un miembro adicional?

30. COSTO DE FABRICACIÓN Una caja cerrada con una base cuadrada tiene un volumen de 250 metros cúbicos. El material para la parte superior e inferior de la caja cuesta $2 por metro cuadrado, y el material de los lados cuesta $1 el metro cuadrado. Exprese el costo de fabricación de la caja como una función de longitud de su base.

31. COSTO DE FABRICACIÓN La fabricación de una caja abierta con base cuadrada cuesta $48. El metro cuadrado de los lados de la caja cuesta $3 y el de la base cuesta $4. Exprese el volumen de la caja como una función de la longitud de la base.

32. COSTO DE FABRICACIÓN Se va a fabricar una caja abierta a partir de una pieza de cartón de 18 pulgadas por 18 pulgadas, cortando un pequeño cuadro de cada esquina y doblando las alas para formar los lados. Exprese el volumen de la caja resultante como una función de la longitud x del lado de los cuadrados cortados. Dibuje la gráfica y calcule el valor de x para el cual el volumen de la caja resultante es máximo.



PROBLEMA 32

33. DISEÑO DE UN PÓSTER Un póster rectangular tiene 25 centímetros cuadrados de impresión rodeados por márgenes de 2 centímetros a cada lado y 4 centímetros en la parte superior e inferior. Exprese el área total del póster (impreso más márgenes) como una función del ancho de la parte impresa.

34. VENTAS AL POR MENOR Una librería puede comprar cierto libro de obsequio a una editorial a un costo de $3 por ejemplar. La librería ofrece el libro a $15 el ejemplar. A este precio, se venden 200 ejemplares al mes. La librería planea bajar el precio para estimular las ventas y estima que por cada reducción de $1 en el precio, se venderán 20 libros más cada mes. Exprese la utilidad mensual de la librería por la venta de este libro como una función del precio de venta, dibuje la gráfica y calcule el precio óptimo de venta.

35. VENTAS AL POR MENOR Un fabricante vende lámparas a $30 la unidad, y a este precio los consumidores compran 3 000 lámparas al mes. El fabricante desea aumentar el precio y estima que por cada $1 de aumento en el precio, se venderán 1 000 lámparas menos cada mes. El fabricante puede producir las lámparas a $18 por unidad. Exprese la utilidad mensual del fabricante como una función del precio al que se venden las lámparas, dibuje la gráfica y calcule el precio óptimo de venta.

www.FreeLibros.com

36. DISTANCIA Un camión que viaja hacia el Oeste a una velocidad constante de 30 millas por hora se encuentra 300 millas al Este de un automóvil que viaja hacia el Norte a una velocidad constante de 60 millas por hora,. Exprese la distancia entre el automóvil y el camión como una función de tiempo.

37. COSTO DE PRODUCCIÓN Una compañía ha recibido un pedido del departamento de recreación de la ciudad para fabricar 8 000 tablas de espuma de poliestireno, que se van a utilizar en el programa de natación del verano. La compañía posee varias máquinas, cada una de las cuales puede producir 30 tablas por hora. El costo de poner en marcha las máquinas para producir esas tablas es $20 por máquina. Una vez que las máquinas se han puesto en marcha, la operación se automatiza por completo y puede ser vigilada por un solo supervisor de producción que gana $19.20 por hora. Exprese el costo de producir 8 000 tablas como una función del número de máquinas utilizadas, dibuje la gráfica, y calcule el número de máquinas que la compañía debería utilizar para minimizar el costo.

38. PRODUCCIÓN AGRÍCOLA Un productor de cítricos de Florida estima que si planta 60 naranjos, la producción promedio por árbol será 400 naranjas. La producción promedio disminuirá en 4 naranjas por árbol por cada árbol adicional plantado en el mismo terreno. Exprese la producción total del productor como una función del número de árboles adicionales plantados, dibuje la gráfica, y calcule el número total de árboles que el agricultor debe plantar para maximizar la producción.

39. COSECHA Los agricultores pueden obtener $3 por arroba de papa el 1o. de julio, después de esa fecha, el precio disminuye en 2 centavos por arroba por día. El 1o. de julio, un agricultor tiene 140 arrobas de papas en el campo y estima que la cosecha está aumentando a una tasa de 1 arroba por día. Exprese el ingreso del agricultor por la venta de la papa como una función del tiempo de recolección de la cosecha, dibuje la gráfica, y calcule cuándo el agricultor debería cosechar la papa para maximizar el ingreso.

EQUILIBRIO DE MERCADO *En los problemas 40 a 43, las funciones de oferta y demanda, $S(x)$ y $D(x)$, se dan para un artículo en particular en términos del nivel de producción x. En cada caso:*

a) Encuentre el valor de x_e para el cual se alcanza el equilibrio y el correspondiente precio de equilibrio p_e.

b) Dibuje las curvas de oferta y demanda, $p = S(x)$ y $p = D(x)$, en la misma gráfica.

c) ¿Para qué valores de x hay escasez en el mercado? ¿Y abundancia en el mercado?

40. $S(x) = 4x + 200$ y $D(x) = -3x + 480$

41. $S(x) = 3x + 150$ y $D(x) = -2x + 275$

42. $S(x) = x^2 + x + 3$ y $D(x) = 21 - 3x^2$

43. $S(x) = 2x + 7.43$ y $D(x) = -0.21x^2 - 0.84x + 50$

44. OFERTA Y DEMANDA Cuando se venden licuadoras a p dólares la unidad, los fabricantes ofrecerán $\frac{p^2}{10}$ licuadoras a los vendedores locales, mientras que la demanda local será de $60 - p$ licuadoras. ¿A qué precio de mercado será igual la oferta de licuadoras de los fabricantes a la demanda de licuadoras de los consumidores? ¿Cuántas licuadoras se venderán a este precio?

45. OFERTA Y DEMANDA Los productores ofertarán x unidades de un artículo en el mercado cuando el precio es $p = S(x)$ dólares por unidad; mientras que los consumidores demandarán (comprarán) x unidades cuando el precio es $p = D(x)$ por unidad, donde

$$S(x) = 2x + 15 \qquad \text{y} \qquad D(x) = \frac{385}{x + 1}$$

a) Encuentre el nivel de producción de equilibrio x_e y el precio de equilibrio p_e.

b) Dibuje las curvas de oferta y demanda en la misma gráfica.

c) ¿Dónde cruza el eje y la curva de oferta? Describa el significado económico de este punto.

46. HISTORIA DE ESPÍAS El héroe de una popular historia de espías escapó de las oficinas de operaciones de una banda internacional de contrabandistas de anillos de diamantes en el pequeño país mediterráneo de Azusa. El héroe, que conduce a 72 kilómetros por hora un camión transportador de leche robado, tiene una ventaja de 40 minutos sobre sus perseguidores, quienes lo siguen en un Ferrari que va a 168 kilómetros por hora. La distancia de las oficinas de operaciones de los contrabandistas a la frontera, y a la libertad, es 83.8 kilómetros. ¿Logrará escapar el héroe?

47. VIAJE AÉREO Dos aviones con destino a Los Ángeles salen de Nueva York con 30 minutos de diferencia. El primero vuela a 550 millas por hora, mientras que el segundo va a 650 millas por hora. ¿En qué tiempo pasará el segundo avión al primero?

48. ANÁLISIS DE EQUILIBRIO Un fabricante de muebles puede vender mesas de comedor a $70 la pieza. El costo total del fabricante es la suma de los costos indirectos fijos de $8 000 y los costos de producción de $30 por mesa.

www.FreeLibros.com

a) ¿Cuántas mesas debe vender el fabricante para el equilibrio?
b) ¿Cuántas mesas debe vender el fabricante para tener una utilidad de $6 000?
c) ¿Cuál será la utilidad o pérdida del fabricante si se venden 150 mesas?
d) En el mismo sistema de ejes, grafique las funciones de ingreso total y costo total. Explique cómo se pueden ver los costos fijos indirectos en la gráfica?

49. DECISIÓN DEL EDITOR Un autor debe decidir entre dos editores para su nuevo libro. El editor A ofrece regalías del 1% de las utilidades netas de los primeros 30 000 ejemplares y 3.5% de todos los ejemplares que superen esa cifra, esperando ganar $2 netos en cada ejemplar vendido. El editor B no paga regalías de los primeros 4 000 ejemplares vendidos, pero paga 2% de las utilidades netas de todas las copias que superen los 4 000 ejemplares, y espera ganar $3 netos en cada ejemplar vendido. Suponga que el autor espera vender N ejemplares. Establezca un simple criterio con base en N para decidir cómo elegir entre los dos editores.

50. CUENTA DE CHEQUES El costo de mantener una cuenta de cheques en cierto banco es $12 por mes más 10 centavos por cada cheque girado. Un banco de la competencia cobra $10 por mes más 14 centavos por cheque girado. Halle el criterio para decidir cuál banco ofrece el mejor trato.

51. FISIOLOGÍA La pupila del ojo humano es casi circular. Si la intensidad de la luz I que entra al ojo es proporcional al área de la pupila, exprese I como una función del radio r de la pupila.

52. RECICLAJE Para recolectar dinero, un club de servicios ha venido recogiendo botellas usadas que planea llevar a una compañía local de reciclaje de vidrios. Como el proyecto comenzó hace 80 días, el club ha recolectado 24 000 libras de vidrio por las cuales la compañía vidriera ofrece actualmente 1 centavo por libra. Sin embargo, como las botellas se están acumulando con más rapidez que las que pueden reciclar, la compañía planea reducir en 1 centavo cada día el precio que pagará por 100 libras de vidrio usado. Si se supone que el club puede continuar recolectando botellas a la misma tasa y que los costos de transporte no permiten realizar más de un viaje a la compañía de vidrios, exprese el ingreso del club proveniente de su proyecto de reciclaje como una función del número de días adicionales en que durará el proyecto. Dibuje la gráfica y calcule cuándo debería concluir el club su proyecto de venta de botellas para maximizar su ingreso.

53. BIOQUÍMICA En bioquímica, se encontró que la tasa R de una reacción enzimática está dada por la ecuación

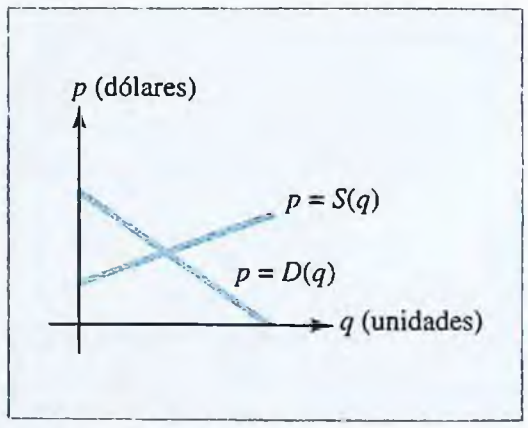
$$R = \frac{R_m[S]}{K_m + [S]}$$

donde K_m es una constante (llamada **constante de Michaelis**), R_m es la tasa máxima posible y $[S]$ es la concentración de sustrato.[4] Reescriba esta ecuación de manera que $y = \dfrac{1}{R}$ se exprese como una función de $x = \dfrac{1}{[S]}$, y dibuje la gráfica de esta función. (Esta gráfica se denomina **representación recíproca doble de Lineweaver-Burk**).

54. OFERTA Y DEMANDA Los productores ofertarán q unidades de cierto artículo en el mercado cuando el precio es $P = S(q)$ dólares por unidad, y los consumidores demandarán (comprarán) q unidades cuando el precio es $p = D(q)$ dólares por unidad, donde

$$S(q) = aq + b \qquad \text{y} \qquad D(q) = cq + d$$

y donde a, b, c y d son constantes.
a) ¿Qué puede decir acerca de los signos de las constantes a, b, c y d si las curvas de oferta y demanda son como las mostradas en la figura adjunta?
b) Exprese el nivel de producción de equilibrio q_e y el precio de equilibrio p_e en términos de los coeficientes a, b, c y d.
c) Use su respuesta del inciso *b*) para determinar qué le sucede al nivel de producción de equilibrio q_e a medida que a aumenta. ¿Qué le sucede a q_e cuando d aumenta?



[4]Mary K. Campbell, *Biochemistry*, Filadelfia, Saunders College Publishing, 1991, pp. 221-226.

www.FreeLibros.com

55. UTILIDAD DEL EDITOR A un editor le cuesta $74 200 preparar un libro para su publicación (teclear el texto, ilustrar, editar, etc.) Los costos de impresión y encuadernación son $5.50 por ejemplar. El libro se vende a las librerías a $19.50 cada uno.

a) Elabore una tabla que muestre el costo de producir 2 000, 4 000, 6 000 y 8 000 ejemplares. Utilice cuatro dígitos significativos.

b) Elabore una tabla que muestre el ingreso por la venta de 2 000, 4 000, 6 000 y 8000 ejemplares. Utilice cuatro dígitos significativos.

c) Escriba una expresión algebraica que represente el costo y como una función del número x de libros producidos.

d) Escriba una expresión algebraica que represente el ingreso y como una función del número x de libros vendidos.

e) Grafique ambas funciones en el mismo sistema de coordenadas.

f) Utilice **TRACE** y **ZOOM** para hallar dónde el costo es igual al ingreso.

g) Utilice la gráfica para determinar cuántos libros deben publicarse para producir un ingreso de al menos $85 000. ¿Cuánta utilidad deja este número de libros?

SECCIÓN 1.5 Límites

Como se verá en los siguientes capítulos, el cálculo es un rama de las matemáticas extremadamente poderosa con una amplia gama de aplicaciones, dentro de las que se incluyen el trazado de curvas, la optimización de funciones, el análisis de las tasas de cambio y el cálculo de áreas y de probabilidades. Lo que le da al cálculo esta fuerza y lo distingue del álgebra es el concepto de límite; el objetivo de esta sección es introducir este importante concepto. El enfoque será más intuitivo que formal. Las ideas que subyacen aquí forman la base para un desarrollo más riguroso de las leyes y procedimientos del cálculo y son el corazón de mucha de la matemática moderna.

Introducción intuitiva del límite

En pocas palabras, el proceso de límite consiste en examinar el comportamiento de una función $f(x)$ cuando x se aproxima a un número c, que puede o no estar en el dominio de f. Un comportamiento límite aparece en muchas situaciones prácticas. Por ejemplo, el cero absoluto, que es la temperatura T_c a la cual cesa toda actividad molecular, se puede aproximar pero en realidad nunca se alcanza. De forma similar, los economistas, quienes hablan de la utilidad en condiciones ideales, o los ingenieros, que perfilan especificaciones ideales de una máquina nueva, están efectivamente tratando con un comportamiento límite.

Para mostrar este proceso de límite, considere un gerente que determina que cuando se está utilizando x porcentaje de la capacidad de la planta de su compañía, el costo total es

$$C(x) = \frac{8x^2 - 636x - 320}{x^2 - 68x - 960}$$

cientos de miles de dólares. La compañía tiene una política de rotar el mantenimiento de tal forma que nunca se utilice más del 80% de su capacidad. ¿Qué costo esperaría el gerente cuando la planta está operando a toda la capacidad permitida?

Puede parecer que la respuesta a esta pregunta es simplemente evaluar $C(80)$; pero, al intentar realizar esa evaluación se obtiene la fracción sin sentido $\frac{0}{0}$. Sin embargo, aún se puede evaluar $C(x)$ para valores de x que *tienden* a 80 por la izquierda ($x < 80$) y por la derecha ($x > 80$), como se indica en la siguiente tabla:

www.FreeLibros.com

	x tiende a 80 por la izquierda →				← x tiende a 80 por la derecha		
x	79.8	79.99	79.999	80	80.0001	80.001	80.04
$C(x)$	6.99782	6.99989	6.99999	✕	7.000001	7.00001	7.00043

Los valores de $C(x)$ que se muestran en el reglón inferior de esta tabla sugieren que $C(x)$ tiende al número 7 a medida que x se acerca más y más a 80. Por consiguiente, es razonable que el gerente espere un costo de \$700 000 cuando se utiliza el 80% de la capacidad de la planta.

El comportamiento de la función en este ejemplo se puede describir diciendo "$C(x)$ tiene valor límite 7 cuando x tiende a 80" o, de manera equivalente, escribir

$$\lim_{x \to 80} C(x) = 7$$

De forma más general, el límite de $f(x)$ cuando x tiende al número c se puede definir informalmente como sigue:

Límite ■ Si $f(x)$ se acerca más y más al número L cuando x se aproxima cada vez más a c, por ambos lados, entonces L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c. Este comportamiento se expresa simbólicamente como

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Geométricamente, el enunciado de límite $\lim_{x \to c} f(x) = L$ significa que la altura de la gráfica $y = f(x)$ tiende a L cuando x tiende a c, tal como se muestra en la figura 1.40. Esta interpretación se muestra junto con la aproximación tabular en el ejemplo 1.5.1 donde se calcula el límite.

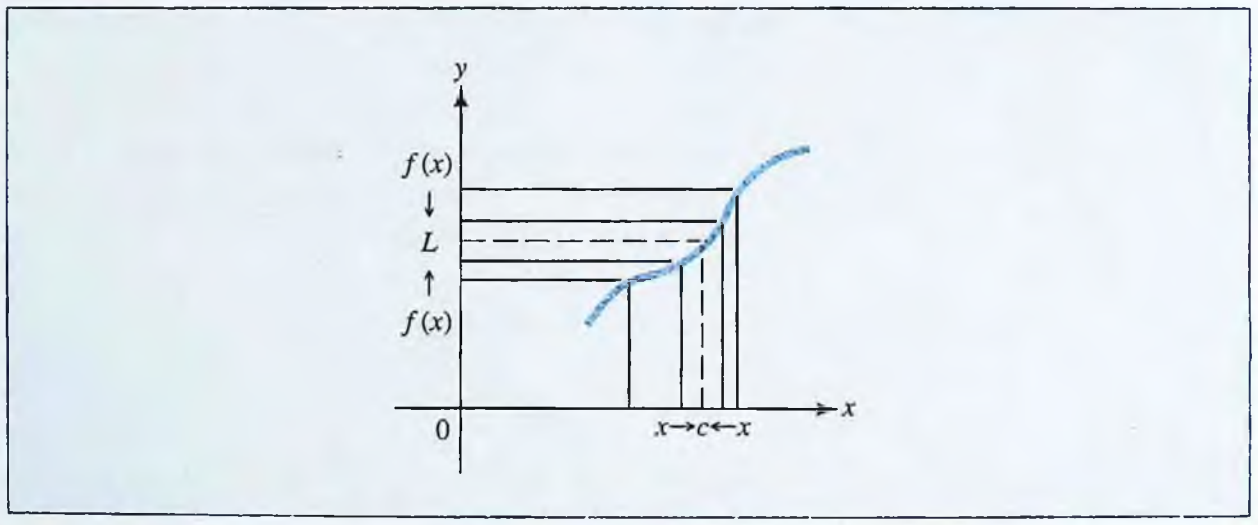


FIGURA 1.40 Si $\lim_{x \to c} f(x) = L$, entonces la altura de la gráfica de f tiende L cuando x se aproxima a c.

EJEMPLO | 1.5.1

Utilice una tabla para calcular el límite

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Grafique $f(x) = (\sqrt{x} - 1)/(x - 1)$, utilizando la pantalla con dimensiones [0, 4.7]1 por [−1.1, 2.1]1. Trace los valores cerca de $x = 1$. También construya una tabla de valores, utilizando un valor inicial de 0.97 para x con un cambio incremental de 0.01. Describa lo que haya observado. Ahora utilice un valor inicial de 0.997 para x con un cambio incremental de 0.001. Específicamente, ¿qué ocurre cuando x tiende a 1 por cualquier lado? ¿Cuál sería el valor más apropiado para $f(x)$ en $x = 1$ para llenar el hueco en la gráfica?

Solución

Sea

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

calcule $f(x)$ para una sucesión de valores de x que se aproximan a 1 por la izquierda y por la derecha:

$x \to 1 \leftarrow x$

x	0.99	0.999	0.9999	1	1.00001	1.0001	1.001
$f(x)$	0.50126	0.50013	0.50001		0.499999	0.49999	0.49988

Los números en el reglón inferior de la tabla sugieren que $f(x)$ tiende a 0.5 cuando x tiende a 1; esto es,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = 0.5$$

En la figura 1.41 se muestra la gráfica de $f(x)$. El cálculo del límite indica que la altura de la gráfica de $y = f(x)$ tiende a $L = 0.5$ cuando x tiende a 1. Éste corresponde al "hueco" en la gráfica de $f(x)$ en (1, 0.5). En el ejemplo 1.5.6 podrá calcular este mismo límite utilizando un procedimiento algebraico.

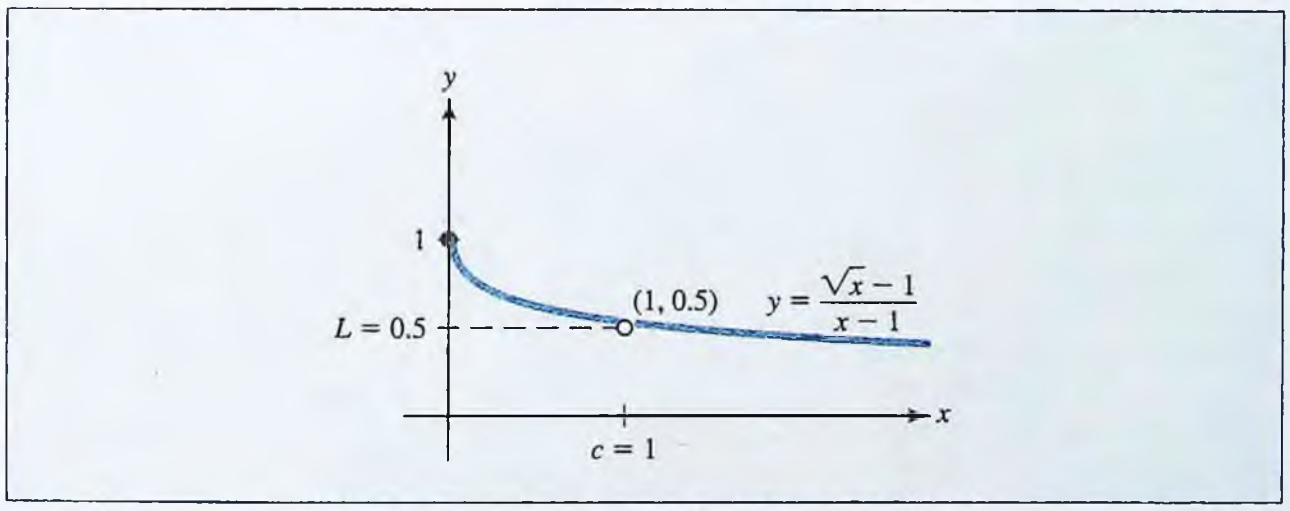


FIGURA 1.41 La función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ tiende a $L = 0.5$ cuando x se aproxima a $c = 1$.

Es importante recordar que el límite describe el comportamiento de una función *cerca* de un punto dado, no necesariamente *en* el punto mismo. Esto se ilustra en la figura 1.42. Para las tres funciones cuya gráfica se muestra en el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 3 es igual a 4. Sin embargo, las funciones se comportan de manera muy diferente en $x = 3$. En la figura 1.42a, $f(c)$ es igual al límite 4; en la figura 1.42b, $f(c)$ es diferente de 4; y en la 1.42c, $f(c)$ no está definida.

www.FreeLibros.com

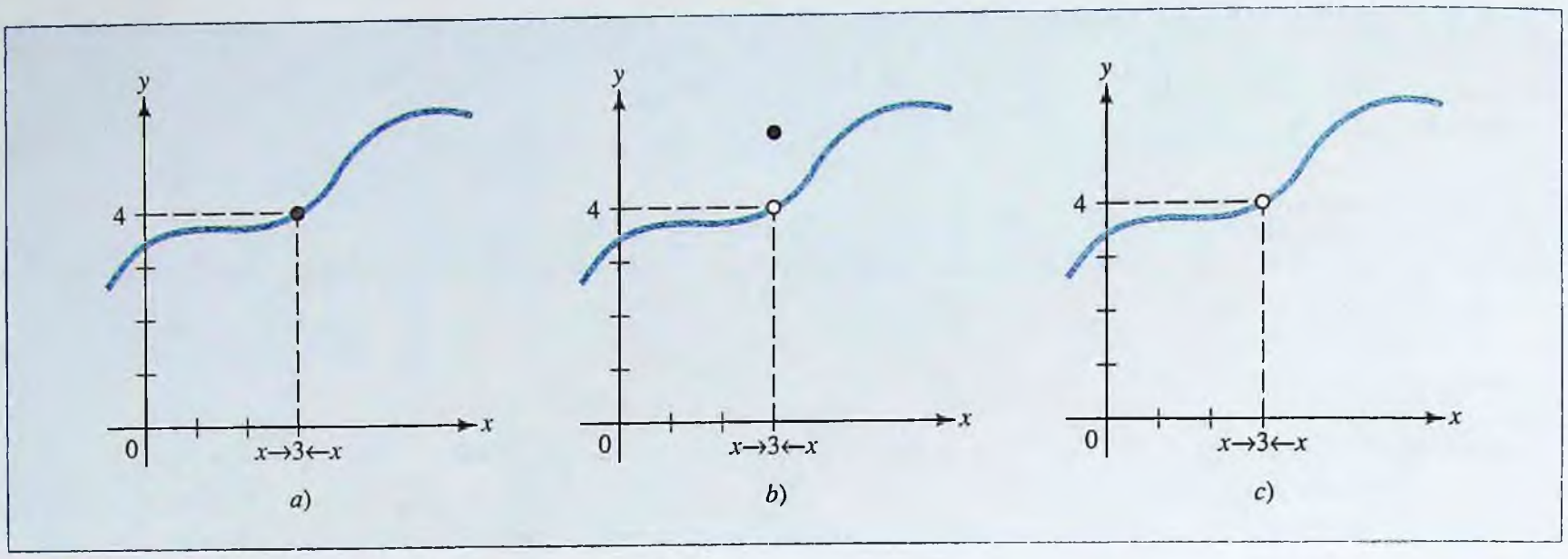


FIGURA 1.42 Tres funciones para las cuales $\lim_{x \to 3} f(x) = 4$.

En la figura 1.43 se muestra la gráfica de dos funciones que no tienen límite cuando x tiende a 2. El límite no existe en la figura 1.43a ya que $f(x)$ tiende a 5 cuando x tiende a 2 por la derecha, y tiende a un valor diferente, 3, cuando x tiende a 2 por la izquierda. La función en la figura 1.43b no tiene límite finito cuando x tiende a 2 ya que los valores de $f(x)$ aumentan ilimitadamente cuando x tiende a 2 y por tanto no tienden a un número finito L. Los así llamados *límites infinitos* se analizarán posteriormente en esta sección.

¡EXPLORE!

Grafique $f(x) = \dfrac{2}{(x-2)^2}$ utilizando la pantalla [0, 4]1 por [−5, 40]5. Trace la gráfica a ambos lados de $x = 2$ para ver el comportamiento de $f(x)$ cerca de $x = 2$. También muestre la tabla de valores de la función con el cambio incremental de x definido igual a 0.01 y el valor inicial $x = 1.97$. ¿Qué le sucede a los valores de $f(x)$ cuando x tiende a 2?

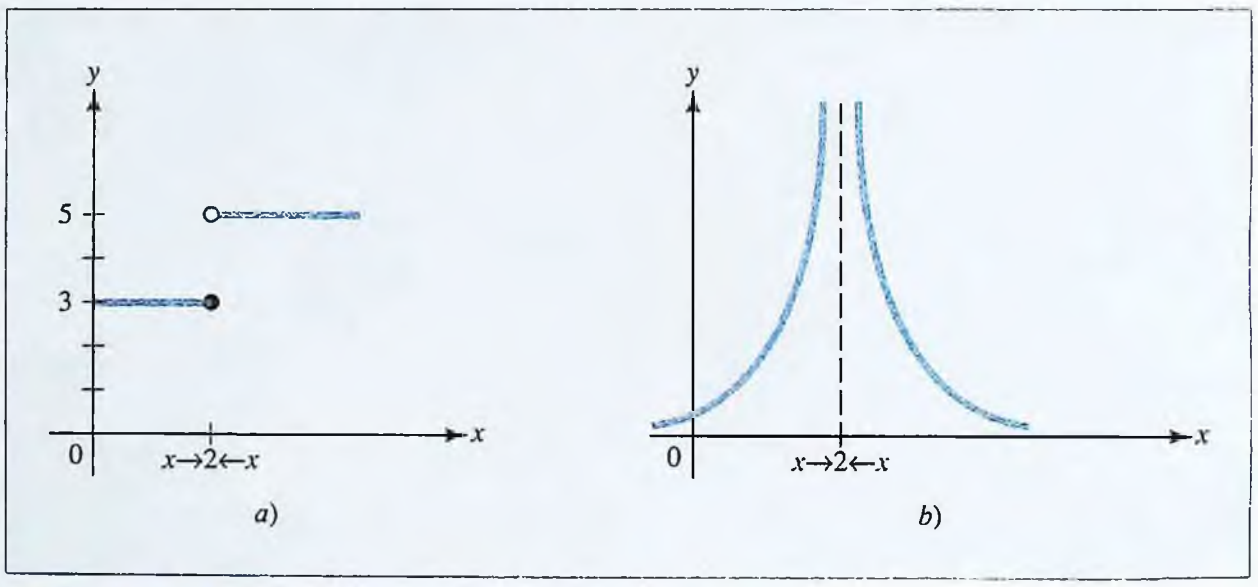


FIGURA 1.43 Dos funciones para las cuales $\lim_{x \to 2} f(x)$ no existe.

Propiedades de los límites

Los límites obedecen ciertas reglas algebraicas que se pueden utilizar en los cálculos. Estas reglas, que resultan naturales con base en nuestra definición informal de límite, se demuestran formalmente en cursos más teóricos. Éstas son importantes porque simplifican los cálculos de límites de funciones algebraicas.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Grafique la función

$$f(x) = \begin{cases} 3 & x \le 2 \\ 5 & x > 2 \end{cases}$$

utilizando el estilo gráficas de puntos y escribiendo

$$Y1 = 3(X \le 2) + 5(X > 2)$$

en el editor de ecuaciones de su calculadora graficadora. Utilice su tecla **TRACE** para determinar los valores de y cuando x está cerca de 2. ¿Hay una diferencia cuando se aproxima a $x = 2$ por alguno de los lados? También evalúe $f(2)$.

Propiedades algebraicas de los límites Si $\lim_{x \to c} f(x)$ y $\lim_{x \to c} g(x)$ existen, entonces

$$\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$$

$$\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$$

$$\lim_{x \to c} [kf(x)] = k \lim_{x \to c} f(x) \quad \text{para cualquier constante, } k$$

$$\lim_{x \to c} [f(x)g(x)] = [\lim_{x \to c} f(x)][\lim_{x \to c} g(x)]$$

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} \quad \text{si } \lim_{x \to c} g(x) \neq 0$$

$$\lim_{x \to c} [f(x)]^p = [\lim_{x \to c} f(x)]^p \quad \text{si } [\lim_{x \to c} f(x)]^p \text{ existe}$$

Es decir, el límite de una suma, diferencia, múltiplo, producto, cociente, o potencia es la suma, diferencia, múltiplo, producto o potencia de los límites por separado siempre que todas las expresiones involucradas estén definidas.

A continuación se presentan dos límites elementales que se usarán junto con las reglas de los límites para calcular límites de expresiones más complejas.

Límites de dos funciones lineales Para cualquier constante k,

$$\lim_{x \to c} k = k \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c} x = c$$

Esto es, el límite de una constante es la constante misma y el límite de $f(x) = x$, cuando x tiende a c, es c.

En términos geométricos, el enunciado de límite $\lim_{x \to k} k = k$ indica que la altura de la gráfica de una función constante $f(x) = k$ tiende a k cuando x tiende a c. De manera similar, $\lim_{x \to c} x = c$ indica que la altura de una función lineal $f(x) = x$ tiende a c cuando x tiende a c. Estos enunciados se muestran en la figura 1.44.

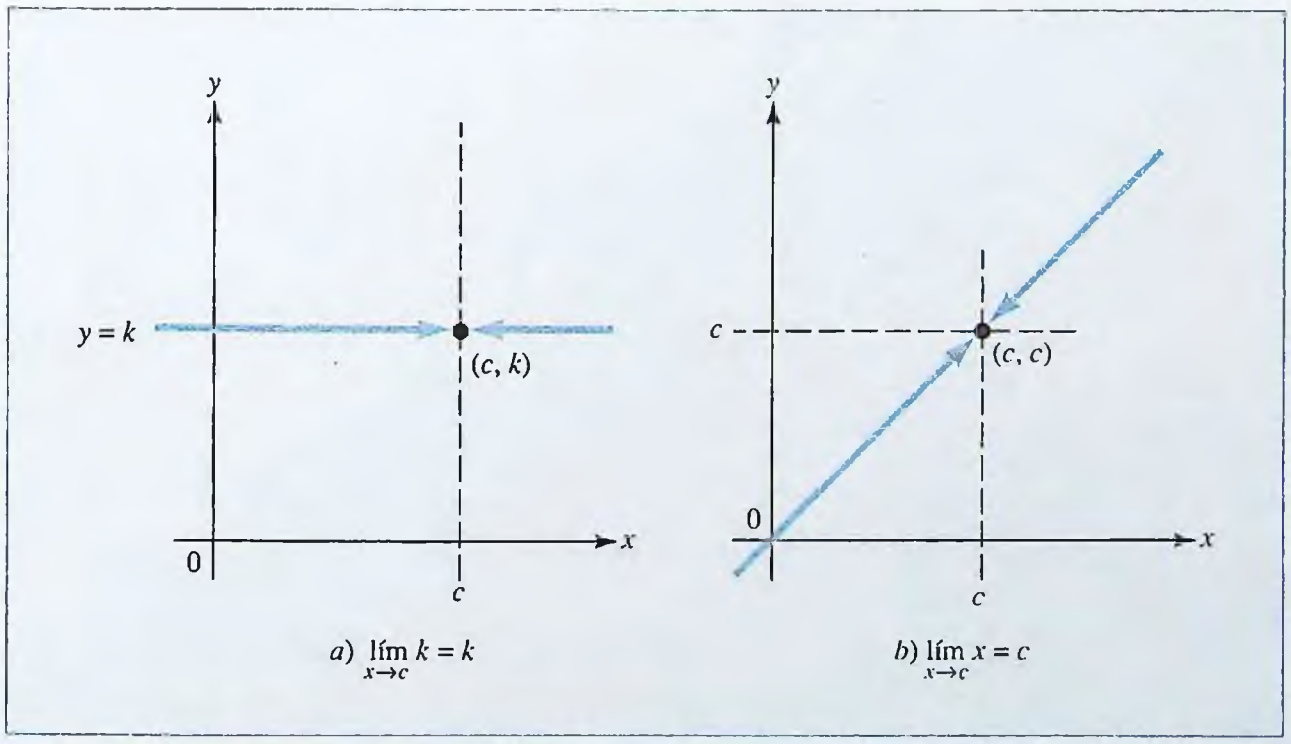


FIGURA 1.44 Límites de dos funciones lineales.

www.FreeLibros.com

Cálculo de los límites

En los ejemplos del 1.5.2 al 1.5.6 se muestra cómo se pueden utilizar las propiedades de los límites para calcular los límites de las funciones algebraicas. En el primer ejemplo se verá cómo encontrar el límite de un polinomio.

¡EXPLORE!

Grafique $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 1}$ utilizando la pantalla con dimensiones [0, 2].5 por [0, 5].5. Trace en $x = 1$ y observe que no hay un valor correspondiente de y. Cree una tabla con un valor inicial de 0.5 para x, aumentando en incrementos de 0.1. Observe que se muestra un error para $x = 1$, lo que confirma que $f(x)$ está indeterminado en $x = 1$. ¿Cuál sería el valor apropiado de y si se llenara esta separación? Cambie el valor inicial de x a 0.9 y el tamaño del incremento a 0.01 para obtener una mejor aproximación. Por último, acérquese en la gráfica a $x = 1$ para inferir un valor límite para la función en $x = 1$.

EJEMPLO | 1.5.2

Halle $\lim_{x \to -1} (3x^3 - 4x + 8)$.

Solución

Aplicando las propiedades de los límites se obtiene

$$\lim_{x \to -1} (3x^3 - 4x + 8) = 3\left(\lim_{x \to -1} x\right)^3 - 4\left(\lim_{x \to -1} x\right) + \lim_{x \to -1} 8$$
$$= 3(-1)^3 - 4(-1) + 8 = 9$$

En el ejemplo 1.5.3 se verá cómo encontrar el límite de una función racional cuyo denominador no tiende a cero.

EJEMPLO | 1.5.3

Halle $\lim_{x \to 0} \dfrac{3x^3 - 8}{x - 2}$.

Solución

Puesto que $\lim_{x \to 0} (x - 2) \neq 0$, se puede utilizar la regla del cociente para los límites para obtener

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^3 - 8}{x - 2} = \frac{\lim_{x \to 0} (3x^3 - 8)}{\lim_{x \to 0} (x - 2)} = \frac{3\lim_{x \to 0} x^3 - \lim_{x \to 0} 8}{\lim_{x \to 0} x - \lim_{x \to 0} 2} = \frac{0 - 8}{0 - 2} = 4$$

En general, se pueden utilizar las propiedades de los límites para obtener estas fórmulas, las cuales se usan para evaluar muchos de los límites que aparecen en los problemas prácticos.

Límites de polinomios y funciones racionales ▪ Si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, entonces

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$$

y

$$\lim_{x \to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)} \quad \text{si } q(c) \neq 0$$

En el ejemplo 1.5.4 el denominador de una función racional dada se aproxima a cero, mientras que el denominador no. En este caso se puede concluir que el límite no existe. El valor absoluto de este cociente aumenta ilimitadamente y por consiguiente no tiende a ningún número finito.

www.FreeLibros.com

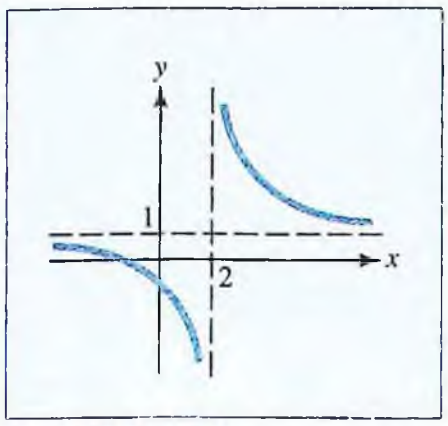


FIGURA 1.45 La gráfica de $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$.

EJEMPLO | 1.5.4

Halle $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x+1}{x-2}$.

Solución

La regla del cociente para los límites no se aplica en este caso ya que el límite del denominador es

$$\lim_{x\to 2} (x-2) = 0$$

Puesto que el límite del numerador es $\lim\limits_{x\to 2} (x+1) = 3$, que no es igual a cero, se puede concluir que el límite del cociente no existe.

La gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ en la figura 1.45 da una mejor idea de lo que realmente está ocurriendo en el ejemplo. Observe que $f(x)$ aumenta ilimitadamente cuando x tiende a 2 por la derecha y disminuye ilimitadamente cuando x tiende a 2 por la izquierda.

¡EXPLORE!

Grafique $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ utilizando una pantalla agrandada [−9.4, 9.4]1 por [−6.2, 6.2]1. Utilice la tecla **TRACE** para aproximarse a $x = 2$ por el lado izquierdo y por el lado derecho. También haga una tabla de valores, usando un valor inicial de 1.97 para x y aumentando en incrementos de 0.01. Describa qué observa.

En el ejemplo 1.5.5, tanto el numerador como el denominador de la función racional dada tienden a cero. Cuando esto ocurre, se debe tratar de simplificar la función algebraicamente para encontrar el límite deseado.

EJEMPLO | 1.5.5

Encuentre $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

Solución

Cuando x se aproxima a 1, tanto el numerador como el denominador tienden a cero y no se puede sacar ninguna conclusión acerca del tamaño del cociente. Para proceder, observe que la función dada no está definida cuando $x = 1$; en caso de que sí lo esté para todos los otros valores de x, se puede dividir el numerador y el denominador entre $x - 1$ con lo que se obtiene

$$\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x+1}{x-2} \qquad x \neq 1$$

(Puesto que $x \neq 1$, no se está dividiendo entre cero.) Ahora se toma el límite cuando x tiende (pero no es igual) a 1 con lo que obtiene

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x-2)} = \frac{2}{-1} = -2$$

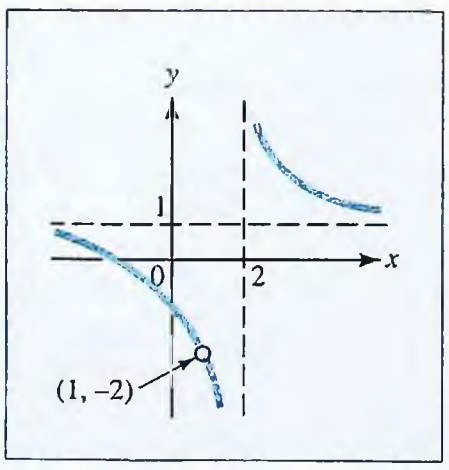


FIGURA 1.46 La gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$.

En la figura 1.46 aparece la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$. Observe que es igual a la gráfica de la figura 1.45, pero con un hueco en el punto $(1, -2)$.

www.FreeLibros.com

En general, cuando tanto el numerador como el denominador de un cociente tienden a cero cuando x se aproxima a c, la estrategia será simplificar el coeficiente algebraicamente (como en el ejemplo 1.5.5 al eliminar a $x - 1$). En la mayoría de los casos, la forma simplificada del cociente será válida para todos los valores de x excepto en $x = c$. Debido a que lo que interesa es el comportamiento del cociente *cerca* de $x = c$ y no *en* $x = c$, se puede utilizar la forma simplificada del cociente para calcular el límite. En el ejemplo 1.5.6, se maneja esta técnica para obtener el límite que se había calculado en el ejemplo 1.5.1 usando una tabla.

EJEMPLO | 1.5.6

Encuentre $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$.

Solución

Tanto el numerador como el denominador tienden a 0 cuando x se aproxima a 1. Para simplificar el cociente, se racionaliza el numerador (es decir, se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{x} + 1$) y se tiene

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \qquad x \neq 1$$

Ahora se toma el límite y se obtiene

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

Límites al infinito

Con frecuencia el comportamiento a "largo plazo" es un tema de interés en negocios y en economía y también en física y en ciencias naturales. Por ejemplo, un biólogo podría desear conocer la población de una colonia de bacterias o la población de las moscas de fruta después de un periodo de tiempo indefinido; o un director de empresa puede desear saber cómo se afecta el costo promedio de fabricación de un producto dado, cuando el nivel de la producción aumenta indefinidamente.

En matemáticas, el símbolo infinito ∞ se utiliza para representar el crecimiento ilimitado o el resultado de tal crecimiento. He aquí las definiciones de los límites que implican infinito, que se usarán para estudiar el comportamiento "a largo plazo".

Límites al infinito ■ Si los valores de la función $f(x)$ tienden al número L cuando x aumenta sin límite, se escribe

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

De manera similar se escribe

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$$

cuando los valores de la función $f(x)$ tienden al número M cuando x disminuye sin límite.

Geométricamente, la expresión de límite $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ significa que cuando x aumenta sin límite, la gráfica de $f(x)$ se aproxima a la recta horizontal $y = L$, mientras que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$ significa que la gráfica de $f(x)$ se aproxima a la recta $y = M$

www.FreeLibros.com

cuando x disminuye sin límite. Las rectas $y = L$ y $y = M$ que aparecen en este contexto se llaman **asíntotas horizontales** de la gráfica de $f(x)$. Una gráfica puede tener asíntotas horizontales de muchas maneras diferentes, una de ellas se muestra en la figura 1.47. Se podrá profundizar más respecto a las asíntotas en el capítulo 3, como parte de un análisis general del trazado de gráficas usando el cálculo.

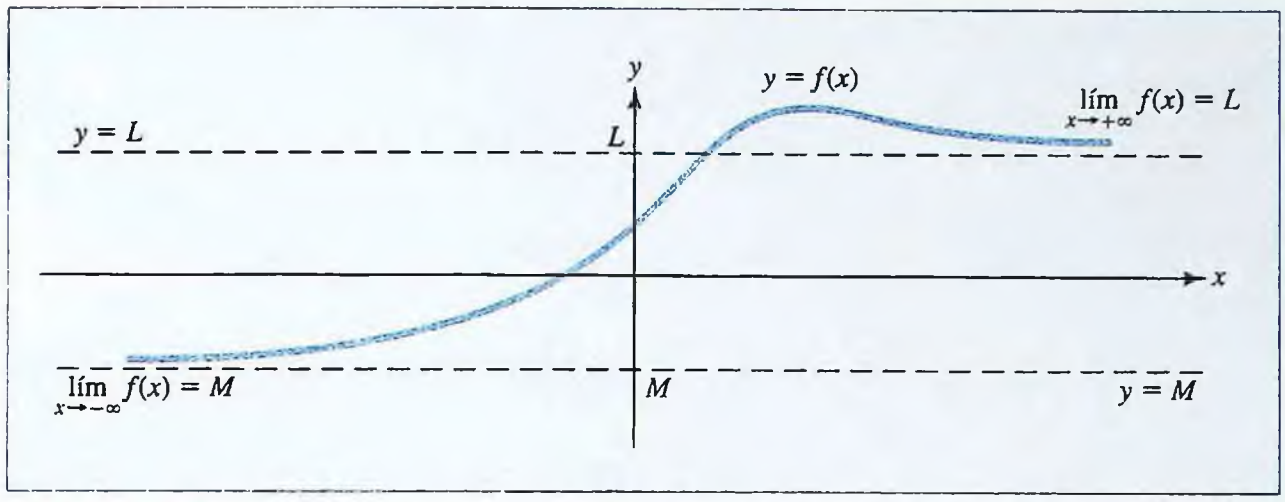


FIGURA 1.47 Una gráfica que muestra límites al infinito y asíntotas horizontales.

Las propiedades algebraicas de los límites listadas anteriormente en esta sección también se aplican a los límites al infinito. Además, debido a que cualquier recíproco de una potencia $1/x^k$ para $k > 0$, se hace más y más pequeño en valor absoluto cuando x aumenta o disminuye sin límite, se tienen las siguientes reglas útiles:

Reglas del recíproco de la potencia ▪ Para A y k, constantes, con $k > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{A}{x^k} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{A}{x^k} = 0$$

El uso de estas reglas se muestra en el ejemplo 1.5.7.

EJEMPLO 1.5.7

Encuentre $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{1 + x + 2x^2}$

Solución

Para obtener intuitivamente de lo que ocurre con este límite, se evalúa la función

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x + 2x^2}$$

en $x = 100$, 1 000, 10 000 y 100 000 y se muestran los datos en una tabla:

				$x \to +\infty$
x	100	1 000	10 000	100 000
$f(x)$	0.49749	0.49975	0.49997	0.49999

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Grafique $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x + 2x^2}$ utilizando la pantalla [−20, 20]5 por [0, 1]1. Ahora **TRACE** la gráfica a la derecha para valores grandes de x, haciendo x = 30, 40 y más allá. ¿Qué observa acerca de los correspondientes valores de y y del comportamiento de la gráfica? ¿Qué inferiría acerca del valor de $f(x)$ cuando $x \to \infty$?

Los valores de la función en el reglón inferior de la tabla indican que $f(x)$ se aproxima a 0.5 cuando x crece más y más. Para confirmar esta observación analíticamente, se divide cada término de la ecuación en $f(x)$ entre la potencia más alta que aparece en el denominador $1 + x + 2x^2$; es decir, entre x^2. Esto permite encontrar $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; aplicando las reglas del recíproco de la potencia de la siguiente manera:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1 + x + 2x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2/x^2}{1/x^2 + x/x^2 + 2x^2/x^2}$$

$$= \frac{\lim_{x\to+\infty} 1}{\lim_{x\to+\infty} 1/x^2 + \lim_{x\to+\infty} 1/x + \lim_{x\to+\infty} 2} \qquad \textit{algunas propiedades algebraicas de límites}$$

$$= \frac{1}{0 + 0 + 2} = 0.5 \qquad \textit{regla del recíproco de una potencia}$$

La gráfica de $f(x)$ se muestra en la figura 1.48. Para practicar, verifique también que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.5$.

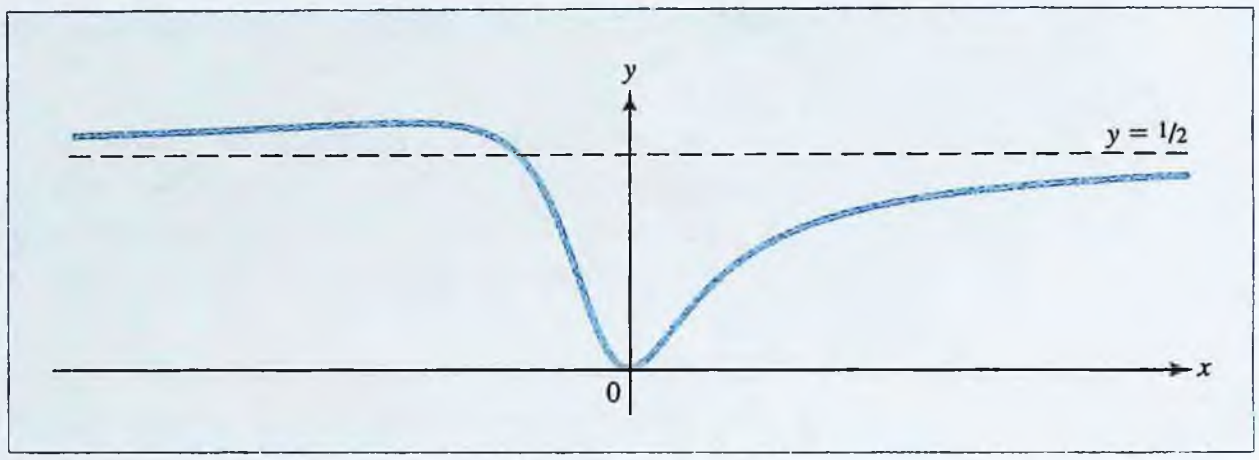


FIGURA 1.48 La gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x + 2x^2}$.

He aquí una descripción general del procedimiento para evaluar un límite al infinito de una función racional.

Procedimiento para evaluar un límite al infinito de $f(x) = p(x)/q(x)$

Paso 1. Divida cada término de $f(x)$ entre la potencia más alta x^k que está en el polinomio del denominador $q(x)$.

Paso 2. Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ utilizando propiedades algebraicas de los límites y las reglas del recíproco de la potencia.

EJEMPLO | 1.5.8

Encuentre $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{3x^2 - 5x + 2}$.

Solución

La potencia más alta en el denominador es x^2. Divida el numerador y el denominador entre x^2 para obtener

www.FreeLibros.com

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x+1}{3x^2-5x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+3/x+1/x^2}{3-5/x+2/x^2}=\frac{2+0+0}{3-0+0}=\frac{2}{3}$$

EJEMPLO | 1.5.9

Si se siembra cierto cultivo en una tierra donde el nivel de nitrógeno es N, entonces el volumen de la cosecha, Y puede modelarse con la función de *Michaelis-Menten*

$$Y(N)=\frac{AN}{B+N}\qquad N\geq 0$$

donde A y B son constantes positivas. ¿Qué le sucede a la cosecha cuando el nivel de nitrógeno se incrementa indefinidamente?

Solución

Se desea calcular

$$\begin{aligned}\lim_{N\to+\infty}Y(N)&=\lim_{N\to+\infty}\frac{AN}{B+N}\\&=\lim_{N\to+\infty}\frac{AN/N}{B/N+N/N}\\&=\lim_{N\to+\infty}\frac{A}{B/N+1}=\frac{A}{0+1}\\&=A\end{aligned}$$

Por tanto, el volumen de la cosecha tiende al valor de la constante A cuando el nivel N del nitrógeno aumenta indefinidamente. Por esta razón, A recibe el nombre de *cosecha máxima alcanzable*.

Límites infinitos Se dice que $\lim_{x\to c}f(x)$ es un **límite infinito** si $f(x)$ aumenta o disminuye ilimitadamente cuando $x\to c$. Técnicamente, este límite no existe, pero se puede dar más información acerca del comportamiento de la función escribiendo

$$\lim_{x\to c}f(x)=+\infty$$

si $f(x)$ crece sin límite cuando $x\to c$ o

$$\lim_{x\to c}f(x)=-\infty$$

si $f(x)$ decrece sin límite cuando $x\to c$. Esta notación se muestra en el ejemplo 1.5.10 para el caso donde $x\to+\infty$.

EJEMPLO | 1.5.10

Encuentre $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{-x^3+2x+1}{x-3}$.

Solución

La potencia más alta en el denominador es x. Divida el numerador y el denominador entre x para obtener

www.FreeLibros.com

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+2x+1}{x-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+2+1/x}{1-3/x}$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-x^2+2+\frac{1}{x}\right)=-\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)=1$$

se deduce que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+2x+1}{x-3}=-\infty$$

PROBLEMAS | 1.5

En los problemas del 1 al 6 halle $\lim_{x\to a} f(x)$ *si existe.*

1.

2.

3.

4.

5.

6.

www.FreeLibros.com

En los problemas del 7 al 26 halle el límite indicado, si existe.

7. $\lim_{x\to 2}(3x^2 - 5x + 2)$

8. $\lim_{x\to -1}(x^3 - 2x^2 + x - 3)$

9. $\lim_{x\to 0}(x^5 - 6x^4 + 7)$

10. $\lim_{x\to -1/2}(1 - 5x^3)$

11. $\lim_{x\to 3}(x - 1)^2(x + 1)$

12. $\lim_{x\to -1}(x^2 + 1)(1 - 2x)^2$

13. $\lim_{x\to 1/3}\dfrac{x + 1}{x + 2}$

14. $\lim_{x\to 1}\dfrac{2x + 3}{x + 1}$

15. $\lim_{x\to 5}\dfrac{x + 3}{5 - x}$

16. $\lim_{x\to 3}\dfrac{2x + 3}{x - 3}$

17. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

18. $\lim_{x\to 3}\dfrac{9 - x^2}{x - 3}$

19. $\lim_{x\to 5}\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x - 5}$

20. $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

21. $\lim_{x\to 4}\dfrac{(x + 1)(x - 4)}{(x - 1)(x - 4)}$

22. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x(x^2 - 1)}{x^2}$

23. $\lim_{x\to -2}\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2}$

24. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$

25. $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

26. $\lim_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

Para los problemas del 27 al 36 halle $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to -\infty} f(x)$. *Si el valor del límite es infinito, indique si éste es* $+\infty$ o $-\infty$.

27. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4$

28. $f(x) = 1 - x + 2x^2 - 3x^3$

29. $f(x) = (1 - 2x)(x + 5)$

30. $f(x) = (1 + x^2)^3$

31. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 + 5x + 1}$

32. $f(x) = \dfrac{1 - 3x^3}{2x^3 - 6x + 2}$

33. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{3x^2 + 2x - 7}$

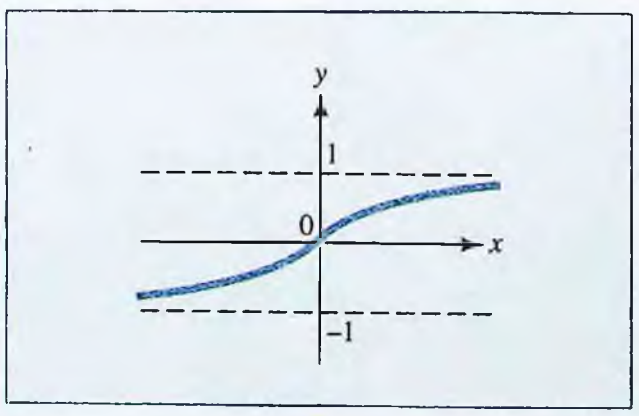
34. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 5}{1 - 2x - x^3}$

35. $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 2}{2x - 9}$

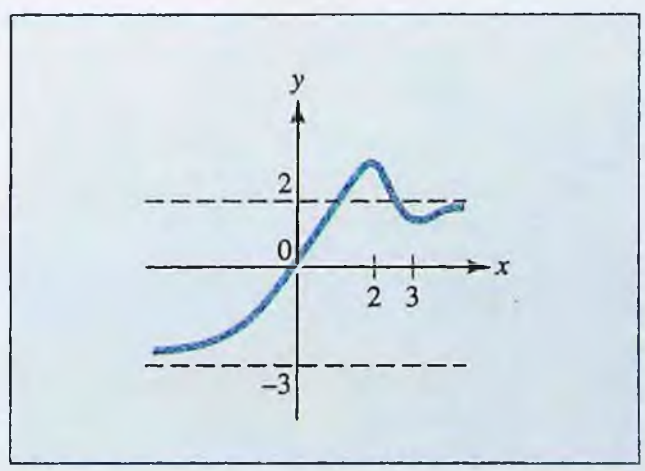
36. $f(x) = \dfrac{1 - 2x^3}{x + 1}$

En los problemas 37 y 38, se muestra la gráfica de una función $f(x)$. *Utilice la gráfica para determinar* $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ *y* $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

37.



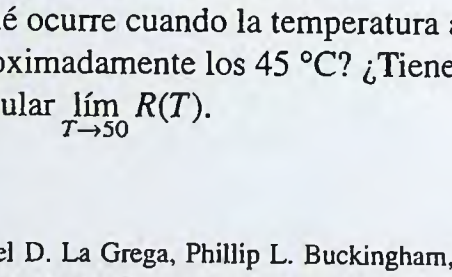
38.



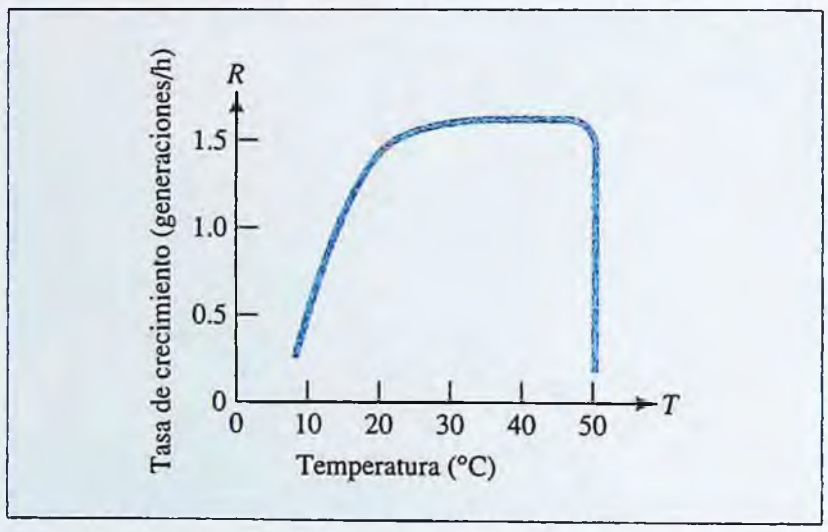
www.FreeLibros.com

39. Un alambre se estira horizontalmente, como se muestra en la figura. Se realiza un experimento en el cual se fijan diferentes pesas en el centro y se miden los desplazamientos verticales correspondientes. Cuando se añade demasiado peso, el alambre se rompe. Con base en los datos de la tabla siguiente, ¿cuál es el desplazamiento posible máximo para este tipo de alambre?

Peso W (lb)	15	16	17	18	17.5	17.9	17.99
Desplazamiento y (pulg)	1.7	1.75	1.78	se rompe	1.79	1.795	se rompe



40. CRECIMIENTO BACTERIAL La gráfica muestra cómo cambia la tasa de crecimiento $R(T)$ de una colonia de bacterias con respecto a la temperatura T.[5]



a) ¿En qué rango de valores de T la tasa de crecimiento $R(T)$ será del doble?

b) ¿Qué se puede decir acerca de la tasa de crecimiento para $25 < T < 45$?

c) ¿Qué ocurre cuando la temperatura alcanza aproximadamente los 45 °C? ¿Tiene sentido calcular $\lim_{T \to 50} R(T)$.

d) Redacte un párrafo que describa cómo afecta la temperatura a la tasa de crecimiento de la especie.

41. COMPORTAMIENTO ANIMAL En algunas especies animales, el consumo de comida se afecta por la intensidad de la vigilancia a la que se somete al animal mientras come. En realidad, es difícil comer mucho mientras se siente la vigilancia de un depredador que se lo puede comer a usted. En cierto modelo,[6] si el animal está buscando alimento en plantas que brindan un bocado de tamaño S, la tasa de consumo de alimento $I(S)$ está dada por una función de la forma

$$I(S) = \frac{aS}{S + c}$$

donde a y c son constantes positivas.

a) ¿Qué le ocurre al consumo de alimento $I(S)$ cuando un bocado de tamaño S aumenta indefinidamente? Interprete su resultado.

b) Lea un artículo que trate acerca de las diferentes formas en que la tasa de consumo de alimento se puede afectar por la vigilancia de depredadores. Después escriba un párrafo acerca de cómo se pueden utilizar los modelos matemáticos para estudiar tal comportamiento en zoología. La referencia que se cita en este problema ofrece un buen punto de partida.

42. PSICOLOGÍA EXPERIMENTAL Para estudiar la tasa con la que aprenden los animales, un estudiante de sicología realizó un experimento en el que enviaba a una rata repetidamente a través de un laberinto. Suponga que el tiempo requerido para que la rata atraviese el laberinto en el n-ésimo intento era aproximadamente $T(n) = \dfrac{5n + 17}{n}$ minutos. ¿Qué ocurre con el tiempo que tarda la rata en atravesar el laberinto a medida que aumenta indefinidamente el número de intentos n? Interprete su resultado.

43. COSTO PROMEDIO Un director de una empresa determina que el costo total de producir x unidades de un producto dado se puede modelar por la función

$$C(x) = 7.5x + 120\,000$$

(dólares). El costo promedio es $A(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. Encuentre $\lim_{x \to +\infty} A(x)$ e interprete su resultado.

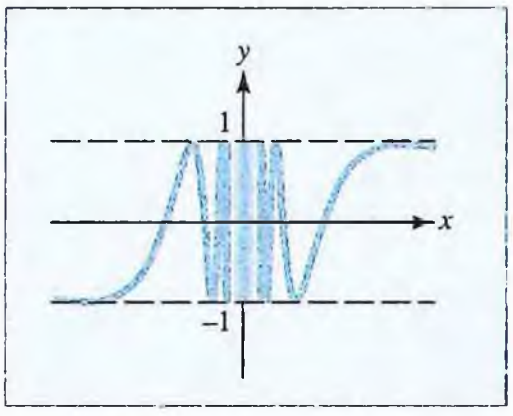
[5] *Fuente:* Michael D. La Grega, Phillip L. Buckingham, y Jeffrey C. Evans, *Hazardous Waste Management*. Nueva York: McGraw-Hill, 1994, pp. 565-566. Reimpreso con permiso.

[6] A. W. Willius y C. Fitzgibbon, "Costs of Vigilance in Foraging Ungulates", en *Animal Behavior*, Vol. 47, Pt. 2 (Feb. 1994).

www.FreeLibros.com

44. Resuelva los problemas del 17 al 26; utilizando la instrucción **TRACE** de su calculadora para construir una tabla de valores de x y $f(x)$ cerca del número al que x se acerca .

45. La siguiente gráfica representa una función $f(x)$ que oscila entre 1 y -1 más y más frecuentemente cuando x se acerca a 0 por la derecha o por la izquierda. ¿Existe $\lim_{x\to 0} f(x)$? ¿Si es así, cuál es su valor? [*Nota*: Para estudiantes con experiencia en trigonometría, la función $f(x) = \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ se comporta de este modo.]



46. Si se invierten \$1 000 al 5% de interés compuesto n veces al año, el saldo después de 1 año será $1\,000(1 + 0.05x)^{1/x}$, donde $x = \frac{1}{n}$ es la longitud del periodo de capitalización. Por ejemplo, si $n = 4$, el periodo de capitalización es $\frac{1}{4}$ de año. Para el llamado interés *compuesto continuamente*, el saldo después de 1 año está dado por el límite

$$B = \lim_{b\to 0^+} 1\,000(1 + 0.05x)^{1/x}$$

Calcule el valor de este límite completando el segundo renglón de la siguiente tabla:

x	1	0.1	0.01	0.001	0.0001
$1\,000(1 + 0.05x)^{1/x}$					

47. Evalúe el límite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

para las constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ y $b_0, b_1, \ldots, b_m$ en cada uno de los casos siguientes:

a) $n < m$

b) $n = m$

c) $n > m$

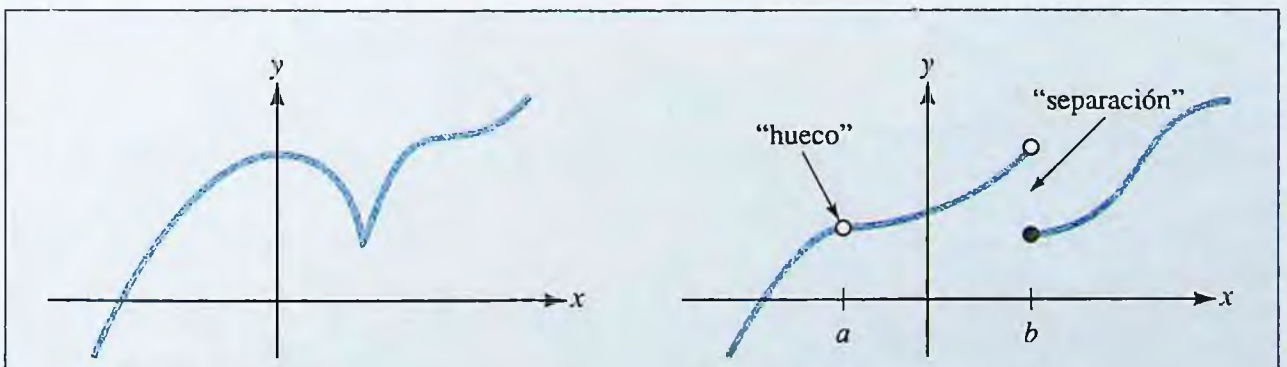
[*Nota*: Existen dos respuestas posibles dependiendo de los signos de a_n y b_m.]

SECCIÓN 1.6 | Límites laterales y continuidad

El diccionario define "continuidad" como una "sucesión continua o ininterrumpida". El comportamiento continuo es indudablemente una parte importante de nuestras vidas. Por ejemplo, el crecimiento de un árbol es continuo, como lo son el movimiento de un cohete y el volumen de agua que circula por una tubería. En esta sección, se analizará lo que significa función continua y se examinarán algunas propiedades importantes de tales funciones.

Límites laterales

Informalmente, una función continua es aquella cuya gráfica se dibuja sin levantar la "pluma" del papel (figura 1.49a). No todas las funciones tienen esta propiedad, pero



a) Una gráfica continua

b) Una gráfica con "huecos" o "separaciones" es discontinua

FIGURA 1.49

www.FreeLibros.com

aquellas que la tienen juegan un papel especial en el cálculo. Una función *no* es continua cuando su gráfica tiene un "hueco" o "separación" (figura 1.49b), pero ¿qué significan realmente "huecos y separaciones" en una gráfica? Para describir estas características matemáticamente, se requiere del concepto de **límite lateral** de una función; esto es, un límite en el que el acercamiento sea solo o por la derecha o por la izquierda, en vez de por ambos lados, tal y como se requiere para el límite por los "dos lados" presentado en la sección 1.5.

Por ejemplo, en la figura 1.50 se muestra la gráfica del inventario I como una función del tiempo t para una compañía que se reabastece inmediatamente al nivel L_1, siempre que el inventario cae a cierto nivel mínimo L_2 (esto se llama *inventario justo a tiempo*). Suponga que el primer reabastecimiento ocurre en $t = t_1$. Entonces cuando t tiende a t_1 por la izquierda, el valor límite de $I(t)$ es L_2. Mientras que si se aproxima por la derecha, el valor límite es L_1.

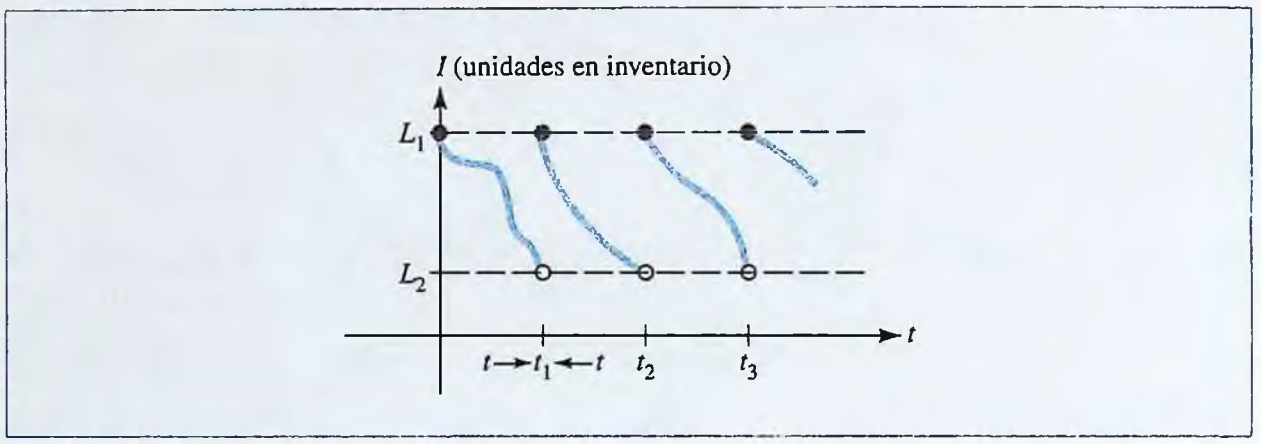


FIGURA 1.50 Límites laterales en un ejemplo de inventario justo a tiempo.

He aquí la notación que se usará para describir el comportamiento de los límites laterales.

Límites laterales ■ Si $f(x)$ se aproxima a L cuando x tiende a c por la izquierda ($x < c$), se escribe $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$. De la misma manera, si $f(x)$ se aproxima a M cuando x tiende a c por la derecha ($c < x$), entonces $\lim_{x \to c^+} f(x) = M$.

Si se usa esta notación en el ejemplo del inventario, se debe escribir

$$\lim_{t \to t_1^-} I(t) = L_2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to t_1^+} I(t) = L_1$$

He aquí dos ejemplos más que conducen a límites laterales.

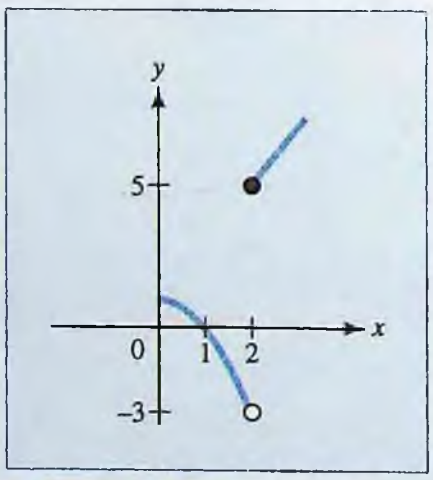


FIGURA 1.51 La gráfica de $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

EJEMPLO | 1.6.1

Para la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x < 2 \\ 2x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

evalúe los límites laterales $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x)$.

Solución

La gráfica de $f(x)$ aparece en la figura 1.51. Puesto que $f(x) = 1 - x^2$ para $x < 2$, se tiene que

www.FreeLibros.com

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (1 - x^2) = -3$$

De la misma forma, $f(x) = 2x + 1$ si $x \geq 2$, así

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x + 1) = 5$$

¡EXPLORE!

En referencia al ejemplo 1.6.2, grafique $f(x) = (x - 2)/(x - 4)$ utilizando la pantalla [0, 9.4]1 por [−4, 4]1 a fin de comprobar los límites resultantes cuando x se aproxima a 4 por la izquierda y por la derecha. Ahora trace $f(x)$ para valores de x grandes positivos y negativos. ¿Qué observa?

EJEMPLO 1.6.2

Encuentre el límite de $\dfrac{x - 2}{x - 4}$ cuando x tiende a 4 por la izquierda y por la derecha.

Solución

Primero, observe que para $2 < x < 4$ la cantidad

$$f(x) = \frac{x - 2}{x - 4}$$

es negativa; así que cuando x se aproxima a 4 por la izquierda, $f(x)$ *decrece* sin límite. Este hecho se escribe como

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{x - 2}{x - 4} = -\infty$$

Asimismo, cuando x tiende a 4 por la derecha (con $x > 4$), $f(x)$ aumenta sin límite y se escribe

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{x - 2}{x - 4} = +\infty$$

En la figura 1.52 aparece la gráfica de f.

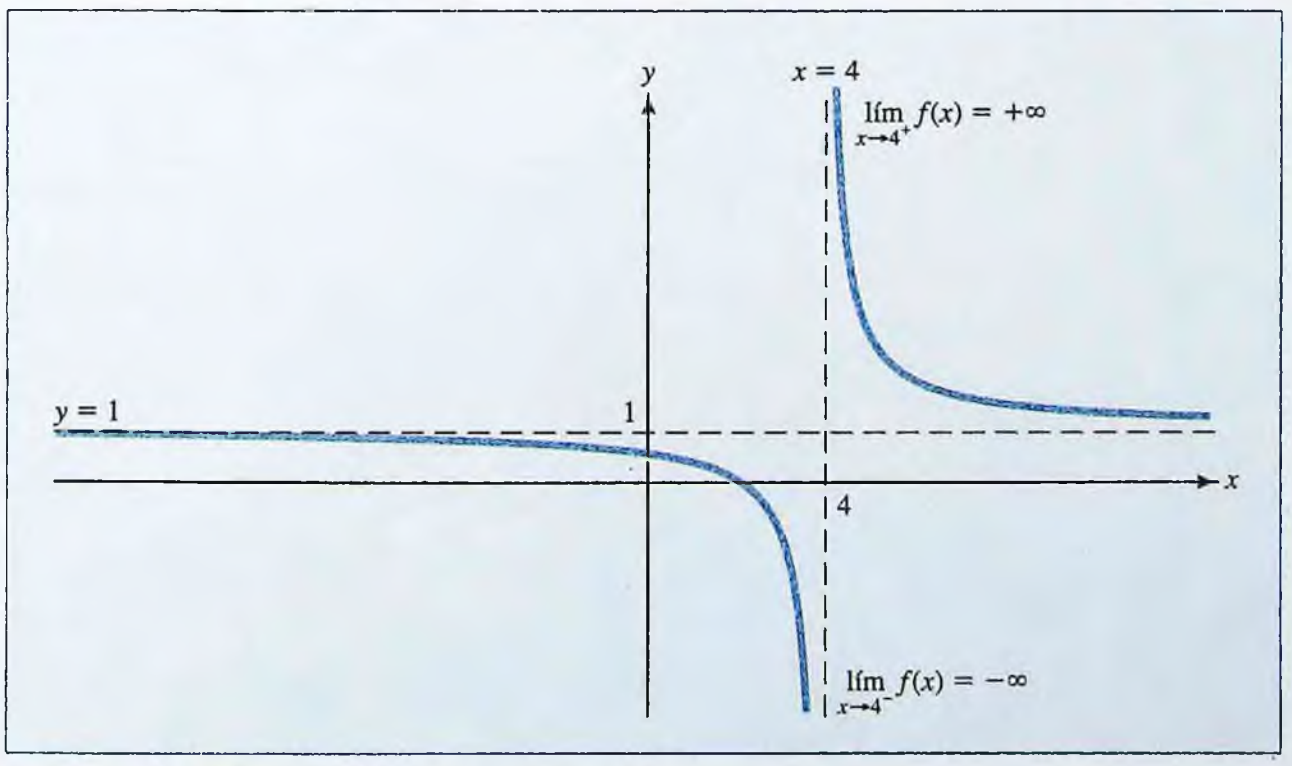


FIGURA 1.52 La gráfica de $f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 4}$.

www.FreeLibros.com

Observe que el límite por los dos lados $\lim_{x\to 2} f(x)$ *no* existe para la función del ejemplo 1.6.2 ya que los valores de la función $f(x)$ no se aproximan a un valor único L cuando x tiende a 2 por cada lado. En general, se tiene el siguiente criterio útil para la existencia de un límite.

Existencia de un límite ▪ El límite por ambos lados $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe si y sólo si existen y son iguales los dos límites laterales $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, y

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

¡EXPLORE!

Dibuje la función lineal por partes $f(x)$ definida en la sección ¡EXPLORE! de la página 61. Compruebe gráficamente que $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 5$.

EJEMPLO 1.6.3

Determine si $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe, donde

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución

Calculando los límites laterales en $x = 1$, se encuentra

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x + 1) = (1) + 1 = 2 \quad \textit{ya que } f(x) = x + 1 \textit{ cuando } x < 1$$

y

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (-x^2 + 4x - 1) \quad \textit{ya que } f(x) = -x^2 + 4x - 1 \textit{ cuando } x \geq 1$$

$$= -(1)^2 + 4(1) - 1 = 2$$

Puesto que ambos límites laterales son iguales, entonces el límite por ambos lados de $f(x)$ existe en $x = 1$ y se tiene que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

La gráfica de $f(x)$ se muestra en la figura 1.53.

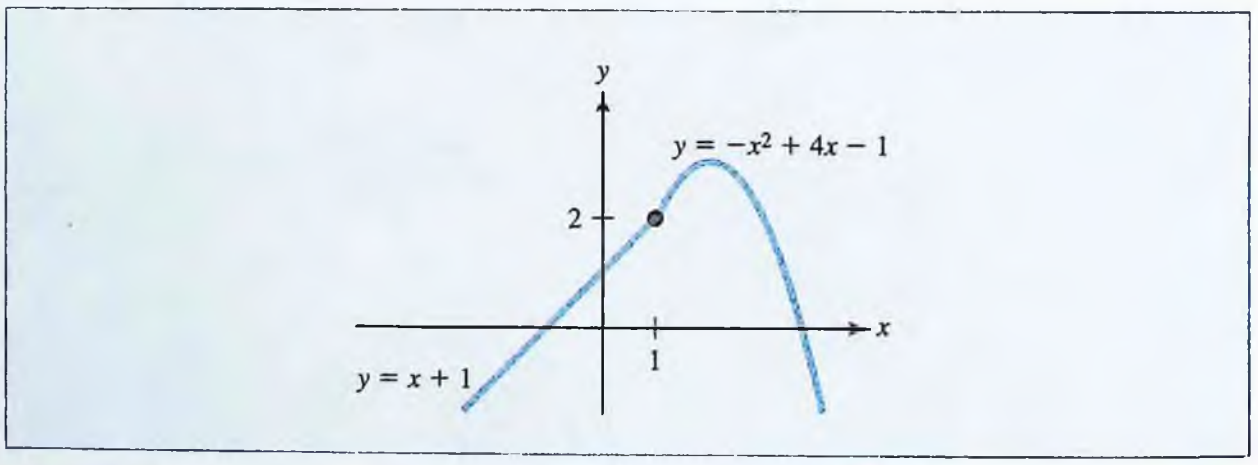


FIGURA 1.53 La gráfica de $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

www.FreeLibros.com

Continuidad

Al iniciar esta sección, se observó que una función continua es aquella cuya gráfica no tiene "huecos o separaciones". Un "hueco" en $x = c$ se puede presentar en distintas formas, tres de las cuales se muestran en la figura 1.54.

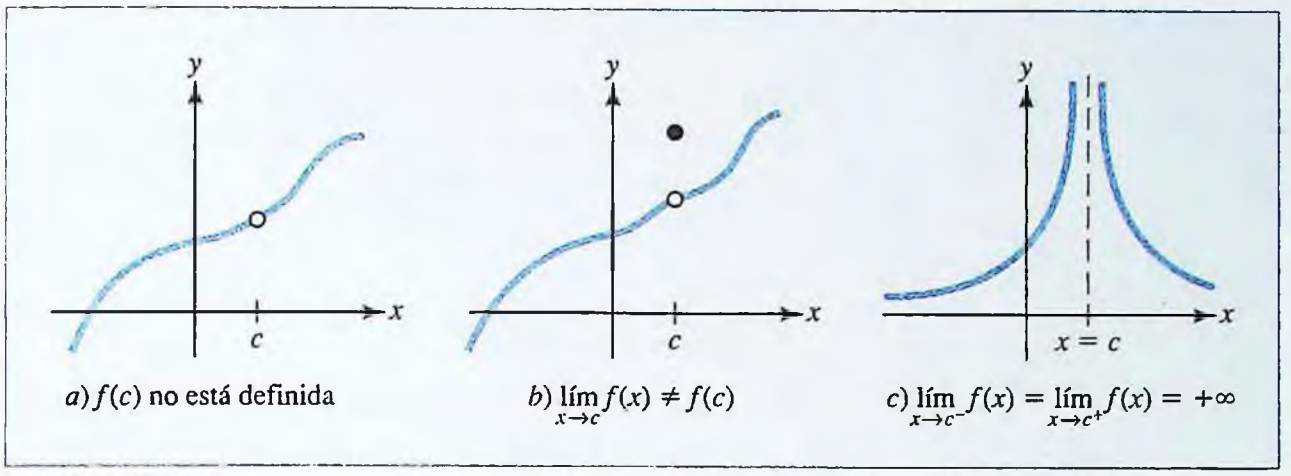


FIGURA 1.54 Tres formas en las que la gráfica de la función puede tener un "hueco" en $x = c$.

La gráfica de $f(x)$ tendrá una "separación" en $x = c$ si los límites laterales $\lim_{x\to c^-} f(x)$ y $\lim_{x\to c^+} f(x)$ no son iguales. Tres formas en que puede suceder esto se muestran en la figura 1.55.

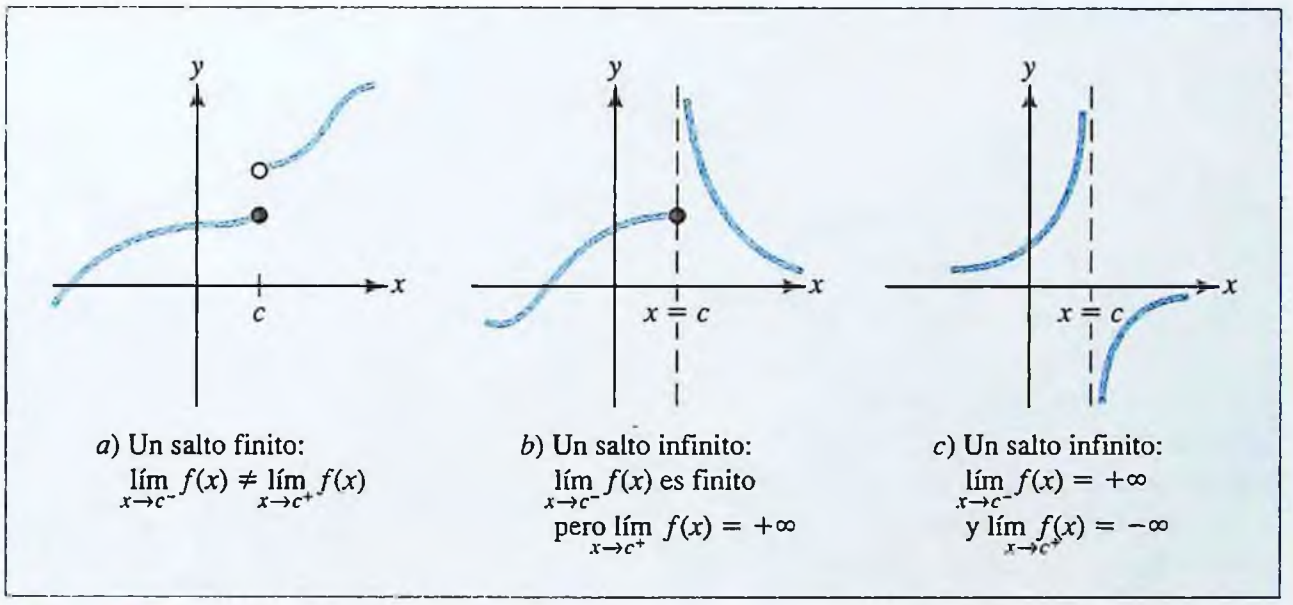


FIGURA 1.55 Tres formas para la gráfica de una función que tiene un "salto" en $x = c$.

Entonces, ¿qué propiedades garantizan que $f(x)$ no tenga un "hueco o separación" en $x = c$? La respuesta es sorprendentemente simple. La función debe estar definida en $x = c$, debe tener un límite finito en $x = c$ y $\lim_{x\to c} f(x)$ debe ser igual a $f(c)$. Resumiendo:

Continuidad ■ Una función f es continua en c si se satisfacen las tres condiciones siguientes:

a) $f(c)$ está definida

b) $\lim_{x\to c} f(x)$ existe

c) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

Si $f(x)$ no es continua en c, se dice que tiene ahí una **discontinuidad**.

www.FreeLibros.com

Continuidad de polinomios y funciones racionales

Recuerde que si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, entonces

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$$

y

$$\lim_{x \to c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)} \quad \text{si } q(c) \neq 0$$

Estas fórmulas de límites se pueden interpretar diciendo que **un polinomio, o una función racional, es continuo en todos los puntos donde está definido**. Esto se muestra en los ejemplos 1.6.4 a 1.6.7.

EJEMPLO | 1.6.4

Demuestre que el polinomio $p(x) = 3x^3 - x + 5$ es continuo en $x = 1$.

Solución

Compruebe que los tres criterios para la continuidad se satisfacen. Obviamente $p(1)$ está definido; en efecto $p(1) = 7$. Además $\lim_{x \to 1} p(x)$ existe y $\lim_{x \to 1} p(x) = 7$. Por consiguiente,

$$\lim_{x \to 1} p(x) = p(1)$$

como se requiere para que $p(x)$ sea continua en $x = 1$.

EJEMPLO | 1.6.5

Demuestre que la función racional $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$ es continua en $x = 3$.

Solución

Observe que $f(3) = \dfrac{3 + 1}{3 - 2} = 4$. Puesto que $\lim_{x \to 3} (x - 2) \neq 0$, se tiene que

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{\lim_{x \to 3} (x + 1)}{\lim_{x \to 3} (x - 2)} = \frac{4}{1} = 4 = f(3)$$

tal y como se requiere para que $f(x)$ sea continua en $x = 3$.

¡EXPLORE!

Grafique $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$ utilizando la pantalla decimal alargada [−9.4, 9.4]1 por [−6.2, 6.2]1. ¿Es continua la función? ¿Es continua en $x = 2$? ¿Cómo es en $x = 3$? También examine esta función utilizando una tabla con un valor inicial de x igual a 1.8 y aumentando en incrementos de 0.2.

¡EXPLORE!

Introduzca $h(x)$ del ejemplo 1.66 (c) en el editor de ecuaciones comoY1 = (X + 1)(X < 1) + (2 − X)(X ≥ 1). Utilice una pantalla decimal con estilo de gráfica de puntos. ¿Es ésta una función continua en $x = 1$? Utilice la tecla **TRACE** para mostrar el valor de la función en $x = 1$ y halle los valores límite de y cuando x se aproxima a 1 por el lado izquierdo y por el lado derecho.

EJEMPLO | 1.6.6

Analice la continuidad de cada una de las siguientes funciones:

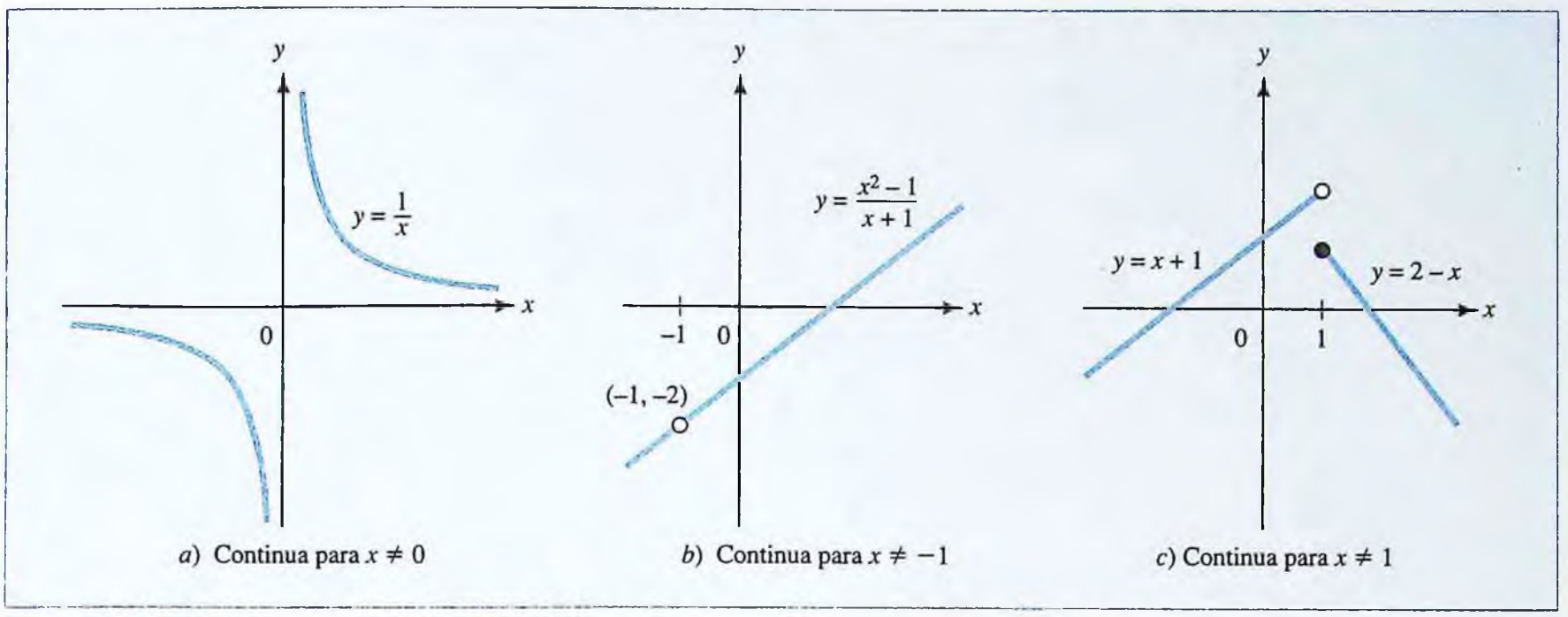
a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **b)** $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ **c)** $h(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ 2 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Solución

Las funciones de los incisos *a*) y *b*) son racionales y por tanto son continuas en todos los puntos donde están definidas (esto es, siempre y cuando sus denominadores no sean iguales a cero).

a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ está definida para todo número real excepto en $x = 0$ y por consiguiente, es continua para $x \neq 0$ (figura 1.56*a*).

www.FreeLibros.com



a) Continua para $x \neq 0$ *b*) Continua para $x \neq -1$ *c*) Continua para $x \neq 1$

FIGURA 1.56 Funciones para el ejemplo 1.6.6.

¡EXPLORE!

Grafique $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$, utilizando una pantalla típica. ¿Parece continua la gráfica? Ahora utilice una pantalla decimal modificada [−4.7, 4.7]1 por [0, 14.4]1 y describa qué observa. ¿A qué caso del ejemplo 1.6.6 se parece éste?

b) Ya que $x = -1$ es el único valor de x para el cual $g(x)$ no está definida, entonces $g(x)$ es continua, excepto en $x = -1$ (figura 1.56b).

c) Dicha función está definida en dos partes. Primero se comprueba la continuidad en $x = 1$ que es el valor de x en el que se separa la definición de la función en dos partes. Se ve que $\lim_{x \to 1} h(x)$ no existe ya que $h(x)$ tiende a 2 por la izquierda, y a 1 por la derecha. Por consiguiente $h(x)$ no es continua en 1 (figura 1.56c). Sin embargo, ya que los polinomios $x + 1$ y $2 - x$ son cada uno continuos para toda x, se sigue que $h(x)$ es continua para todo número diferente de 1.

EJEMPLO | 1.6.7

¿Para qué valor de la constante A la siguiente función es continua para todo x real?

$$f(x) = \begin{cases} Ax + 5 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 3x + 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Solución

Puesto que tanto $Ax + 5$ como $x^2 - 3x + 4$ son polinomios, se tiene que $f(x)$ es continua en todas partes excepto, posiblemente, en $x = 1$. Además $f(x)$ tiende a $A + 5$ cuando x se aproxima a 1 por la izquierda, y tiende a 2 cuando x se aproxima a 1 por la derecha. Así, para que $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista, debe cumplirse que $A + 5 = 2$ o $A = -3$; en ese caso

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1)$$

Esto significa que f es continua para toda x sólo si $A = -3$.

Continuidad en un intervalo

En muchas aplicaciones del cálculo, es útil tener definiciones de continuidad en intervalos abiertos y cerrados.

www.FreeLibros.com

Continuidad en un intervalo ■ Se dice que una función $f(x)$ es continua en un intervalo abierto $a < x < b$ si es continua en cada punto $x = c$ de este intervalo.

Además, f es continua en un intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ si es continua en el intervalo abierto $a < x < b$ y

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$$

En otras palabras, la continuidad en un intervalo significa que la gráfica de f es de "una pieza" en todo el intervalo.

EJEMPLO | 1.6.8

Analice la continuidad de la función

$$f(x) = \frac{x + 2}{x - 3}$$

en el intervalo abierto $-2 < x < 3$ y no en el intervalo cerrado $-2 \leq x \leq 3$.

Solución

La función racional $f(x)$ es continua para toda x excepto en $x = 3$. Por tanto, ésta es continua en un intervalo abierto $-2 < x < 3$ pero no en el intervalo cerrado $-2 \leq x \leq 3$, ya que ésta es discontinua en el punto final 3 (donde su denominador es cero). La gráfica de f se muestra en la figura 1.57.

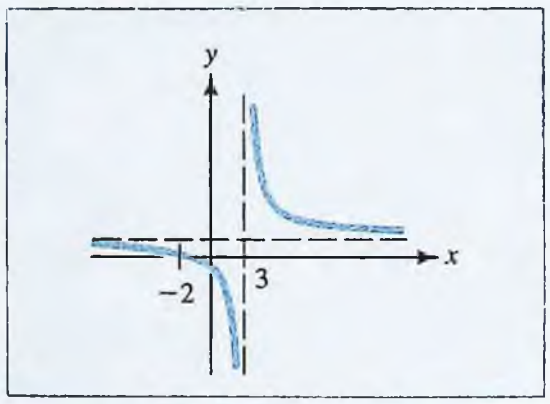


FIGURA 1.57 La gráfica de $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 3}$.

La propiedad del valor intermedio

Una característica importante de una función continua es la **propiedad del valor intermedio**, que dice que si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ y L es un número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces $f(c) = L$, para algún número c entre a y b (véase la figura 1.58). En otras palabras, *una función continua toma cualquier valor de entre esos dos valores*. Por ejemplo, una niña que pesa 5 libras al nacer y 100 libras a la edad de 12 años debe haber pesado exactamente 50 lb en algún momento durante sus 12 años de vida, ya que su peso es una función continua del tiempo.

www.FreeLibros.com

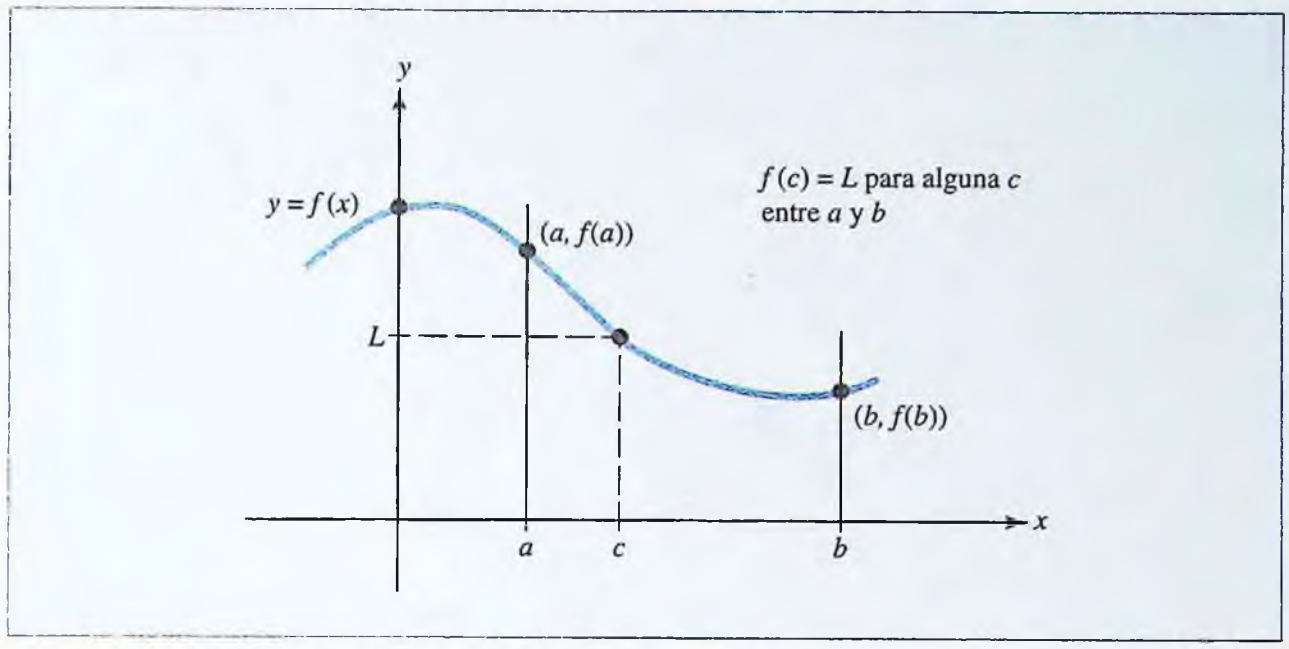


FIGURA 1.58 La propiedad del valor intermedio.

La propiedad del valor intermedio tiene muchas aplicaciones. En el ejemplo 1.6.9, se muestra cómo se puede utilizar para calcular la solución de una ecuación dada.

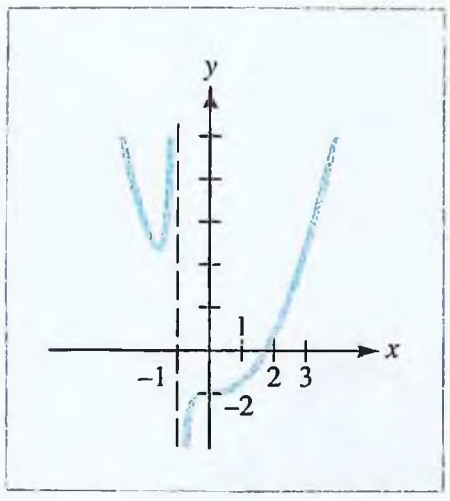


FIGURA 1.59 La gráfica de $y = x^2 - x - 1 - \dfrac{1}{x+1}$.

EJEMPLO 1.6.9

Demuestre que la ecuación $x^2 - x - 1 = \dfrac{1}{x+1}$ tiene una solución para $1 < x < 2$.

Solución

Sea $f(x) = x^2 - x - 1 - \dfrac{1}{x+1}$. Entonces $f(1) = -\dfrac{3}{2}$ y $f(2) = \dfrac{2}{3}$. Puesto que $f(x)$ es continua para $1 \le x \le 2$ y la gráfica de f está debajo del eje de las x en $x = 1$ y arriba del eje de las x en $x = 2$, de la propiedad del valor intermedio se deduce que la gráfica debe cruzar el eje de las x en algún lugar entre $x = 1$ y $x = 2$ (véase la figura 1.59). En otras palabras, existe un número c tal que $1 < c < 2$ y $f(c) = 0$ y entonces:

$$c^2 - c - 1 = \frac{1}{c+1}$$

NOTA El procedimiento para la localización de raíces descrito en el ejemplo 1.6.9 se puede continuar para calcular la raíz c con cualquier grado de precisión. Por ejemplo, el punto medio en el intervalo $1 \le x \le 2$ es $d = 1.5$ y $f(1.5) = -0.65$, así la raíz c debe estar en el intervalo $1.5 < x < 2$ (ya que $f(2) > 0$) y así sucesivamente.

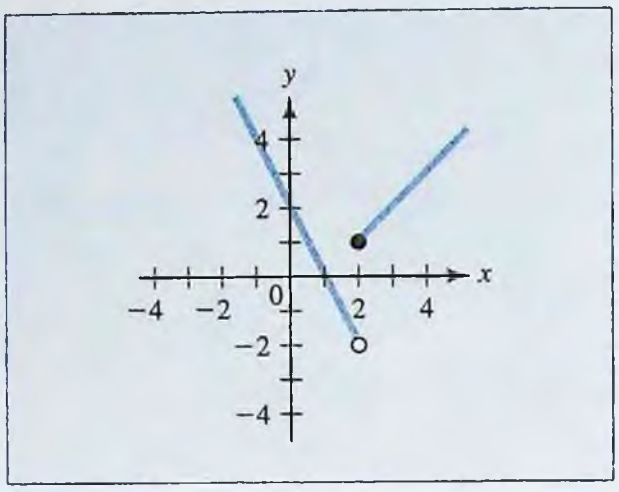
Usted podría decir "Excelente, pero yo puedo usar el potencial de mi calculadora para encontrar c con más precisión y con mucho menos esfuerzo". Por supuesto, pero ¿cómo cree usted que la calculadora realiza ese cálculo? Quizás no por el método que apenas se ha descrito, pero obviamente con algún procedimiento con un algoritmo semejante. Es importante entender los procedimientos en los que se basa la tecnología que nosotros utilizamos. ■

www.FreeLibros.com

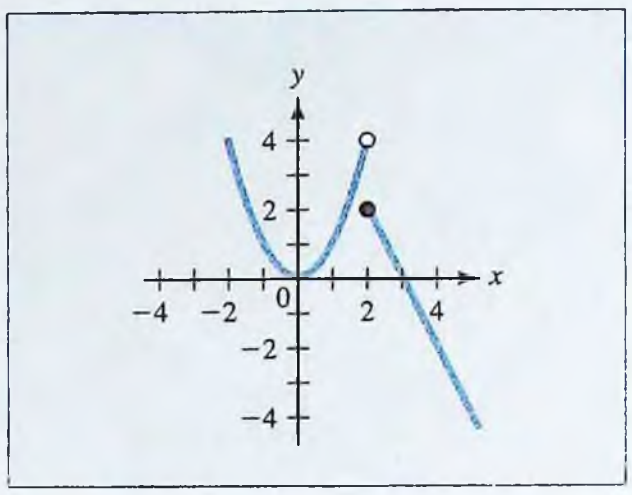
PROBLEMAS | 1.6

En los problemas 1-4 halle los límites laterales $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ *y* $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ *a partir de la gráfica de f y determine si* $\lim_{x\to 2} f(x)$ *existe.*

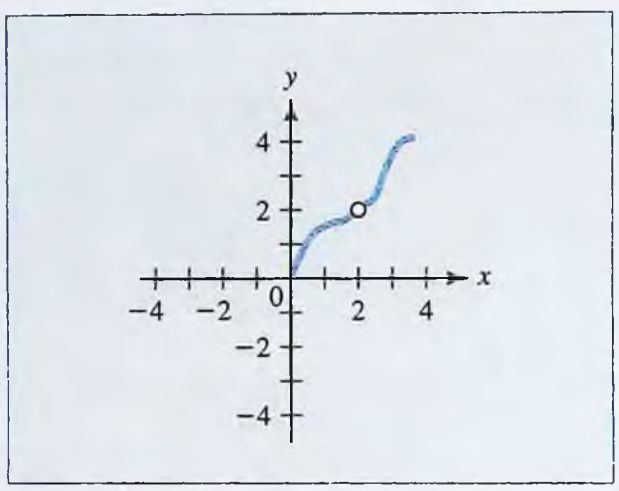
1.



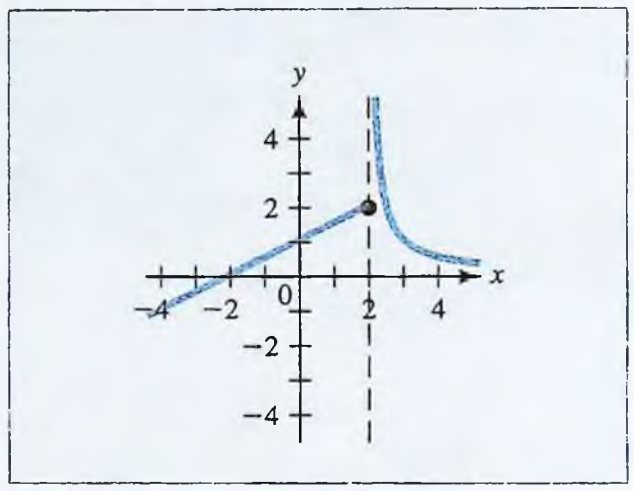
2.



3.



4.



En los problemas 5-14, halle los límites laterales. Si el valor del límite es infinito, indique si es $+\infty$ o $-\infty$.

5. $\lim_{x\to 4^+} (3x^2 - 9)$

6. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x+3}{x+2}$

7. $\lim_{x\to 3^+} \sqrt{3x-9}$

8. $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x^2+4}{x-2}$

9. $\lim_{x\to 0^+} (x - \sqrt{x})$

10. $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1}$

11. $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

12. $\lim_{x\to 5^+} \dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$

13. $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 3^+} f(x)$,

donde $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & \text{si } x < 3 \\ 3 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

14. $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ y $\lim_{x\to -1^+} f(x)$,

donde $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 2x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

En los problemas 15-26, decida si la función dada es continua en los valores dados para x.

15. $f(x) = 5x^2 - 6x + 1$ en $x = 2$

16. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 5$ en $x = 0$

17. $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ en $x = 1$

18. $f(x) = \dfrac{2x-4}{3x-2}$ en $x = 2$

www.FreeLibros.com

19. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ en $x = 1$

20. $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-6}$ en $x = 2$

21. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ en $x = 4$

22. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ en $x = 2$

23. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \le 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x = 2$

24. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 0 \\ x-1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ en $x = 0$

25. $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \le 3 \\ 2x+4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ en $x = 3$

26. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ x^2-3 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$ en $x = -1$

En los problemas del 27 a 40, liste todos los valores de x para los cuales la función dada no es continua.

27. $f(x) = 3x^2 - 6x + 9$

28. $f(x) = x^5 - x^3$

29. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

30. $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x-6}$

31. $f(x) = \dfrac{3x+3}{x+1}$

32. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$

33. $f(x) = \dfrac{3x-2}{(x+3)(x-6)}$

34. $f(x) = \dfrac{x}{(x+5)(x-1)}$

35. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x}$

36. $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-x-2}$

37. $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \le 1 \\ 6x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x < 0 \\ x^2+x & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} 2-3x & \text{si } x \le -1 \\ x^2-x+3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

41. CLIMA Suponga que la temperatura del aire en un día dado es 30°F. Entonces, la temperatura equivalente (en °F), que se siente por efecto del viento que sopla con una velocidad v, en millas por hora (mph), está dada por[7]

$$W(v) = \begin{cases} 30 & \text{si } 0 \le v \le 4 \\ 1.25v - 18.67\sqrt{v} + 62.3 & \text{si } 4 < v < 45 \\ -7 & \text{si } v \ge 45 \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la temperatura que se siente cuando $v = 20$ mph? ¿Y cuándo $v = 50$ mph?

b) ¿Cuál es la velocidad del viento que produce una temperatura equivalente a 0 °F?

c) ¿Es la función de temperatura equivalente $W(v)$ continua en $v = 4$? ¿Y en $v = 45$?

42. INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO Si una esfera hueca de radio R se carga con una unidad de electricidad estática, entonces la intensidad de campo $E(x)$ en el punto P situado a x unidades del centro de la esfera satisface:

$$E(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x < R \\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x = R \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > R \end{cases}$$

Dibuje la gráfica de $E(x)$. ¿Es continua $E(x)$ para $x > 0$?

[7]Adaptado de *UMAP module No. 658*, "Windchill", por W. Bosch y L. G. Cobb, 1984, pp. 244-247.

www.FreeLibros.com

43. POSTAL La "función postal" $p(x)$ se puede describir como:

$$p(x) = \begin{cases} 37 & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 60 & \text{si } 1 < x \le 2 \\ 83 & \text{si } 2 < x \le 3 \\ \vdots & \\ 290 & \text{si } 11 < x \le 12 \end{cases}$$

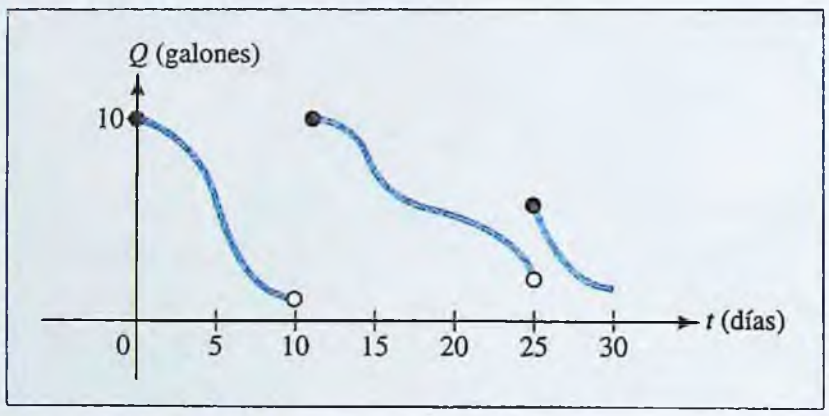
donde x es el peso en onzas de una carta y $p(x)$ es el correspondiente costo postal en centavos. Trace la gráfica de $p(x)$ para $0 < x \le 6$. ¿Para qué valores de x es discontinua $p(x)$ para $0 < x \le 6$?

44. CONTAMINACIÓN DEL AGUA Un tubo roto en la plataforma petrolera del mar del Norte produce una mancha circular que tiene un espesor de y metros a una distancia de x metros de la ruptura. La turbulencia hace difícil medir directamente el espesor de la mancha en la fuente (donde $x = 0$); sin embargo, para $x > 0$ se encuentra que

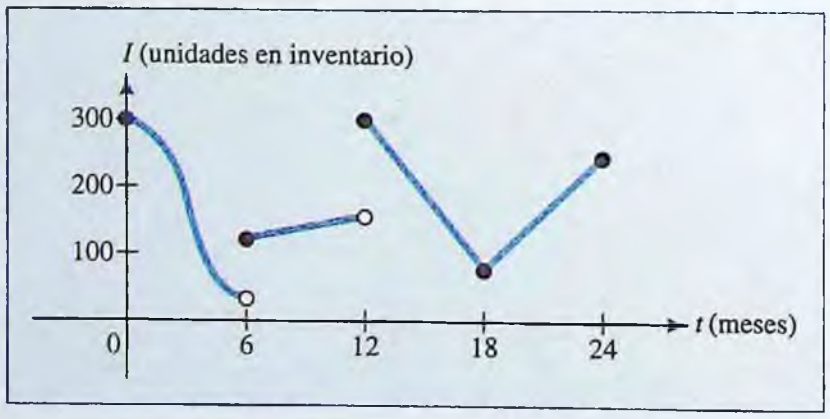
$$y = \frac{0.5(x^2 + 3x)}{x^3 + x^2 + 4x}$$

Suponiendo que la mancha está distribuida continuamente, ¿qué espesor se supone que tiene en la fuente?

45. CONSUMO DE ENERGÍA La gráfica muestra la cantidad de gasolina en el tanque del automóvil de Sue en un periodo de 30 días. ¿Dónde es discontinua la gráfica? ¿Qué cree usted que sucede en esos momentos?



46. INVENTARIO La gráfica muestra el número de unidades en el inventario de cierto negocio en un periodo de 2 años. ¿Dónde es discontinua la gráfica? ¿Qué cree que sucede en esos momentos?



En los problemas 47 y 48 halle los valores de la constante A de manera que la función $f(x)$ sea continua para toda x.

47. $f(x) = \begin{cases} Ax - 3 & \text{si } x < 2 \\ 3 - x + 2x^2 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} 1 - 3x & \text{si } x < 4 \\ Ax^2 + 2x - 3 & \text{si } x \ge 4 \end{cases}$

49. Analice la continuidad de la función $f(x) = x\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ en el intervalo abierto $0 < x < 1$ y en el intervalo cerrado $0 \le x \le 1$.

50. Analice la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } x < 2 \\ 4 + 2x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

en el intervalo abierto $0 < x < 2$ y en el intervalo cerrado $0 \le x \le 2$.

51. Demuestre que la ecuación $\sqrt{x - 8} + 9x^{2/3} = 29$ tiene al menos una solución en el intervalo $0 \le x \le 8$.

52. Demuestre que la ecuación $\sqrt[3]{x} = x^2 + 2x - 1$ tiene al menos una solución en el intervalo $0 \le x \le 1$.

53. Analice el comportamiento de $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}$ cuando x está cerca de *a*) 2 y *b*) -2. ¿Existe el límite en estos valores de x? ¿Es continua la función en estos valores de x?

54. Explique por qué debe haber habido algún momento en su vida en el que su peso en libras fue igual a su estatura en pulgadas.

55. Explique por qué hay un instante en cada hora en el que el horario y el minutero de un reloj coinciden.

56. A la edad de 15 años Nan mide el doble que su hermano Dan, de 5 años; pero, cuando Dan cumple 21 años, ambos descubren que este último mide 6 pulgadas más que Nan. Explique por qué hubo un momento en el que ambos tuvieron exactamente la misma estatura.

www.FreeLibros.com

Términos importantes, símbolos y fórmulas

Función (2)

Notación de función $f(x)$ (2)

Dominio y rango de una función (2)

Convención del dominio (4)

Variables independientes y dependientes (3)

Funciones usadas en economía:

- Demanda (5)
- Oferta (47)
- Costo (5)
- Ingreso (5)
- Utilidad (5)

Composición de funciones: $g(h(x))$ (6)

Gráfica de una función: los puntos $(x, f(x))$ (15)

Intersecciones con los ejes x y y (17)

Función definida en partes (4)

Función de potencia (20)

Polinomio (20)

Función racional (21)

Criterio de la recta vertical (21)

Función lineal: tasa de cambio constante (26)

Pendiente: $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (27)

Fórmula pendiente-intersección: $y = mx + b$ (27)

Fórmula punto-pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$ (31)

Criterios para que las rectas sean paralelas o perpendiculares (35)

Modelado matemático (41)

Proporcionalidad directa: $Q = kx$ (45)

Proporcionalidad inversa: $Q = \dfrac{k}{x}$ (45)

Proporcionalidad conjunta: $Q = kxy$ (45)

Equilibrio de mercado: ley de la oferta y la demanda (47)

Escasez y abundancia (47)

Análisis del punto de equilibrio (47)

Límite de una función $\lim_{x \to c} f(x)$ (58)

Límites al infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) \quad (64)$$

Regla del recíproco de la potencia:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{A}{x^k} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{A}{x^k} = 0 \quad k > 0 \quad (65)$$

Límites al infinito de una función racional $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$:

Divida todos los términos de $f(x)$ entre la potencia más alta x^k en el denominador $q(x)$ y utilice la regla del recíproco de la potencia. (66)

Asíntota horizontal (65)

Límite infinito: $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ o $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ (67)

Límites laterales:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to c^+} f(x) \quad (72)$$

Existencia de un límite: $\lim_{x \to c} f(x)$ existe si y sólo si $\lim_{x \to c^-} f(x)$ y $\lim_{x \to c^+} f(x)$ existen y son iguales. (74)

Continuidad de $f(x)$ en $x = c$:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \quad (75)$$

Continuidad en un intervalo (78)

Discontinuidad (76)

Continuidad de funciones polinomiales y racionales (76)

Propiedad del valor intermedio (79)

Problemas de verificación del capítulo 1

1. Especifique el dominio de la función

$$f(x) \frac{2x - 1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

2. Encuentre la función compuesta $g(h(x))$, donde

$$g(u) = \frac{1}{2u + 1} \quad \text{y} \quad h(x) = \frac{x + 2}{2x + 1}$$

3. Encuentre una ecuación para cada una de estas rectas:

a) Atraviesa el punto $(-1,2)$ con pendiente $-\dfrac{1}{2}$

b) Con pendiente 2 e intersección con el eje y igual a –3

4. Dibuje la gráfica de cada una de estas funciones. Asegúrese de mostrar todas las intersecciones, así como cualquier punto alto o bajo.

a) $f(x) = 3x - 5$ *b)* $f(x) = -x^2 + 3x + 4$

www.FreeLibros.com

5. Encuentre cada uno de estos límites. Si el límite es infinito, indique si éste es $+\infty$ o $-\infty$.

a) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

d) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3 + 3x - 5}{-x^2 + 2x + 7}$

6. Determine si esta función $f(x)$ es continua en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

7. PRECIO DE LA GASOLINA Desde el inicio del año, el precio de la gasolina sin plomo ha ido aumentado mensualmente a una tasa constante de 2 centavos por galón. Para el primero de junio, el precio ha llegado a \$1.80 por galón.

a) Exprese el precio de la gasolina sin plomo como una función del tiempo y dibuje la gráfica.

b) ¿Cuál era el precio a principios del año?

c) ¿Cuál será el precio el primero de octubre?

8. OFERTA Y DEMANDA Suponga que sabe que los productores ofertan x unidades de un determinado producto al mercado cuando el precio es $p = S(x)$ dólares por unidad; a la vez que el mismo número de unidades será demandado (comprado) por los productores cuando el precio sea $p = D(x)$ dólares por unidad, donde

$$S(x) = x^2 + A \quad \text{y} \quad D(x) = Bx + 59$$

para las constantes A y B. También sabe que se ofertarán unidades hasta que el precio unitario sea de al menos \$3, y que el equilibrio de mercado ocurre cuando $x = 7$ unidades.

a) Utilice esta información para encontrar A y B, así como el precio de equilibrio por unidad.

b) Dibuje las curvas de oferta y demanda en la misma gráfica.

c) ¿Cuál es la diferencia entre el precio de oferta y el precio de demanda cuando se producen 5 unidades? ¿Y cuándo se producen 10 unidades?

9. POBLACIÓN BACTERIAL La población (en miles) de una colonia de bacterias t minutos después de la introducción de una toxina está dada por la función

$$f(t) = \begin{cases} t^2 + 7 & \text{si } 0 \le t < 5 \\ -8t + 72 & \text{si } t \ge 5 \end{cases}$$

a) ¿Cuándo muere la colonia?

b) Explique por qué la población debe ser de 10 000 en algún tiempo entre $t = 1$ y $t = 7$.

10. MUTACIÓN En un estudio de mutación en moscas de fruta, los investigadores radiaron las moscas con rayos X y determinaron que el porcentaje de mutación M aumenta linealmente con la dosis D de rayos X, medidos en kilo-Roentgens (kR). Cuando se utiliza una dosis de $D = 3$ kR, el porcentaje de mutaciones es de 7.7%, mientras que una dosis de 5 kR da como resultado un porcentaje de mutación de 12.7%. Exprese M como una función de D. ¿Qué porcentaje de las moscas mutarán aun sin utilizar la radiación?

Problemas de repaso

1. Especifique el dominio de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 6$

b) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x^2 + x - 2}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

2. El avance de la tecnología da como resultado la producción de calculadoras cada vez más potentes y compactas; actualmente el precio de las calculadoras en el mercado está disminuyendo. Suponga que x meses después de el día de hoy, el precio de cierto modelo será de $P(x) = 40 + \dfrac{30}{x + 1}$ dólares.

a) ¿Cuál será el precio 5 meses después de hoy?

b) ¿Cuánto disminuirá el precio durante el quinto mes?

c) ¿Cuándo será el precio igual a \$43?

d) ¿Qué le sucede al precio "a largo plazo" (a medida que x se hace muy grande)?

3. Encuentre la función compuesta $g(h(x))$.

a) $g(u) = u^2 + 2u + 1$, $h(x) = 1 - x$

b) $g(u) = \dfrac{1}{2u + 1}$, $h(x) = x + 2$

c) $g(u) = \sqrt{1 - u}$, $h(x) = 2x + 4$

www.FreeLibros.com

4. *a*) Halle $f(x-2)$ si $f(x) = x^2 - x + 4$.

b) Halle $f(x^2+1)$ si $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{2}{x-1}$.

c) Halle $f(x+1) - f(x)$ si $f(x) = x^2$.

5. Encuentre las funciones $h(x)$ y $g(u)$ tales que $f(x) = g(h(x))$.

a) $f(x) = (x^2 + 3x + 4)^5$

b) $f(x) = (3x+1)^2 + \dfrac{5}{2(3x+2)^3}$

6. ANÁLISIS DEL MEDIO AMBIENTE Un estudio del medio ambiente de una comunidad sugiere que el nivel promedio diario de smog en el aire será de $Q(p) = \sqrt{0.5p + 19.4}$ unidades cuando la población sea p en miles. Se estima que t años a partir del día de hoy, la población será de $p(t) = 8 + 0.2t^2$ miles.

a) Exprese el nivel de smog en el aire como una función del tiempo.

b) ¿Cuál será el nivel de smog en 3 años?

c) ¿Cuándo alcanzará el nivel de smog las 5 unidades?

7. Encuentre c para que la curva $y = 3x^2 - 2x + c$ pase por el punto $(2, 4)$.

8. Grafique las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 8$

b) $f(x) = 3 + 4x - 2x^2$

9. Encuentre la pendiente y la intersección con el eje de las y de la recta dada y dibuje la gráfica.

a) $y = 3x + 2$

b) $5x - 4y = 20$

c) $2y + 3x = 0$

d) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 4$

10. Encuentre las ecuaciones para las siguientes rectas

a) Pendiente 5 e intersección con y en $(0, -4)$

b) Pendiente -2 y contiene al punto $(1, 3)$

c) Intersección con el eje x en $(3, 0)$ e intersección con el eje y en $(0, -2/3)$

d) Contiene al punto $(5, 4)$ y es paralelo a $2x + y = 3$

e) Contiene al punto $(-1, 3)$ y es perpendicular a $5x - 3y = 7$

11. FONDO EDUCACIONAL Una universidad privada en el sureste ha lanzado una campaña de recaudación de fondos. Suponga que los funcionarios de la universidad estiman que les tomará $f(x) = \dfrac{10x}{150 - x}$ semanas alcanzar el $x\%$ de su meta.

a) Dibuje la parte importante de la gráfica para esta función.

b) ¿Cuánto tiempo les tomará alcanzar el 50% de su meta?

c) ¿Cuánto tiempo les tomará alcanzar el 100% de su meta?

12. GASTOS DE CONSUMO La demanda para un producto está dada por $D(x) = -50x + 800$; esto es, x unidades del producto serán demandados por los consumidores cuando el precio sea $p = D(x)$ dólares por unidad. El gasto de consumo total $E(x)$ es la cantidad que pagan los consumidores por comprar x unidades de producto.

a) Exprese el gasto de consumo como una función de x y dibuje la gráfica de $E(x)$.

b) Utilice la gráfica del inciso *a*) para determinar el nivel de producción de x a la cual el gasto de consumo es más grande. ¿Qué precio p corresponde al gasto de consumo máximo?

13. MICROBIOLOGÍA Un cascarón esférico de radio r tiene un volumen $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ y un área de superficie $S = 4\pi r^2$. Exprese V como una función de S. ¿Qué le pasa a V si se duplica S?

14. CIRCULACIÓN DEL PERIÓDICO La circulación de un periódico está aumentando a una tasa constante. Hace tres meses la circulación era de 3 200; hoy es de 4 400.

a) Exprese la circulación como una función del tiempo y dibuje la gráfica.

b) ¿Cuál será la circulación en los siguientes 2 meses?

15. Encuentre los puntos de intersección (si hay) del par de curvas y dibuje las gráficas.

a) $y = -3x + 5$ y $y = 2x - 10$

b) $y = x + 7$ y $y = -2 + x$

c) $y = x^2 - 1$ y $y = 1 - x^2$

d) $y = x^2$ y $y = 15 - 2x$

16. PRECIO ÓPTIMO DE VENTA Una fábrica puede producir estantes a un costo de \$80 una pieza. Las cifras de las ventas indican que si los estantes costaban x dólares por pieza, aproximadamente se venderán $150 - x$ cada mes. Exprese la utilidad mensual del fabricante como una función del precio de venta x; dibuje la gráfica y calcule el precio óptimo de venta.

www.FreeLibros.com

17. PRECIO ÓPTIMO DE VENTA Un minorista puede conseguir cámaras del fabricante a un costo de $50 la pieza. El minorista ha estado vendiendo las cámaras a un precio de $80 la pieza y a dicho precio, los consumidores han estado comprando 40 cámaras por mes. El minorista planea bajar el precio para estimular las ventas y calcula que por cada reducción de $5 en el precio, se venderán 10 cámaras más por mes. Exprese la utilidad mensual del minorista de la venta de las cámaras como una función del precio de venta. Dibuje la gráfica y calcule el precio optimo de venta.

18. DISENO ESTRUCTURAL Una lata cilíndrica sin tapa se construye por 80 centavos. El costo del material usado para el fondo es de 3 centavos por pulgada cuadrada y el costo del material usado para la parte lateral es de 2 centavos por pulgada cuadrada. Exprese el volumen de la lata como una función del radio.

19. EFICIENCIA DE LA PRODUCCIÓN Una empresa ha recibido un pedido para fabricar 400 000 recuerdos de medallas de plata conmemorativas del 35º aniversario del alunizaje del Apolo 11. La empresa tiene varias máquinas, cada una de las cuales produce 200 medallas por hora. El costo de poner en marcha las máquinas para producir las medallas es de $80 por máquina y el costo total de operación es de $5.76 por hora. Exprese el costo de producción de las 400 000 medallas como una función del número de máquinas usadas. Dibuje la gráfica y calcule el número de máquinas que la empresa usaría para minimizar el costo.

20. ANÁLISIS DE INVENTARIO Un negociante mantiene un inventario de cierto mes de 30 días de la siguiente manera:

días 1-9	30 unidades
días 10-15	17 unidades
días 16-23	12 unidades
días 24-30	disminuyendo uniformemente de 12 a 0 unidades

Dibuje la gráfica del inventario como una función del tiempo t (días). ¿Para qué tiempos la gráfica es discontinua?

21. ANÁLISIS DEL PUNTO DE EQUILIBRIO Un fabricante puede vender un producto en $80 por unidad. El costo total consiste en gastos indirectos fijos de $4 500 más costos de producción de $50 por unidad.

a) ¿Cuántas unidades debe vender el fabricante para llegar al punto de equilibrio?

b) ¿Cuál es la utilidad o la pérdida si se venden 200 unidades?

c) ¿Cuántas unidades debe vender el fabricante para tener una utilidad de $900?

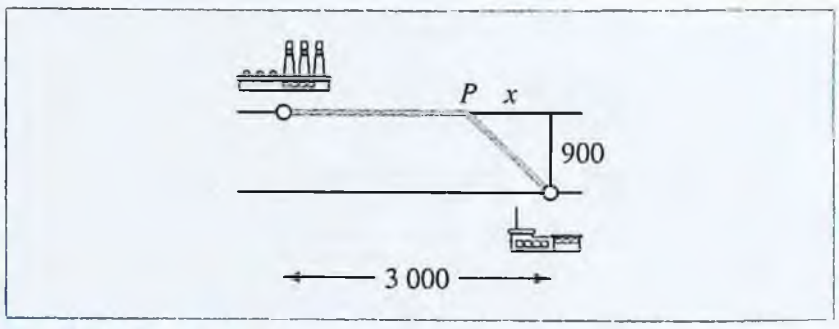
22. ADMINISTRACIÓN DE LA PRODUCCIÓN Durante el verano, un grupo de estudiantes construye kayacs en una cochera acondicionada. La renta de la cochera es de $1 500 durante el verano y el material necesario para construir un kayac es de $125. Los kayacs se pueden vender a $275 la pieza.

a) ¿Cuántos kayacs deben vender los estudiantes para alcanzar el punto de equilibrio?

b) ¿Cuántos kayacs deben vender los estudiantes para tener una utilidad de al menos de $1 000?

23. APRENDIENDO Algunos psicólogos consideran que cuando se le pide a una persona que recuerde un conjunto de hechos, la tasa a la cual se recuerdan tales hechos es proporcional al número de hechos importantes en la memoria de la persona y que no han sido recordados todavía. Exprese la tasa de recuerdos como una función del número de hechos que ha recordado.

24. DISEÑO DE COSTO EFICIENTE Se tiende un cable desde una planta eléctrica situada a un lado de un río de 900 metros de ancho hasta una fábrica localizada del otro lado, a 3 000 metros río abajo. El tendido del cable irá en línea recta desde la planta de luz a algún punto P en el lado opuesto de la ribera y después a lo largo de la ribera a la fábrica. El costo del tendido del cable es de $5 por metro, mientras que el costo en tierra es de $4 por metro. Sea x la distancia desde P al punto que está directamente enfrente atravesando el río desde la planta de luz. Exprese el costo del cable como una función de x.



PROBLEMA 24

www.FreeLibros.com

25. COSTO DE CONSTRUCCIÓN Una ventana con un perímetro (marco) de 20 pies está compuesta de un vidrio semicircular de colores arriba de un vidrio transparente rectangular, como se muestra en la figura. El vidrio transparente cuesta \$3 por pie cuadrado y el vidrio de colores cuesta \$10 por pie cuadrado. Exprese el costo de la ventana como una función del radio del vidrio de colores.



PROBLEMA 25

26. COSTOS FIJOS DE FABRICACIÓN Un fabricante de muebles puede vender mesas terminadas a \$70 la pieza. El costo de fabricación es de \$30 por producir cada mesa y se estima que el ingreso será igual al costo cuando se vendan 200 mesas. ¿Cuál es el costo fijo indirecto asociado con la producción de mesas? [*Nota*: El costo fijo indirecto es el costo al producirse 0 unidades.]

27. COSTOS DE PRODUCCIÓN Un fabricante es capaz de producir 5 000 unidades por día. Hay un costo fijo (indirecto) de \$1 500 por día y un costo variable de \$2 por unidad producida. Exprese el costo diario C como una función del número de unidades producidas y dibuje la gráfica de $C(x)$. ¿Es $C(x)$ continua? Si no lo es, ¿dónde ocurren sus discontinuidades?

28. ¿Cuántos minutos después de las 3 p.m. la manecilla de los minutos coincide con la horaria? [*Sugerencia*: La manecilla horaria se mueve a un 1/12 de la rapidez de la manecilla de los minutos.]

29. IMPUESTO SOBRE LA PROPIEDAD La propietaria de una casa está tratando de decidir entre dos propuestas referidas al impuesto sobre la propiedad. Con la propuesta A, la propietaria de la casa pagará \$100 más el 8% del valor de su casa, mientras que la propuesta B requiere un pago de \$1 900 más el 2% del valor. Suponiendo que la propietaria de la casa sólo considera minimizar su pago de impuestos, desarrolle un criterio con base en el valor, V, de su casa para decidir entre las dos propuestas.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

En los problemas del 30 al 43, halle ya sea el límite dado o muestre que no existe. Si el límite es infinito, indique si éste es $+\infty$ o $-\infty$.

30. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 3x}{x + 1}$

31. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$

32. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x}\right)$

33. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{2 - x}$

34. $\lim_{x\to -\infty} \left(2 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

35. $\lim_{x\to 0} \left(2 - \dfrac{1}{x^3}\right)$

36. $\lim_{x\to 0^-} \left(x^3 - \dfrac{1}{x^2}\right)$

37. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x}{x^2 + 5}$

38. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^3 - 3x + 5}{2x + 3}$

39. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^4 + 3x^2 - 2x + 7}{x^3 + x + 1}$

40. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x(x - 3)}{7 - x^2}$

41. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{x^2 + 3x - 1}$

42. $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)}$

43. $\lim_{x\to 0^-} x\sqrt{1 - \dfrac{1}{x}}$

En los problemas del 44 al 47, liste todos los valores de x para los cuales la función dada no *es continua.*

44. $f(x) = 5x^3 - 3x + \sqrt{x}$

45. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 3}$

www.FreeLibros.com

46. $g(x) = \dfrac{x^3 + 5x}{(x-2)(2x+3)}$

47. $h(x) = \begin{cases} x^3 + 2x - 33 & \text{si } x \le 3 \\ \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x - 3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

48. En cada uno de los siguientes casos, halle el valor de la constante A que hace que la función $f(x)$ sea continua para toda x.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < 1 \\ Ax - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x < -1 \\ Ax^2 + x - 3 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

49. El radio de la Tierra es aproximadamente de 4 000 millas y un objeto localizado a x millas del centro de la Tierra pesa $w(x)$ libras, donde

$$w(x) = \begin{cases} Ax & \text{si } x \le 4\,000 \\ \dfrac{B}{x^2} & \text{si } x > 4\,000 \end{cases}$$

y A y B son constantes positivas. Suponiendo que $w(x)$ es continua para toda x, ¿cuáles deben ser los valores reales de A y B? Dibuje la gráfica de $w(x)$.

50. Grafique $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 9}{x^2 + x - 2}$. Determine los valores de x donde la función no está definida.

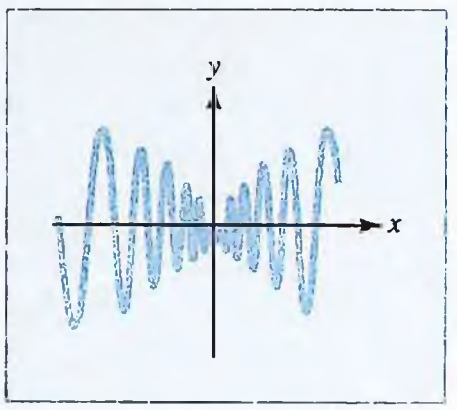
51. Grafique $y = \dfrac{21}{9}x - \dfrac{84}{35}$ y $y = \dfrac{654}{279}x - \dfrac{54}{10}$ en el mismo sistema de coordenadas utilizando [−10, 10]1 por [-10, 10]1. ¿Son las dos rectas paralelas?

52. Para $f(x) = \sqrt{x + 3}$ y $g(x) = 5x^2 + 4$, halle *a)* $f(g(-1.28))$ y (b) $g(f(\sqrt{2}))$. Utilice tres decimales de precisión.

53. Grafique $y = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \le 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Halle los puntos de discontinuidad.

54. Grafique la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 10}{1 - x} - 2$. Halle las intersecciones con los ejes x y y. ¿Para qué valores de x está definida la función?

55. La gráfica que acompaña este problema representa una función $g(x)$ que oscila con más y más frecuencia cuando x se aproxima a 0, ya sea por la derecha o por la izquierda, pero disminuyendo en magnitud. ¿$\lim_{x \to 0} g(x)$ existe? Si es así ¿cuál es su valor?
[*Nota*: Para estudiantes con experiencia en trigonometría, la función $g(x) = |x|$ sen $(1/x)$ se comporta en esta forma].



PROBLEMA 55

www.FreeLibros.com

Las actualizaciones de la sección ¡EXPLORE! se encuentran al final de cada capítulo. Estas actualizaciones proporcionan instrucciones y ejercicios adicionales para explorar en el cálculo utilizando una calculadora graficadora, o dando sugerencias y soluciones para las secciones ¡Explore!, que se encuentran en cada capítulo. Se ha hecho un intento por utilizar las instrucciones comunes en la mayoría de las calculadoras graficadoras manuales. Los nombres exactos de las teclas de las funciones en su calculadora pueden variar, dependiendo de la marca. Por favor consulte el manual del usuario de su calculadora para detalles más específicos.

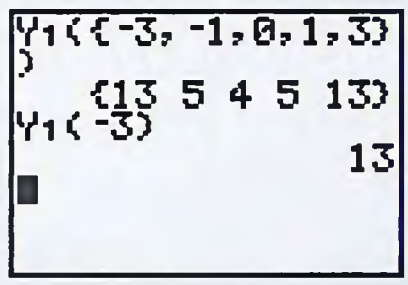
Las soluciones completas para todas las secciones ¡Explore! que aparecen en todo el texto se encuentran accesibles en la página web www.mhhe.com/hoffmann.

Solución para el ejercicio ¡Explore! de la página 2

Escriba $f(x) = x^2 + 4$ en el editor de funciones de su calculadora graficadora (**Y=** tecla). Mientras borra la pantalla (**2o. MODO**), localice el símbolo para Y1 a través de la tecla **VARS**, utilizando la flecha hacia la derecha para llegar a **Y-VARS** y seleccionando **1:Function** y **1:Y1**. También vea la introducción a la calculadora en el prefacio. Y({−3, −1, 0, 1, 3}) genera los valores de la deseados función, todos a la vez. O puede hacer cada valor por separado, tal como Y(−3).



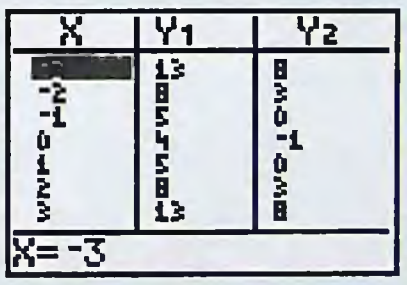




NOTA Un consejo de ¡Explore!: para ver más fácil una tabla de valores, especialmente para algunas funciones, introduzca la tabla de parámetros deseados a través de **TBLSET (2nd WINDOW)**. Ahora introduzca $g(x) = x^2 - 1$ en **Y2** del editor de ecuaciones (**Y=**). Si observa los valores de Y1 y Y2, verá que difieren en una constante de −5, ya que las dos funciones son simplemente traslaciones verticales de $f(x) = x^2$.



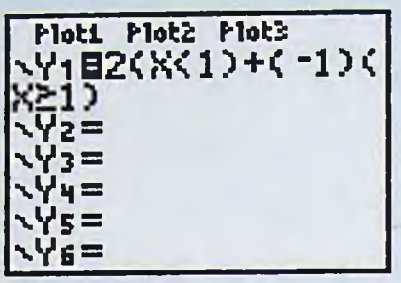


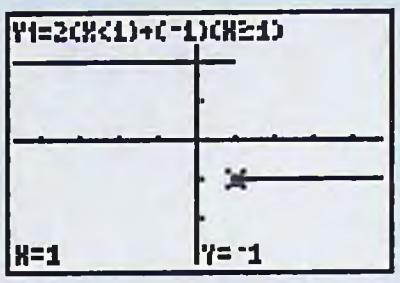


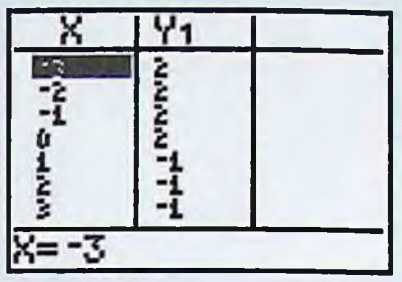
Solución para el ejercicio ¡Explore! de la página 4 (enmedio)

La gráfica de la función definida por partes Y1 = 2(X < 1) + (−1)(X ≥ 1) aparece en la siguiente figura y la tabla a su derecha indica los valores de la función en X = −2, 0, 1 y 3. Recuerde que los símbolos de desigualdad se pueden acceder a través de la tecla **TEST (2nd MATH)** colocando la gráfica en el modo de puntos, lo que evita la recta vertical en X = 1, donde Y = −1.

www.FreeLibros.com

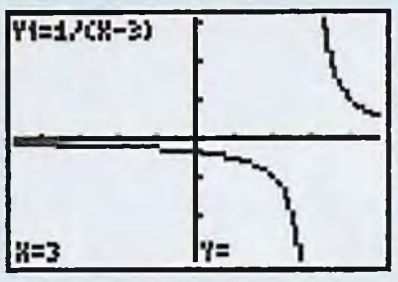


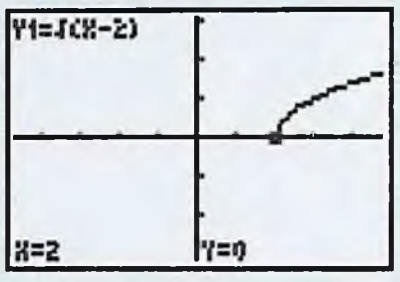


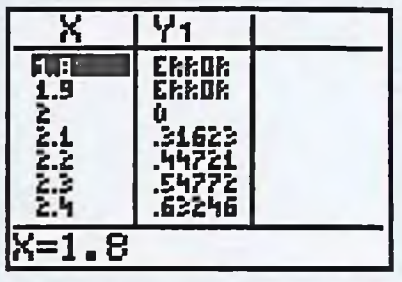


Solución para el ejercicio ¡Explore! de la página 4 (abajo)

La función $f(x) = 1/(x - 3)$ presenta una discontinuidad en $x = 3$ y no está definida ahí. De este modo, el dominio consiste de todos los números reales $x \neq 3$. La función $g(x) = \sqrt{(x - 2)}$ no está definida para $x < 2$, como se indica abajo en la gráfica del medio de la pantalla y en la tabla de la derecha.

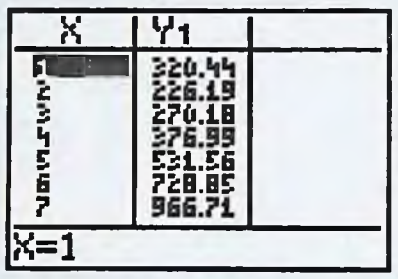


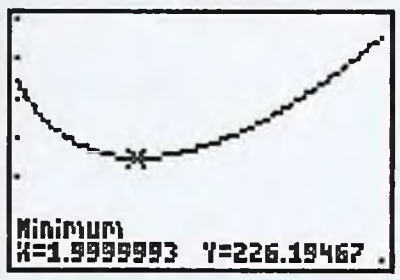




Solución para el ejercicio ¡Explore! de la página 43

Utilice **TBLSET** con **TblStart** = 1 y **ΔTbl** = 1 para obtener la tabla de abajo a la izquierda, que indica un costo mínimo de pocos cientos y que ocurre en el intervalo [1,4]. Después, grafíquelo utilizando **WINDOW** con dimensiones [1,4] por [100, 400]50 para obtener la pantalla de en medio que se muestra más abajo; es ahí donde se ha usado la opción de encontrar el mínimo en **CALC** (véase la introducción a la calculadora) para localizar un valor mínimo aparente de aproximadamente 226 centavos en un radio de 2 pulgadas. Por tanto, ningún radio creará un costo de $2.00, que es más bajo que el costo mínimo. Trazando $x = 3$, se produce un costo de aproximadamente $2.70.

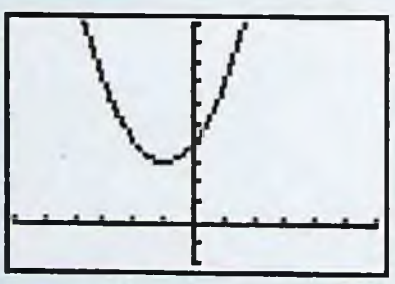


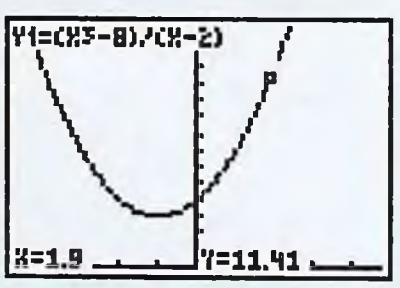


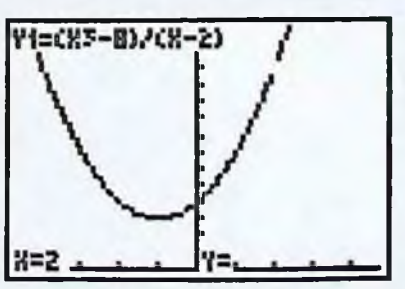


Solución para el ejercicio ¡Explore! de la página 78

La gráfica de $f(x) = (x^3 - 8)/(x - 2)$ parece continua en toda la pantalla, [−6, 6]1 por [−2, 10]1. Sin embargo, si examina esta gráfica utilizando una pantalla decimal modificada [−4.7, 4.7]1 por [0, 14.4]1, verá un hueco exagerado en $x = 2$.







La función $f(x)$ no es continua, específicamente en $x = 2$, donde no está definida. La situación es similar a la de la figura 1.42*c*) de la página 60. ¿Qué valor de *y* llenaría el hueco de esta gráfica? Respuesta: $\lim_{x \to 2} f(x) = 12$.

www.FreeLibros.com

REFLEXIONE ACERCA DE...



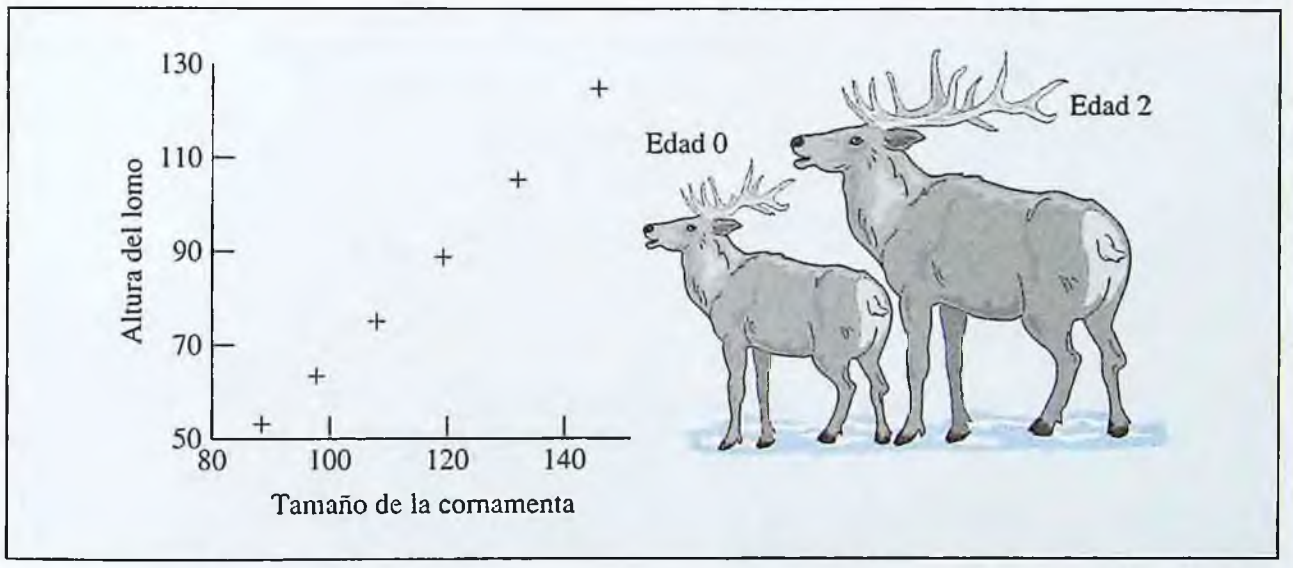
MODELOS ALOMÉTRICOS

Cuando se desarrolla un modelo matemático, el primer paso es identificar las magnitudes de interés, y el segundo es encontrar las ecuaciones que expresan las relaciones entre dichas magnitudes. Estas ecuaciones pueden ser muy complicadas, pero existen muchas relaciones importantes que se pueden expresar en la forma relativamente simple $y = Cx^k$, en donde una magnitud y se expresa como un múltiplo constante de una función de potencia de otra magnitud x.

En biología, el estudio de las respectivas tasas de crecimiento de diferentes partes de un organismo se llama ***alometría***, del griego *alo* (otro o diferente) y *metri* (medida). En los modelos alométricos las ecuaciones de la forma $y = Cx^k$ se usan con frecuencia para describir la relación entre dos mediciones biológicas. Por ejemplo, se ha demostrado que el tamaño a de la cornamenta de un alce de punta a punta está relacionado con h, la altura del lomo de los alces, por la ecuación alométrica

$$a = 0.026h^{1.7}$$

donde tanto a como h están medidas en (cm).[8] Esta relación se muestra en la siguiente figura.



Siempre que sea posible, se desarrollan modelos alométricos utilizando suposiciones básicas de los principios biológicos (u otros). Por ejemplo, es razonable suponer que el volumen de cuerpo, y por tanto el peso de la mayoría de los animales, es proporcional al cubo de la dimensión lineal del cuerpo; tal como sucede con la altura para animales que se ponen de pie o el largo para animales de cuatro patas. Por tanto, es razonable esperar que el peso de una serpiente es proporcional al cubo de su longitud; efectivamente, las observaciones de la serpiente hognose de Kansas indican que el peso w (gra-

[8] Frederick R. Adler. *Modeling the Dynamics of Life*, Brooks-Cole Publishing, Pacific Grove, California, 1998, página 61.

www.FreeLibros.com

REFLEXIONE ACERCA DE...

mos) y la longitud L (metros) de una serpiente típica de esa especie están relacionados por la ecuación[9]

$$w = 440L^3.$$

A veces, los datos observados pueden ser muy diferentes de los resultados predichos por el modelo. En tal caso, se pide un mejor modelo. Para la serpiente occidental hognose, las ecuaciones $w = 446L^{2.99}$ y $w = 429L^{2.90}$ proporcionan las mejores aproximaciones al peso de los machos y las hembras de la serpientes hognose occidental respectivamente. Sin embargo, no existe una razón biológica subyacente por la que debamos usar exponentes menores de tres; esto sólo se hace porque dichas ecuaciones ajustan ligeramente mejor los datos .

La *tasa basal metabólica* M de un animal es la tasa de calor producido por su cuerpo cuando está descansando y ayunando. Las tasas basales metabólicas se han estudiado desde la década de 1830. Las ecuaciones alométricas de la forma $M = cw^r$, con c y r constantes, se han usado desde hace mucho tiempo para desarrollar modelos relacionados con la tasa basal metabólica y con el peso w del cuerpo de un animal. El desarrollo de este modelo supone que la tasa basal metabólica M es proporcional a S, el área de superficie del cuerpo; así, $M = aS$, donde a es una constante. Para establecer una ecuación que relacione M y w, se necesita relacionar el peso w de un animal con su área superficial S. Suponiendo que todos los animales tienen forma de esfera o cubo y que el peso de un animal es proporcional a su volumen, se puede mostrar (véanse los ejercicios 1 y 2) que el área superficial es proporcional a $w^{2/3}$, con lo que $S = bw^{2/3}$, donde b es una constante. Sustituyendo $S = bw^{2/3}$ en la ecuación $M = aS$, obtenemos la ecuación alométrica

$$M = abw^{2/3} = kw^{2/3}$$

donde $k = ab$.

Sin embargo, éste no es el final de la historia. Cuando se usan suposiciones más refinadas en los modelos, se encuentra que la tasa basal metabólica M se aproxima mejor si el exponente 3/4 se utiliza en la ecuación alométrica en vez del exponente 2/3. Más observaciones sugieren que se utilice la constante 70 en esta ecuación (véase M. Kleiber, *The Fire of Life, An Introduction to Animal Energetics,* Wiley, 1961). Esto nos da la ecuación

$$M = 70w^{3/4}$$

donde M se mide en kilocalorías por día y w se mide en kilogramos. Se puede encontrar mayor información acerca de modelos alométricos en nuestra guía de recursos en la Web en www.mhhe.com/hoffmann.

WEB

Preguntas

1. ¿Qué peso predice la ecuación alométrica $w = 440L^3$ para una serpiente occidental hognose de 0.7 metros de longitud? Si esta serpiente es macho, ¿qué peso predice la ecuación $w = 446L^{2.99}$? Si es hembra, ¿qué peso predice la ecuación $w = 429L^{2.90}$?

2. ¿Qué tasas basales metabólicas son pronosticadas por la ecuación $M = 70w^{3/4}$ para animales con pesos de 50 kg, 100 kg y 350 kg?

[9]Edward Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, tercera edición, Springer-Verlag, Nueva York, 1979, página 178.

www.FreeLibros.com

3. Las observaciones muestran que el peso del cerebro b, medido en gramos, para primates adultos femeninos está dado por la ecuación alométrica $b = 0.064w^{0.822}$, donde w es el peso en gramos (g) del primate. ¿Cuáles son los pesos predichos para el cerebro de primates femeninos que pesan 5, 10, 25, 50 y 100 kg? (Recuerde que 1 kg = 1 000 g.)

4. Si $y = Cx^k$, donde C y k son constantes, entonces se dice que y y x están relacionadas por una alometría positiva si $C > 1$, y por una alometría negativa si $C < 1$. La *tasa metabólica del peso específico* de un animal se define como la tasa basal metabólica M del animal dividida entre su peso w; es decir M/w. Muestre que si la tasa basal metabólica es la alometría positiva del peso en el ejercicio 2, entonces la tasa metabólica del peso específico es una ecuación alométrica negativa del peso.

5. Muestre que si se supone que el cuerpo de todos los animales tiene forma de cubo, entonces la superficie S de un cuerpo animal es proporcional a $V^{2/3}$, donde V es el volumen del cuerpo. Combinando este hecho con la suposición de que el peso w de un animal es proporcional a su volumen, muestre que S es proporcional a $w^{2/3}$.

6. Muestre que si suponemos que el cuerpo de todos los animales tiene forma de esfera, entonces la superficie S de un cuerpo animal es proporcional a $V^{2/3}$, donde V es el volumen del cuerpo. Combinando este hecho con la suposición de que el peso w de un animal es proporcional a su volumen, muestre que S es proporcional a $w^{2/3}$. [*Sugerencia*: Recuerde que una esfera de radio r tiene una superficie de $4\pi r^2$ y un volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$.]

www.FreeLibros.com

www.FreeLibros.com

CAPÍTULO 2



La aceleración de un objeto en movimiento se determina derivando su velocidad.

DERIVACIÓN: CONCEPTOS BÁSICOS

1 La derivada
2 Técnicas de derivación
3 Reglas del producto y del cociente; derivadas de orden superior
4 La regla de la cadena
5 Análisis marginal y aproximaciones por incrementos
6 Derivación implícita y tasas relacionadas
Resumen del capítulo
Términos importantes, símbolos y fórmulas
Revisión del capítulo 2
Problemas de repaso
¡Explore! Actualización
Reflexione acerca de...

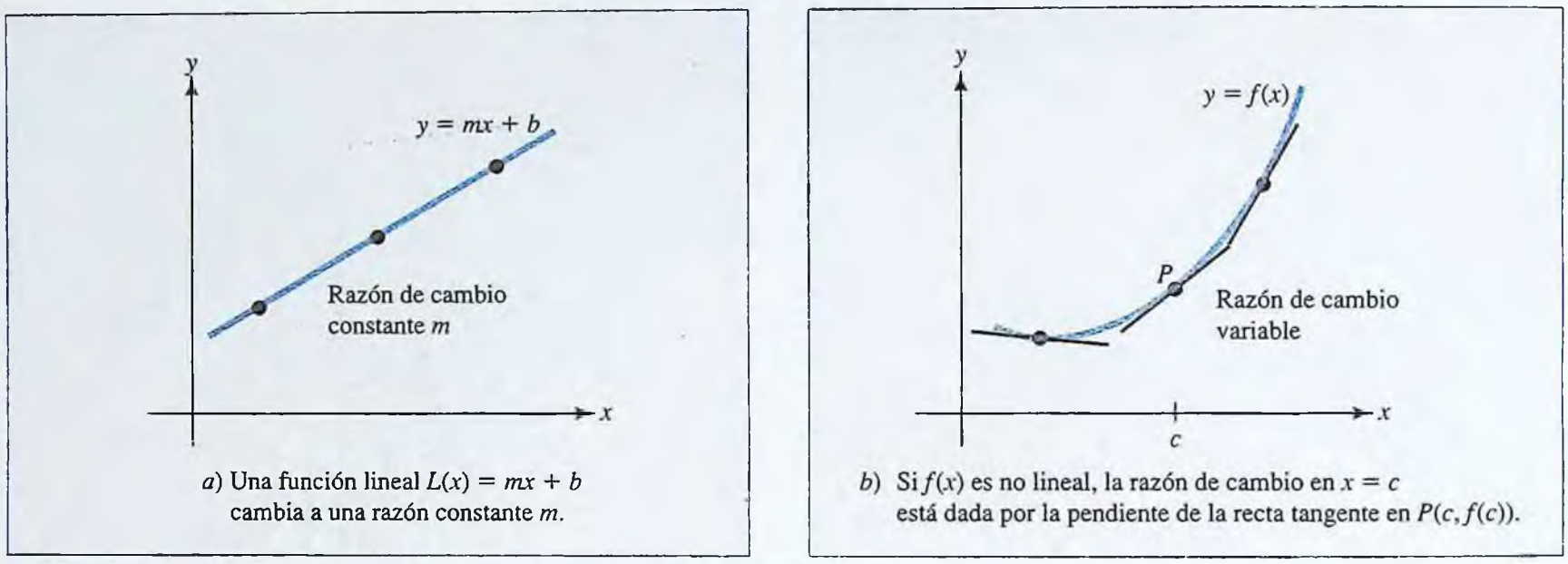
www.FreeLibros.com

SECCIÓN 2.1 | La derivada

El cálculo es la matemática del cambio, y la herramienta principal para estudiar el cambio es un procedimiento llamado **derivación**. En esta sección se introduce dicho procedimiento y se examinan algunas de sus aplicaciones.

Razón de cambio y pendiente

En la sección 1.3 se vio que una función lineal $L(x) = mx + b$ cambia a una razón constante m respecto a la variable independiente x. Es decir, la razón de cambio de $L(x)$ está dada por la pendiente o inclinación de su gráfica que es la recta $y = mx + b$ (figura 2.1*a*). Para una función $f(x)$ no lineal, la razón de cambio no es constante sino que varía respecto de x. En particular, cuando $x = c$, la razón de cambio está dada por la inclinación de la gráfica de $f(x)$ en el punto $P(c, f(c))$, que puede ser medida usando la pendiente de la *recta tangente* a la gráfica en P (figura 2.1*b*). La relación entre la inclinación y la razón de cambio se ilustra en el ejemplo 2.1.1.



a) Una función lineal $L(x) = mx + b$ cambia a una razón constante m.

b) Si $f(x)$ es no lineal, la razón de cambio en $x = c$ está dada por la pendiente de la recta tangente en $P(c, f(c))$.

FIGURA 2.1 La razón de cambio se mide por la pendiente.

EJEMPLO 2.1.1

En la gráfica que aparece en la figura 2.2 se indica la relación entre el porcentaje de desempleo U y el porcentaje correspondiente a la inflación I. Utilice la gráfica para estimar la razón a la que cambia I con respecto a U cuando el nivel de desempleo es 3%, y luego cuando éste es 10%.

Solución

De la figura anterior se estima que la pendiente de la recta tangente en el punto (3, 14), correspondiente a $U = 3$, es aproximadamente -14. Esto es, cuando el desempleo es 3%, la inflación I *disminuye* a una razón de 14 puntos porcentuales por cada punto porcentual que aumente el desempleo U.

En el punto $(10, -5)$ la pendiente de la recta tangente es aproximadamente -0.4; lo que significa que cuando el desempleo es 10%, la inflación disminuye a una razón de sólo 0.4 puntos porcentuales por cada punto porcentual que aumente el desempleo.

En el ejemplo 2.1.2 se muestra cómo se puede calcular de forma analítica la pendiente y la razón de cambio utilizando el concepto de límite.

www.FreeLibros.com

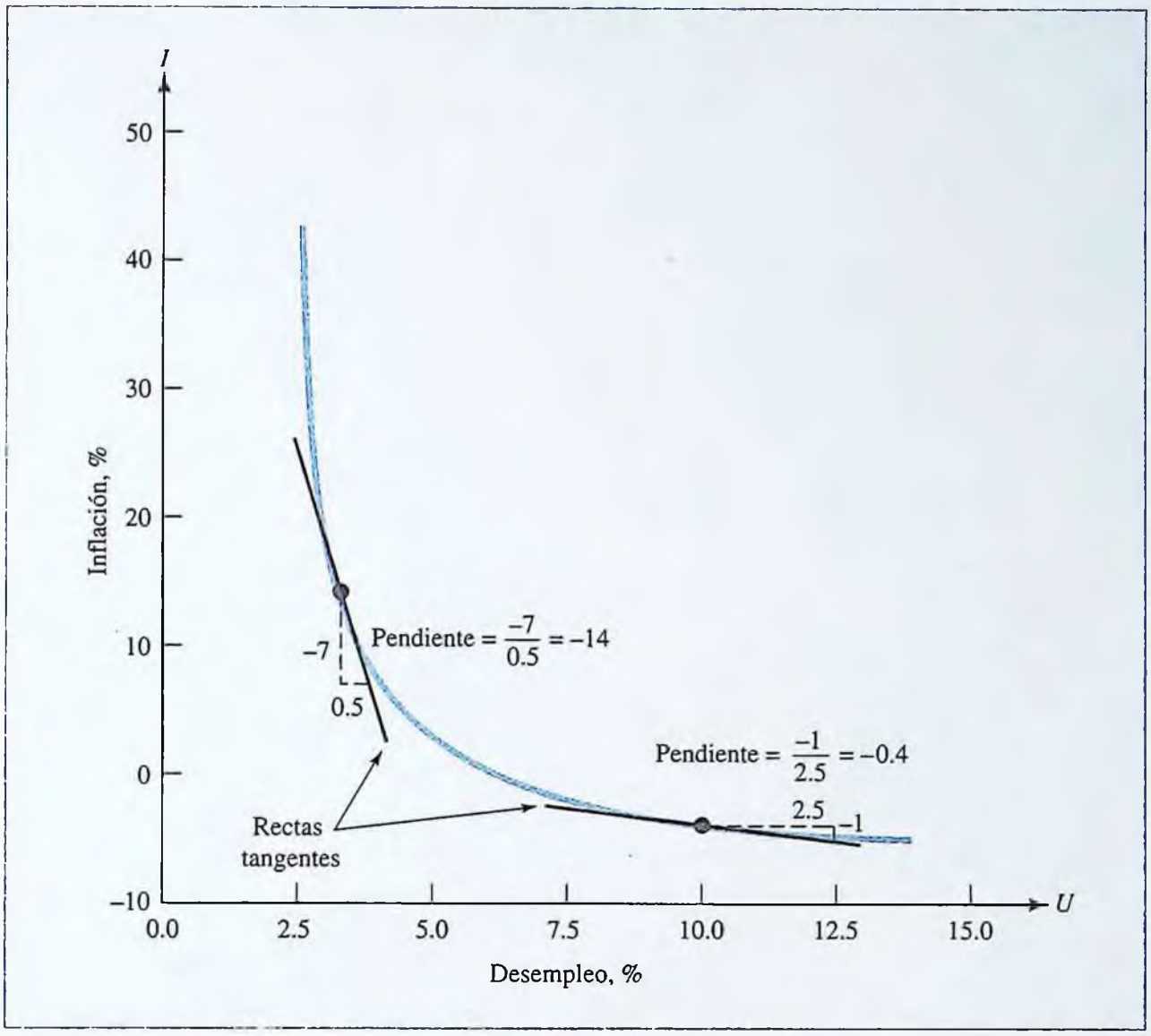


FIGURA 2.2 Inflación como una función del desempleo.

Fuente: Adaptado de Robert Eisner, *The Misunderstood Economy: What Counts and How to Count It, Boston*, MA, Harvard Business School Press, 1994, p. 173.

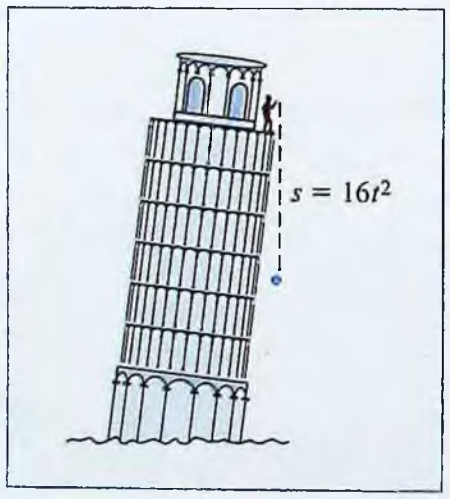
EJEMPLO | 2.1.2

Si se desprecia la resistencia del aire, un objeto en caída libre desde una gran altura recorre $s(t) = 16t^2$ pies en t segundos.

a) ¿Cuál es la velocidad del objeto después de $t = 2$ segundos?

b) ¿Cómo se determina la velocidad del inciso *a*) según la gráfica de $s(t)$?

Solución



a) La velocidad después de 2 segundos es la razón de cambio *instantánea* de $s(t)$ en $t = 2$. A menos que el objeto que cae tenga un velocímetro, es difícil "leer" su velocidad. Sin embargo, se puede medir la distancia que cae a medida que t varía en una cantidad pequeña, h, de $t = 2$ a $t = 2 + h$ y luego calcular la razón de cambio *promedio* de $s(t)$ en el periodo $[2, 2 + h]$ mediante la relación

$$v_{\text{prom}} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} \quad \frac{s(2+h) - s(2)}{(2+h) - 2}$$

$$= \frac{16(2+h)^2 - 16(2)^2}{h} = \frac{16(4 + 4h + h^2) - 16(4)}{h}$$

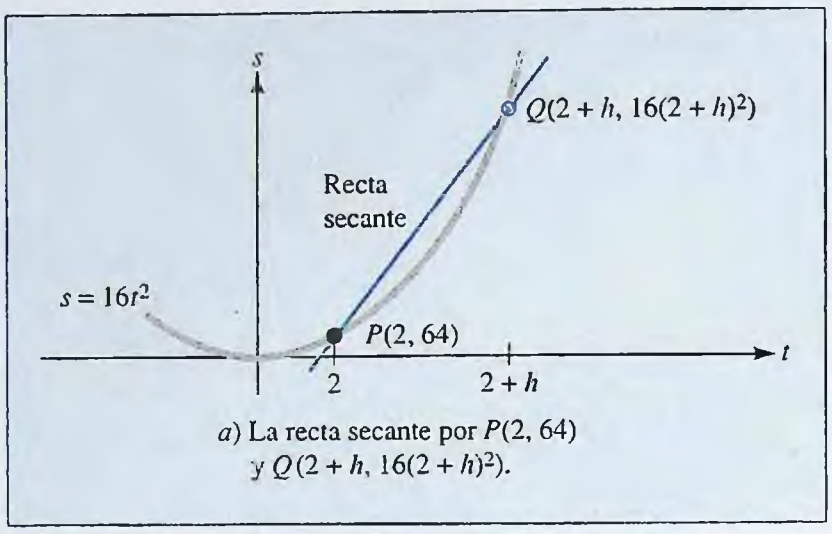
$$= \frac{64h + 16h^2}{h} = 64 + 16h$$

www.FreeLibros.com

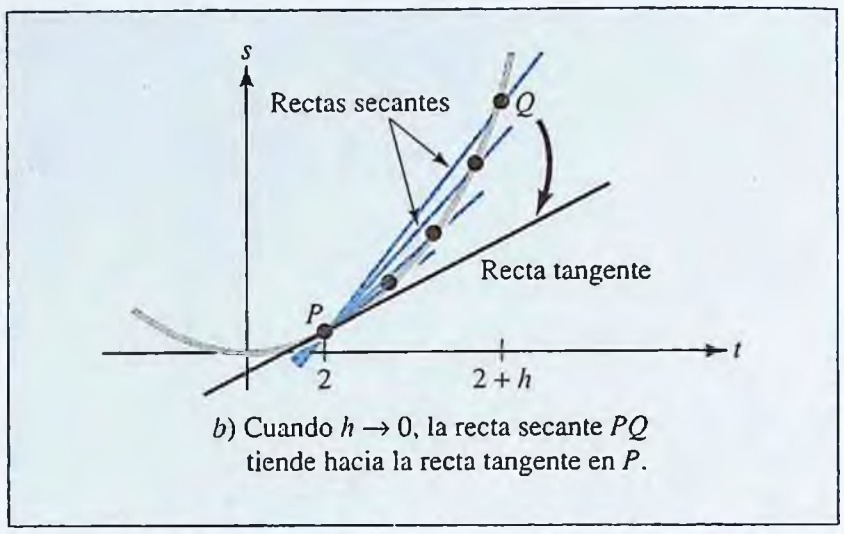
Como el tiempo transcurrido h es pequeño, se espera que la velocidad promedio v_{prom}, se aproxime mucho a la velocidad instantánea ("del velocímetro") v_{inst}, en el tiempo $t = 2$. Así, es razonable calcular la velocidad instantánea mediante el límite

$$v_{\text{inst}} = \lim_{h \to 0} v_{\text{prom}} = \lim_{h \to 0} (64 + 16h) = 64$$

Es decir, después de 2 segundos, el objeto viaja a una razón de 64 pies por segundo.



a) La recta secante por $P(2, 64)$ y $Q(2 + h, 16(2 + h)^2)$.



b) Cuando $h \to 0$, la recta secante PQ tiende hacia la recta tangente en P.

FIGURA 2.3 Cálculo de la pendiente de la recta tangente a $s = 16t^2$ en $P(2, 64)$.

b) En la figura 2.3 se representa de forma geométrica el procedimiento descrito en el inciso *a*). En la figura 2.3a se muestra la gráfica de $s(t) = 16t^2$, junto con los puntos $P(2, 64)$ y $Q(2 + h, 16(2 + h)^2)$. La recta que une P y Q se denomina *recta secante* de la gráfica de $s(t)$ y tiene una pendiente

$$m_{\text{sec}} = \frac{16(2 + h)^2 - 64}{(2 + h) - 2} = 64 + 16h$$

Como se indica en la figura 2.3b, cuando se toman valores cada vez más pequeños de h, las rectas secantes correspondientes a PQ tienden a la posición de lo que intuitivamente reconocemos como la recta tangente para la gráfica de $s(t)$ en P. Esto sugiere que se puede determinar la pendiente m_{tan} de la recta tangente calculando el valor límite de m_{sec} cuando h tiende a 0; es decir,

$$m_{\text{tan}} = \lim_{h \to 0} m_{\text{sec}} = \lim_{h \to 0} (64 + 16h) = 64$$

Así, la pendiente de la recta tangente para la gráfica de $s(t) = 16t^2$ en el punto donde $t = 2$ es la misma que la razón de cambio instantánea de $s(t)$ respecto a t cuando $t = 2$.

¡EXPLORE!

Introduzca $f(x) = 1/x$ en Y1 en el editor de ecuaciones de su calculadora graficadora. Grafique Y1 usando la pantalla decimal modificada [0, 4.7]1 por [0, 3.1]1. Si esta curva se reemplaza por una sucesión de segmentos de recta, es decir por una poligonal, ¿cómo se comportarán los valores de la pendiente para estos segmentos de recta? Para ver esos valores, introduzca Y2 = (Y1(X + H) − Y1(X))/H en el editor de ecuaciones e introduzca 0.5 en H (es decir 0.5 → H). Ajuste **TBLSET** con TblStart = 1 y ΔTbl = H. Examine los valores con el comando **TABLE**. ¿Qué representan los valores de Y2? ¿Qué sucede cuando se cambia H a 0.1 (también en ΔTbl)?

El procedimiento que se empleó en el ejemplo 2.1.2 para encontrar la velocidad de un cuerpo en caída libre también se puede utilizar para encontrar otras razones de cambio. Suponga que se desea determinar la razón a la cual la función $f(x)$ cambia respecto a x cuando $x = c$. Se comienza encontrando la **razón de cambio promedio** de $f(x)$ cuando x varía de $x = c$ a $x = c + h$, la cual está dada por la relación

$$\text{razón}_{\text{prom}} = \frac{\text{cambio en } f(x)}{\text{cambio en } x} = \frac{f(c + h) - f(c)}{(c + h) - c}$$

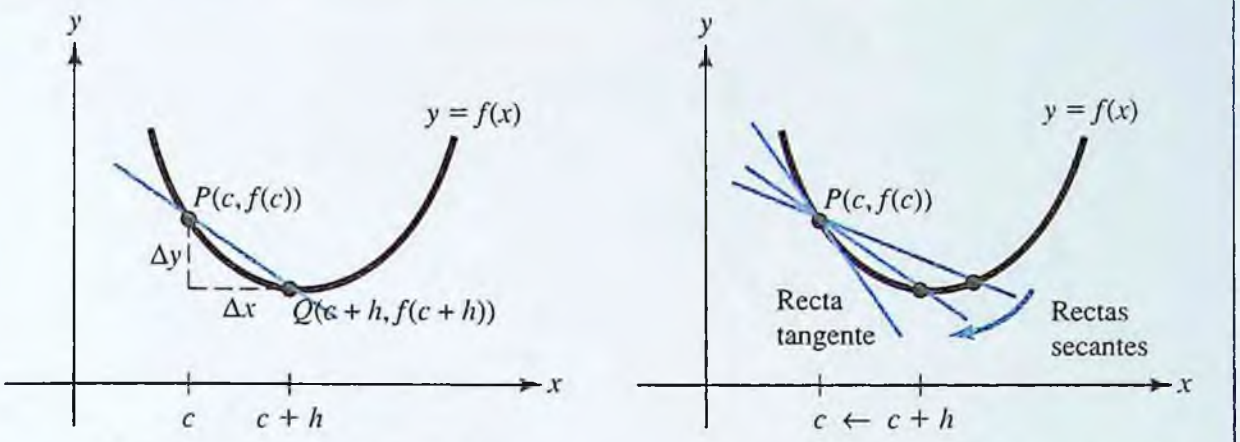
$$= \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

www.FreeLibros.com

Este cociente se puede interpretar de forma geométrica como la pendiente de la recta secante que va desde el punto $P(c, f(c))$ hasta el punto $Q(c + h, f(c + h)$, tal como se muestra en la figura 2.4a.

¡EXPLORE!

La calculadora graficadora puede simular rectas secantes aproximándose a una recta tangente. Introduzca $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ en Y1 del editor de ecuaciones, seleccionando un estilo de graficación en **NEGRITAS.** Introduzca los valores {−0.2, −0.6, −1.1, −1.6, −2.0} en L1, list 1, empleando el menú de edición **STAT.** Grafique empleando una pantalla modificada [0, 4.7]1 por [0, 3.1]1, y describa lo que observa. ¿Cuál es la ecuación para la recta tangente limite?



a) La recta secante de $P(c, f(c))$ a $Q(c + h, f(c + h))$

b) Cuando h tiende a 0, la recta secante se aproxima a la recta tangente en P

FIGURA 2.4 Rectas secantes que aproximan a una recta tangente.

Luego se determina la razón instantánea de cambio de $f(x)$ en $x = c$ calculando el valor límite de la razón promedio, cuando h tiende a 0; es decir,

$$\text{razón}_{\text{inst}} = \lim_{h \to 0} \text{razón}_{\text{prom}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

Este límite también es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(c, f(c))$, tal como se indica en la figura 2.4b.

La derivada

La expresión

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

recibe el nombre de **cociente incremental** de la función $f(x)$. Como; ya se vio, la razón de cambio y la pendiente se pueden determinar calculando el correspondiente límite del cociente incremental cuando h tiende a 0. Para unificar el estudio de éstas y otras aplicaciones que requieren del cálculo del límite del cociente incremental, se introduce la siguiente terminología y notación.

Derivada de una función ▪ La **derivada** de una función $f(x)$ respecto a x es la función $f'(x)$ dada por

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

[$f'(x)$ se lee como "f prima de x"]. El proceso de calcular la derivada se denomina **derivación**, y se dice que $f(x)$ es **derivable** en $x = c$ si $f'(c)$ existe; es decir, si el límite que define $f'(x)$ existe cuando $x = c$.

www.FreeLibros.com

NOTA Se usa "h" para denotar el incremento de la variable independiente en el cociente incremental a fin de simplificar cálculos algebraicos. Sin embargo, si se quiere subrayar que la variable x se está incrementando, entonces ese incremento se denota como Δx (léase "delta x"). De forma similar, Δt y Δs, denotan cambios pequeños (incrementos) en las variables t y s, respectivamente. Esta notación será muy usada en la sección 2.5.

EJEMPLO | 2.1.3

Encuentre la derivada de la función $f(x) = 16x^2$.

Solución

El cociente incremental para $f(x)$ es

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{16(x+h)^2 - 16x^2}{h}$$

$$= \frac{16(x^2 + 2hx + h^2) - 16x^2}{h}$$

$$= \frac{32hx + h^2}{h} \quad \textit{agrupando términos semejantes}$$

$$= 32x + h \quad \textit{cancelando } h$$

Así, la derivada de $f(x) = 16x^2$ es la función

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (32x + h)$$

$$= 32x$$

Una vez calculada la derivada de una función $f(x)$, ésta se emplea para simplificar cualquier cálculo donde aparezca el límite del cociente incremental de $f(x)$, cuando h tienda a 0. Por ejemplo, obsérvese que la función en el ejemplo 2.1.3 es en esencia la misma que la función de la distancia $s = 16t^2$ que aparece en el problema del cuerpo en caída libre (ejemplo 2.1.1). Usando el resultado del ejemplo 2.1.3, la velocidad del cuerpo en caída libre en un instante $t = 2$ ahora se calcula simplemente sustituyendo $t = 2$ en la fórmula para la derivada $s'(t)$:

$$\text{velocidad} = s'(2) = 32(2) = 64$$

Del mismo modo, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $s(t)$ en el punto $P(2, 64)$ está dada por

$$\text{pendiente} = s'(2) = 64$$

Para referencias futuras, las observaciones hechas acerca de las razones de cambio y de las pendientes se pueden resumir usando la notación de la derivada como sigue:

La pendiente como derivada ■ La pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$ es $m_{\tan} = f'(c)$.

Razón de cambio instantánea como derivada ■ La razón de cambio de $f(x)$ respecto a x cuando $x = c$ está dada por $f'(c)$.

www.FreeLibros.com

REPASO

Justo-a-tiempo

Recuerde que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Éste es un caso particular del teorema del binomio, para el exponente 3, y se usa para expandir el numerador del cociente incremental en el ejemplo 2.1.4.

En el ejemplo 2.1.4, se determina la ecuación de la recta tangente. Después, en el ejemplo 2.1.5 se considera una aplicación a los negocios donde aparece una razón de cambio.

EJEMPLO | 2.1.4

Primero calcule la derivada de $f(x) = x^3$, y luego utilícela para determinar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^3$ en el punto donde $x = -1$. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en este punto?

Solución

Según la definición de derivada

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3xh + h^2)$$

$$= 3x^2$$

Entonces, la pendiente de la recta tangente a la curva $y = x^3$ en el punto donde $x = -1$ es $f'(-1) = 3(-1)^2 = 3$ (figura 2.5). Para determinar la ecuación de la recta tangente también se necesita la coordenada y del punto de tangencia, que es $y = (-1)^3 = -1$. Por tanto, la recta tangente pasa por el punto $(-1, -1)$ con pendiente 3. Aplicando la fórmula punto-pendiente, se tiene

$$y - (-1) = 3[x - (-1)]$$

o bien

$$y = 3x + 2$$

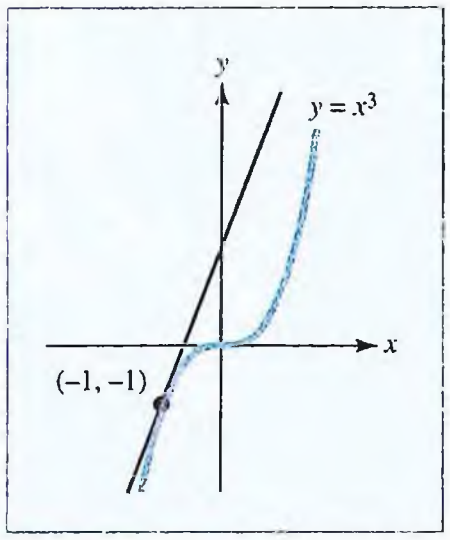


FIGURA 2.5 Gráfica de $y = x^3$.

¡EXPLORE!

Introduzca $f(x) = x^3$ en Y1 del editor de ecuaciones y grafique empleando una pantalla decimal. Acceda a la opción de recta tangente de la tecla **DRAW** (2nd **PRGM**) y, en su gráfica, utilizando la flecha a la izquierda, mueva el cursor a $(-1, -1)$. Presione **ENTER** y observe lo que sucede. ¿Ajusta exactamente la ecuación al resultado en el ejemplo 2.1.4? Explique.

EJEMPLO | 2.1.5

Un fabricante determina que cuando se producen x miles de unidades de cierto artículo, la utilidad generada será

$$P(x) = -400x^2 + 6\,800x - 12\,000$$

dólares. ¿A qué razón cambia la utilidad respecto al nivel de producción x cuando se producen 9 000 unidades?

Solución

Se tiene que

$$P'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{P(x+h) - P(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-400(x+h)^2 + 6\,800(x+h) - 12\,000 - (-400x^2 + 6\,800x - 12\,000)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-400h^2 - 800hx + 6\,800h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (-400h - 800x + 6\,800)$$

$$= -800x + 6\,800$$

www.FreeLibros.com

Así, cuando el nivel de producción es $x = 9$ (9 000 unidades), la utilidad cambia a una razón de

$$P'(9) = -800(9) + 6\,800 = -400$$

dólares por miles de unidades.

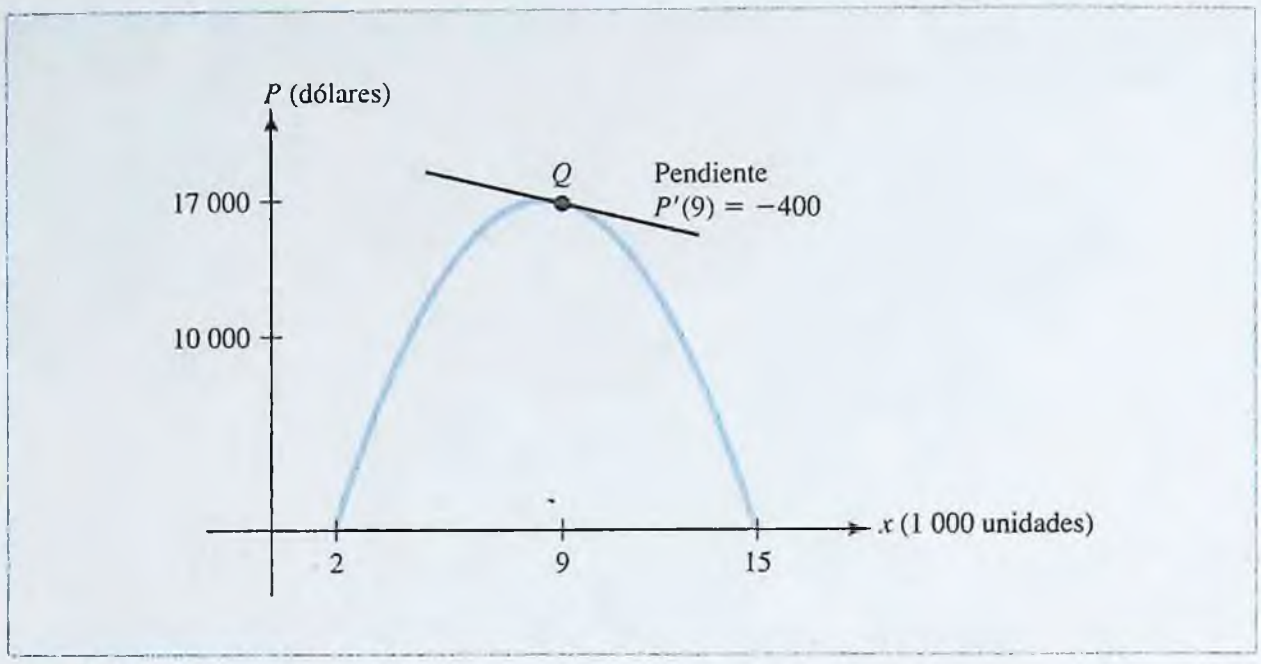


FIGURA 2.6 Gráfica de la función de utilidad $P(x) = -400x^2 + 6\,800x - 12\,000$.

En el ejemplo 2.1.5 se determinó que $P'(9) = -400$, lo que significa que la recta tangente a la curva de utilidad $y = P(x)$ tiene pendiente dirigida *hacia abajo* en el punto Q, donde $x = 9$, tal como se muestra en la figura 2.6. Debido a que la recta tangente en Q tiene pendiente hacia abajo, la curva de utilidad debe bajar en Q; por ello, la utilidad debe ser *decreciente* cuando se producen 9 000.

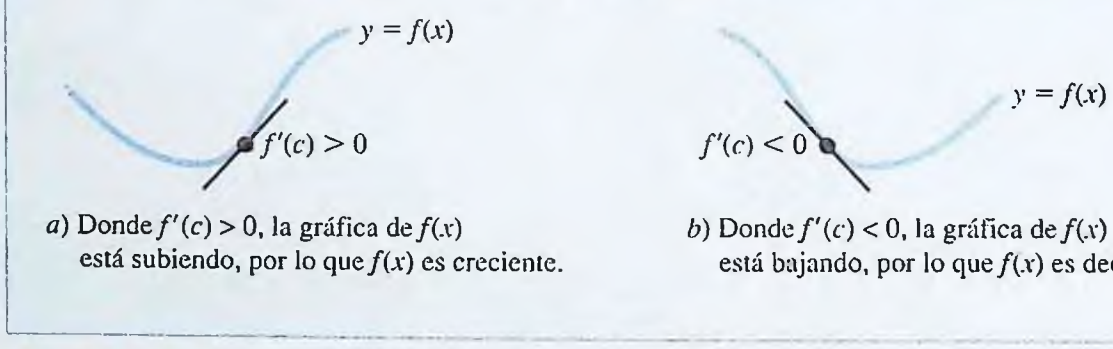
La importancia del signo de la derivada se resume en el siguiente recuadro y en la figura 2.7. En el capítulo 3 se desarrollará un procedimiento general para trazar las curvas y se ampliará sobre la relación entre la forma de una curva y el signo de sus derivadas

Importancia del signo de la derivada $f'(x)$. Si la función f es derivable en $x = c$, entonces

$$f \text{ es } \textbf{creciente} \text{ en } x = c \text{ si } f'(c) > 0$$

y

$$f \text{ es } \textbf{decreciente} \text{ en } x = c \text{ si } f'(c) < 0$$



a) Donde $f'(c) > 0$, la gráfica de $f(x)$ está subiendo, por lo que $f(x)$ es creciente.

b) Donde $f'(c) < 0$, la gráfica de $f(x)$ está bajando, por lo que $f(x)$ es decreciente.

FIGURA 2.7 Importancia del signo de la derivada $f'(c)$.

www.FreeLibros.com

Notación de la derivada

Algunas veces, la derivada $f'(x)$ de $y = f(x)$ se escribe como $\frac{dy}{dx}$ o $\frac{df}{dx}$ (léase "de y de x" o "de f de x"). En esta notación, el valor de la derivada en $x = c$ [es decir, $f'(c)$] se escribe como

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c} \quad \text{o bien} \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=c}$$

¡EXPLORE!

Muchas calculadoras graficadoras tienen una instrucción especial para calcular derivadas de manera numérica. Esta instrucción se llama derivada numérica (nDeriv). A ella se puede acceder por medio de la tecla **MATH**. También se puede acceder a esta instrucción a través de la tecla **CALC** (second **TRACE**), especialmente si se desea una representación gráfica. Por ejemplo, introduzca $f(x) = \sqrt{x}$ en **Y1** del editor de ecuaciones y vea su gráfica usando una pantalla decimal. Utilice la opción $\frac{dy}{dx}$ de la tecla **CALC** y observe el valor de la derivada numérica en $x = 1$.

Por ejemplo, si $y = x^2$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

y el valor de esta derivada en $x = -3$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-3} = \left.2x\right|_{x=-3} = 2(-3) = -6$$

La notación $\frac{dy}{dx}$ para la derivada sugiere una pendiente, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, y se puede considerar como "la razón de cambio de y respecto a x". Algunas veces es conveniente abreviar la expresión

$$\text{cuando } y = x^2, \text{ entonces } \frac{dy}{dx} = 2x"$$

al escribir simplemente

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

que se lee "la derivada de x^2 respecto a x es $2x$".

En el ejemplo 2.1.6 se muestra cómo emplear las distintas formas de notación para la derivada.

EJEMPLO | 2.1.6

Primero calcule la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$, luego úsela para:

a) Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto donde $x = 4$.

b) Determinar la razón con la que está cambiando $y = \sqrt{x}$ con respecto a x, cuando $x = 1$.

Solución

La derivada de $y = \sqrt{x}$ respecto a x está dada por

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{si } x > 0
\end{aligned}$$

REPASO

Justo-a-tiempo

Recuerde que $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. En el ejemplo 2.1.6 se empleó esta identidad con $a = \sqrt{x+h}$ y $b = \sqrt{x}$.

www.FreeLibros.com

a) Cuando $x = 4$, la coordenada y correspondiente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ es $y = \sqrt{4} = 2$, por tanto el punto de tangencia es $P(4, 2)$. Como $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, entonces la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto P(4, 2) está dada por

$$f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

y sustituyendo en la fórmula punto-pendiente, se tiene que la ecuación de la recta tangente en P es

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$$

o bien

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$

b) La razón de cambio de $y = \sqrt{x}$ cuando $x = 1$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

NOTA Observe que en el ejemplo 2.1.6 la función $f(x) = \sqrt{x}$ está definida en $x = 0$ pero su derivada no $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Este ejemplo muestra que una función y su derivada no siempre tienen el mismo dominio. ▣

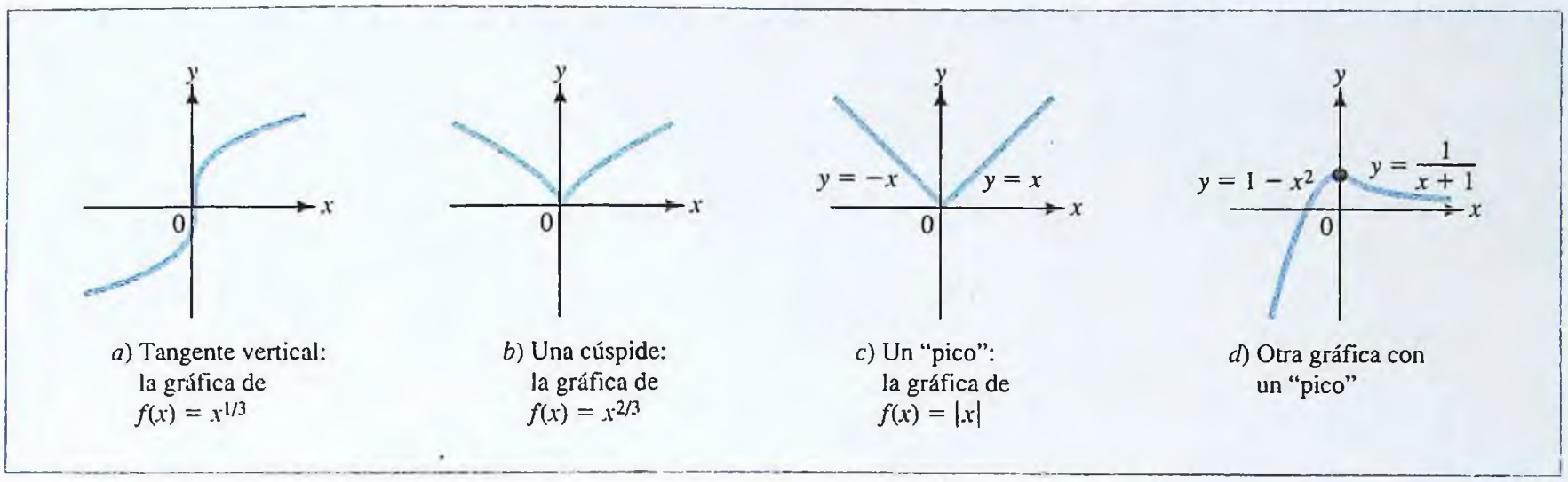
Derivabilidad y continuidad

Si una función $f(x)$ es derivable en $x = c$, entonces la gráfica de $y = f(x)$ tiene una recta tangente no vertical en el punto $P(c, f(c))$, así como en todos los puntos de la gráfica que están "cerca" de P. Es de esperar que esta función sea continua en $x = c$, ya que una gráfica que tiene una recta tangente en el punto P no puede tener un "hueco" o "espacio" en P. Para resumir:

Continuidad de una función derivable ▣ Si la función $f(x)$ es derivable en $x = c$, entonces también es continua en $x = c$.

La verificación de esta observación se resume en el problema 42. Adviértase que *no* se está afirmando que una función continua deba ser derivable. Por supuesto que se puede demostrar que una función continua $f(x)$ no será derivable en $x = c$ si $f'(x)$ tiende al infinito en $x = c$ o si la gráfica de $f(x)$ tiene un "pico" en $P(c, f(c))$; es decir, un punto donde la curva hace un cambio abrupto de dirección. Si $f(x)$ es continua en $x = c$, pero $f'(c)$ es infinita, entonces la gráfica de f quizá tenga una "tangente vertical" en el punto $P(c, f(c))$ (figura 2.8*a*) o una "cúspide" en P (figura 2.8*b*). La función valor absoluto $f(x) = |x|$ es continua para todas las x pero tiene un "pico" en el origen (0, 0) (véase la figura 2.8*c* y el problema 41). En la figura 2.8*d* se muestra otra gráfica con un "pico".

www.FreeLibros.com



a) Tangente vertical: la gráfica de $f(x) = x^{1/3}$

b) Una cúspide: la gráfica de $f(x) = x^{2/3}$

c) Un "pico": la gráfica de $f(x) = |x|$

d) Otra gráfica con un "pico"

FIGURA 2.8 Gráficas de cuatro funciones continuas que no son derivables en $x = 0$.

¡EXPLORE!

Introduzca $f(x)$ = abs(X) en Y1 del editor de ecuaciones. La función valor absoluto se puede obtener mediante la tecla **MATH** accediendo al menú **NUM**. Utilice una pantalla decimal y calcule la derivada numérica $\frac{dy}{dx}$ en $x = 0$. ¿Qué observa y cómo se ajusta esta respuesta con la figura 2.8*c*? La curva es demasiado aguda en el punto (0, 0) para obtener allí una recta tangente bien definida. De aquí que la derivada de $f(x)$ = abs(x) no existe en $x = 0$. Advierta que la derivada numérica se debe emplear con precaución en cúspides y puntos inusuales. Trate de calcular la derivada numérica de $y = \frac{1}{x}$ en $x = 0$, y explique cómo es que se obtiene tal resultado numéricamente.

En general, las funciones que aparecen en este libro son derivables en casi todos los puntos. En particular, los polinomios son derivables en todos los puntos y las funciones racionales son derivables en todos los puntos donde están definidas.

Un ejemplo práctico de función continua que no es derivable siempre aparece al describir la circulación de la sangre en el cuerpo humano.[1] Resulta tentador considerar que la sangre sigue una trayectoria uniforme por las venas y arterias en un flujo constante pero, en realidad, el corazón bombea la sangre hacia las arterias en ráfagas discretas. Esto da lugar a un *pulso arterial*, que se puede usar para medir la frecuencia cardiaca, al aplicar presión a una arteria accesible, como la de la muñeca. En la figura 2.9 aparece una curva de la presión sanguínea que muestra un pulso. Observe cómo cambia la curva rápidamente hacia la dirección de una presión mínima (*diastólica*) mientras una ráfaga de sangre es inyectada en las arterias por el corazón, causando que la presión arterial se eleve rápidamente hasta llegar a una presión máxima (*sistólica*), después de lo cual la presión declina gradualmente a medida que la sangre se distribuye a los tejidos a través de las arterias. La función de la presión arterial es continua pero no es derivable en $t = 0.75$ segundos donde ocurre la inyección de sangre.

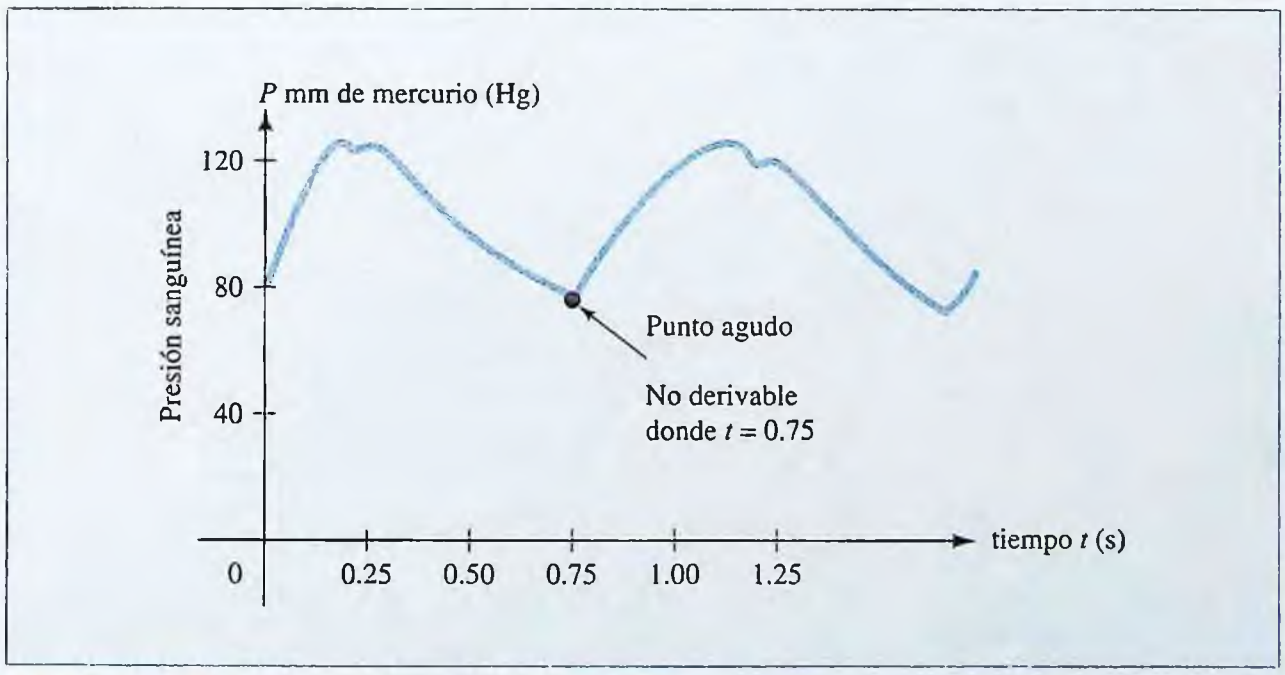


FIGURA 2.9 Gráfica de la presión sanguínea que muestra un pulso arterial.

[1] Este ejemplo está tomado de *Mathematics in Medicine and Life Sciences*, por F. C. Hoppensteadt y C. S. Peskin, Nueva York, Springer-Verlag, 1992. p. 131.

www.FreeLibros.com

PROBLEMAS | 2.1

En los problemas 1 a 8 calcule la derivada de la función dada y determine la pendiente de la recta tangente a su gráfica para el valor especificado de la variable independiente.

1. $f(x) = 5x - 3; x = 2$

2. $f(x) = x^2 - 1; x = -1$

3. $f(x) = 2x^2 - 3x - 5; x = 0$

4. $f(x) = x^3 - 1; x = 2$

5. $g(t) = \dfrac{2}{t}; t = \dfrac{1}{2}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}; x = 2$

7. $f(x) = \sqrt{x}; x = 9$

8. $h(u) = \dfrac{1}{\sqrt{u}}; u = 4$

En los problemas 9 a 16 calcule la derivada de la función dada y determine la ecuación de la recta tangente a su gráfica para el valor especificado $x = c$.

9. $f(x) = x^2; c = 1$

10. $f(x) = 3; c = -4$

11. $f(x) = 7 - 2x; c = 5$

12. $f(x) = 2 - 3x^2; c = 1$

13. $f(x) = \dfrac{-2}{x}; c = -1$

14. $f(x) = x^3 - 1; c = 1$

15. $f(x) = 2\sqrt{x}; c = 4$

16. $f(x) = \dfrac{3}{x^2}; c = \dfrac{1}{2}$

En los problemas 17 a 22 determine la razón de cambio $\dfrac{dy}{dx}$ *donde* $x = x_0$.

17. $y = 3; x_0 = 2$

18. $y = 6 - 2x; x_0 = 3$

19. $y = x(1 - x); x_0 = -1$

20. $y = \dfrac{1}{2 - x}; x_0 = -3$

21. $y = x^2 - 2x; x_0 = 1$

22. $y = x - \dfrac{1}{x}; x_0 = 1$

23. Suponga $f(x) = x^3$.

a) Calcule la pendiente de la recta secante que une los puntos de la gráfica de f, cuyas coordenadas x son $x = 1$ y $x = 1.1$.

b) Utilice el cálculo para determinar la pendiente de la recta tangente a la gráfica cuando $x = 1$ y compare esta pendiente con la respuesta al inciso *a*).

24. Suponga $f(x) = x^2$.

a) Calcule la pendiente de la recta secante que une los puntos en la gráfica de f cuyas coordenadas son $x = -2$ y $x = -1.9$.

b) Utilice el cálculo para determinar la pendiente de la recta tangente a la gráfica cuando $x = -2$ y compare esta pendiente con la respuesta del inciso *a*).

25. Escriba las interpretaciones que faltan en la tabla usando el ejemplo como guía.

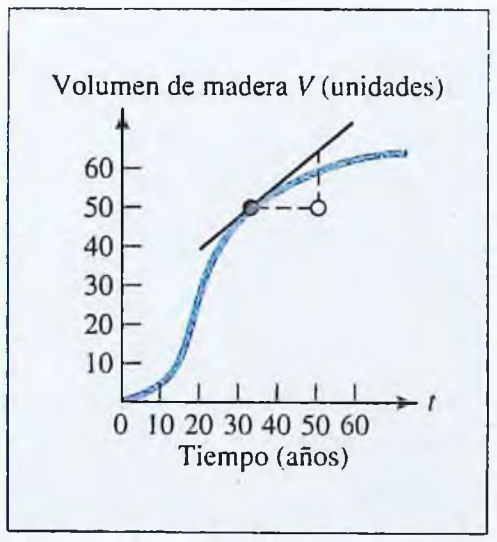
	Si $f(t)$ representa...	entonces $\dfrac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$ representa... y	$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$ representa...
Ejemplo	El número de bacterias en una colonia en un tiempo t	La razón de cambio promedio de la población de bacterias durante el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$	La razón de cambio instantánea de la población de bacterias en un tiempo $t = t_0$
	a) La temperatura en San Francisco t horas después de la medianoche en cierto día		
	b) El nivel de alcohol en la sangre t horas después que una persona consume una onza de alcohol		
	c) La hipoteca a 30 años, con razón fija, t años después del 2000		

www.FreeLibros.com

26. Escriba las interpretaciones faltantes en la tabla usando el ejemplo como guía.

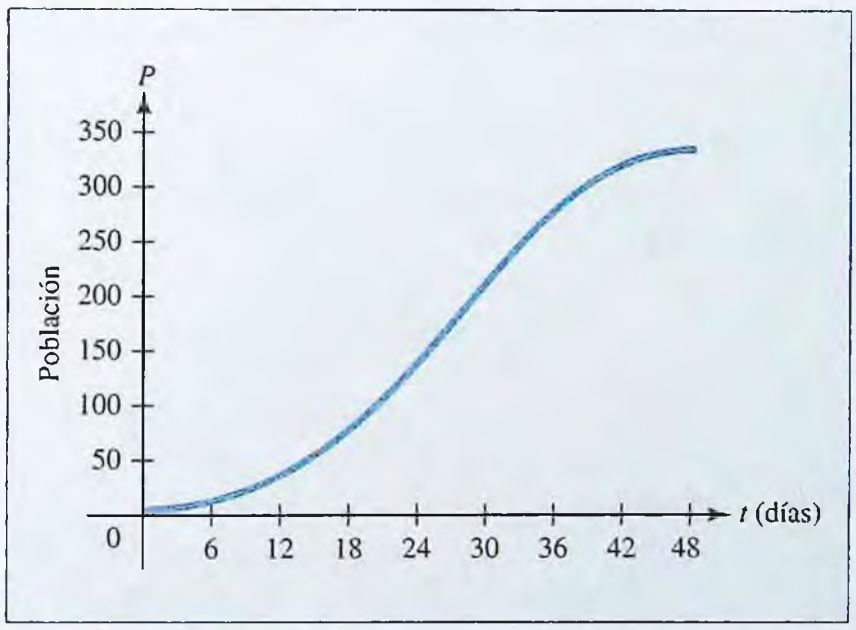
	Si $f(x)$ representa...	entonces $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ representa... y	$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ representa...
Ejemplo	El costo de producir x unidades de un artículo en particular	La razón de cambio promedio del costo a medida que la producción cambia de x_0 a $x_0 + h$ unidades	La razón de cambio instantánea del costo con respecto al nivel de producción cuando se producen x_0 unidades
	a) El ingreso obtenido cuando se producen x unidades de un artículo en particular		
	b) La cantidad de combustible (lb) que queda en un cohete cuando está a x pies de altura sobre el suelo		
	c) El volumen (cm^3) de un tumor canceroso 6 meses después de la inyección de x mg de un medicamento experimental		

27. RECURSOS RENOVABLES En la gráfica adjunta se muestra cómo varía el volumen de madera, V, de un árbol con el tiempo t (la edad del árbol). Use la gráfica para calcular la razón a la cual cambia V con respecto al tiempo cuando $t = 30$ años. ¿Qué es lo que parece ocurrir a la razón de cambio V cuando t se aumenta sin límite (es decir, "a largo plazo")?



PROBLEMA 27 Gráfica que muestra cómo varía el volumen V de madera de un árbol en el tiempo t. *Fuente:* Adaptada de Robert H. Frank, *Microeconomics and Behavior*, 2a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, Inc., 1994, p. 623.

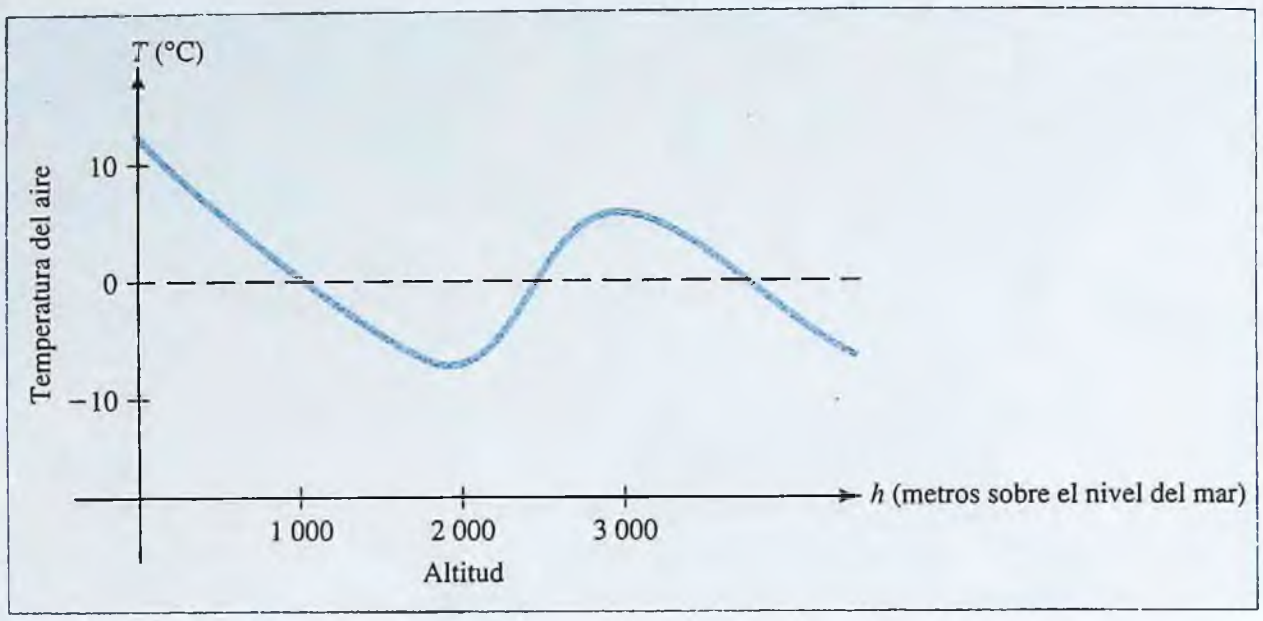
28. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN En la gráfica adjunta se muestra cómo cambia la población, P, de moscas de la fruta (*Drosophila*) durante un experimento, con respecto al tiempo, t (días). Utilice la gráfica para calcular la razón de crecimiento de la población después de 20 días y después de 36 días. ¿En qué momento la población está creciendo con la mayor razón?



PROBLEMA 28 Curva de crecimiento de una población de moscas de la fruta. *Fuente:* Adaptada de E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 3a. ed., Berlin, Springer-Verlag, 1979, p. 355.

www.FreeLibros.com

29. INVERSIÓN TÉRMICA Generalmente la temperatura disminuye al aumentar la altitud. Sin embargo, durante el invierno, debido a un fenómeno denominado *inversión térmica*, la temperatura del aire calentado por el Sol en zonas ubicadas por encima de la niebla puede elevarse arriba del punto de congelamiento, mientras que la temperatura en elevaciones menores permanece cerca o debajo de 0°C. Utilice la gráfica adjunta para calcular la razón de cambio de la temperatura T respecto a la altitud h, a una altitud de 1 000 metros y a una altitud de 2 000 metros.



PROBLEMA 29

Fuente: E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 3a. ed., Berlin, Springer-Verlag, 1979, p. 150.

30. VELOCIDAD Un cohete de juguete se eleva verticalmente de tal manera que t segundos después del lanzamiento, está

$h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 30$ pies sobre el suelo.

a) ¿Qué tan alto estará el cohete después de 40 segundos?

b) ¿Cuál es la velocidad promedio del cohete en los primeros 40 segundos de vuelo (entre $t = 0$ y $t = 40$)?

c) ¿Cuál es la velocidad (instantánea) del cohete en el despegue ($t = 0$)? ¿Cuál es su velocidad después de 40 segundos?

31. UTILIDAD Un fabricante puede producir grabadoras a un costo de $20 cada una. Se estima que si las grabadoras se venden a p dólares cada una, los consumidores comprarán $q = 120 - p$ grabadoras mensualmente.

a) Exprese la utilidad P del fabricante como una función de q.

b) ¿Cuál es la razón de cambio promedio de la utilidad obtenida cuando el nivel de producción se incrementa de $q = 0$ a $q = 20$?

c) ¿A qué razón cambia la utilidad cuando se producen $q = 20$ grabadoras? ¿Está aumentando o disminuyendola ganancia en este nivel de producción?

32. COMPORTAMIENTO ANIMAL Algunos experimentos indican que cuando una pulga salta, su altura (en metros) después de t segundos está dada por la función

$$H(t) = 4.4t - 4.9t^2$$

a) Encuentre $H'(t)$. ¿A qué razón cambia $H(t)$ después de 1 segundo? ¿Está aumentando o disminuyendo?

b) ¿En qué momento es $H'(t) = 0$? ¿Cuál es la importancia de este momento?

c) ¿Cuándo "aterriza" la pulga (regresa a su altura inicial)? ¿A qué razón está cambiando $H(t)$ en ese momento? ¿ Está aumentando o disminuyendo?

33. GANANCIA Un fabricante de videocasetes determina que si se producen x cientos de unidades, la utilidad será $P(x) = 4\,000(15 - x)(x - 2)$ dólares.

a) Encuentre $P'(x)$.

b) Determine dónde $P'(x) = 0$. ¿Cuál es la importancia del nivel de producción x_m donde esto ocurre?

34. PRESIÓN ARTERIAL Observe la gráfica de la figura 2.9, en la cual se muestra la presión arterial como una función del tiempo.

a) Calcule la razón de cambio promedio de la presión arterial en los intervalos de tiempo [0.7, 0.75] y [0.75, 0.8]. Interprete sus resultados.

www.FreeLibros.com

b) Escriba un párrafo sobre la dinámica del pulso arterial. Un buen punto para comenzar aparece en la referencia dada en las páginas 131-136 junto con la figura 2.9 , además hay una excelente lista de referencias anotadas para temas relacionados en las pp. 137-138.

35. DESEMPLEO En economía, la gráfica de la figura 2.2 se denomina **curva de Phillips,** en honor al neozelandés A. W. Phillips, profesor asociado de la London School of Economics. Hasta el momento en que Phillips publicó sus ideas en la década de 1950, muchos economistas consideraban que el desempleo y la inflación estaban relacionados linealmente. Lea un artículo sobre la curva de Phillips (la fuente citada en la figura 2.2 puede ser un buen punto de partida) y escriba un párrafo sobre la naturaleza del desempleo en la economía de los Estados Unidos.

36. *a*) Halle la derivada de la función lineal $f(x) = 3x - 2$.

b) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esta función en el punto donde $x = -1$.

c) Explique cómo se pueden obtener las respuestas a los incisos *a*) y *b*) a partir de consideraciones geométricas y sin hacer ningún cálculo.

37. *a*) Halle las derivadas de las funciones $y = x^2$ y $y = x^2 - 3$ y explique de manera geométrica su similitud.

b) Sin realizar cálculos adicionales, determine la derivada de la función $y = x^2 + 5$.

38. *a*) Encuentre la derivada de la función $y = x^2 + 3x$.

b) Determine por separado las derivadas de las funciones $y = x^2$ y $y = 3x$.

c) ¿Cómo se relaciona la derivada encontrada en el inciso *a*) con las del inciso *b*)?

d) En general, si $f(x) = g(x) + h(x)$, ¿cuál es la relación entre la derivada de f y las de g y h?

39. *a*) Calcule las derivadas de las funciones $y = x^2$ y $y = x^3$.

b) Examine las respuestas del inciso *a*). ¿Puede detectar si existe un patrón? ¿Cuál cree que sea la derivada de $y = x^4$? ¿Cuál será la de $y = x^{27}$?

40. Utilice el cálculo para demostrar que si $y = mx + b$, entonces la razón de cambio de y respecto a x es constante.

41. Sea f la función valor absoluto; es decir,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Demuestre que

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y explique por qué f no se puede derivar en $x = 0$.

42. Sea f una función que se puede derivar en $x = c$.

a) Explique por qué

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

b) Utilice el resultado del inciso *a*) junto con el hecho de que

$$f(x) - f(c) = \left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right](x - c)$$

para demostrar que

$$\lim_{x \to c} [f(x) - f(c)] = 0$$

c) Explique por qué el resultado obtenido en el inciso *b*) demuestra que f es continua en $x = c$.

43. Complete la siguiente tabla y determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{3x}$ en el punto donde $x = 3.85$. Registre todos los cálculos usando cinco lugares decimales.

h	−0.02	−0.01	−0.001	−0−	0.001	0.01	0.02
$x + h$							
$f(x)$							
$f(x + h)$							
$\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$							

44. Halle los valores de x en los cuales se alcanzan cimas y valles de la gráfica de $y = 2x^3 - 0.8x^2 + 4$. Utilice cuatro lugares decimales.

45. Demuestre que $f(x) = \dfrac{|x^2 - 1|}{x - 1}$ no se puede derivar en $x = 1$.

www.FreeLibros.com

SECCIÓN 2.2 | Técnicas de derivación

Si se tuviera que emplear la definición de límite cada vez que se deseara calcular una derivada, resultaría tedioso y difícil utilizar el cálculo en las aplicaciones. Por fortuna esto no es necesario, y en las siguientes dos secciones se estudian técnicas que simplifican en gran medida el proceso de derivación. Se comienza presentando una regla para la derivada de una constante.

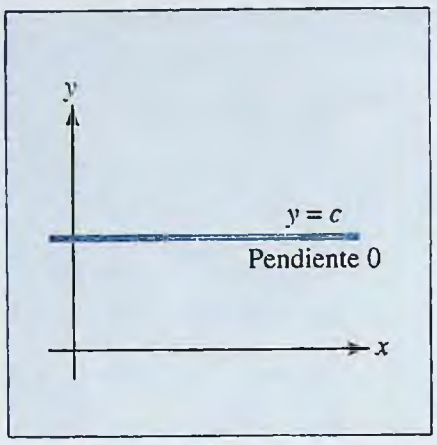


FIGURA 2.10 Gráfica de $f(x) = c$.

Regla de la constante ▪ Para cualquier constante c,

$$\frac{d}{dx}[c] = 0$$

Es decir, la derivada de una constante es cero.

Esto puede observarse en la gráfica de una función constante, $f(x) = c$, que es una recta horizontal (véase la figura 2.10). Como la pendiente de dicha recta es 0 en todos sus puntos, se deduce que $f'(x) = 0$. Ahora se presenta una demostración que utiliza la definición de límite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0 \qquad \text{como } f(x+h) = c \text{ para toda } x$$

¡EXPLORE!

Una función y su derivada se pueden graficar en forma simultánea en la misma pantalla. Como ejemplo introduzca $x^2 + 2x$ en Y1 empleando un estilo de graficación en negritas. Ponga nDeriv(Y1, X, X) en Y2, donde nDeriv es una opción en el menú de la tecla **MATH**. Grafique Y1 y Y2 utilizando la pantalla agrandada [−4.7, 4.7]1 por [−3.1, 9.1]1. Ahora utilice la función *dy/dx* de la tecla **CALC**(2nd **TRACE**) para encontrar la pendiente de Y1 en los valores X = −2, −1, 0, 1 y 2. ¿Cómo se comparan esos valores de *dy/dx* con los valores correspondientes de Y2 para los respectivos valores de X? ¿Qué puede concluir? Como reto adicional, encuentre la ecuación explícita para Y2.

EJEMPLO | 2.2.1

$$\frac{d}{dx}[-15] = 0$$

La siguiente regla es una de las más útiles porque indica cómo hallar la derivada de cualquier función de potencia $f(x) = x^n$. Adviértase que la regla se aplica no sólo a funciones como $f(x) = x^5$ sino también a funciones tales como $g(x) = \sqrt[5]{x^4} = x^{4/5}$ y $h(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$.

Las funciones como $x^{\sqrt{2}}$ también se pueden derivar usando la regla de la potencia, pero lo que se entiende por dichas funciones no se definirá hasta el capítulo 4.

Regla de la potencia ▪ Para cualquier número real n,

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

Es decir, para hallar la derivada de x^n se resta 1 al exponente n de x y se multiplica la nueva potencia de x por el exponente original.

De acuerdo con la regla de la potencia, la derivada de $y = x^3$ es $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$, lo que concuerda con el resultado calculado en forma directa en el ejemplo 2.1.4 de la sección 2.1. La regla de la potencia se puede utilizar para derivar radicales y recíprocos escribiéndolos primero como funciones de potencia con exponentes fraccionarios o negativos, según sea el caso. (En el apéndice A1 de este libro se encuentra un repaso

www.FreeLibros.com

de la notación exponencial.) Por ejemplo, recuerde que $\sqrt{x} = x^{1/2}$, por tanto la derivada de $y = \sqrt{x}$ es

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

lo que concuerda con el resultado del ejemplo 2.1.6 de la sección 2.1. En el ejemplo 2.2.2 se verifica la regla de la potencia para el recíproco de la función de potencia.

EJEMPLO | 2.2.2

Verifique la regla de la potencia para la función $F(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$ demostrando que su derivada es $F'(x) = -2x^{-3}$.

Solución

La derivada de $F(x)$ está dada por

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{x^2 - (x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h} \qquad \textit{calculando el denominador común}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[x^2 - (x^2 + 2hx + h^2)]}{x^2h(x+h)^2} \qquad \textit{simplificando la fracción compleja}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2xh - h^2}{x^2h(x+h)^2} \qquad \textit{agrupando términos semejantes en el numerador}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2x - h}{x^2(x+h)^2} \qquad \textit{eliminando términos comunes de } h$$

$$= \frac{-2x}{x^2(x^2)}$$

$$= \frac{-2}{x^3} = -2x^{-3}$$

según la regla de la potencia.

REPASO

Justo-a-tiempo

Recuerde que $x^{-n} = 1/x^n$ cuando n es un entero positivo y que $x^{a/b} = \sqrt[b]{x^a}$ siempre y cuando a y b sean enteros positivos.

A continuación se presentan algunas aplicaciones adicionales de la regla de la potencia:

$$\frac{d}{dx}(x^7) = 7x^{7-1} = 7x^6$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x^2}) = \frac{d}{dx}(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{2/3-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^5}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-5}) = -5x^{-5-1} = -5x^{-6}$$

$$\frac{d}{dx}(x^{1.3}) = 1.3x^{1.3-1} = 1.3x^{0.3}$$

www.FreeLibros.com

En el problema 74 se resume una prueba general de la regla de la potencia para el caso en que n es un entero positivo. Los casos en que n es un entero negativo, y cuando n es un número racional ($n = r/s$ para enteros r y s con $s \neq 0$) se estudian en la sección 2.3 y en la sección 2.6, respectivamente.

La regla de la constante y la regla de la potencia proporcionan fórmulas simples para calcular las derivadas de un grupo importante de funciones, pero para derivar expresiones más complicadas, se necesita saber cómo manipular las derivadas de forma algebraica. Las siguientes dos reglas establecen que las derivadas de múltiplos y sumas de funciones son múltiplos y sumas de las derivadas correspondientes.

Regla del factor constante ■ Si c es una constante y $f(x)$ es derivable, entonces $cf(x)$ también es derivable y

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Es decir, la derivada de un múltiplo es el múltiplo de la derivada.

EJEMPLO | 2.2.3

$$\frac{d}{dx}(3x^4) = 3\frac{d}{dx}(x^4) = 3(4x^3) = 12x^3$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-7}{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}(-7x^{-1/2}) = -7\left(\frac{-1}{2}x^{-3/2}\right) = \frac{7}{2}x^{-3/2}$$

Regla de la suma ■ Si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables, entonces la suma de $S(x) = f(x) + g(x)$ y $S'(x) = f'(x) + g'(x)$; también es derivable; esto es,

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$$

Es decir, la derivada de una suma es la suma de cada una de las derivadas.

EJEMPLO | 2.2.4

$$\frac{d}{dx}[x^{-2} + 7] = \frac{d}{dx}[x^{-2}] + \frac{d}{dx}[7] = -2x^{-3} + 0 = -2x^{-3}$$

$$\frac{d}{dx}[2x^5 - 3x^{-7}] = 2\frac{d}{dx}[x^5] - 3\frac{d}{dx}[x^{-7}] = 2(5x^4) - 3(-7x^{-8})$$
$$= 10x^4 + 21x^{-8}$$

Combinando la regla de la potencia, la regla del factor constante y la regla de la suma, se puede derivar cualquier polinomio. A continuación se presenta un ejemplo.

EJEMPLO | 2.2.5

Derive el polinomio $y = 5x^3 - 4x^2 + 12x - 8$.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Utilice su calculadora graficadora para introducir $f(x) = x^3 - 3x + 1$ en Y1, usando un estilo de graficación en negritas. Siga la inicialización en el recuadro ¡Explore! de la página 110 para poner nDeriv(Y1, X, X) en Y2 y grafique ambas funciones, usando la pantalla decimal modificada [−4.7, 4.7]1 por [−5, 5]1. Grafique la función Y2 = $f'(x)$ y determine los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$. ¿Qué detecta en estos puntos de la gráfica de $f(x)$? ¿Cuál es la ecuación para $f'(x)$?

Solución

Derive la suma término a término para obtener:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[5x^3] + \frac{d}{dx}[-4x^2] + \frac{d}{dx}[12x] + \frac{d}{dx}[-8]$$
$$= 15x^2 - 8x^1 + 12x^0 + 0 \qquad \text{recuerde } x^0 = 1$$
$$= 15x^2 - 8x + 12$$

EJEMPLO 2.2.6

Se estima que dentro de x meses, la población de cierta comunidad será $P(x) = x^2 + 20x + 8\,000$.

a) ¿A qué razón cambiará la población con respecto al tiempo dentro de 15 meses?

b) ¿En realidad, en cuánto cambiará la población durante el decimosexto mes?

Solución

a) La razón de cambio de la población con respecto al tiempo es la derivada de la función de población. Es decir,

$$\text{Razón de cambio} = P'(x) = 2x + 20$$

La razón de cambio de la población dentro de 15 meses será

$$P'(15) = 2(15) + 20 = 50 \text{ personas por mes.}$$

b) El cambio real en la población durante el mes 16 es la diferencia entre la población al final del mes 16 y la población al final del mes 15. Es decir,

$$\text{Cambio en población} = P(16) - P(15) = 8\,576 - 8\,525$$
$$= 51 \text{ personas}$$

NOTA En el inciso *b*) del ejemplo 2.2.6 el cambio real de la población durante el mes 16 difiere de la razón mensual al inicio del mes, en el inciso *a*), porque la razón varía durante el mes. La razón instantánea en el inciso *a*) se puede considerar como el cambio de la población que ocurriría durante el mes 16 si la razón de cambio de la población permaneciera constante. ■

Razón de cambio relativa y porcentual

En muchas situaciones prácticas, la razón de cambio de una cantidad Q no es tan importante como su razón de cambio *relativa*, que se define como el cociente

$$\text{Cambio relativo} = \frac{\text{cambio en } Q}{\text{tamaño de } Q}$$

Por ejemplo, una razón de cambio anual de 500 personas en una ciudad cuya población total es de 5 millones produce una razón de cambio relativa (per cápita) despreciable de

$$\frac{500}{5\,000\,000} = 0.0001$$

www.FreeLibros.com

o 0.01%, en tanto que la misma razón de cambio en un pueblo de 2 000 produciría una razón de cambio relativa de

$$\frac{500}{2\,000} = 0.25$$

o 25%, lo que tendría un impacto enorme en el pueblo.

Como la razón de cambio de una cantidad $Q(x)$ se mide mediante la derivada $Q'(x)$, entonces la razón de cambio relativa y la razón porcentual asociada se pueden expresar en las siguientes formas.

Razón de cambio relativa y porcentual La **razón de cambio relativa** de una magnitud $Q(x)$, con respecto a x, está dada por medio del cociente

$$\begin{bmatrix}\text{razón relativa de}\\ \text{cambio de } Q(x)\end{bmatrix} \frac{Q'(x)}{Q(x)} = \frac{dQ/dx}{Q}$$

La **razón de cambio porcentual** de $Q(x)$ con respecto a x es

$$\begin{bmatrix}\text{razón porcentual de}\\ \text{cambio de } Q(x)\end{bmatrix} \frac{100Q'(x)}{Q(x)}$$

¡EXPLORE!

Vea el ejemplo 2.2.7. Compare la razón de cambio del PIB en el momento $t = 8$ para $N(t)$ con la razón de cambio de un nuevo PIB dada por

$$N_1(t) = 2t^2 + 2t + 100$$

Grafique ambas funciones empleando x como la variable independiente y la pantalla de graficación [3, 12.4]1 por [90, 350]0 donde el 0 de la escala corresponde a una pantalla sin marcas en el eje y. ¿Cómo se comparan las razones de cambio porcentuales del PIB para el año 2003?

EJEMPLO | 2.2.7

El producto interno bruto (PIB) de cierto país fue $N(t) = t^2 + 5t + 106$ mil millones de dólares t años después de 1995.

a) ¿A qué razón cambió el PIB con respecto al tiempo en 2003?

b) ¿A qué razón porcentual cambió el PIB con respecto al tiempo en 2003?

Solución

a) La razón de cambio del PIB es la derivada $N'(t) = 2t + 5$. La razón de cambio en 2003 fue $N'(8) = 2(8) + 5 = 21\,000$ millones de dólares por año.

b) La razón de cambio porcentual del PIB en 2003 fue

$$100\frac{N'(8)}{N(8)} = 100\frac{21}{210} = 10\% \text{ por año}$$

EJEMPLO | 2.2.8

Los experimentos indican que la biomasa $Q(t)$ de una especie de pez en un área dada del océano cambia a una razón

$$\frac{dQ}{dt} = rQ\left(1 - \frac{Q}{a}\right)$$

donde r es la razón de crecimiento natural de la especie y a es una constante.[2] Determine la razón de crecimiento porcentual de la especie. ¿Qué pasará si $Q(t) > a$?

[2] Tomado de *Introduction to Differential Ecuations*, W. R. Derrick y S. I. Grossman, 3ª. ed., St. Paul, MN: West Publishing, 1987, página 52, problema 20. Los autores hacen notar que el problema fue originalmente uno de muchos modelos descritos en el libro, *Mathematical Bioeconomics*, por C. W. Clark (Wiley-Interscience, 1976).

www.FreeLibros.com

Solución

La razón de cambio porcentual de $Q(t)$ es

$$\frac{100\,Q'(t)}{Q(t)} = \frac{100\,rQ\left(1 - \dfrac{Q}{a}\right)}{Q} = 100r\left(1 - \frac{Q}{a}\right)$$

Advierta que la razón de cambio porcentual disminuye cuando Q aumenta y se hace cero cuando $Q = a$. Si $Q > a$, entonces la razón de cambio porcentual es negativa, lo que en realidad significa que la biomasa disminuye.

Movimiento rectilíneo

El movimiento de un objeto a lo largo de una recta se denomina *movimiento rectilíneo*. Por ejemplo, el movimiento de un cohete al inicio de su vuelo se puede considerar como rectilíneo. Cuando se estudia el movimiento rectilíneo, se supone que el objeto implicado se mueve a lo largo de un eje coordenado. Si la función $s(t)$ da la *posición* del objeto en el momento t, entonces la razón de cambio de $s(t)$ con respecto a t es su *velocidad*, $v(t)$, y la derivada de la velocidad con respecto al tiempo es su *aceleración*, $a(t)$. Es decir, $v(t) = s'(t)$ y $a(t)\ v'(t)$.



FIGURA 2.11 Diagrama para el movimiento rectilíneo.

Se dice que el objeto *avanza* (moviéndose hacia delante) cuando $v(t) > 0$, y *retrocede* (moviéndose hacia atrás) cuando $v(t) < 0$. Cuando $v(t) = 0$, el objeto no avanza ni retrocede y se dice que se encuentra *estacionario*. Véase la figura 2.11. Finalmente, el objeto *acelera* cuando $a(t) > 0$ y *desacelera* cuando $a(t) < 0$. Resumiendo:

Movimiento rectilíneo ■ Si la **posición** en el momento t de un objeto que se mueve a lo largo de una recta está dada por $s(t)$, entonces el objeto tiene

$$\textbf{velocidad} \quad v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

y

$$\textbf{aceleración} \quad a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt}$$

El objeto **avanza** cuando $v(t) > 0$, **retrocede** cuando $v(t) < 0$, y está **estacionario** cuando $v(t) = 0$. **Acelera** cuando $a(t) > 0$ y **desacelera** cuando $a(t) < 0$.

Si la posición se mide en metros y el tiempo en segundos, entonces la velocidad se mide en metros por segundo (m/s) y la aceleración en metros por segundo, por segundo (escrita m/s^2). De manera similar, si la posición se mide en pies, entonces la velocidad se mide en pies por segundo (pies/s) y la aceleración en pies por segundo por segundo (pies/s^2).

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Intente lo siguiente. Fije en su calculadora graficadora los modos paramétrico, punteado, y simultáneo. Introduzca X1T = T, Y1T = 0.5, X2T = T y Y2T = T^3 − 6T^2 + 9T + 5. Grafique empleando una pantalla de [0, 5]1 por [0, 10]1, y $0 \le t \le 4$ con un paso de .2. Describa lo que observa. ¿Qué significa el eje vertical? ¿Qué significa la línea punteada horizontal?

EJEMPLO 2.2.9

La posición en el momento t de un objeto que se mueve a lo largo de una recta está dada por $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 5$.

a) Determine la velocidad del objeto y analice su movimiento entre los momentos $t = 0$ y $t = 4$.

b) Encuentre la distancia total recorrida por el objeto entre los momentos $t = 0$ y $t = 4$.

c) Encuentre la aceleración del objeto y determine cuándo acelera y desacelera entre los momentos $t = 0$ y $t = 4$.

Solución

a) La velocidad es $v(t) = \dfrac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$. El objeto estará estacionario cuando

$$v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t - 1)(t - 3) = 0$$

es decir, en los momentos $t = 1$ y $t = 3$. En cualquier otro momento el objeto estará avanzando o retrocediendo, como se describe en la siguiente tabla.

Intervalo	Signo de $v(t)$	Descripción del movimiento
$0 < t < 1$	+	Avanza de $s(0) = 5$ a $s(1) = 9$
$1 < t < 3$	−	Retrocede de $s(1) = 9$ a $s(3) = 5$
$3 < t < 4$	+	Avanza de $s(3) = 5$ a $s(4) = 9$

En el diagrama de la figura 2.12 se resume el movimiento del objeto.

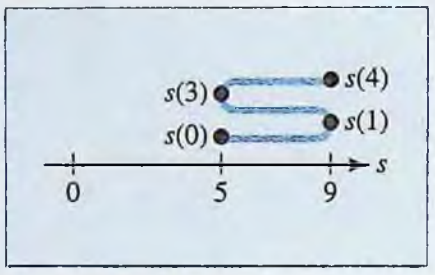


FIGURA 2.12 Movimiento de un objeto: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t + 5$.

b) El objeto viaja de $s(0) = 5$ a $s(1) = 9$, luego va de regreso a $s(3) = 5$, y finalmente a $s(4) = 9$. Así, la distancia total recorrida por el objeto es

$$D = \underbrace{|9 - 5|}_{0 < t < 1} + \underbrace{|5 - 9|}_{1 < t < 3} + \underbrace{|9 - 5|}_{3 < t < 4} = 12$$

c) La aceleración del objeto es

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t - 12 = 6(t - 2)$$

El objeto estará acelerando $[a(t) > 0]$ cuando $2 < t < 4$ y desacelerando $[a(t) < 0]$ cuando $0 < t < 2$.

Movimiento de un proyectil

Un ejemplo importante del movimiento rectilíneo es el movimiento de un proyectil. Suponga que un objeto se proyecta (se lanza, se dispara, o se deja caer) verticalmente de forma tal que la única aceleración que actúa sobre el objeto es la aceleración constante, dirigida hacia abajo, debida a la gravedad g. Cerca del nivel del mar, g es aproximadamente 32 pies/s^2 (o 9.8 m/s^2). Se puede demostrar que en un momento t, la altura del objeto está dada por la fórmula

$$H(t) = \frac{-1}{2} g t^2 + V_0 t + H_0$$

donde H_0 y V_0 son la altura inicial y la velocidad inicial del objeto, respectivamente. A continuación se presenta un ejemplo usando esta fórmula.

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 2.2.10

Suponga que una persona parada en la parte superior de un edificio de 112 pies de altura lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 96 pies/s (véase la figura 2.13).

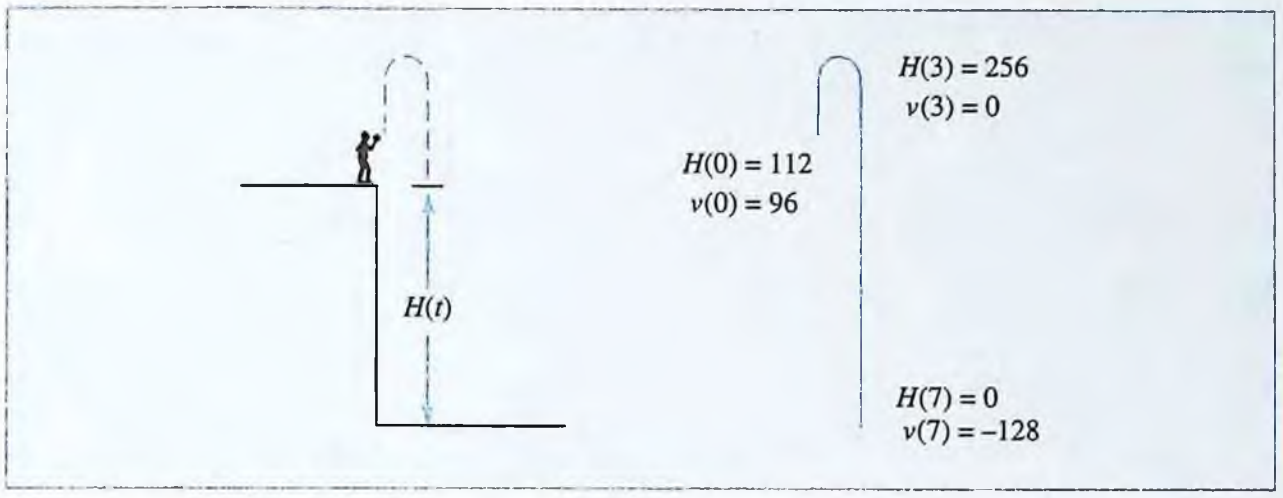


FIGURA 2.13 Movimiento de una pelota lanzada hacia arriba desde la parte superior del techo de un edificio.

a) Determine la altura y la velocidad de la pelota en el momento t.
b) ¿Cuándo la pelota golpea el suelo y cuál es su velocidad de impacto?
c) ¿Cuándo la velocidad es 0? ¿Cuál es la importancia de este momento?
d) ¿Cuál es la distancia total recorrida por la pelota?

Solución

a) Como $g = 32$, $V_0 = 96$, y $H_0 = 112$, la altura de la pelota respecto al suelo en el momento t es

$$H(t) = -16t^2 + 96t + 112 \text{ pies}$$

La velocidad en el momento t es

$$v(t) = \frac{dH}{dt} = -32t + 96t \text{ (pies/s)}$$

b) La pelota golpea el suelo cuando $H = 0$. Se resuelve la ecuación $-16t^2 + 96t + 112 = 0$ y se obtiene que esto ocurre cuando $t = 7$ y $t = -1$ (verifique). Despreciando el tiempo negativo $t = -1$, que no tiene sentido en este contexto, se concluye que el impacto ocurre cuando $t = 7$ segundos y que la velocidad de impacto es

$$v(7) = -32(7) + 96 = -128 \text{ pies/s}$$

(El signo negativo indica que la pelota está cayendo en el momento del impacto.)

c) La velocidad es cero cuando $v(t) = -32t + 96 = 0$, lo que ocurre cuando $t = 3$ segundos. Para $t < 3$ la velocidad es positiva y la pelota está subiendo; mientras que para $t > 3$ la pelota está cayendo (véase la figura 2.8). Así, la pelota está en su punto más alto cuando $t = 3$ segundos.

d) La altura inicial de la pelota es $H(0) = 112$ pies y se eleva a una altura máxima de $H(3) = 256$ pies, antes de caer al suelo. Así,

$$\text{Distancia total recorrida} = \underbrace{(256 - 112)}_{\text{subiendo}} + \underbrace{256}_{\text{bajando}} = 400 \text{ pies}$$

www.FreeLibros.com

PROBLEMAS | 2.2

En los problemas 1 a 25, derive la función dada. Simplifique sus respuestas.

1. $y = x^{-4}$

2. $y = x^{7/3}$

3. $y = -2$

4. $y = x^{3.7}$

5. $y = \pi r^2$

6. $y = \frac{4}{3}\pi r^3$

7. $y = \sqrt{2x}$

8. $y = 2\sqrt[4]{x^3}$

9. $y = \frac{9}{\sqrt{t}}$

10. $y = \frac{3}{2t^2}$

11. $y = x^2 + 2x + 3$

12. $y = 3x^5 - 4x^3 + 9x - 6$

13. $f(x) = x^9 - 5x^8 + x + 12$

14. $f(x) = \frac{1}{4}x^8 - \frac{1}{2}x^6 - x + 2$

15. $f(x) = -0.02x^3 + 0.3x$

16. $f(u) = 0.07u^4 - 1.21u^3 + 3u - 5.2$

17. $y = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sqrt{t}}$

18. $y = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{3x^3}$

19. $f(x) = \sqrt{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

20. $f(t) = 2\sqrt{t^3} + \frac{4}{\sqrt{t}} - \sqrt{2}$

21. $y = -\frac{x^2}{16} + \frac{2}{x} - x^{3/2} + \frac{1}{3x^2} + \frac{x}{3}$

22. $y = \frac{-7}{x^{1.2}} + \frac{5}{x^{-2.1}}$

23. $y = -\frac{2}{x^2} + x^{2/3} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2}{4} + \sqrt{5} + \frac{x+2}{3}$

24. $y = x^2(x^3 - 6x + 7)$ [*Sugerencia:* primero multiplique]

25. $y = \frac{x^5 - 4x^2}{x^3}$ [*Sugerencia:* divida]

En los problemas 26 a 31 determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto especificado.

26. $y = x^5 - 3x^3 - 5x + 2; (1, -5)$

27. $y = -x^3 - 5x^2 + 3x - 1; (-1, -8)$

28. $y = \sqrt{x^3} - x^2 + \frac{16}{x^2}; (4, -7)$

29. $y = 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}; \left(4, \frac{7}{4}\right)$

30. $y = 2x^4 - \sqrt{x} + \frac{3}{x}; (1, 4)$

31. $y = (x^2 - x)(3 + 2x); (-1, 2)$

En los problemas 32 a 37 determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto $(c, f(c))$ para el valor especificado $x = c$.

32. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6; x = 2$

33. $f(x) = -2x^3 + \frac{1}{x^2}; x = -1$

34. $f(x) = x^3 + \sqrt{x}; x = 4$

35. $f(x) = x - \frac{1}{x^2}; x = 1$

36. $f(x) = x(\sqrt{x} - 1); x = 4$

37. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \sqrt{8x}; x = 2$

www.FreeLibros.com

En los problemas 38 a 43 determine la razón de cambio de la función dada $f(x)$ con respecto a x para el valor indicado $x = c$.

38. $f(x) = x^3 - 3x + 5; x = 2$

39. $f(x) = 2x^4 + 3x + 1; x = -1$

40. $f(x) = \sqrt{x} + 5x; x = 4$

41. $f(x) = x - \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}; x = 1$

42. $f(x) = \frac{2}{x} - x\sqrt{x}; x = 1$

43. $f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}; x = 1$

44. CIRCULACIÓN DE PERIÓDICO Se estima que dentro de t años, la circulación de un periódico local será $C(t) = 100t^2 + 400t + 5\,000$.

a) Deduzca una expresión para la razón a la cual cambiará la circulación con respecto al tiempo dentro de t años a partir de ahora.

b) ¿A qué razón cambiará la circulación con respecto al tiempo dentro de 5 años? ¿Se estará incrementando o estará disminuyendo la circulación en ese momento?

c) ¿En cuánto cambiará realmente la circulación durante el sexto año?

45. CONTAMINACIÓN DEL AIRE Un estudio ambiental de cierta comunidad suburbana indica que dentro de t años el nivel promedio de monóxido de carbono en el aire será $Q(t) = 0.05t^2 + 0.1t + 3.4$ partes por millón.

a) ¿A qué razón cambiará el nivel de monóxido de carbono con respecto al tiempo dentro de 1 año?

b) ¿En cuánto cambiará el nivel de monóxido de carbono este año?

c) ¿En cuánto cambiará el nivel de monóxido de carbono en los próximos dos años?

46. EFICIENCIA DE UN TRABAJADOR Un estudio de eficiencia del turno de la mañana en cierta fábrica indica que un trabajador promedio que llega a las 8:00 a.m. habrá ensamblado $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$ radios de transistores x horas después.

a) Deduzca una fórmula para la razón a la que el trabajador ensamblará x radios después de x horas.

b) ¿A qué razón el trabajador ensamblará radios a las 9:00 a.m.?

c) ¿Cuántos radios realmente ensamblará el trabajador entre las 9:00 a.m. y las 10:00 a.m.?

47. PRUEBAS EDUCATIVAS Se estima que dentro x años el puntaje promedio del SAT de los estudiantes de nuevo ingreso en una universidad de artes del Este será $f(x) = -6x + 582$.

a) Deduzca una expresión para la razón a la cual cambiará el puntaje promedio del SAT con respecto al tiempo dentro de x años a partir de ahora.

b) ¿Cuál es la importancia de que la expresión hallada en el inciso *a)* sea una constante? ¿Cuál es el significado de que la constante hallada en el inciso *a)* sea negativa?

48. TRANSPORTE PÚBLICO Después de x semanas el número de personas que usan un nuevo sistema de transporte fue aproximadamente de $N(x) = 6x^3 + 500x + 8\,000$.

a) ¿A qué razón cambió el uso del sistema con respecto al tiempo después de 8 semanas?

b) ¿En cuánto cambió el uso del sistema durante la octava semana?

49. IMPUESTO SOBRE LA PROPIEDAD Los registros indican que en cierta comunidad, x años después del año 2000 el impuesto sobre la propiedad promedio por una casa de tres recámaras fue de $T(x) = 20x^2 + 40x + 600$ dólares.

a) ¿A qué razón se incrementó el impuesto sobre la propiedad respecto al tiempo en el año 2000?

b) ¿En cuánto cambió el impuesto entre los años 2000 y 2004?

50. CRECIMIENTO DE UN TUMOR Se modela un tumor cancerígeno como una esfera con radio R cm. ¿A qué razón cambia el volumen $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ con respecto a R cuando $R = 0.75$ cm?

51. PROPAGACIÓN DE UNA EPIDEMIA Un equipo de investigación médica determina que t días después del inicio de una epidemia, $N(t) = 10t^3 + 5t + \sqrt{t}$ personas estarán infectadas para $0 \le t \le 20$. ¿A qué razón se incrementa la población infectada en el noveno día?

52. PUBLICIDAD Un fabricante de motocicletas estima que si se gastan x miles dólares en publicidad, entonces se venderán

$$M(x) = 2\,300 + \frac{125}{x} - \frac{517}{x^2} \qquad 3 \le x \le 18$$

motocicletas. ¿A qué razón cambiarán las ventas cuando se gasten \$9 000 en publicidad? ¿Estarán disminuyendo o aumentando las ventas para ese nivel de gasto en publicidad?

www.FreeLibros.com

53. ADMINISTRACIÓN DE COSTOS Una compañía usa un camión para entregar sus productos. Para calcular costos, el gerente modela el consumo de combustible mediante la función

$$G(x) = \frac{1}{250}\left(\frac{1\,200}{x} + x\right)$$

gal/milla, suponiendo que el camión se maneja a una velocidad constante de x millas por hora para $x \geq 5$. Al chofer se le pagan \$20 por hora por conducir el camión 250 millas, y la gasolina cuesta \$1.90 por galón.

a) Determine una expresión para el costo total $C(x)$ del viaje.

b) ¿A qué razón estará cambiando el costo $C(x)$ con respecto a x cuando se conduce el camión a 40 mph? ¿A esa velocidad, estará disminuyendo o aumentando el costo?

54. FISICOQUÍMICA De acuerdo con la fórmula de Debye en fisicoquímica, la orientación de la polarización P de un gas satisface

$$P = \frac{4}{3}\pi N\left(\frac{\mu^2}{3kT}\right)$$

donde μ, k, son constantes positivas y T es la temperatura del gas. Determine la razón de cambio de P con respecto a T.

En los problemas 55 y 56 encuentre la razón de cambio relativa de $f(x)$ con respecto a x cuando $x = 1$.

55. $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$

56. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

57. INGRESOS ANUALES Los ingresos anuales brutos de cierta compañía fueron $A(t) = 0.1t^2 + 10t + 20$ miles de dólares t años después de su formación en el año 2000.

a) ¿A qué razón crecieron los ingresos anuales brutos de la compañía con respecto al tiempo en el año 2004?

b) ¿A qué razón porcentual crecieron los ingresos anuales brutos con respecto al tiempo en el año 2004?

58. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN Se estima que dentro de t años, la población de cierto pueblo será $P(t) = t^2 + 200t + 10\,000$.

a) Exprese la razón de cambio porcentual de la población como una función de t; simplifique esta función de forma algebraica, y dibuje su gráfica.

b) ¿Qué ocurre con la razón de cambio porcentual de la población a largo plazo (es decir, cuando t crece infinitamente)?

59. INCREMENTO DEL SALARIO Suponga que su salario inicial será de \$24 000 y que obtendrá un aumento salarial de \$2 000 cada año.

a) Exprese la razón porcentual como una función del tiempo y dibuje la gráfica.

b) ¿A qué razón porcentual se incrementará su salario después de 1 año?

c) ¿Qué le pasará a la razón de cambio porcentual de su salario a largo plazo?

60. PRODUCTO INTERNO BRUTO El producto interno bruto de cierto país crece a razón constante. En 1995 el PIB fue de \$125 000 millones, y en 2003 fue de \$155 000 millones. Si esta tendencia continúa, ¿a qué razón porcentual crecerá el PIB en el año 2010?

61. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN Se ha proyectado que dentro de x meses la población de cierto pueblo será de $P(x) = 2x + 4x^{3/2} + 5\,000$.

a) ¿A qué razón cambiará la población con respecto al tiempo dentro de 9 meses?

b) ¿A qué razón porcentual cambiará la población con respecto al tiempo dentro de 9 meses?

62. PROPAGACIÓN DE UNA EPIDEMIA Una enfermedad se propaga en forma tal que después de t semanas, el número de personas infectada es

$$N(t) = 5\,175 - t^3(t - 8) \qquad 0 \leq t \leq 8$$

a) ¿A qué razón se propaga la epidemia después de 3 semanas?

b) Suponga que se declara que la enfermedad ha alcanzado proporciones epidémicas cuando la razón de cambio porcentual de N es al menos 25%. ¿En qué tiempo se cumplirá esta condición de epidemia?

c) Lea un artículo sobre epidemiología y escriba un párrafo sobre cómo la política de salud pública está relacionada con la propagación de una epidemia.

63. ORNITOLOGÍA Un ornitólogo determina que, aproximadamente en un periodo de 17 horas, la temperatura corporal de cierta especie de aves fluctúa de acuerdo con la fórmula cúbica

$$T(t) = -68.07t^3 + 30.98t^2 + 12.52t + 37.1$$

para $0 \leq t \leq 0.713$, donde T es la temperatura en °C medida t días desde el inicio de un periodo.

www.FreeLibros.com

a) Calcule e interprete la derivada de $T'(t)$.

b) ¿A qué razón cambia la temperatura al inicio del periodo ($t = 0$) y al final del periodo ($t = 0.713$)? ¿Aumenta o disminuye la temperatura en cada uno de estos instantes?

c) ¿En qué instante no cambia la temperatura (ni aumenta ni disminuye)? ¿Cuál es la temperatura del ave en ese instante? Interprete su resultado.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO *En los problemas 64 a 67* s(t) *es la posición de una partícula moviéndose a lo largo de una recta en un tiempo* t.

a) Determine la velocidad y aceleración de la partícula.

b) Determine todos los instantes en el intervalo dado cuando la partícula está estacionaria.

64. $s(t) = t^2 - 2t + 6$ para $0 \le t \le 2$

65. $s(t) = 3t^2 + 2t - 5$ para $0 \le t \le 1$

66. $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 25$ para $0 \le t \le 6$

67. $s(t) = t^4 - 4t^3 + 8t$ para $0 \le t \le 4$

68. MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL Se deja caer una piedra desde una altura de 144 pies.

a) ¿Cuándo la piedra golpeará el suelo?

b) ¿A qué velocidad la piedra golpea el suelo?

69. MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL Una persona está parada en el techo de un edificio y lanza una pelota verticalmente hacia arriba. Después de 2 segundos, la pelota pasa por donde está la persona y, 2 segundos después, golpea el suelo.

a) ¿Cuál es la velocidad inicial de la pelota?

b) ¿Cuál es la altura del edificio?

c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando pasa frente a la persona?

d) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando golpea el suelo?

70. HISTORIA DE ESPÍAS Nuestro amigo, el espía que escapó de los contrabandistas de diamantes en el capítulo 1 (problema 46 de la sección 1.4), se halla en una misión secreta en el espacio. Un encuentro con un agente enemigo lo deja con una leve contusión y amnesia temporal. Por fortuna, él tiene un libro que le proporciona la fórmula para el movimiento de un proyectil y los valores de g para varios cuerpos del espacio (32 pies/s^2 en la Tierra, 5.5 pies/s^2 en la Luna, 12 pies/s^2 en Marte y 28 pies/s^2 en Venus). Para deducir su paradero, él lanza una roca verticalmente hacia arriba (desde el nivel del suelo) y nota que ésta alcanza una altura máxima de 37.5 pies y que golpea el suelo 5 segundos después de lanzarla. ¿Donde se encuentra el espía?

71. Encuentre los números a, b y c tales que la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga intersecciones en (0, 0) y (5, 0), y tangente con pendiente igual a 1 cuando $x = 2$.

72. Encuentre las ecuaciones de todas las tangentes a la gráfica de la función

$$f(x) = x^2 - 4x + 25$$

que pasan por el origen (0, 0).

73. Demuestre la regla de la suma para las derivadas. *Sugerencia:* Note que el cociente incremental para $f + g$ se puede escribir como

$$\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

74. *a*) Si $f(x) = x^4$, demuestre que $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3$.

b) Si $f(x) = x^n$ para un entero positivo n, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1}$$

c) Utilice el resultado del inciso *b*) en la definición de la derivada para demostrar la regla de la potencia:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

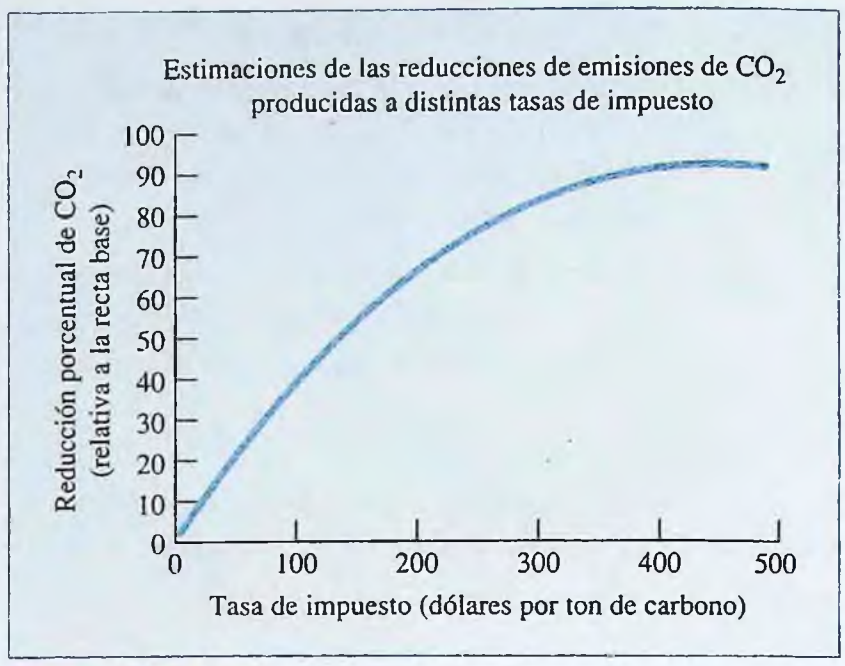
www.FreeLibros.com

75. CONTROL DE CONTAMINACIÓN Se ha sugerido que una forma para reducir las emisiones de monóxido de carbono (CO_2) a nivel mundial es crear un impuesto simple aplicable a todas las naciones. En la gráfica adjunta se muestra la relación entre los distintos niveles del impuesto al carbono y el porcentaje de reducción en emisiones de CO_2.

a) ¿Qué tasa de impuesto se tendría que imponer para lograr una reducción mundial de 50% en las emisiones de CO_2?

b) Use la gráfica para calcular la razón de cambio de la reducción porcentual en emisiones de CO_2 cuando la tasa de impuesto es \$200 por tonelada.

c) Lea un artículo sobre emisiones de CO_2 y escriba un párrafo sobre cómo se puede usar la política pública para controlar la contaminación del aire.[3]



PROBLEMA 75 *Fuente:* Barry C. Field, *Environmental Economics: An Introduction*, Nueva York, McGraw-Hill, Inc., 1994, página 441.

SECCIÓN 2.3 | Reglas del producto y del cociente; derivadas de orden superior

Con base en las reglas del factor constante y de la suma, sección 2.2, se puede pensar que la derivada de un producto de funciones es el producto de las derivadas de cada una, pero se puede ver fácilmente que esta conjetura es falsa. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$, entonces $f'(x) = 2x$ y $g'(x) = 3x^2$, por tanto

$$f'(x)g'(x) = (2x)(3x^2) = 6x^3$$

mientras que $f(x)g(x) = x^2x^3 = x^5$ y

$$[f(x)g(x)]' = (x^5)' = 5x^4$$

La fórmula correcta para derivar un producto se puede enunciar como sigue:

Regla del producto ■ Si $f(x)$ y $g(x)$ son derivables en x, entonces su producto $P(x) = f(x)g(x)$ también es derivable y

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

o de forma equivalente,

$$(fg)' = fg' + gf'$$

En otras palabras, la derivada del producto fg es f por la derivada de g más g por la derivada de f.

[3] Puede iniciar su investigación leyendo el capítulo 12, "Incentive-Based Strategies: Emissión Taxes and Subsidies", y el capítulo 15, "Federal Air Pollution-Control Policy", de Barry C. Field, *Environmental Economics: An Introduction*, McGraw-Hill, Inc., Nueva York, 1994.

www.FreeLibros.com

Aplicando la regla del producto al ejemplo introductorio, se tiene que

$$(x^2x^3)' = x^2(x^3)' + (x^3)(x^2)'$$
$$= (x^2)(3x^2) + (x^3)(2x) = 3x^4 + 2x^4 = 5x^4$$

lo que es igual al resultado obtenido mediante cálculo directo:

$$(x^2x^3)' = (x^5)' = 5x^4$$

A continuación se presentan dos ejemplos adicionales.

¡EXPLORE!

Use una instrucción para graficar y dibuje $f(x) = (x - 1)(3x - 2)$ usando una pantalla de [0, 2].1 por [−1, 1].1. Determine $f'(x)$ y grafíquela en el mismo sistema de coordenadas. Explique por qué la gráfica de $f'(x)$ es una recta. Explique qué característica tiene $f(x)$ cuando $f'(x) = 0$.

EJEMPLO | 2.3.1

Derive el producto $P(x) = (x - 1)(3x - 2)$:

a) Efectuando el producto dado en $P(x)$ y luego usando la regla polinomial.

b) Usando la regla del producto.

Solución

a) Se tiene $P(x) = 3x^2 - 5x + 2$, por tanto $P'(x) = 6x - 5$.

b) Por la regla del producto

$$P'(x) = (x - 1)\frac{d}{dx}[3x - 2] + (3x - 2)\frac{d}{dx}[x - 1]$$
$$= (x - 1)(3) + (3x - 2)(1) = 6x - 5$$

¡EXPLORE!

Introduzca la función del ejemplo 2.3.2, $y = (2x + 1)(x^2 - x + 3)$, en Y1 del editor de ecuaciones. Grafique empleando la pantalla [−2, 2]1 por [−10, 10]1 y coloque el cursor a X = 0. Trace la recta tangente a la curva en este punto empleando la instrucción Tangent de la tecla **DRAW** (**2nd PRGM**). ¿Concuerda la ecuación de la tangente con la calculada en el ejemplo?

EJEMPLO | 2.3.2

Encuentre una ecuación para la recta tangente a la curva $y = (2x + 1)(x^2 - x + 3)$ en el punto donde $x = 0$.

Solución

Usando la regla del producto, se obtiene

$$y' = (2x + 1)\frac{d}{dx}[x^2 - x + 3] + (x^2 - x + 3)\frac{d}{dx}[2x + 1]$$
$$= (2x + 1)(2x - 1) + (x^2 - x + 3)(2)$$

Cuando $x = 0$,

$$y(0) = [2(0) + 1](0^2 - 0 + 3) = 3$$
$$y'(0) = [2(0) + 1][2(0) - 1] + 2[0^2 - 0 + 3] = 5$$

de manera que la ecuación de la recta tangente en (0, 3) es

$$y - 3 = 5(x - 0)$$

o bien $y = 5x + 3$.

EJEMPLO | 2.3.3

Un fabricante determina que t meses después de introducir al mercado un producto nuevo, se pueden producir $x(t) = t^2 + 3t$ centenas de unidades y luego venderlas a un precio de $p(t) = -2t^{3/2} + 30$ dólares por unidad.

a) Exprese el ingreso $R(t)$ para este producto como una función del tiempo.

www.FreeLibros.com

b) ¿A qué razón está cambiando el ingreso con respecto al tiempo después de 4 meses? ¿Está aumentando o disminuyendo en este instante?

Solución

a) El ingreso está dado por

$$R(t) = x(t)p(t) = (t^2 + 3t)(-2t^{3/2} + 30)$$

cientos de dólares.

b) La razón de cambio del ingreso $R(t)$ con respecto al tiempo está dada por la derivada $R'(t)$, que se calcula usando la regla del producto:

$$R'(t) = (t^2 + 3t)\frac{d}{dt}[-2t^{3/2} + 30] + (-2t^{3/2} + 30)\frac{d}{dt}[t^2 + 3t]$$

$$= (t^2 + 3t)\left[-2\left(\frac{3}{2}t^{1/2}\right)\right] + (-2t^{3/2} + 30)[2t + 3]$$

En el instante $t = 4$, el ingreso está cambiando a una razón

$$R'(4) = [(4)^2 + 3(4)][-3(4)^{1/2}] + [-2(4)^{3/2} + 30][2(4) + 3]$$
$$= -14$$

Así, después de 4 meses el ingreso está cambiando a una razón de 14 cientos de dólares ($ 1 400) por mes, y está *disminuyendo* en ese instante porque $R'(4)$ es negativa.

La demostración de la regla del producto aparece al final de esta sección. También es importante saber derivar cocientes de funciones, y para ello se tiene la siguiente regla, cuya demostración se obtiene en el problema 67.

CUIDADO: Un error común es suponer que $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g'}$.

Regla del cociente ■ Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables, entonces el cociente $Q(x) = f(x)/g(x)$ también es derivable, y

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{g^2(x)} \quad \text{si } g(x) \neq 0$$

o, de forma equivalente,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

NOTA La regla del cociente es probablemente la fórmula más complicada que usted tendrá que aprenderse en todo este libro. Observe que la regla del cociente se parece a la regla del producto, con la excepción de que contiene un signo menos, lo que hace que el orden de los términos en el numerador se vuelve de suma importancia. Comience elevando el denominador g al cuadrado, y luego, todavía considerando g, escríbala en el numerador. Esto lo hará iniciar con el numerador en el orden apropiado, a la vez que le permitirá escribir fácilmente el resto pensando en la regla del producto. No olvide escribir el signo menos sin el cual la regla del cociente no sería tan difícil de recordar. Esta peculiar versión de la regla del cociente quizá le ayude a recordar su forma:

$$d\left[\frac{\text{hi}}{\text{ho}}\right] = \frac{\text{ho}\ d(\text{hi}) - \text{hi}\ d(\text{ho})}{\text{ho ho}}$$ ■

www.FreeLibros.com

EJEMPLO 2.3.4

Derive el cociente $Q(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{2x}$

a) Realizando primero la división.

b) Utilizando la regla del cociente.

Solución

a) Al dividir entre el denominador $2x$, se obtiene

$$Q(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} + \frac{7}{2}x^{-1}$$

entonces

$$Q'(x) = \frac{1}{2} - 0 + \frac{7}{2}(-x^{-2}) = \frac{1}{2} - \frac{7}{2x^2}$$

b) Mediante la regla del cociente

$$Q'(x) = \frac{(2x)\dfrac{d}{dx}[x^2 - 5x + 7] - (x^2 - 5x + 7)\dfrac{d}{dx}[2x]}{(2x)^2}$$

$$= \frac{(2x)(2x - 5) - (x^2 - 5x + 7)(2)}{4x^2} = \frac{2x^2 - 14}{4x^2} = \frac{1}{2} - \frac{7}{2x^2}$$

EJEMPLO 2.3.5

Un biólogo modela el efecto de introducir una toxina en una colonia de bacterias mediante la función

$$P(t) = \frac{t + 1}{t^2 + t + 4}$$

donde P es la población de la colonia (en millones) t horas después de que se introduce la toxina.

a) ¿A qué razón cambia la población cuando se introduce la toxina? ¿La población está aumentando o disminuyendo en ese instante?

b) ¿En qué momento comienza a decrecer la población? ¿Cuánto se incrementa la población antes de comenzar a decrecer?

Solución

a) La razón de cambio de la población con respecto al tiempo está dada por la derivada $P'(t)$, que se calcula empleando la regla del cociente:

$$P'(t) = \frac{(t^2 + t + 4)\dfrac{d}{dt}[t + 1] - (t + 1)\dfrac{d}{dt}[t^2 + t + 4]}{(t^2 + t + 4)^2}$$

$$= \frac{(t^2 + t + 4)(1) - (t + 1)(2t + 1)}{(t^2 + t + 4)^2}$$

www.FreeLibros.com

$$= \frac{-t^2 - 2t + 3}{(t^2 + t + 4)^2}$$

La toxina se introduce cuando $t = 0$, y en ese momento la población está cambiando a una razón

$$P'(0) = \frac{(0 + 0 + 3)}{(0 + 0 + 4)^2} = \frac{3}{16} = 0.1875$$

Es decir, la población inicialmente está cambiando a una razón de 0.1875 millones (187 500) de bacterias por hora, y se está incrementando porque $P'(0) > 0$.

b) La población está disminuyendo cuando $P'(t) < 0$. Ya que el numerador de $P'(t)$ se puede factorizar como

$$-t^2 - 2t + 3 = -(t^2 + 2t - 3) = -(t - 1)(t + 3),$$

se puede escribir

$$P'(t) = \frac{-(t - 1)(t + 3)}{(t^2 + t + 4)^2}$$

El denominador $(t^2 + t + 4)^2$ y el factor $t + 3$ son positivos para todo $t \geq 0$, lo que significa que

$$\text{para } 0 \leq t < 1 \quad P'(t) > 0 \text{ y } P(t) \text{ está creciendo}$$
$$\text{para } t > 1 \quad P'(t) < 0 \text{ y } P(t) \text{ está decreciendo}$$

Así, la población comienza a disminuir después de 1 hora.
La población inicial de la colonia es

$$P(0) = \frac{0 + 1}{0 + 0 + 4} = \frac{1}{4}$$

millones, y después de 1 hora, la población es

$$P(1) = \frac{1 + 1}{1 + 1 + 4} = \frac{1}{3}$$

millones. Por tanto, antes de que la toxina empiece a tener efecto, la población se incrementa en

$$P(1) - P(0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

millones; es decir, aproximadamente 83 333 bacterias.

Un consejo La regla del cociente es un tanto complicada, por tanto no la utilice innecesariamente. Considere el ejemplo 2.3.6.

EJEMPLO | 2.3.6

Derive la función $y = \frac{2}{3x^2} - \frac{x}{3} + \frac{4}{5} + \frac{x + 1}{x}$.

Solución

¡No utilice la regla del cociente! En su lugar, escriba la función como

www.FreeLibros.com

$$y = \frac{2}{3}x^{-2} - \frac{1}{3}x + \frac{4}{5} + 1 + x^{-1}$$

y luego aplique la regla de la potencia término a término para obtener

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}(-2x^{-3}) - \frac{1}{3} + 0 + 0 + (-1)x^{-2}$$

$$= -\frac{4}{3}x^{-3} - \frac{1}{3} - x^{-2}$$

$$= -\frac{4}{3x^3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{x^2}$$

La segunda derivada

En las aplicaciones a veces es necesario calcular la razón de cambio de una función que en sí misma es una razón de cambio. Por ejemplo, la aceleración de un automóvil es la razón de cambio con respecto al tiempo de su velocidad, la cual a su vez es la razón de cambio con respecto al tiempo de su posición. Si la posición se mide en millas y el tiempo en horas, entonces la velocidad (razón de cambio de la posición) se mide en millas por hora y la aceleración (razón de cambio de la velocidad) se mide en millas por hora, por hora.

Con frecuencia, en economía se hacen afirmaciones acerca de la razón de cambio de una tasa de cambio. Por ejemplo, en tiempos de inflación se puede escuchar a un economista asegurar a la población que, aunque la inflación está aumentando, lo está haciendo a una tasa decreciente. Es decir, los precios aún se incrementan, pero no tan rápidamente como lo hacían antes.

La razón de cambio de la función $f(x)$ con respecto a x es la derivada $f'(x)$ y, de igual forma, la razón de cambio de la función $f'(x)$ con respecto a x es *su* derivada $(f'(x))'$. Esta notación es incómoda, por eso se escribe la derivada de la derivada de $f(x)$ como $(f'(x))' = f''(x)$ y se le llama *segunda derivada* de $f(x)$ (léase $f''(x)$ como "f segunda de x"). Si $y = f(x)$, entonces la segunda derivada de y con respecto a x se escribe como y'' o bien $\frac{d^2y}{dx^2}$. A continuación se presenta un resumen de la terminología y notación empleada para segundas derivadas.

La segunda derivada ■ La segunda derivada de una función es la derivada de su derivada. Si $y = f(x)$, la segunda derivada se denota por

$$\frac{d^2y}{dx^2} \quad \text{o bien} \quad f''(x).$$

La segunda derivada proporciona la razón de cambio de la tasa de cambio de la función original.

NOTA Algunas veces a la derivada, $f'(x)$, se le llama la **primera derivada** para distinguirla de la **segunda derivada** $f''(x)$. ■

No es necesario emplear ninguna regla nueva para determinar la segunda derivada de una función; sólo se calcula la primera derivada y luego se vuelve a derivar.

EJEMPLO | 2.3.7

Encuentre la segunda derivada de la función $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 3x + 7$.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Se puede utilizar una calculadora graficadora para dibujar y ver la gráfica de una derivada de orden superior. Introduzca en Y1 la función

$f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 3x + 7$

Luego, escriba

Y2 = nDeriv(Y1, X, X)

y

Y3 = nDeriv(Y2, X, X)

cambiando el estilo de graficación de Y3 a negritas. Grafique estas tres funciones usando la pantalla [−1, 1]1 por [−10, 10]1.

Solución

Calcule la primera derivada

$$f'(x) = 20x^3 - 6x - 3$$

y luego vuelva a derivar para obtener

$$f''(x) = 60x^2 - 6$$

EJEMPLO | 2.3.8

Encuentre la segunda derivada de $= x^2(3x + 1)$.

Solución

De acuerdo con la regla del producto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x^2(3x + 1)] &= x^2\frac{d}{dx}[3x + 1] + (3x + 1)\frac{d}{dx}[x^2] \\ &= x^2(3) + (3x + 1)(2x) \\ &= 9x^2 + 2x\end{aligned}$$

Por tanto, la segunda derivada es

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}[9x^2 + 2x] \\ &= 18x + 2\end{aligned}$$

NOTA Antes de calcular la segunda derivada de una función, tómese su tiempo para simplificar la primera derivada tanto como sea posible. Entre más complicada sea la forma de la primera derivada, más tedioso será el cálculo de la segunda derivada. ■

La segunda derivada se empleará en la sección 3.2 para obtener información acerca de la forma de una gráfica, y también en las secciones 3.4 y 3.5 en problemas de optimización. A continuación se presenta una aplicación más elemental que ilustra la interpretación de la segunda derivada como la razón de cambio de una tasa de cambio.

EJEMPLO | 2.3.9

En cierta fábrica, un estudio de eficiencia para el turno de la mañana indica que un trabajador promedio, que llega a las 8:00 a.m., habrá producido

$$Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 24t$$

unidades t horas después.

a) Calcule la tasa de producción del trabajador a las 11:00 a.m.

b) ¿A qué razón está cambiando la tasa de producción del trabajador con respecto al tiempo a las 11:00 a.m?

Solución

a) La tasa de producción del trabajador es la primera derivada

$$R(t) = Q'(t) = -3t^2 + 12t + 24$$

de la producción $Q(t)$. La tasa de producción a las 11:00 a.m. ($t = 3$) es

$$\begin{aligned}R(3) = Q'(3) &= -3(3)^2 + 12(3) + 24 = 33 \\ &= 33 \text{ unidades por hora}\end{aligned}$$

www.FreeLibros.com

b) La razón de cambio de la tasa de producción es la segunda derivada

$$R'(t) = Q''(t) = -6t + 12$$

de la función de producción. A las 11:00 a.m., esta razón es

$$R'(3) = Q''(3) = -6(3) + 12$$

$$= -6 \text{ unidades por hora, por hora}$$

El signo menos indica que la tasa de producción del trabajador está decreciendo; es decir, el trabajador va más despacio. La razón de este decrecimiento en la eficiencia a las 11:00 a.m. es 6 unidades por hora, por hora.

Recuerde de la sección 2.2 que la **aceleración** $a(t)$ de un objeto en movimiento a lo largo de una recta es la derivada de su velocidad $v(t)$, que a su vez, es la derivada de la función de posición $s(t)$. Así, se puede considerar a la aceleración como la segunda derivada de la posición; es decir,

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Esta notación se emplea en el ejemplo 2.3.10.

¡EXPLORE!

Cambie t por x en $s(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ en el ejemplo 2.3.10. Use una instrucción para graficar $v(x)$ y $a(x)$ sobre el mismo sistema de coordenadas usando una pantalla de [0, 2].1 por [−5, 5].5. Explique qué le sucede a $v(x)$ cuando $a(x)$ es cero. Luego utilice su calculadora para ver qué efecto tiene cambiar $s(t)$ por $s_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 4t$ en $v(t)$ y $a(t)$.

EJEMPLO | 2.3.10

Si la posición de un objeto en movimiento a lo largo de una recta, en el momento t, está dada por $s(t) = t^3 - 3t^2 + 4t$, encuentre su velocidad y su aceleración.

Solución

La velocidad de un objeto es

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 6t + 4$$

y su aceleración es

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 6$$

Derivadas de orden superior

Si se deriva una vez más la segunda derivada $f''(x)$ de una función $f(x)$, entonces se obtiene la tercera derivada $f'''(x)$. Derivando de nuevo se obtiene la cuarta derivada, la cual se denota por $f^{(4)}(x)$ ya que la notación prima $f''''(x)$ es incómoda. En general, la derivada obtenida después de derivar n veces sucesivas a $f(x)$ se denomina **derivada n-ésima** o **derivada de orden n** y se denota por $f^{(n)}(x)$.

La derivada n-ésima ■ Para cualquier entero positivo n, la derivada n-ésima de una función se obtiene derivando sucesivamente la función n veces. Si la función original es $y = f(x)$, la derivada n-ésima se denota por

$$\frac{d^n y}{dx^n} \quad \text{o bien} \quad f^{(n)}(x)$$

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 2.3.11

Encuentre la quinta derivada de cada una de las funciones:

a) $f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x - 1$

b) $y = \dfrac{1}{x}$

Solución

a) $f'(x) = 12x^2 + 10x + 6$

$f''(x) = 24x + 10$

$f'''(x) = 24$

$f^{(4)}(x) = 0$

$f^{(5)}(x) = 0$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}(-x^{-2}) = 2x^{-3} = \dfrac{2}{x^3}$

$\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{d}{dx}(2x^{-3}) = -6x^{-4} = -\dfrac{6}{x^4}$

$\dfrac{d^4y}{dx^4} = \dfrac{d}{dx}(-6x^{-4}) = 24x^{-5} = \dfrac{24}{x^5}$

$\dfrac{d^5y}{dx^5} = \dfrac{d}{dx}(24x^{-5}) = -120x^{-6} = -\dfrac{120}{x^6}$

Demostración de la regla del producto

Las demostraciones de las reglas del producto y del cociente no son sencillas. En ambos casos, la clave es expresar el cociente incremental de la expresión dada (el producto fg o el cociente f/g) en términos de los cocientes incrementales de f y de g. A continuación se presenta una demostración de la regla del producto. La demostración para la regla del cociente se debe obtener en el problema 67.

Para demostrar que $\dfrac{d}{dx}(fg) = f\dfrac{dg}{dx} + g\dfrac{df}{dx}$, se comienza con el cociente incremental correspondiente y se suma y resta la cantidad $f(x + h)g(x)$ en el numerador como sigue:

$$\frac{d}{dx}(fg) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h} + \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] + g(x)\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]\right)$$

Ahora se hace tender h a cero. Como

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{df}{dx}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{dg}{dx}$$

www.FreeLibros.com

y $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$ *por la continuidad de f(x)*

se obtiene que $\dfrac{d}{dx}(fg) = f\dfrac{dg}{dx} + g\dfrac{df}{dx}$

PROBLEMAS | 2.3

En los problemas 1 a 20 derive la función dada.

1. $f(x) = (2x + 1)(3x - 2)$

2. $f(x) = (x - 5)(1 - 2x)$

3. $y = 10(3u + 1)(1 - 5u)$

4. $y = 400(15 - x^2)(3x - 2)$

5. $f(x) = \dfrac{1}{3}(x^5 - 2x^3 + 1)\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$

6. $f(x) = -3(5x^3 - 2x + 5)(\sqrt{x} + 2x)$

7. $y = \dfrac{x + 1}{x - 2}$

8. $y = \dfrac{2x - 3}{5x + 4}$

9. $f(t) = \dfrac{t}{t^2 - 2}$

10. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

11. $y = \dfrac{3}{x + 5}$

12. $y = \dfrac{t^2 + 1}{1 - t^2}$

13. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + 5x - 1}$

14. $f(t) = \dfrac{t^2 + 2t + 1}{t^2 + 3t - 1}$

15. $f(x) = \dfrac{(2x - 1)(x + 3)}{x + 1}$

16. $g(x) = \dfrac{(x^2 + x + 1)(4 - x)}{2x - 1}$

17. $f(x) = (2 + 5x)^2$

18. $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$

19. $g(t) = \dfrac{t^2 + \sqrt{t}}{2t + 5}$

20. $h(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1} + \dfrac{4 - x}{x^2 + 1}$

En los problemas 21 a 25 encuentre una ecuación para la recta tangente a la curva dada en el punto donde $x = x_0$.

21. $y = (5x - 1)(4 + 3x)$; $x_0 = 0$

22. $y = (x^2 + 3x - 1)(2 - x)$; $x_0 = 1$

23. $y = \dfrac{x}{2x + 3}$; $x_0 = -1$

24. $y = \dfrac{x + 7}{5 - 2x}$; $x_0 = 0$

25. $y = (3\sqrt{x} + x)(2 - x^2)$; $x_0 = 1$

26. Determine todos los puntos de la gráfica de la función

$$f(x) = (3x + 2)\,(x^2 + 3x - 2)$$

donde la recta tangente es horizontal.

27. Encuentre todos los puntos de la gráfica de la curva

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}$$

donde la recta tangente es horizontal.

En los problemas 28 a 31 calcule la razón de cambio $\dfrac{dy}{dx}$ para el valor dado de x_0.

28. $y = (x^2 + 2)(x + \sqrt{x})$; $x_0 = 4$

29. $y = (x^2 + 3)(5 - 2x^3)$; $x_0 = 1$

30. $y = \dfrac{2x - 1}{3x + 5}$; $x_0 = 1$

31. $y = x + \dfrac{3}{2 - 4x}$; $x_0 = 0$

www.FreeLibros.com

La recta normal a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, f(x_0))$ es la recta perpendicular a la recta tangente en P. En los problemas 32 a 35 encuentre una ecuación de la recta normal a la curva dada en el punto indicado.

32. $y = x^2 + 3x - 5$; $(0, -5)$

33. $y = \dfrac{2}{x} - \sqrt{x}$; $(1, 1)$

34. $y = (x + 3)(1 - \sqrt{x})$; $(1, 0)$

35. $y = \dfrac{5x + 7}{2 - 3x}$; $(1, -12)$

36. *a*) Derive la función $y = 2x^2 - 5x - 3$.
b) Ahora factorice la función del inciso *a*) como $y = (2x + 1)(x - 3)$ y derive utilizando la regla del producto. Demuestre que las dos respuestas son iguales.

37. *a*) Utilice la regla del cociente para derivar la función $y = \dfrac{2x - 3}{x^3}$.
b) Escriba la función como $y = x^{-3}(2x - 3)$ y derive empleando la regla del producto.
c) Escriba la función como $y = 2x^{-2} - 3x^{-3}$ y derive.
d) Demuestre que sus respuestas en los incisos *a*), *b*) y *c*) son iguales.

En los problemas 38 a 43 encuentre la segunda derivada de la función dada. En cada uno de los casos utilice la notación apropiada para la segunda derivada y simplifique su respuesta. (No olvide simplificar la primera derivada tanto como sea posible antes de calcular la segunda derivada.)

38. $f(x) = 5x^{10} - 6x^5 - 27x + 4$

39. $f(x) = \dfrac{2}{5}x^5 - 4x^3 + 9x^2 - 6x - 2$

40. $y = 5\sqrt{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{3\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2}$

41. $y = \dfrac{2}{3x} - \sqrt{2x} + \sqrt{2}x - \dfrac{1}{6\sqrt{x}}$

42. $y = (x^2 - x)\left(2x - \dfrac{1}{x}\right)$

43. $y = (x^3 + 2x - 1)(3x + 5)$

44. **DEMANDA E INGRESO** El gerente de una compañía que produce calculadoras graficadoras determina que si se producen x miles de calculadoras, éstas se venderán en su totalidad cuando el precio sea

$$p(x) = \frac{1\,000}{0.3x^2 + 8}$$

dólares por calculadora.
a) ¿A qué razón está cambiando la demanda $p(x)$ con respecto al nivel de producción x cuando se producen 3 000 ($x = 3$) calculadoras?
b) El ingreso derivado de la venta de x miles de calculadoras es $R(x) = xp(x)$ miles de dólares. ¿A qué razón está cambiando el ingreso cuando se producen 3 000 calculadoras? En ese nivel de producción, ¿está disminuyendo o aumentando el ingreso?

45. **VENTAS** El gerente de la joyería Many Facets modela las ventas totales mediante la función

$$S(t) = \frac{2\,000t}{4 + 0.3t}$$

donde t es el tiempo (años) desde el año 2000 y S se mide en miles de dólares.
a) ¿A qué razón estaban cambiando las ventas en el año 2002?
b) ¿Qué pasa con las ventas "a largo plazo" (es decir, cuando $t \to +\infty$)?

46. **UTILIDAD** Bea Jonson, la propietaria de la boutique Bea Nice, estima que cuando se fija el precio por frasco de una clase particular de perfume en p dólares, ella venderá

$$B(p) = \frac{500}{p + 3} \qquad p \geq 5$$

frascos por mes a un costo total de

$$C(p) = 0.2p^2 + 3p + 200 \quad \text{dólares}$$

a) Exprese la utilidad $P(p)$ de Bea como una función del precio p por frasco.
b) ¿A qué razón está cambiando la utilidad con respecto a p cuando el precio es \$12 por frasco? A ese precio, ¿la utilidad está disminuyendo o aumentando?

www.FreeLibros.com

47. PUBLICIDAD Una compañía fabrica un juego de quemador de DVD "esbelto" para conectarse en computadoras personales. El gerente de mercadeo determina que t semanas después del inicio de una campaña publicitaria, $P(t)$ por ciento del mercado potencial estará consciente de los quemadores, donde

$$P(t) = 100\left[\frac{t^2 + 5t + 5}{t^2 + 10t + 30}\right]$$

a) ¿A qué razón está cambiando el porcentaje del mercado $P(t)$ con respecto al tiempo después de 5 semanas? En ese momento, ¿el porcentaje está disminuyendo o aumentando ?

b) ¿Qué pasa con el porcentaje $P(t)$ "a largo plazo"; es decir, cuando $t \to +\infty$? ¿Qué pasa con la razón de cambio de $P(t)$ cuando $t \to +\infty$?

48. POBLACIÓN BACTERIAL Se estima que una colonia de bacterias tiene una población de

$$P(t) = \frac{24t + 10}{t^2 + 1}$$

millones t horas después de la introducción de una toxina.

a) ¿A qué razón está cambiando la población 1 hora después de introducir la toxina ($t = 1$)? En ese momento ¿la población está disminuyendo o aumentando?

b) ¿En qué instante comienza a disminuir la población?

49. CONTROL DE CONTAMINACIÓN Un estudio realizado en una gran ciudad indica que gastar dinero para el control de contaminación es efectivo hasta un punto determinado, pero que luego el gasto se vuelve excesivo. Suponga que cuando se gastan x millones en el control de contaminación, el porcentaje de contaminación eliminado está dado por

$$P(x) = \frac{100\sqrt{x}}{0.03x^2 + 9}$$

a) ¿A qué razón está cambiando el porcentaje de contaminación eliminada $P(x)$ cuando se gastan 16 millones? ¿El porcentaje está disminuyendo o aumentando en este nivel de gasto?

b) ¿Para qué valores de x aumenta $P(x)$? ¿Para qué valores de x disminuye $P(x)$?

50. FARMACOLOGÍA Se administra a un paciente un analgésico oral, y t horas después, la concentración del medicamento en el torrente sanguíneo está dada por

$$C(t) = \frac{2t}{3t^2 + 16}$$

a) ¿A qué razón $R(t)$ está cambiando la concentración del medicamento en el torrente sanguíneo del paciente t horas después de ser administrada? ¿A qué razón está cambiando $R(t)$ en el momento t?

b) ¿A qué razón está cambiando la concentración del medicamento después de 1 hora? En este momento ¿el cambio de concentración tiene una tasa creciente o decreciente?

c) ¿Cuándo empieza a disminuir la concentración del medicamento?

d) ¿En qué periodo de tiempo la concentración está cambiando con una razón decreciente?

51. EFICIENCIA DEL TRABAJADOR Un estudio de eficiencia del turno matutino en cierta fábrica indica que un trabajador promedio que llega a las 8:00 a.m. habrá producido $Q(t) = -t^3 + 8t^2 + 15t$ unidades t horas después.

a) Calcule la tasa de producción del trabajador $R(t) = Q'(t)$.

b) ¿A qué razón está cambiando la tasa de producción del trabajador con respecto al tiempo a las 9:00 a.m.?

52. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN Se estima que dentro de t años, la población de cierta comunidad suburbana será $P(t) = 20 - \frac{6}{t+1}$ miles.

a) Deduzca una fórmula para la razón a la cual cambiará la población con respecto al tiempo dentro de t años.

b) ¿A qué razón crecerá la población dentro de 1 año?

c) ¿Cuánto crecerá la población durante el segundo año?

d) ¿A qué razón estará creciendo la población en 9 años a partir de ahora?

e) ¿Qué le pasará a la tasa de crecimiento de la población a largo plazo?

En los problemas 53 a 56 se da la posición $s(t)$ de un objeto moviéndose a lo largo de una recta. En cada uno de los casos:

a) Determine la velocidad del objeto $v(t)$ y su aceleración $a(t)$.

b) Encuentre todos los momentos t cuando la aceleración es 0.

53. $s(t) = 3t^5 - 5t^3 - 7$

54. $s(t) = 2t^4 - 5t^3 + t - 3$

55. $s(t) = -t^3 + 7t^2 + t + 2$

56. $s(t) = 4t^{5/2} - 15t^2 + t - 3$

www.FreeLibros.com

57. VELOCIDAD Un objeto se mueve a lo largo de una recta en forma tal que después de t minutos, su distancia desde su punto de partida es

$$D(t) = 10t + \frac{5}{t+1} - 5 \text{ metros.}$$

a) ¿A qué velocidad se está moviendo el objeto al final de 4 minutos?

b) ¿Cuánto recorre el objeto durante el quinto minuto?

58. ACELERACIÓN Después de t horas de un viaje de 8 horas, un automóvil ha recorrido

$$D(t) = 64t + \frac{10}{3}t^2 - \frac{2}{9}t^3 \text{ kilómetros.}$$

a) Deduzca una fórmula que exprese la aceleración del automóvil como una función del tiempo.

b) ¿A qué razón estará cambiando la velocidad del automóvil con respecto al tiempo al término de 6 horas? ¿En este momento la velocidad está creciendo o decreciendo?

c) ¿En realidad cuánto cambia la velocidad del automóvil durante la séptima hora?

59. DOSIS DE MEDICAMENTO Un modelo biológico[4] indica que la reacción del cuerpo humano a la dosis de una medicina se puede medir mediante una función de la forma

$$F = \frac{1}{3}(KM^2 - M^3)$$

donde K es una constante positiva y M es la cantidad de medicina absorbida en la sangre. La derivada $S = \dfrac{dF}{dM}$ se puede considerar como una medida de la sensibilidad del cuerpo a la medicina.

a) Encuentre la sensibilidad S.

b) Determine $\dfrac{dS}{dM} = \dfrac{d^2F}{dM^2}$ y de una interpretación de la segunda derivada.

60. PRODUCCIÓN DE CÉLULAS SANGUÍNEAS Un modelo biológico[5] mide la producción de cierto tipo de glóbulos blancos (*granulocitos*) mediante la función

$$p(x) = \frac{Ax}{B + x^m}$$

donde A y B son constantes positivas, el exponente m es positivo, y x es el número de células presentes.

a) Encuentre la tasa de producción $p'(x)$.

b) Encuentre $p''(x)$ y determine todos los valores de x para los cuales $p''(x) = 0$ (su respuesta dependerá de m).

c) Lea un artículo sobre la producción de células sanguíneas y escriba un párrafo sobre cómo se pueden emplear métodos matemáticos para modelar la producción. Un buen punto de partida es el artículo, "Blood Cell Population Model, Dynamical Diseases, and Chaos" de W. B. Gearhart y M. Martelli, UMAP Module 1990, Arlington, MA, Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., 1991.

61. ACELERACIÓN Si un objeto se deja caer o se lanza verticalmente, su altura (en pies) después de t segundos es $H(t) = -16t^2 + S_0t + H_0$, donde S_0 es la velocidad inicial del objeto y H_0 es su altura inicial.

a) Deduzca una expresión para la aceleración del objeto.

b) ¿Cómo varía la aceleración con el tiempo?

c) ¿Cuál es el significado de que la respuesta al inciso *a*) sea negativa?

62. Encuentre $f^{(4)}(x)$ si $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 5x - 6$.

63. Determine $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ si $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

64. *a*) Demuestre que

$$\frac{d}{dx}[fgh] = fg\frac{dh}{dx} + fh\frac{dg}{dx} + gh\frac{df}{dx}$$

[*Sugerencia:* aplique la regla del producto dos veces.]

b) Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ donde $y = (2x + 1)(x - 3)(1 - 4x)$.

65. *a*) Combinando la regla del producto y la regla del cociente, determine una expresión para $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{fg}{h}\right]$.

b) Determine $\dfrac{dy}{dx}$, donde $y = \dfrac{(2x + 7)(x^2 + 3)}{3x + 5}$.

66. La regla del producto indica cómo derivar el producto de cualesquiera dos funciones, en tanto que la regla del factor constante indica cómo derivar productos en los cuales uno de los factores es constante. Demuestre que las dos reglas son consistentes. En particular, utilice la regla del producto para demostrar que $\dfrac{d}{dx}[cf] = c\dfrac{df}{dx}$ si c es una constante.

---

[4] Thrall *et al.*, *Some Mathematical Models in Biology*, Departamento de Comercio de Estados Unidos.

[5] M. C. Mackey y L. Glass, "Oscillations and Chaos in Physiological Control Systems", *Science*, Vol. 197, pp. 287-289.

www.FreeLibros.com

67. Deduzca la regla del cociente. [*Sugerencia:* demuestre que el cociente incremental para f/g es:

$$\frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f(x+h) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)h}$$

Antes de hacer que h tienda a cero, escriba este cociente utilizando el truco de restar y sumar $g(x)f(x)$ en el numerador.]

68. Demuestre la regla de la potencia $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$ para el caso donde $n = -p$ es un entero negativo. [*Sugerencia:* aplique la regla del cociente en $y = x^{-p} = \frac{1}{x^p}$.]

69. Utilice una instrucción para graficar para trazar la curva $f(x) = x^2(x - 1)$, y en el mismo sistema de coordenadas dibuje la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = 1$. Utilice **TRACE** y **ZOOM** para encontrar dónde $f'(x) = 0$.

70. Use una instrucción para graficar para trazar la curva $f(x) = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x + 1}$, y en el mismo sistema de coordenadas dibuje las rectas tangentes a la gráfica de $f(x)$ en $x = -2$ y en $x = 0$. Utilice **TRACE** y **ZOOM** para determinar dónde $f'(x) = 0$.

71. Trace la gráfica de $f(x) = x^4 + 2x^3 - x + 1$ empleando una instrucción para graficar con una pantalla de [−5, 5]1 por [0, 2].5. Utilice **TRACE** y **ZOOM** u otras funciones de gráficas, para determinar los mínimos y máximos de la función dada. Encuentre la función derivada $f'(x)$ de forma algebraica y grafique $f(x)$ y $f'(x)$ en el mismo sistema de coordenadas usando una pantalla de [−5, 5]1 por [−2, 2].5. Utilice **TRACE** y **ZOOM** para determinar las intersecciones de $f'(x)$ con el eje de las x. Explique por qué el máximo o mínimo de $f(x)$ ocurre en las intersecciones de $f'(x)$ con el eje de las x.

72. Repita el problema 71 para la función producto $f(x) = x^3(x - 3)^2$.

SECCIÓN 2.4 | La regla de la cadena

En muchas situaciones prácticas, la razón a la que cambia una cantidad se puede expresar como el producto de otras razones. Por ejemplo, suponga que un automóvil viaja a 50 mph en el momento en que la gasolina se consume a una razón de 0.1 gal/milla. Entonces, para determinar cuánta gasolina se consume cada hora, se multiplican las razones:

$$(0.1 \text{ gal/milla})(50 \text{ millas/hora}) = 5 \text{ gal/hora}$$

O suponga que el costo total en cierta fábrica es una función del número de unidades producidas, que a su vez, es una función del número de horas que la fábrica ha estado operando. Si C, q y t denotan el costo, las unidades producidas y el tiempo, respectivamente, entonces

$$\frac{dC}{dq} = \begin{bmatrix}\text{razón de cambio del costo} \\ \text{respecto a la producción}\end{bmatrix} \quad \text{(dólares por unidad)}$$

y

$$\frac{dq}{dt} = \begin{bmatrix}\text{razón de cambio de la producción} \\ \text{con respecto al tiempo}\end{bmatrix} \quad \text{(unidades por hora)}$$

El producto de estas dos razones es la razón de cambio del costo con respecto al tiempo; es decir,

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt} \quad \text{(dólares por hora)}$$

Esta fórmula es un caso especial de un resultado importante del cálculo llamado la **regla de la cadena**.

www.FreeLibros.com

La regla de la cadena Si $y = f(u)$ es una función derivable de u, y $u = g(x)$ es a su vez una función derivable de x, entonces la función compuesta $y = f(g(x))$ es una función derivable de x cuya derivada está dada por el producto

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

o bien, de forma equivalente, por

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$

NOTA Una forma de recordar la regla de la cadena es ver las derivadas $\frac{dy}{du}$ y $\frac{du}{dx}$ como cocientes y "eliminar" du; es decir,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\cancel{du}}\frac{\cancel{du}}{dx}$$

Para ilustrar el uso de la regla de la cadena, suponga que se desea derivar la función $y = (3x + 1)^2$. El primer instinto quizá sea "suponer" que la derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[(3x + 1)^2] = 2(3x + 1)$$
$$= 6x + 2$$

Pero esta suposición no puede ser correcta ya que expandiendo $(3x + 1)^2$ y derivando cada término se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[(3x + 1)^2] = \frac{d}{dx}[9x^2 + 6x + 1] = 18x + 6$$

lo que es 3 veces el "supuesto resultado" de $6x + 2$. Sin embargo, si se escribe $y = (3x + 1)^2$ como $y = u^2$ donde $u = 3x + 1$, entonces

$$\frac{dy}{du} = \frac{d}{du}[u^2] = 2u \qquad \text{y} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}[3x + 1] = 3$$

y la regla de la cadena indica que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (2u)(3)$$
$$= 6(3x + 1) = 18x + 6$$

lo que coincide con la respuesta correcta hallada cuando se expandió $(3x + 1)^2$. En los ejemplos 2.4.1 y 2.4.2 se ilustran varias formas de uso de la regla de la cadena.

EJEMPLO | 2.4.1

Halle $\frac{dy}{dx}$ si $y = (x^2 + 2)^3 - 3(x^2 + 2)^2 + 1$.

www.FreeLibros.com

Solución

Note que $y = u^3 - 3u^2 + 1$, donde $u = x^2 + 2$. Así,

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 - 6u \qquad \text{y} \qquad \frac{du}{dx} = 2x$$

y de acuerdo con la regla de la cadena,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (3u^2 - 6u)(2x)$$

En las secciones 2.1 a 2.3 se han visto diferentes aplicaciones (por ejemplo, pendiente, razones de cambio) que requieren la evaluación de una derivada para un valor particular de la variable independiente. Existen dos formas básicas para realizarlo cuando la derivada se calcula usando la regla de la cadena.

En otras palabras, suponga que en el ejemplo 2.4.1 se desea evaluar $\frac{dy}{dx}$ cuando $x = -1$. Una manera de proceder es expresar primero la derivada en términos sólo de x, sustituyendo $x^2 + 2$ en u como sigue:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} = (3u^2 - 6u)(2x) &= [3(x^2 + 2)^2 - 6(x^2 + 2)](2x) && \textit{sustituya } u \textit{ por } x^2 + 2 \\
&= 6x(x^2 + 2)[(x^2 + 2) - 2] && \textit{factorice } 6x(x + 2) \\
&= 6x(x^2 + 2)(x^2) && \textit{simplifique los términos dentro de los corchetes} \\
&= 6x^3(x^2 + 2)
\end{aligned}$$

Así, sustituyendo $x = -1$ en esta expresión, se obtiene

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = 6(-1)^3[(-1)^2 + 2] = -18$$

De otra forma se puede calcular $u(-1) = (-1)^2 + 2 = 3$ y luego sustituir directamente en la fórmula $\frac{dy}{dx}$ para obtener

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} &= \left.(3u^2 - 6u)(2x)\right|_{\substack{x=-1 \\ u=3}} \\
&= [3(3)^2 - 6(3)][2(-1)] = (9)(-2) = -18
\end{aligned}$$

Ambos métodos producen el resultado correcto, pero como es más fácil sustituir números que expresiones algebraicas, casi siempre es preferible usar el segundo método (numérico), a menos que por alguna razón se necesite obtener la derivada de la función $\frac{dy}{dx}$ en términos sólo de x. En el ejemplo 2.4.2, se emplea el método numérico para evaluar una derivada calculada por la regla de la cadena para determinar la pendiente de una recta tangente.

EJEMPLO | 2.4.2

Considere la función $y = \frac{u}{u + 1}$, donde $u = 3x^2 - 1$.

a) Utilice la regla de la cadena para encontrar $\frac{dy}{dx}$.

www.FreeLibros.com

b) Determine una ecuación para la recta tangente a la gráfica de $y(x)$ en el punto donde $x = 1$.

Solución

a) Se calcula

$$\frac{dy}{du} = \frac{(u+1)(1) - u(1)}{(u+1)^2} = \frac{1}{(u+1)^2} \qquad \textit{regla del cociente}$$

y

$$\frac{du}{dx} = 6x$$

Según la regla de la cadena, se sigue que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \left[\frac{1}{(u+1)^2}\right](6x) = \frac{6x}{(u+1)^2}$$

b) Para encontrar una ecuación para la recta tangente a la gráfica de $y(x)$ en $x = 1$ se necesita conocer el valor de y, así como la pendiente en el punto de tangencia. Como

$$u(1) = 3(1)^2 - 1 = 2$$

el valor de y cuando $x = 1$ es

$$y(1) = \frac{(2)}{(2)+1} = \frac{2}{3} \qquad \textit{sustituya } u(1) = 2 \textit{ en } u$$

y la pendiente es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=1\\u=2}} = \frac{6(1)}{(2+1)^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \qquad \begin{matrix}\textit{sustituya } x = 1\\ \textit{y } u(1) = 2 \textit{ en } u\end{matrix}$$

Por tanto, aplicando la fórmula punto-pendiente para la ecuación de una recta, se tiene que la recta tangente a la gráfica de $y(x)$ en el punto donde $x = 1$ tiene ecuación

$$\frac{y - 2/3}{x - 1} = \frac{2}{3}$$

o, de forma equivalente, $y = \frac{2}{3}x$.

En muchos problemas de la vida práctica se presenta una magnitud como función de una variable, que a su vez se puede escribir como función de una segunda variable, y el objetivo es determinar la razón de cambio de la magnitud original con respecto de la segunda variable. Estos problemas se pueden resolver usando la regla de la cadena. A continuación se presenta un ejemplo.

EJEMPLO | 2.4.3

El costo de producción de x unidades de cierto producto es $C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4x + 53$ dólares, y el nivel de la producción durante t horas en una línea de producción particular es $x(t) = 0.2t^2 + 0.03t$ unidades. ¿A qué razón está cambiando el costo con respecto al tiempo después de 4 horas?

www.FreeLibros.com

Solución

Se calcula

$$\frac{dC}{dx} = \frac{2}{3}x + 4 \qquad \text{y} \qquad \frac{dx}{dt} = 0.4t + 0.03$$

por tanto, de acuerdo con la regla de la cadena

$$\frac{dC}{dt} = \frac{dC}{dx}\frac{dx}{dt} = \left(\frac{2}{3}x + 4\right)(0.4t + 0.03)$$

Cuando $t = 4$, el nivel de producción es

$$x(4) = 0.2(4)^2 + 0.03(4) = 3.32 \text{ unidades}$$

y

$$\frac{dC}{dt} = \left[\frac{2}{3}(3.32) + 4\right][0.4(4) + 0.03] = 10.1277$$

Así, después de 4 horas, el costo se está incrementando a una razón de aproximadamente \$10.13 por hora.

Algunas veces, cuando se trata con una función compuesta $y = f(g(x))$, puede ser útil considerar a f la función "externa" y a g la función "interna", como se indica a continuación:

$$y = \underset{\text{función "externa"}}{f}(\underset{\text{función "interna"}}{g(x)})$$

Entonces, la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$

indica que *la derivada de $y = f(g(x))$ con respecto a x está dada por la derivada de la función externa, evaluada en la función interna, multiplicada por la derivada de la función interna.* En el ejemplo 2.4.4 se enfatiza dicha interpretación empleando un "cuadro" ($\square$) para indicar la ubicación y el papel de la función interna al calcular una derivada por la regla de la cadena.

EJEMPLO | 2.4.4

Derive la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$

Solución

La forma de la función es

$$f(x) = (\square)^{1/2}$$

donde el cuadro $\square$ contiene la expresión $x^2 + 3x + 2$. Entonces,

$$(\square)' = (x^2 + 3x + 2)' = 2x + 3$$

y de acuerdo con la regla de la cadena, la derivada de la función compuesta $f(x)$ es

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(\square)^{-1/2}(\square)' \\ &= \frac{1}{2}(\square)^{-1/2}(2x + 3) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 + 3x + 2)^{-1/2}(2x + 3) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 2}} \end{aligned}$$

---

www.FreeLibros.com

Regla general de la potencia

En la sección 2.2 se estudió la regla

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

para derivar funciones de potencia. Al combinar esta regla con la regla de la cadena, se obtiene la regla siguiente para derivar funciones de la forma general $[h(x)]^n$.

Regla general de la potencia Para cualquier número real n y cualquier función derivable h,

$$\frac{d}{dx}[h(x)]^n = n[h(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}[h(x)]$$

Para obtener la regla general de la potencia, considere $[h(x)]^n$ como la función compuesta

$$[h(x)]^n = g[h(x)] \quad \text{donde } g(u) = u^n$$

Entonces,

$$g'(u) = nu^{n-1} \qquad \text{y} \qquad h'(x) = \frac{d}{dx}[h(x)]$$

y, mediante la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dx}[h(x)]^n = \frac{d}{dx}g[h(x)] = g'[h(x)]h'(x) = n[h(x)]^{n-1}\frac{d}{dx}[h(x)]$$

En los ejemplos 2.4.5 a 2.4.7 se ilustra el uso de la regla general de la potencia.

EJEMPLO | 2.4.5

Derive la función $f(x) = (2x^4 - x)^3$.

Solución

Una forma de resolver este problema es expandir la función y escribirla como

$$f(x) = 8x^{12} - 12x^9 + 6x^6 - x^3$$

para luego derivar este polinomio término a término para obtener

$$f'(x) = 96x^{11} - 108x^8 + 36x^5 - 3x^2$$

Pero observe cuán fácil es emplear la regla general de la potencia. De acuerdo con esta regla,

$$f'(x) = \left[3(2x^4 - x)^2\right]\frac{d}{dx}[2x^4 - x] = 3(2x^4 - x)^2(8x^3 - 1)$$

¡Este método no sólo es más fácil, sino que incluso la respuesta se obtiene en forma factorizada!

En el siguiente ejemplo se escribe la solución para el ejemplo 2.4.4 en forma más compacta con ayuda de la regla general de la potencia.

EJEMPLO | 2.4.6

Derive la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$.

www.FreeLibros.com

Solución

Reescriba la función como $f(x) = (x^2 + 3x + 2)^{1/2}$ y aplique la regla general de la potencia:

$$f'(x) = \left[\frac{1}{2}(x^2 + 3x + 2)^{-1/2}\right]\frac{d}{dx}[x^2 + 3x + 2]$$
$$= \frac{1}{2}(x^2 + 3x + 2)^{-1/2}(2x + 3)$$
$$= \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 2}}$$

EJEMPLO | 2.4.7

Derive la función $f(x) = \dfrac{1}{(2x + 3)^5}$.

Solución

Aunque se puede emplear la regla del cociente, es más fácil escribir la función como

$$f(x) = (2x + 3)^{-5}$$

y aplicar la regla general de la potencia para obtener

$$f'(x) = \left[-5(2x + 3)^{-6}\right]\frac{d}{dx}[2x + 3] = -5(2x + 3)^{-6}(2) = -\frac{10}{(2x + 3)^6}$$

Con frecuencia se utiliza la regla de la cadena junto con otras reglas estudiadas en las secciones 2.2 y 2.3. El ejemplo 2.4.8 incluye la regla del producto.

EJEMPLO | 2.4.8

Derive la función $f(x) = (3x + 1)^4(2x - 1)^5$ y simplifique su respuesta.

Solución

Primero aplique la regla del producto para obtener

$$f'(x) = (3x + 1)^4\frac{d}{dx}[(2x - 1)^5] + (2x - 1)^5\frac{d}{dx}[(3x + 1)^4]$$

Continúe aplicando la regla general de la potencia a cada término:

$$f'(x) = (3x + 1)^4[5(2x - 1)^4(2)] + (2x - 1)^5[4(3x + 1)^3(3)]$$
$$= 10(3x + 1)^4(2x - 1)^4 + 12(2x - 1)^5(3x + 1)^3$$

Finalmente, simplifique la respuesta factorizando:

$$f'(x) = 2(3x + 1)^3(2x - 1)^4[5(3x + 1) + 6(2x - 1)]$$
$$= 2(3x + 1)^3(2x - 1)^4[15x + 5 + 12x - 6]$$
$$= 2(3x + 1)^3(2x - 1)^4(27x - 1)$$

EJEMPLO | 2.4.9

Determine la segunda derivada de la función $f(x) = \dfrac{3x - 2}{(x - 1)^2}$.

www.FreeLibros.com

Solución

Utilizando la regla del cociente, junto con la regla general de la potencia (aplicada a $(x-1)^2$), se obtiene

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(3) - (3x-2)[2(x-1)(1)]}{(x-1)^4}$$
$$= \frac{(x-1)[3(x-1) - 2(3x-2)]}{(x-1)^4}$$
$$= \frac{3x - 3 - 6x + 4}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{1-3x}{(x-1)^3}$$

Al emplear de nuevo la regla del cociente, esta vez aplicando la regla general de la potencia a $(x-1)^3$, se determina que

$$f''(x) = \frac{(x-1)^3(-3) - (1-3x)[3(x-1)^2(1)]}{(x-1)^6}$$
$$= \frac{-3(x-1)^2[(x-1) + (1-3x)]}{(x-1)^6}$$
$$= \frac{-3(-2x)}{(x-1)^4} = \frac{6x}{(x-1)^4}$$

¡EXPLORE!

En la mayoría de las calculadoras graficadoras se puede calcular el valor de una derivada en un punto. Para ilustrar lo anterior, introduzca la función $C(x) = \sqrt{[.5(3.1 + .1x^2)^2 + 17]}$ en **Y1** del editor de ecuaciones y grafique empleando una pantalla estándar **ZOOM**. Encuentre el comando dy/dx mediante **CALC** (2nd **TRACE**). Luego presione 3 y **ENTER** para obtener el valor de la derivada. Se puede trazar la recta tangente a la curva en X = 3, por medio de la tecla **DRAW** (2nd **PRGM**), presionando 3 y luego **ENTER**, para obtener la ecuación de la recta tangente con el valor adecuado de la pendiente.

EJEMPLO | 2.4.10

Un estudio ambiental de cierta comunidad suburbana sugiere que el nivel diario promedio de monóxido de carbono en el aire será de $c(p) = \sqrt{0.5p^2 + 17}$ partes por millón, cuando la población sea p miles. Se estima que dentro de t años la población de la comunidad será $p(t) = 3.1 + 0.1t^2$ miles. ¿A qué razón estará cambiando el nivel de monóxido de carbono con respecto al tiempo, dentro de 3 años?

Solución

El objetivo es determinar $\frac{dc}{dt}$ cuando $t = 3$. Como

$$\frac{dc}{dp} = \frac{1}{2}(0.5p^2 + 17)^{-1/2}[0.5(2p)] = \frac{1}{2}p(0.5p^2 + 17)^{-1/2}$$

y

$$\frac{dp}{dt} = 0.2t$$

de la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{dc}{dt} = \frac{dc}{dp}\frac{dp}{dt} = \frac{1}{2}p(0.5p^2 + 17)^{-1/2}(0.2t) = \frac{0.1pt}{\sqrt{0.5p^2 + 17}}$$

Cuando $t = 3$,

$$p(3) = 3.1 + 0.1(3)^2 = 4$$

por tanto

$$\frac{dc}{dt} = \frac{0.1(4)(3)}{\sqrt{0.5(4)^2 + 17}}$$
$$= \frac{1.2}{\sqrt{25}} = \frac{1.2}{5} = 0.24 \text{ partes por millón por año}$$

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 2.4.11

El gerente de una firma de electrodomésticos determina que cuando se fija el precio de las licuadoras en p dólares por pieza, la cantidad mensual vendida se puede modelar por

$$D(p) = \frac{8\,000}{p}$$

El gerente estima que dentro de t meses, el precio unitario de las licuadoras será $p(t) = 0.06t^{3/2} + 22.5$ dólares. ¿A qué razón estará cambiando la demanda mensual de licuadoras, $D(p)$, dentro de 25 meses? ¿En ese momento está aumentando o disminuyendo?

Solución

Se desea calcular $\frac{dD}{dt}$ cuando $t = 25$. Se tiene

$$\frac{dD}{dp} = \frac{d}{dp}\left[\frac{8{,}000}{8\,000}\right] = \frac{-8\,000}{p^2}$$

y

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}[0.06t^{3/2} + 22.5] = 0.06\left(\frac{3}{2}t^{1/2}\right) = 0.09t^{1/2}$$

por tanto, de la regla de la cadena se sigue que

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dD}{dp}\frac{dp}{dt} = \left[\frac{-8\,000}{p^2}\right](0.09t^{1/2})$$

Cuando $t = 25$, el precio unitario es

$$p(25) = 0.06(25)^{3/2} + 22.5 = 30 \text{ dólares}$$

y se tiene

$$\left.\frac{dD}{dt}\right|_{\substack{t=25\\p=30}} = \left[\frac{-8\,000}{30^2}\right][0.09(25)^{1/2}] = -4$$

Es decir, dentro de 25 meses, la demanda de licuadoras cambiará a una razón de 4 unidades por mes, e irá disminuyendo, porque dD/dt es negativa.

PROBLEMAS | 2.4

En los problemas 1 a 10 utilice la regla de la cadena para calcular la derivada $\frac{dy}{dx}$, *y simplifique su respuesta.*

1. $y = u^2 + 1;\ u = 3x - 2$

2. $y = 2u^2 - u + 5;\ u = 1 - x^2$

3. $y = \sqrt{u};\ u = x^2 + 2x - 3$

4. $y = u^2 + 2u - 3;\ u = \sqrt{x}$

5. $y = \frac{1}{u^2};\ u = x^2 + 1$

6. $y = \frac{1}{u};\ u = 3x^2 + 5$

7. $y = \frac{1}{\sqrt{u}};\ u = x^2 - 9$

8. $y = u^2 + u - 2;\ u = \frac{1}{x}$

www.FreeLibros.com

9. $y = \dfrac{1}{u-1}$; $u = x^2$

10. $y = u^2$; $u = \dfrac{1}{x-1}$

En los problemas 11 a 16 utilice la regla de la cadena para calcular la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ *para el valor dado de* x.

11. $y = 3u^4 - 4u + 5$; $u = x^3 - 2x - 5$ para $x = 2$

12. $y = u^5 - 3u^2 + 6u - 5$; $u = x^2 - 1$ para $x = 1$

13. $y = \sqrt{u}$; $u = x^2 - 2x + 6$ para $x = 3$

14. $y = 3u^2 - 6u + 2$; $u = \dfrac{1}{x^2}$ para $x = \dfrac{1}{3}$

15. $y = \dfrac{1}{u}$; $u = 3 - \dfrac{1}{x^2}$ para $x = \dfrac{1}{2}$

16. $y = \dfrac{1}{u+1}$; $u = x^3 - 2x + 5$ para $x = 0$

En los problemas 17 a 36 derive la función dada y simplifique su respuesta.

17. $f(x) = (2x + 1)^4$

18. $f(x) = \sqrt{5x^6 - 12}$

19. $f(x) = (x^5 - 4x^3 - 7)^8$

20. $f(t) = (3t^4 - 7t^2 + 9)^5$

21. $f(t) = \dfrac{1}{5t^2 - 6t + 2}$

22. $f(x) = \dfrac{2}{(6x^2 + 5x + 1)^2}$

23. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}}$

24. $f(s) = \dfrac{1}{\sqrt{5s^3 + 2}}$

25. $f(x) = \dfrac{3}{(1 - x^2)^4}$

26. $f(x) = \dfrac{2}{3(5x^4 + 1)^2}$

27. $h(s) = (1 + \sqrt{3s})^5$

28. $g(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{3x}}$

29. $f(x) = (x + 2)^3(2x - 1)^5$

30. $f(x) = 2(3x + 1)^4(5x - 3)^2$

31. $G(x) = \sqrt{\dfrac{3x + 1}{2x - 1}}$

32. $f(y) = \left(\dfrac{y + 2}{2 - y}\right)^3$

33. $f(x) = \dfrac{(x + 1)^5}{(1 - x)^4}$

34. $F(x) = \dfrac{(1 - 2x)^2}{(3x + 1)^3}$

35. $f(y) = \dfrac{3y + 1}{\sqrt{1 - 4y}}$

36. $f(x) = \dfrac{1 - 5x^2}{\sqrt[3]{3 + 2x}}$

En los problemas 37 a 40 determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f para el valor dado de x.

37. $f(x) = (3x^2 + 1)^2$; $x = -1$

38. $f(x) = (x^2 - 3)^5(2x - 1)^3$; $x = 2$

39. $f(x) = \dfrac{1}{(2x - 1)^6}$; $x = 1$

40. $f(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^3$; $x = 3$

En los problemas 41 a 46 encuentre todos los valores de x donde la recta tangente a $y = f(x)$ *es horizontal.*

41. $f(x) = (x^2 + x)^2$

42. $f(x) = x^3(2x^2 + x - 3)^2$

43. $f(x) = \dfrac{x}{(3x - 2)^2}$

44. $f(x) = \dfrac{2x + 5}{(1 - 2x)^3}$

45. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$

46. $f(x) = (x - 1)^2(2x + 3)^3$

En los problemas 47 y 48 derive la función dada $f(x)$ *por medio de dos métodos distintos, primero empleando la regla general de la potencia y luego utilizando la regla del producto. Muestre que las dos respuestas son iguales.*

47. $f(x) = (3x + 5)^2$

48. $f(x) = (7 - 4x)^2$

www.FreeLibros.com

En los problemas 49 a 54 encuentre la segunda derivada de la función dada.

49. $f(x) = (3x + 1)^5$

50. $f(t) = \dfrac{2}{5t + 1}$

51. $h(t) = (t^2 + 5)^8$

52. $y = (1 - 2x^3)^4$

53. $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$

54. $f(u) = \dfrac{1}{(3u^2 - 1)^2}$

55. INGRESOS ANUALES Los ingresos anuales brutos de cierta compañía son $f(t) = \sqrt{10t^2 + t + 236}$ miles de dólares, t años después de su formación en enero del 2000.

a) ¿A qué razón crecieron los ingresos anuales brutos de la compañía en enero de 2005?

b) ¿A qué razón porcentual crecieron los ingresos anuales brutos en enero de 2005?

56. COSTO DE FABRICACIÓN En cierta fábrica, el costo total de fabricar q unidades es $C(q) = 0.2q^2 + q + 900$ dólares. Se ha determinado que se fabrican aproximadamente $q(t) = t^2 + 100t$ unidades durante las primeras t horas de una corrida de producción. Calcule la razón a la que cambia el costo total de fabricación con respecto al tiempo 1 hora después de iniciar la producción.

57. DEMANDA DEL CONSUMIDOR Un importador de café brasileño estima que los consumidores locales comprarán aproximadamente $D(p) = \dfrac{4\,374}{p^2}$ libras de café por semana cuando el precio sea p dólares por libra. También se ha estimado que dentro de t semanas, el precio del café brasileño será $p(t) = 0.02t^2 + 0.1t + 6$ dólares por libra.

a) ¿A qué razón está cambiando la razón de la demanda de café con respecto al precio cuando el precio sea \$9?

b) ¿A qué razón está cambiando la demanda de café con respecto al tiempo dentro de 10 semanas? ¿En ese momento la demanda estará creciendo o decreciendo?

58. CONTAMINACIÓN DEL AIRE Se calcula que dentro de t años, la población de cierta comunidad suburbana será $p(t) = 20 - \dfrac{6}{t + 1}$ miles. Un estudio ambiental indica que el nivel diario promedio de monóxido de carbono en el aire será $c(p) = 0.5\sqrt{p^2 + p + 58}$ partes por millón cuando la población sea p miles.

a) ¿A qué razón cambiará el nivel de monóxido de carbono respecto de la población cuando la población sea de 18 000 habitantes?

b) ¿A qué razón cambiará el nivel de monóxido de carbono respecto al tiempo dentro de 2 años? ¿En ese momento el nivel estará creciendo o decreciendo??

59. DEMANDA DEL CONSUMIDOR Cuando cierto artículo se vende a p dólares por unidad, los consumidores compran $D(p) = \dfrac{40\,000}{p}$ unidades por mes. Se estima que dentro de t meses, el precio del artículo será $p(t) = 0.4t^{3/2} + 6.8$ dólares por unidad. ¿A qué razón porcentual cambiará la demanda mensual del artículo respecto al tiempo dentro de 4 meses a partir de este momento?

60. COMPORTAMIENTO ANIMAL En un artículo de investigación,[6] V. A. Tucker y K. Schmidt-Koenig demostraron que una especie de periquito australiano gasta energía (calorías por gramo de masa por kilómetro) según la fórmula

$$E = \frac{1}{v}[0.074(v - 35)^2 + 22]$$

donde v es la velocidad del ave (en km/h). Determine una fórmula para la razón de cambio de E respecto a la velocidad v.

61. CRECIMIENTO DE MAMÍFEROS Las observaciones demuestran que la longitud L, en milímetros (mm), de la nariz a la punta de la cola de un tigre siberiano se puede calcular utilizando la función $L = 0.25w^{2.6}$, donde w es el peso del tigre en kilogramos (kg). Además, cuando un tigre es menor a 6 meses, su peso (en kg) se puede calcular en términos de su edad A, en días, mediante la función $w = 3 + 0.21A$.

[6] V. A. Tucker y K. Schmitdt-Koenig, "Flight Speeds of Birds in Relation to Energetics and Wind Directions", *The Auk*, Vol. 88 (1971), páginas 97-107.

www.FreeLibros.com

a) ¿A qué razón se incrementa la longitud del tigre siberiano respecto de su peso cuando pesa 60 kg?

b) ¿Cuál es la longitud de un tigre siberiano cuando tiene 100 días de edad? ¿A ésta edad, a qué razón se incrementa su longitud respecto al tiempo?

62. CONTAMINACIÓN DEL AGUA Cuando se introduce materia orgánica en un volumen de agua, el contenido de oxígeno del agua se reduce temporalmente por oxidación. Suponga que t días después de descargar aguas residuales sin tratar en un lago, la proporción del contenido usual de oxígeno que permanece en el lago está dada por la función

$$P(t) = 1 - \frac{12}{t + 12} + \frac{144}{(t + 12)^2}$$

a) ¿A qué razón cambia la proporción de oxígeno $P(t)$ después de 10 días? ¿En ese momento la proporción está creciendo o decreciendo?

b) ¿Después de 15 días la proporción de oxígeno está creciendo o decreciendo?

c) Si no se descargan más aguas residuales, ¿qué se espera que suceda con la proporción de oxígeno? Utilice un límite para verificar su conjetura.

63. CRECIMIENTO DE INSECTOS El crecimiento de ciertos insectos varía con la temperatura. Suponga que una especie particular de insectos crece de tal forma que cuando la temperatura es T°C, el volumen de un individuo es

$$V(T) = 0.41(-0.01T^2 + 0.4T + 3.52) \quad \text{cm}^3$$

y su masa está dada por

$$m(V) = \frac{0.39V}{1 + 0.09V} \text{ gm}$$

a) Encuentre la razón de cambio del volumen del insecto con respecto a la temperatura.

b) Encuentre la razón de cambio de la masa del insecto con respecto al volumen.

c) Cuando $T = 10$°C, ¿cuál es el volumen del insecto? ¿A qué razón cambia la masa del insecto con respecto a la temperatura, cuando $T = 10$°C?

64. INTERÉS COMPUESTO Si se invierten \$10 000 a una tasa anual r (expresada como decimal) compuesta semanalmente, la cantidad total (capital P más el interés) acumulada después de 10 años está dada por la fórmula

$$A = 10\,000\left(1 + \frac{r}{52}\right)^{520}$$

a) Halle la razón de cambio de A con respecto a r.

b) Halle la razón de cambio porcentual de A respecto a r cuando $r = 0.05$ (es decir, 5%).

65. CURVAS DE APRENDIZAJE Cuando usted estudia por primera vez un tema, o comienza a practicar una habilidad, es posible que usted no sea muy diestro, pero con el tiempo se aproximará a los límites de su destreza. Un modelo para describir este comportamiento usa la función

$$T = aL\sqrt{L - b}$$

donde T es el tiempo requerido para que una persona aprenda los temas de una lista de L temas, y a y b son constantes positivas.

a) Encuentre la derivada $\frac{dT}{dL}$ e interprétela en términos del modelo de aprendizaje.

b) Lea y analice en un párrafo un artículo sobre cómo se pueden emplear las curvas de aprendizaje para estudiar la productividad de un trabajador.[7]

66. Un objeto se mueve a lo largo de una recta con velocidad

$$v(t) = (2t + 9)^2(8 - t)^3 \quad \text{para } 0 \le t \le 5$$

a) Encuentre la aceleración $a(t)$ del objeto en el momento t.

b) ¿Cuándo el objeto está estacionario, para $0 \le t \le 5$?
Determine la aceleración en cada momento.

c) ¿Cuándo es cero la aceleración, para $0 \le t \le 5$? Determine la velocidad en cada momento.

d) Utilice la instrucción de graficación de su calculadora para dibujar las gráficas de la velocidad $v(t)$ y de la aceleración $a(t)$ en la misma pantalla.

e) Se dice que el objeto esta *acelerando* cuando $v(t)$ y $a(t)$ tienen el mismo signo (ambos negativos o positivos). Utilice su calculadora para determinar cuándo ocurre esto (si es que ocurre) para $0 \le t \le 5$.

67. Un objeto se mueve a lo largo de una recta de tal forma que su posición en el momento t está dada por

$$s(t) = (3 + t - t^2)^{3/2} \quad \text{para } 0 \le t \le 5$$

a) ¿Cuál es la velocidad del objeto $v(t)$ y su aceleración $a(t)$ en un momento t?

b) ¿Cuándo el objeto está estacionario para $0 \le t \le 2$? ¿Dónde está el objeto y cuál es su aceleración en cada momento ?

c) ¿Cuándo es cero la aceleración para $0 \le t \le 2$? ¿Cuál es la posición y cuál la velocidad del objeto en cada uno de estos momentos?

[7] Puede iniciar su investigación consultando a Philip E. Hicks, *Industrial Engineering and Management: A New Perspective*, 2ª. ed., capítulo 6, McGraw-Hill, Inc., Nueva York, 1994, páginas 267-293.

www.FreeLibros.com

d) Utilice la instrucción de graficación de su calculadora para trazar las graficas de la posición del objeto $s(t)$, la velocidad $v(t)$, y la aceleración $a(t)$ en la misma pantalla, para $0 \leq t \leq 2$.

e) Se dice que el objeto está *desacelerando* cuando $v(t)$ y $a(t)$ tienen signos opuestos (uno positivo, el otro negativo). Utilice su calculadora para determinar cuándo ocurre esto (si es que ocurrre), para $0 \leq t \leq 2$.

68. Suponga que $L(x)$ es una función con la propiedad de que $L'(x) = \dfrac{1}{x}$. Utilice la regla de la cadena para determinar las derivadas de las siguientes funciones y simplifique sus respuestas.

a) $f(x) = L(x^2)$

b) $f(x) = L\left(\dfrac{1}{x}\right)$

c) $f(x) = L\left(\dfrac{2}{3\sqrt{x}}\right)$

d) $f(x) = L\left(\dfrac{2x+1}{1-x}\right)$

69. Demuestre la regla general de la potencia para $n = 2$, empleando la regla del producto para calcular $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = [h(x)]^2$.

70. Demuestre la regla general de la potencia para $n = 3$, empleando la regla del producto y el resultado del problema 69 para calcular $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = [h(x)]^3$. [*Sugerencia:* comience escribiendo y como $h(x)[h(x)]^2$].

71. Introduzca la función $f(x) = \sqrt[3]{3.1x^2 + 19.4}$ en su calculadora graficadora. Utilice la instrucción de derivación numérica de su calculadora para calcular $f'(1)$ y $f'(-3)$. Explore la gráfica de $f(x)$. ¿Cuántas tangentes horizontales tiene la gráfica?

72. Introduzca la función $f(x) = (2.7x^3 - 3\sqrt{x} + 5)^{2/3}$ en su calculadora graficadora. Utilice la instrucción de derivación numérica de la calculadora para calcular $f'(0)$ y $f'(4.3)$. Analice la gráfica de $f(x)$. ¿Cuántas tangentes horizontales tiene?

SECCIÓN 2.5 Análisis marginal y aproximaciones por incrementos

El cálculo es una herramienta importante en la economía. En el capítulo 1 se analizaron, en forma breve, ventas y producción, donde se introdujeron magnitudes económicas como costo, ingreso, utilidad y oferta, demanda y equilibrio de mercado. En esta sección, se utilizará la derivada para explorar razónes de cambio que involucran magnitudes económicas.

Análisis marginal

En economía,[8] el uso de la derivada para aproximar el cambio que ocurre en la cantidad como resultado del incremento de la producción en una unidad se denomina **análisis marginal**. Por ejemplo, suponga que $C(x)$ es el costo total por producir x unidades de un cierto artículo. Si actualmente se producen x_0 unidades, entonces la derivada

$$C'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x_0 + h) - C(x_0)}{h}$$

recibe el nombre de **costo marginal** de producción de x_0 unidades. El valor límite que define esta derivada es aproximadamente igual al cociente incremental de $C(x)$ cuando $h = 1$; es decir,

$$C'(x_0) \approx \frac{C(x_0 + 1) - C(x_0)}{1} = C(x_0 + 1) - C(x_0)$$

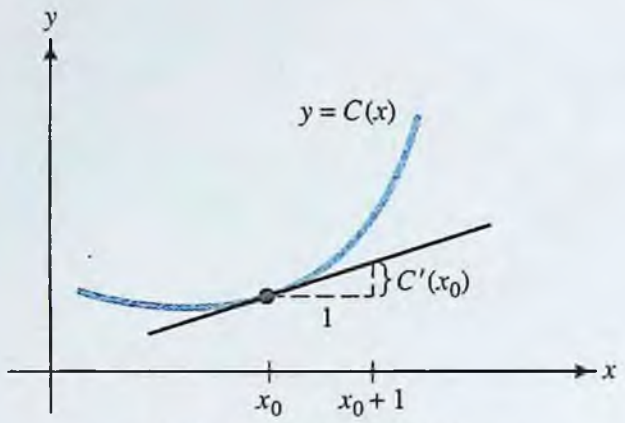
[8] Economistas y administradores consideran los temas que se van a analizar desde perspectivas ligeramente diferentes. Una buena fuente para el punto de vista de los economistas es el libro de J. M. Henderson y R. E. Quandt, *Microeconomic Theory*. Nueva York, McGraw-Hill, 1986. El punto de vista de los administradores se puede encontrar en D. Salvatore, *Management Economics*, Nueva York, McGraw-Hill, 1989, que es una excelente fuente de aplicaciones prácticas y de estudios de caso.

www.FreeLibros.com

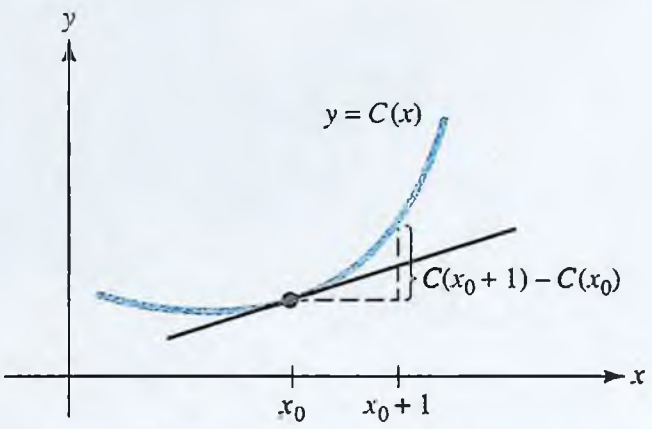
donde el símbolo ≈ se utiliza para indicar que ésta es una aproximación, no una igualdad. Pero $C(x_0 + 1) - C(x_0)$ es justamente el costo de incrementar el nivel de producción en una unidad, de x_0 a $x_0 + 1$. Para resumir:

Costo marginal ■ Si $C(x)$ es el costo total de producción de x unidades de un cierto artículo, entonces el **costo marginal** de producción de x_0 unidades es la derivada $C'(x_0)$, que aproxima el costo adicional $C(x_0 + 1) - C(x_0)$ de incrementar el nivel de producción en una unidad, de x_0 a $x_0 + 1$.

En la figura 2.14 se muestra la relación geométrica entre el costo marginal $C'(x_0)$ y el costo adicional $C(x_0 + 1) - C(x_0)$.



a) El costo marginal $C'(x_0)$



b) El costo adicional, $C(x_0 + 1) - C(x_0)$ de incrementar la producción de x_0 a $x_0 + 1$

FIGURA 2.14 Costo marginal $C'(x_0)$ aproxima $C(x_0 + 1) - C(x_0)$.

El análisis anterior no sólo se aplica al costo, sino a otras magnitudes económicas. A continuación se presenta un resumen de lo que se entiende por ingreso marginal y utilidad marginal, y cómo se pueden utilizar estas magnitudes marginales para calcular cambios unitarios en el ingreso y la utilidad.

Ingreso marginal y utilidad marginal ■ Suponga que $R(x)$ es el ingreso que se genera cuando se producen x unidades de un artículo, y que $P(x)$ es la utilidad correspondiente. Cuando se producen $x = x_0$ unidades:

El **ingreso marginal** es $R'(x_0)$. Éste es una aproximación de $R(x_0 + 1) - R(x_0)$, que es el ingreso adicional generado por la producción de una unidad más.

La **utilidad marginal** es $P'(x_0)$. Éste es una aproximación de $P(x_0 + 1) - P(x_0)$, que es la utilidad adicional obtenida por la producción de una unidad más.

En el ejemplo 2.5.1 se ilustra el análisis marginal.

EJEMPLO | 2.5.1

Un fabricante estima que cuando se producen x unidades de cierto artículo, el costo total es $C(x) = \frac{1}{8}x^2 + 3x + 98$ dólares, y además, que todas las x unidades se venderán, cuando el precio sea $p(x) = \frac{1}{3}(75 - x)$ dólares por unidad.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Considere el ejemplo 2.5.1. Grafique juntas la función de costo $C(x)$ y la función de ingreso $R(x)$ empleando la pantalla [0, 20]10 por [0, 400]50. Grafique la recta tangente a $C(x)$ en el valor X = 8. Observe por qué el costo marginal, representado por la recta tangente, es una buena aproximación para $C(x)$ en X = 8. Ahora trace la recta tangente a $R(x)$ en X = 8, y también compruebe que la utilidad marginal es una buena aproximación a $R(x)$ próxima a X = 8.

a) Encuentre el costo marginal y el ingreso marginal.

b) Utilice el costo marginal para calcular el costo de producir la novena unidad.

c) ¿Cuál es el costo realde producir la novena unidad?

d) Utilice el ingreso marginal para calcular el ingreso derivado de la venta de la novena unidad.

e) ¿Cuál es el ingreso real derivado de la venta de la novena unidad?

Solución

a) El costo marginal es $C'(x) = \frac{1}{4}x + 3$. Como x unidades del artículo se venden a un precio de $p(x) = \frac{1}{3}(75 - x)$ dólares por unidad, el ingreso total es

$$R(x) = (\text{número de unidades vendidas})(\text{precio por unidad})$$

$$= xp(x) = x\left[\frac{1}{3}(75 - x)\right] = 25x - \frac{1}{3}x^2$$

El ingreso marginal es

$$R'(x) = 25 - \frac{2}{3}x$$

b) El costo de producir la novena unidad es el cambio en el costo cuando x se incrementa de 8 a 9 y se puede calcular usando el costo marginal

$$C'(8) = \frac{1}{4}(8) + 3 = \$5$$

c) El costo real por producir la novena unidad es

$$C(9) - C(8) = \$5.13$$

que se aproxima razonablemente bien mediante el costo marginal $C'(8) = \$5$.

d) El ingreso obtenido por la venta de la novena unidad se aproxima usando del ingreso marginal

$$R'(8) = 25 - \frac{2}{3}(8) = \$19.67$$

e) El ingreso real obtenido por la venta de la novena unidad es

$$R(9) - R(8) = \$19.33$$

En el ejemplo 2.5.2 se emplea una magnitud económica marginal para analizar un proceso de producción.

EJEMPLO | 2.5.2

Un fabricante de cámaras digitales estima que cuando se producen x unidades, la utilidad total es

$$P(x) = -0.0035x^3 + 0.07x^2 + 25x - 200$$

miles de dólares.

www.FreeLibros.com

a) Encuentre la función de utilidad marginal.

b) ¿Cuál es la utilidad marginal cuando el nivel de producción es $x = 10$, $x = 50$ y $x = 80$?

c) Interprete estos resultados.

Solución

a) La utilidad marginal está dada por la derivada

$$\begin{aligned} P'(x) &= -0.0035(3x^2) + 0.07(2x) + 25 \\ &= -0.0105x^2 + 0.14x + 25 \end{aligned}$$

b) La utilidad marginal en $x = 10$, 50 y 80 es

$$P'(10) = -0.0105(10)^2 + 0.14(10) + 25 = 25.35$$
$$P'(50) = -0.0105(50)^2 + 0.14(50) + 25 = 5.75$$
$$P'(80) = -0.0105(80)^2 + 0.14(80) + 25 = -31$$

c) El hecho de que $P'(10) = 25.35$ significa que un incremento de 1 unidad en la producción, de 10 a 11 cientos de cámaras, aumenta la utilidad en aproximadamente 25.35 miles de dólares ($25 350), por tanto, el gerente quizá tome la decisión de incrementar la producción a este nivel. Sin embargo, como $P'(50) = 5.75$, si se incrementa el nivel de producción de 50 unidades a 51, la utilidad aumenta en sólo $5 750, esto sería un incentivo relativamente pequeño para que el gerente hiciera un cambio. Finalmente, como $P'(80) = -31$ es negativa, la utilidad en realidad *disminuye* en aproximadamente $31 000 si el nivel de producción se eleva de 80 a 81 unidades. En este caso, el gerente pudiera considerar disminuir el nivel de producción.

Aproximación por incrementos

El análisis marginal es un ejemplo importante de un procedimiento general de aproximación basado en que, como

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

entonces para h pequeña la derivada de $f'(x_0)$ es aproximadamente igual al cociente incremental

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Esta aproximación se indica escribiendo

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

o, de forma equivalente,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h$$

Para enfatizar que el incremento ocurre en la variable x, se escribe $h = \Delta x$ (se lee como "delta x"). A continuación se resume la fórmula de la aproximación incremental.

www.FreeLibros.com

Aproximación por incrementos ■ Si $f(x)$ es derivable en $x = x_0$ y Δx es un cambio pequeño en x, entonces

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

o, de forma equivalente, si $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, entonces

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$$

A continuación se presenta un ejemplo de cómo se puede emplear esta aproximación en economía.

EJEMPLO | 2.5.3

Suponga que el costo total en dólares por la fabricación de q unidades de cierto artículo es $\Delta q = 0.5$. Si el nivel actual de producción es 40 unidades, calcule cómo cambiará el costo total si se producen 40.5 unidades.

Solución

En este problema, el valor actual de producción es $q = 40$ y el cambio en la producción es $C(q) = 3q^2 + 5q + 10$. Usando la fórmula de la aproximación, el cambio correspondiente en costo es

$$\Delta C = C(40.5) - C(40) \approx C'(40)\Delta q = C'(40)(0.5)$$

Como

$$C'(q) = 6q + 5 \qquad \text{y} \qquad C'(40) = 6(40) + 5 = 245$$

se sigue que

$$\Delta C \approx [C'(40)](0.5) = 245(0.5) = \$122.50$$

Para practicar, calcule el cambio real en el costo causado por el incremento en el nivel de producción de 40 a 40.5 y compare su respuesta con la aproximación. ¿Es buena la aproximación?

¡EXPLORE!

Usando el ejemplo 2.5.4, introduzca el volumen $V = \frac{1}{6}\pi x^3$ en Y1, donde x es el diámetro del tumor esférico. Escriba Y2 = Y1(X + .05) − Y1(X) para calcular el cambio incremental en el volumen, y

Y3 = nDeriv(Y1, X, X)*(.05),

para el cambio diferencial en el volumen. Fije **TblStart** = 2.4 y ΔTbl = .05 en **TBLSET** (2nd **WINDOW**). Ahora examine los valores con la función **TABLE**, en particular para Y2 y Y3. Observe los resultados para X = 2.5. Ahora realice cálculos similares para la exactitud del volumen V, si el diámetro x se encuentra medido dentro del 1%.

Suponga que se desea calcular una cantidad Q empleando la fórmula $Q(x)$. Si el valor de x usado en el cálculo no es preciso, entonces su inexactitud se pasa o *propaga* al valor calculado de Q. En el ejemplo 2.5.4 se muestra cómo se puede calcular el **error propagado**.

EJEMPLO | 2.5.4

Durante un procedimiento médico, se calcula el tamaño de un tumor aproximadamente esférico midiendo su diámetro y se utiliza la fórmula $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ para calcular su volumen. Si el diámetro se mide como 2.5 cm con un error máximo del 2%, ¿qué tan exacta es la medida del volumen?

Solución

Una esfera de radio R y diámetro $x = 2R$ tiene un volumen

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi x^3$$

por tanto, el volumen utilizando el diámetro estimado $x = 2.5$ cm es

www.FreeLibros.com

$$V = \frac{1}{6}\pi(2.5)^3 \approx 8.181 \text{ cm}^3$$

El error cometido al calcular este volumen empleando el diámetro 2.5 cuando el diámetro real es $2.5 + \Delta x$ es

$$V = V(2.5 + \Delta x) - V(2.5) \approx V'(2.5)\Delta x$$

La medición del diámetro puede diferir hasta en 2%; es decir, hasta por $0.02(2.5) = 0.05$ cm, en cualquier dirección. De aquí, el error máximo en la medición del diámetro es $\Delta x = \pm 0.05$, y el error máximo correspondiente en el cálculo del volumen es

$$\text{Error máximo en el volumen} = \Delta V \approx [V'(2.5)](\pm 0.05)$$

Como

$$V'(x) = \frac{1}{6}\pi(3x^2) = \frac{1}{2}\pi x^2 \quad \text{y} \quad V'(2.5) = \frac{1}{2}\pi(2.5)^2 \approx 9.817$$

se sigue que

$$\text{Error máximo en el volumen} = (9.817)(\pm 0.05) \approx \pm 0.491$$

Así, en el peor de los casos, el cálculo del volumen como 8.181 cm^3 tiene un error de 0.491 cm^3; por tanto, el volumen real V debe satisfacer

$$7.690 \leq V \leq 8.672$$

En el ejemplo 2.5.5 está dado el cambio deseado en la función y el objetivo es calcular el cambio necesario correspondiente de la variable.

EJEMPLO | 2.5.5

La producción diaria en cierta fábrica es $Q(L) = 900L^{1/3}$ unidades, donde L denota el tamaño de la fuerza laboral medida en horas-trabajador. Actualmente, se emplean 1 000 horas-trabajador cada día. Utilice el cálculo para estimar el número de horas-trabajador adicionales que se necesitan para incrementar la producción diaria en 15 unidades.

Solución

Despejando ΔL en la fórmula de la aproximación

$$\Delta Q \approx Q'(L)\Delta L$$

con $\Delta Q = 15$ $L = 1\,000$ y $Q'(L) = 300L^{-2/3}$

se tiene $$15 \approx 300(1\,000)^{-2/3}\,\Delta L$$

o bien $$\Delta L \approx \frac{15}{300}(1\,000)^{2/3} = \frac{15}{300}(10)^2 = 5 \text{ horas-trabajador}$$

Aproximación del cambio porcentual

El **cambio porcentual** de una magnitud expresa el cambio de esa magnitud como un porcentaje de su tamaño antes del cambio. En particular,

$$\text{Cambio porcentual} = 100\,\frac{\text{cambio en cantidad}}{\text{tamaño de la cantidad}}$$

www.FreeLibros.com

Esta fórmula se puede combinar con la fórmula de la aproximación y escribir en notación funcional como sigue:

Fórmula de la aproximación para el cambio porcentual ■ Si Δx es un cambio (pequeño) en x, el cambio porcentual correspondiente de la función $f(x)$ es

$$\text{Cambio porcentual en } f = 100\frac{\Delta f}{f(x)} \approx 100\frac{f'(x)\Delta x}{f(x)}$$

EJEMPLO | 2.5.6

El PIB de cierto país fue $N(t) = t^2 + 5t + 200$ mil millones de dólares t años después de 1997. Utilice el cálculo para estimar el cambio porcentual del PIB durante el primer trimestre de 2005.

Solución

Utilice la fórmula

$$\text{Cambio porcentual de } N \approx 100\frac{N'(t)\Delta t}{N(t)}$$

con $t = 8$ $\Delta t = 0.25$ y $N'(t) = 2t + 5$

para obtener

$$\begin{aligned}\text{Cambio porcentual en } N &\approx 100\frac{N'(8)0.25}{N(8)}\\ &= 100\frac{[2(8) + 5](0.25)}{(8)^2 + 5(8) + 200}\\ &\approx 1.73\%\end{aligned}$$

Diferenciales

Algunas veces al incremento Δx se le llama el *diferencial de x* y se denota por dx, entonces la fórmula de la aproximación se puede escribir como $df \approx f'(x)\,dx$. Si $y = f(x)$, el *diferencial de y* se define como $dy = f'(x)\,dx$. Resumiendo:

Diferenciales ■ El **diferencial de *x*** es is $dx = \Delta x$, y si $y = f(x)$ es una función derivable de x, entonces $dy = f'(x)\,dx$ es el **diferencial de *y***.

EJEMPLO | 2.5.7

En cada caso, encuentre el diferencial de $y = f(x)$.

a) $f(x) = x^3 - 7x^2 + 2$

b) $f(x) = (x^2 + 5)(3 - x - 2x^2)$

Solución

a) $dy = f'(x)\,dx = [3x^2 - 7(2x)]\,dx = (3x^2 - 14x)\,dx$

b) Usando la regla del producto,

$$dy = f'(x)\,dx = [(x^2 + 5)(-1 - 4x) + (2x)(3 - x - 2x^2)]\,dx$$

www.FreeLibros.com

En la figura 2.15 se muestra una interpretación geométrica de la aproximación de Δy por medio del diferencial dy. Observe que, como la pendiente de la recta tangente en $P(x, f(x))$ es $f'(x)$, el diferencial $dy = f'(x)\,dx$ es la variación de altura de la tangente que corresponde a la variación de x a $x + \Delta x$. Por otro lado, Δy es la variación en la altura de la curva correspondiente a esa variación en x. De ahí que, aproximar Δy por medio del diferencial dy es lo mismo que aproximar la variación de la altura de una curva mediante la variación de la altura de la recta tangente. Si Δx es pequeña, es razonable esperar que esa sea una buena aproximación.

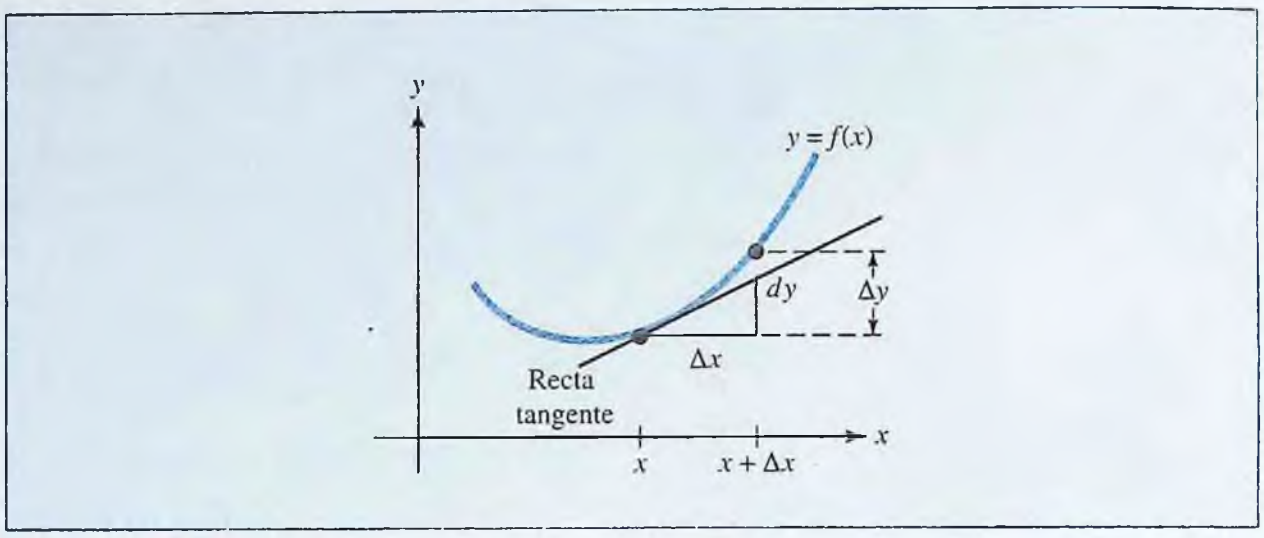


FIGURA 2.15 Aproximación de Δy por el diferencial dy.

PROBLEMAS | 2.5

ANÁLISIS MARGINAL *En los problemas 1 a 6 $C(x)$ es el costo total de producción de x unidades de cierto bien y $p(x)$ es el precio al cual se venderán todas las x unidades. Suponga que $p(x)$ y $C(x)$ están en dólares.*

a) Determine el costo marginal y el ingreso marginal.
b) Utilice el costo marginal para calcular el costo de producir la cuarta unidad.
c) Encuentre el costo real de producir la cuarta unidad.
d) Utilice el ingreso marginal para calcular el ingreso obtenido por la venta de la cuarta unidad.
e) Determine el ingreso real obtenido de la venta de la cuarta unidad.

1. $C(x) = \frac{1}{5}x^2 + 4x + 57; p(x) = \frac{1}{4}(36 - x)$

2. $C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3x + 67; p(x) = \frac{1}{5}(45 - x)$

3. $C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 39; p(x) = -x^2 - 4x + 80$

4. $C(x) = \frac{5}{9}x^2 + 5x + 73; p(x) = -x^2 - 2x + 33$

5. $C(x) = \frac{1}{4}x^2 + 43; p(x) = \frac{3 + 2x}{1 + x}$

6. $C(x) = \frac{2}{7}x^2 + 65; p(x) = \frac{12 + 2x}{3 + x}$

7. Estime cuánto cambiará la función $f(x) = x^2 - 3x + 5$ cuando x se incrementa de 5 a 5.3.

8. Estime cuánto cambiará la función
$f(x) = \frac{x}{x + 1} - 3$
cuando x disminuye de 4 a 3.8.

9. Calcule el cambio porcentual de la función $f(x) = x^2 + 2x - 9$ cuando x se incrementa de 4 a 4.3.

10. Calcule el cambio porcentual de la función
$f(x) = 3x + \frac{2}{x}$ cuando x disminuye de 5 a 4.6.

11. ANÁLISIS MARGINAL El costo total de un fabricante es $C(q) = 0.1q^3 - 0.5q^2 + 500q + 200$ dólares, donde q es el número de unidades producidas.

www.FreeLibros.com

a) Utilice el análisis marginal para calcular el costo de fabricación de la cuarta unidad.
b) Calcule el costo real de fabricación de la cuarta unidad.

12. ANÁLISIS MARGINAL El ingreso mensual total de un fabricante es $R(q) = 240q - 0.05q^2$ dólares, cuando se producen y venden q unidades durante el mes. Actualmente, el fabricante produce 80 unidades al mes y planea incrementar la producción mensual en 1 unidad.
a) Utilice el análisis marginal para calcular el ingreso adicional que se generará por la producción y venta de la unidad 81.
b) Utilice la función de utilidad para calcular el ingreso adicional real que se generará por la producción y venta de la unidad 81.

13. ANÁLISIS MARGINAL Suponga que el costo total en dólares de fabricar q unidades es $C(q) = 3q^2 + q + 500$.
a) Utilice el análisis marginal para calcular el costo de fabricación de la unidad 41.
b) Calcule el costo actual de fabricación de la unidad 41.

14. CONTAMINACIÓN DEL AIRE Un estudio del ambiente de cierta comunidad sugiere que dentro de t años, el nivel promedio de monóxido de carbono en el aire será $Q(t) = 0.05t^2 + 0.1t + 3.4$ partes por millón. Aproximadamente ¿cuánto cambiará el nivel de monóxido de carbono durante los próximos 6 meses?

15. CIRCULACIÓN DE PERIÓDICOS Se proyecta que dentro de t años, la circulación de un periódico local será $C(t) = 100t^2 + 400t + 5\,000$. Calcule la cantidad en que se incrementará la circulación durante los próximos 6 meses. [*Sugerencia:* el valor actual de la variable es $t = 0$.]

16. FABRICACIÓN El costo total de un fabricante es $C(q) = 0.1q^3 - 0.5q^2 + 500q + 200$ dólares cuando el nivel de producción es q unidades. El nivel actual de producción es 4 unidades, y el fabricante está planeando incrementarlo a 4.1. Calcule cómo cambiará el costo total como resultado del aumento.

17. FABRICACIÓN El ingreso mensual total de un fabricante es $R(q) = 240q - 0.05q^2$ dólares cuando se producen q unidades por mes. Actualmente, el fabricante produce 80 unidades al mes y planea disminuir la producción mensual en 0.65 unidades. Calcule cómo cambiará el ingreso mensual total como resultado de la reducción.

18. EFICIENCIA Un estudio de eficiencia del turno de la mañana de cierta fábrica indica que un trabajador promedio que llega las 8:00 a.m. habrá ensamblado $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$ radios de transistores x horas después. Aproximadamente ¿cuántos radios ensamblará el trabajador entre las 9:00 y las 9:15 a.m.?

19. PRODUCCIÓN En cierta fábrica, la producción diaria es $Q(K) = 600K^{1/2}$ unidades, donde K denota la inversión de capital medida en unidades de \$1 000. El capital invertido actualmente es \$900 000. Estime el efecto que tendrá en la producción diaria una inversión adicional de capital de \$800.

20. PRODUCCIÓN En cierta fábrica, la producción diaria es $Q(L) = 60\,000L^{1/3}$ unidades, donde L denota el tamaño de la fuerza laboral medida en horas-trabajador. Actualmente, se emplean 1 000 horas-trabajador cada día. Estime el efecto sobre la producción si la fuerza laboral se reduce a 940 horas-trabajador.

21. IMPUESTO SOBRE LA PROPIEDAD Una proyección hecha en enero de 1997 determinó que dentro de x años, el impuesto promedio sobre la propiedad de una casa de tres recámaras en cierta comunidad será $T(x) = 60x^{3/2} + 40x + 1\,200$ dólares. Calcule el incremento porcentual del impuesto sobre la propiedad durante la primera mitad del año 2005.

22. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN Una proyección a 5 años de las tendencias de la población sugiere que dentro de t años, la población de cierta comunidad será $P(t) = -t^3 + 9t^2 + 48t + 200$ miles.
a) Determine la tasa de cambio de la población $R(t) = P'(t)$ con respecto al tiempo t.
b) ¿A qué razón cambia la tasa de crecimiento de la población $R(t)$ con respecto al tiempo?
c) Use incrementos para calcular cuánto cambia $R(t)$ durante el primer mes del cuarto año. ¿Cuál es el cambio real en $R(t)$ durante este periodo?

23. PRODUCCIÓN En cierta fábrica, la producción diaria es $Q = 3\,000K^{1/2}L^{1/3}$ unidades, donde K denota la inversión de capital de la firma, medida en unidades de \$1 000 y L denota el tamaño de la fuerza laboral medida en horas-trabajador. Suponga que la inversión de capital actual es \$400 000 y que se emplean 1 331 horas-trabajador cada día. Utilice el análisis marginal para calcular el efecto que tendrá una inversión adicional de capital de \$1 000 en la producción diaria si el tamaño de la fuerza laboral no cambia.

www.FreeLibros.com

24. PRODUCCIÓN La producción diaria de cierta fábrica es $Q(L) = 300L^{2/3}$ unidades, donde L denota el tamaño de la fuerza laboral medida en horas-trabajador. Actualmente, se utilizan 512 horas-trabajador cada día. Calcule el número de horas-trabajador adicionales que se necesitarán para incrementar la producción diaria en 12.5 unidades.

25. FABRICACIÓN El costo total de un fabricante es $C(q) = \frac{1}{6}q^3 + 642q + 400$ dólares, cuando se producen q unidades. El nivel actual de producción es 4 unidades. Calcule la cantidad en que el fabricante deberá disminuir la producción para reducir el costo total en \$130.

26. CRECIMIENTO DE UNA CÉLULA Cierta célula tiene la forma de una esfera. Las fórmulas $S = 4\pi r^2$ y $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ se emplean para calcular el área superficial y el volumen, respectivamente. Estime el efecto que produce sobre S y V un incremento de 1% en el radio r.

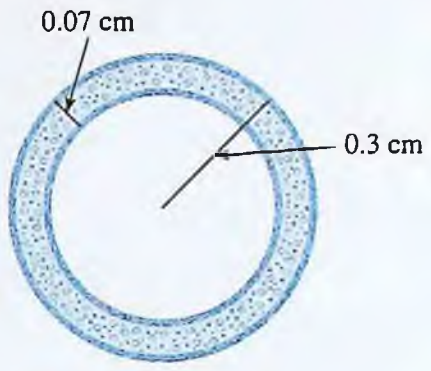
27. GASTO CARDIACO El *gasto cardiaco* es el volumen (en centímetros cúbicos) de sangre bombeada por el corazón de una persona cada minuto. Una forma para medir el gasto cardiaco C es mediante la fórmula de Fick

$$C = \frac{a}{x - b}$$

donde x es la concentración de dióxido de carbono en la sangre que ingresa a los pulmones desde el ventrículo derecho, y a y b son constantes positivas. Si x se mide como $x = c$ con un error máximo del 3%, ¿cuál es el error porcentual máximo que se puede cometer midiendo el gasto cardiaco con la fórmula de Fick? (Su respuesta estará en términos de a, b y c.)

28. MEDICINA Se inserta un globo esférico muy pequeño en una arteria tapada. Si el globo tiene un diámetro interior de 0.01 milímetros (mm) y está hecho de un material con un espesor de 0.0005 mm, aproximadamente ¿cuánto material se inserta en la arteria? [*Sugerencia:* Considere la cantidad de material como un cambio en el volumen ΔV, donde $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.]

29. ARTERIOSCLEROSIS En la *arteriosclerosis*, un material graso denominado "placa" se acumula en las paredes de las arterias, impidiendo el flujo sanguíneo, lo que a su vez, puede provocar embolias e infartos cardiacos. Considere un modelo en el cual la arteria carótida se representa como un cilindro circular con radio de la sección transversal $R = 0.3$ cm y longitud L. Suponga que se descubre que una placa de 0.07 cm de espesor está distribuida uniformemente sobre la pared interior de la arteria carótida de cierto paciente. Utilice incrementos para calcular el porcentaje del volumen total de la arteria que está bloqueado por la placa. [*Sugerencia:* El volumen de un cilindro de radio R y longitud L es $V = \pi R^2 L$. ¿Tiene importancia que no se haya especificado la longitud L de la arteria?]



PROBLEMA 29

30. CIRCULACIÓN SANGUÍNEA En el problema 57, sección 1.1, se introdujo una ley importante atribuida al físico francés Jean Poiseuille. Otra ley descubierta por Poiseuille dice que el volumen del fluido que corre por un pequeño tubo en la unidad de tiempo, bajo una presión fija, está dado por la fórmula $V = kR^4$, donde k es una constante positiva y R es el radio del tubo. Esta fórmula se emplea en medicina para determinar a qué amplitud se debe abrir una arteria tapada para restaurar un flujo sanguíneo saludable.

a) Suponga que el radio de cierta arteria se incrementa en 5%. Aproximadamente ¿qué efecto tiene esto en el volumen de sangre que fluye por la arteria?

b) Lea un artículo sobre el sistema cardiovascular y escriba un párrafo acerca del flujo sanguíneo.[9]

31. DILATACIÓN DE UN MATERIAL El **coeficiente de expansión térmica** (lineal) de un objeto se define como

$$\sigma = \frac{L'(T)}{L(T)}$$

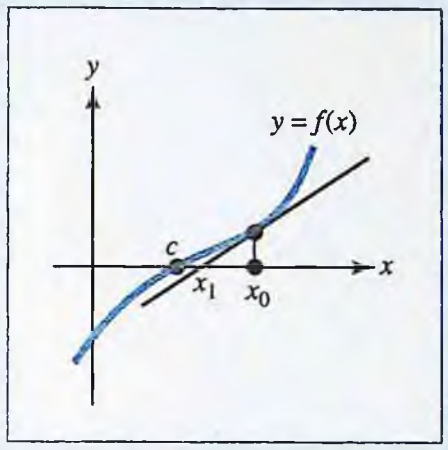
[9] Puede iniciar su investigación consultando textos como el de Elaine N. Marieb, *Human Anatomy and Physiology*, 2a. ed., The Benjamin/Cummings Publishing Co., Redwood City, CA, 1992, y Kent M. Van De Graaf y Stuart Ira Fox, *Concepts of Human Anatomy and Physiology*, 3a. ed., Wm. C. Brown Publishers, Dubuque, IA, 1992.

www.FreeLibros.com

donde $L(T)$ es la longitud del objeto cuando la temperatura es T. Suponga que se construye un puente de 50 m con un acero que tiene $\sigma = 1.4 \times 10^{-5}$ por grado centígrado. ¿Aproximadamente cuánto cambiará la longitud durante un año cuando la temperatura varía de $-20°C$ (invierno) a 35°C (verano)?

32. RADIACIÓN La Ley de Stefan en física establece que un cuerpo emite energía en forma de radiaciones de acuerdo con la fórmula $R(T) = kT^4$, donde R es la cantidad de energía emitida por una superficie cuya temperatura es T (en grados Kelvin), y k es una constante positiva. Calcule el cambio porcentual que resulta en R por un incremento de 2% en T.

Método de Newton ■ Las aproximaciones mediante la recta tangente se pueden emplear en muchas formas. El *método de Newton* para aproximar las raíces de una ecuación $f(x) = 0$ se basa en la idea de que, si se parte de una x_0 "elegida", que sea cercana a una verdadera raíz c, con frecuencia se puede obtener una posición mejorada hallando la intersección, x_1, de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en $x = x_0$ (véase la figura) con el eje x. Entonces, el proceso se puede repetir hasta que se logra el grado de precisión deseado. En la práctica, generalmente es más fácil y más rápido manejar las posibilidades de graficación de una calculadora, las características **ZOOM**, y **TRACE**, para encontrar raíces, pero las ideas detrás del método de Newton siguen siendo importantes. En los problemas 33 a 37 se usa el método de Newton.



33. Demuestre que cuando se aplica repetidamente el método de Newton, la n-ésima aproximación se obtiene a partir de la aproximación $(n - 1)$ mediante la fórmula

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

[*Sugerencia:* Primero encuentre x_1 como la intersección con el eje x de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = x_0$. Luego utilice x_1 para encontrar x_2 de la misma forma].

34. Sea $f(x) = x^3 - x^2 - 1$.

a) Use su dispositivo de graficación para trazar $f(x)$. Advierta que sólo hay una raíz ubicada entre 1 y 2. Utilice **ZOOM** y **TRACE**, u otras instrucciones para encontrar la raíz.

b) Empleando $x_0 = 1$, calcule la raíz aplicando el método de Newton hasta que dos aproximaciones consecutivas coincidan con cuatro lugares decimales.

c) Tome la raíz encontrada de forma gráfica en el inciso *a*) y la raíz que se determinó mediante el método de Newton en el inciso *b*), y sustituya cada una en la ecuación $f(x) = 0$. ¿Cuál es más precisa?

35. Sea $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$. Utilice su calculadora graficadora para trazar $f(x)$. Observe que hay dos raíces de la ecuación $f(x) = 0$. Calcule cada raíz empleando el método de Newton y luego verifique sus resultados usando **ZOOM** y **TRACE** u otras instrucciones de su calculadora.

36. Los antiguos babilonios (aproximadamente 1700 a. C.) aproximaban $\sqrt{N}$ aplicando la fórmula

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{N}{x_n}\right) \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

a) Demuestre que esta fórmula se puede deducir a partir de la fórmula para el método de Newton del problema 33, y luego úsela para calcular $\sqrt{1\,265}$.

¡EXPLORE!

Introduzca en Y1 la función $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ y grafique empleando una pantalla con escala decimal para ver que existe una raíz entre X = 1 y 2. Ahora escriba Y2 = nDeriv(Y1, X, X). En una nueva pantalla, introduzca el valor inicial 1 en X, 1 → X, y escriba X − Y1(X)/Y2(X) → X. Ahora presione **ENTER** sucesivamente y observe la secuencia de valores resultantes. Note cuántas iteraciones se necesitaron para que dos aproximaciones consecutivas coincidieran en cuatro lugares decimales. Repita este proceso empleando X = −2. Observe si ocurre un resultado estable, y cuántas iteraciones se requirieron.

www.FreeLibros.com

Repita la fórmula hasta que dos aproximaciones consecutivas coincidan en cuatro lugares decimales. Utilice su calculadora para verificar su resultado.

b) El espía (problema 70, sección 2.2) despierta una mañana en Babilonia y se da cuenta que le han robado su calculadora. Escriba una historia de espías donde haya un problema en el que se use la fórmula antigua para calcular una raíz cuadrada.

37. Algunas veces el método de Newton falla sin importar qué valor inicial x_0 se elija (a menos que sea tan afortunado como para elegir la raíz misma). Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y elija x_0 de forma arbitraria ($x_0 \neq 0$).

a) Demuestre que $x_{n+1} = -2x_n$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ de manera que las sucesivas "raíces" generadas mediante el método de Newton son $x_0, -2x_0, 4x_0, \ldots$.

b) Use su calculadora graficadora para trazar $f(x)$ y emplee una instrucción apropiada para trazar las rectas tangentes a la gráfica de $y = f(x)$ en los puntos que corresponden a $x_0, -2x_0, 4x_0, \ldots$ ¿Por qué fallan estos números para estimar una raíz de $f(x) = 0$?

SECCIÓN 2.6 | Derivación implícita y tasas relacionadas

Hasta el momento, todas las funciones con las que se ha trabajado han estado dadas por ecuaciones de la forma $y = f(x)$, donde la variable dependiente y, a la izquierda, está dada explícitamente por una expresión, a la derecha, que contiene a la variable independiente x. De esas funciones se dice que están en **forma explícita**. Por ejemplo, las funciones

$$y = x^2 + 3x + 1 \qquad y = \frac{x^3 + 1}{2x - 3} \qquad \text{y} \qquad y = \sqrt{1 - x^2}$$

están en forma explícita.

Algunas veces los problemas de la vida práctica conducen a ecuaciones en las que la función y no está escrita explícitamente en términos de la variable independiente x, como por ejemplo, las ecuaciones

$$x^2y^3 - 6 = 5y^3 + x \qquad \text{y} \qquad x^2y + 2y^3 = 3x + 2y$$

Cuando la y no está despejada, se dice que la ecuación ***define implícitamente* y *como una función de* x**, y se dice que la función y está en **forma implícita**.

Derivación de funciones en forma implícita

Suponga que se tiene una ecuación que define y implícitamente como una función de x, y que se desea hallar la derivada $\frac{dy}{dx}$. Por ejemplo, se puede tener interés en la pendiente de una recta que es tangente a la gráfica de la ecuación en un punto en particular. Un método podría ser despejar y explícitamente de la ecuación y luego derivar empleando las técnicas ya conocidas. Sin embargo, no siempre es posible escribir y explícitamente. Por ejemplo, no existe una forma obvia para despejar y en la ecuación $x^2y + 2y^3 = 3x + 2y$.

Además, aun cuando se pueda despejar y explícitamente, con frecuencia la fórmula resultante es complicada y difícil de derivar. Por ejemplo, en la ecuación $x^2y^3 - 6 = 5y^3 + x$ se puede despejar y para obtener

$$x^2y^3 - 5y^3 = x + 6$$
$$y^3(x^2 - 5) = x + 6$$
$$y = \left(\frac{x + 6}{x^2 - 5}\right)^{1/3}$$

www.FreeLibros.com

El cálculo de $\frac{dy}{dx}$ para esta función en forma explícita será tedioso, y usará tanto la regla de la cadena como la regla del cociente. Por fortuna, existe una técnica simple basada en la regla de la cadena que se puede emplear para determinar $\frac{dy}{dx}$ sin tener que despejar primero y explícitamente. Esta técnica, conocida como **derivación implícita**, consiste en derivar ambos lados de la ecuación dada (la original) con respecto a x y luego despejar algebraicamente $\frac{dy}{dx}$. A continuación se presenta un ejemplo para ilustrar la técnica.

¡EXPLORE!

Introduzca $\frac{dy}{dx}$ del ejemplo 2.6.1 en su calculadora graficadora. Sustituya $x = 2$ en la expresión dada de la función implícita y despeje y. Introduzca este valor como Y. Introduzca 2 como X. Determine la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ evaluando $\frac{dy}{dx}$ en estos valores. Por último, encuentre una ecuación para la recta tangente a la función del ejemplo 2.6.1 en $x = 2$.

EJEMPLO 2.6.1

Determine $\frac{dy}{dx}$ si $x^2y + y^2 = x^3$.

Solución

Se derivan ambos lados de la ecuación dada con respecto a x. Con el fin de recordar que en realidad y es una función de x, se sustituye temporalmente y por $f(x)$ y se comienza por reescribir la ecuación como

$$x^2f(x) + (f(x))^2 = x^3$$

Ahora se derivan con respecto a x ambos lados de esta ecuación, término a término:

$$\frac{d}{dx}[x^2f(x) + (f(x))^2] = \frac{d}{dx}[x^3]$$

$$\underbrace{\left[x^2\frac{df}{dx} + f(x)\frac{d}{dx}(x^2)\right]}_{\frac{d}{dx}[x^2f(x)]} + \underbrace{2f(x)\frac{df}{dx}}_{\frac{d}{dx}[(f(x))^2]} = \underbrace{3x^2}_{\frac{d}{dx}(x^3)}$$

Así, se tiene

$$x^2\frac{df}{dx} + f(x)(2x) + 2f(x)\frac{df}{dx} = 3x^2$$

$$x^2\frac{df}{dx} + 2f(x)\frac{df}{dx} = 3x^2 - 2xf(x)$$ *Agrupe todos los términos con $\frac{df}{dx}$ a un lado de la ecuación*

$$[x^2 + 2f(x)]\frac{df}{dx} = 3x^2 - 2xf(x)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{3x^2 - 2xf(x)}{x^2 + 2f(x)}$$ *despeje $\frac{df}{dx}$*

Finalmente, se sustituye $f(x)$ por y para obtener

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2xy}{x^2 + 2y}$$

www.FreeLibros.com

NOTA Sustituir temporalmente y por $f(x)$ como en el ejemplo 2.6.1 es una estrategia útil para ilustrar el proceso de derivación implícita, pero tan pronto como usted domine la técnica, elimine este paso innecesario y derive directamente la ecuación dada. Sólo tenga en cuenta que en realidad y es una función de x, y recuerde utilizar la regla de la cadena cuando sea necesario. ■

A continuación se presenta un resumen del procedimiento.

Derivación implícita ■ Suponga que una ecuación define y implícitamente como una función derivable de x. Para determinar $\frac{dy}{dx}$:

1. Derive ambos lados de la ecuación con respecto a x. Recuerde que en realidad y es una función de x, y utilice la regla de la cadena cuando derive términos que contienen a y.
2. Despeje algebraicamente $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación derivada.

Cálculo de la pendiente de la recta tangente usando la derivación implícita

En los ejemplos 2.6.2 y 2.6.3 se analiza cómo emplear la derivación implícita para determinar la pendiente de una recta tangente.

EJEMPLO 2.6.2

Determine la pendiente de la recta tangente al círculo $x^2 + y^2 = 25$ en el punto (3, 4). ¿Cuál es la pendiente en el punto (3, −4)?

Solución

Derivando ambos lados de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ con respecto a x, se obtiene

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

La pendiente en (3, 4) es el valor de la derivada cuando $x = 3$ y $y = 4$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,\,4)} = \left.\frac{-x}{y}\right|_{\substack{x=3\\y=4}} = \frac{-3}{4}$$

De igual forma, la pendiente en (3, −4) es el valor de $\frac{dy}{dx}$ cuando $x = 3$ y $y = -4$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,\,-4)} = \left.\frac{-x}{y}\right|_{\substack{x=3\\y=-4}} = \frac{-3}{(-4)} = \frac{3}{4}$$

En la figura 2.16 se muestra la gráfica del círculo junto con las rectas tangentes en (3, 4) y (3, −4).

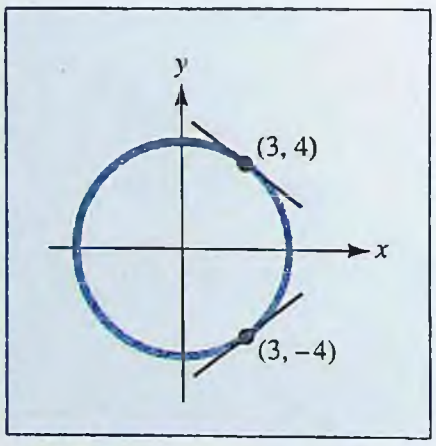


FIGURA 2.16 La gráfica del círculo $x^2 + y^2 = 25$.

EJEMPLO | 2.6.3

Encuentre todos los puntos en la gráfica de la ecuación $x^2 - y^2 = 2x + 4y$ donde la recta tangente es horizontal. ¿Tiene la gráfica algunas tangentes verticales?

www.FreeLibros.com

Solución

Derive ambos lados de la ecuación dada con respecto a x para obtener

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 2 + 4\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 2}{4 + 2y}$$

Habrá una tangente horizontal en cada punto de la gráfica donde la pendiente sea cero; es decir, donde el *numerador* $2x - 2$ de $\frac{dy}{dx}$ es cero:

$$2x - 2 = 0$$

$$x = 1$$

Para determinar el valor correspondiente de y, se sustituye $x = 1$ en la ecuación dada y se despeja usando la fórmula cuadrática (o la calculadora):

$$1 - y^2 = 2(1) + 4y$$

$$y^2 + 4y + 1 = 0$$

$$y = -0.27, -3.73$$

Así, la gráfica dada tiene tangentes horizontales en los puntos $(1, -0.27)$ y $(1, -3.73)$.

Como la pendiente de una recta vertical no está definida, la gráfica dada sólo puede tener una tangente vertical donde el *denominador* $4 + 2y$ de $\frac{dy}{dx}$ es cero:

$$4 + 2y = 0$$

$$y = -2$$

Para determinar el valor correspondiente de x, se sustituye $y = -2$ en la ecuación dada:

$$x^2 - (-2)^2 = 2x + 4(-2)$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0$$

Pero esta ecuación cuadrática no tiene soluciones reales, lo que a su vez implica que la gráfica dada no tiene tangentes verticales. En la figura 2.17 se muestra la gráfica.

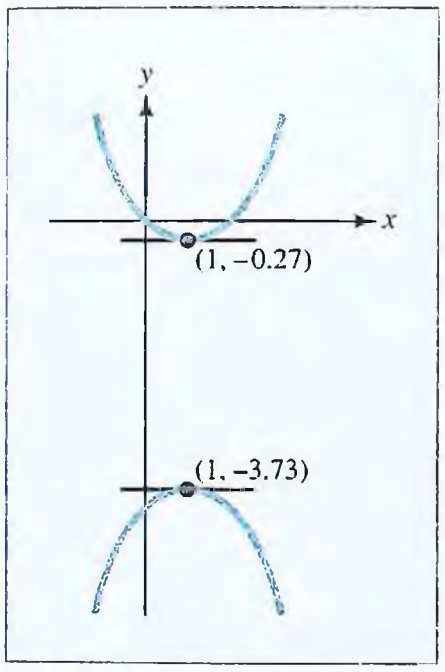


FIGURA 2.17 La gráfica de la ecuación $x^2 - y^2 = 2x + 2y$.

Aplicación a la economía

La derivación implícita se emplea en economía tanto en el trabajo práctico como en el teórico. En la sección 4.3, se estudiará cómo se utiliza para derivar ciertas relaciones teóricas. En el ejemplo 2.6.4 se presenta una aplicación más práctica de la derivación implícita, la cual es un adelanto del análisis de curvas de nivel de una función de dos variables que se verá en la sección 7.1.

EJEMPLO | 2.6.4

Suponga que la producción en cierta fábrica es $Q = 2x^3 + x^2y + y^3$ unidades, donde x es el número de horas-trabajador calificado y y es el número de horas-trabajador no calificado. La fuerza laboral actual consiste de 30 horas-trabajador calificado y 20 horas-trabajador no calificado. Utilice el cálculo para hallar el cambio que se deberá hacer en el trabajo no calificado y para compensar el incremento de 1 hora en el trabajo calificado x, de manera que la producción se mantenga en su nivel actual.

www.FreeLibros.com

Solución

El nivel actual de producción es el valor de Q cuando $x = 30$ y $y = 20$. Es decir,

$$Q = 2(30)^3 + (30)^2(20) + (20)^3 = 80\,000 \text{ unidades}$$

Si la producción se debe mantener en este nivel, la relación entre trabajo calificado x y trabajo no calificado y está dada por la ecuación

$$80\,000 = 2x^3 + x^2y + y^3$$

que define y implícitamente como una función de x.

El objetivo es calcular el cambio en y que corresponda a un incremento de 1 unidad en x, cuando x y y estén relacionadas por esta ecuación. Como se analizó en la sección 2.5, el cambio provocado en y por un incremento de 1 unidad en x se puede aproximar mediante la derivada $\frac{dy}{dx}$. Para determinar esta derivada, se utiliza la derivación implícita. (Recuerde que la derivada de la constante 80 000 que está a la izquierda es cero.)

$$0 = 6x^2 + x^2\frac{dy}{dx} + y\frac{d}{dx}(x^2) + 3y^2\frac{dy}{dx}$$

$$0 = 6x^2 + x^2\frac{dy}{dx} + 2xy + 3y^2\frac{dy}{dx}$$

$$-(x^2 + 3y^2)\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 2xy$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{6x^2 + 2xy}{x^2 + 3y^2}$$

Ahora se evalúa esta derivada cuando $x = 30$ y $y = 20$ para concluir que

$$\text{Cambio en } y \approx \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\substack{x=30\\y=20}} = -\frac{6(30)^2 + 2(30)(20)}{(30)^2 + 3(20)^2} \approx -3.14 \text{ horas}$$

Es decir, para mantener el nivel actual de producción, el trabajo no calificado se deberá disminuir en aproximadamente 3.14 horas para compensar el incremento de 1 hora de trabajo calificado.

NOTA ¿Usted se percató de que la solución del ejemplo 2.6.4 contiene un paso innecesario? El cálculo de la producción actual de 80 000 pudo ser omitido y la ecuación que relaciona x y y pudo ser escrita como

$$C = 2x^3 + x^2y + y^3$$

donde C es una constante que representa el nivel actual (no especificado) de producción. Como la derivada de cualquier constante es cero, las ecuaciones derivadas serán las mismas. ■

Tasas relacionadas

En ciertos problemas prácticos, x y y están relacionadas por una ecuación y se pueden considerar como funciones de una tercera variable t, que con frecuencia representa el tiempo. Por tanto, la derivación implícita se puede emplear para relacionar $\frac{dx}{dt}$ con $\frac{dy}{dt}$. Se dice que este tipo de problema involucra **tasas relacionadas.** A continuación se presenta un procedimiento para analizar problemas de tasas relacionadas.

www.FreeLibros.com

Procedimiento para resolver problemas de tasas relacionadas

1. Se dibuja una figura (si es apropiado) y se asignan variables.
2. Se determina una fórmula que relacione las variables.
3. Se usa la derivación implícita para determinar cómo se relacionan las tasas.
4. Se sustituye cualquier información numérica dada en la ecuación del paso 3 para encontrar la razón de cambio deseada.

A continuación se presentan cuatro problemas prácticos que implican tasas relacionadas.

EJEMPLO 2.6.5

El gerente de una compañía determina que cuando se producen q cientos de unidades de cierto bien, el costo total de producción es C miles de dólares, donde $C^2 - 3q^3 = 4\,275$. Cuando se producen 1 500 unidades, el nivel de producción se incrementa a una razón de 20 unidades por semana. ¿Cuál es el costo total en este momento y a qué razón cambia?

Solución

Se desea determinar $\frac{dC}{dt}$ cuando $q = 15$(1 500 unidades) y $\frac{dq}{dt} = 0.2$ (20/100 unidades por semana). Derivando implícitamente en la ecuación $C^2 - 3q^3 = 4\,275$ respecto al tiempo, se obtiene

$$2C\frac{dC}{dt} - 3\left[3q^2\frac{dq}{dt}\right] = 0$$

de manera que

$$2C\frac{dC}{dt} = 9q^2\frac{dq}{dt}$$

y

$$\frac{dC}{dt} = \frac{9q^2}{2C}\frac{dq}{dt}$$

Cuando $q = 15$, el costo C satisface

$$C^2 - 3(15)^3 = 4\,275$$
$$C^2 = 4\,275 + 3(15)^3 = 14\,400$$
$$C = 120$$

y sustituyendo $q = 15$, $C = 120$, y $\frac{dq}{dt} = 0.2$ en la fórmula para $\frac{dC}{dt}$, se obtiene

$$\frac{dC}{dt} = \left[\frac{9(15)^2}{2(120)}\right](0.2) = 1.6875$$

miles de dólares ($1 687.50) por semana. Para resumir, el costo de producción de 1 500 unidades es $120 000 ($C = 120$) y a este nivel de producción, el costo total se incrementa a una razón de $1 687.50 por semana.

www.FreeLibros.com



EJEMPLO | 2.6.6

Una tormenta en el mar ha dañado una plataforma petrolera. El petróleo se derrama por la ruptura a una razón constante de 60 pies^3/min, formando una capa que tiene una forma aproximadamente circular y 3 pulgadas de espesor.

a) ¿Con qué rapidez se incrementa el radio de la capa cuando éste es de 70 pies?

b) Suponga que se repara la ruptura de tal forma que el flujo se detiene instantáneamente. Si el radio de la capa se incrementa a una razón de 0.2 pies/min cuando el flujo se detiene, ¿cuál es el volumen total de petróleo que se ha derramado en el mar?

Solución

Se puede considerar la capa como un cilindro de radio r pies y espesor $h = 3/12 = 0.25$ pies. El cilindro tendrá un volumen

$$V = \pi r^2 h = 0.25\pi r^2 \text{ ft}^3$$

Derivando implícitamente esta ecuación con respecto al tiempo t, se obtiene

$$\frac{dV}{dt} = 0.25\pi\left(2r\frac{dr}{dt}\right) = 0.5\pi r\frac{dr}{dt}$$

y como en todo momento $\dfrac{dV}{dt} = 60$ se obtiene la relación entre las tasas

$$60 = 0.5\pi r\frac{dr}{dt}$$

a) Se desea determinar $\dfrac{dr}{dt}$ cuando $r = 70$. Sustituyendo en la relación de las tasas que se acaba de obtener, se calcula que

$$60 = 0.5\pi(70)\frac{dr}{dt}$$

de manera que

$$\frac{dr}{dt} = \frac{60}{(0.5)\pi(70)} \approx 0.55$$

Así, cuando el radio es de 70 pies, se está incrementando a una razón de cerca de 0.55 pies/min.

b) Se puede calcular el volumen total de petróleo en el derrame si se conoce el radio de la capa en el instante en el que se detiene el flujo. Como $\dfrac{dr}{dt} = 0.2$ en ese instante, se tiene

$$60 = 0.5\pi r(0.2)$$

y el radio es

$$r = \frac{60}{0.5\pi(0.2)} \approx 191 \text{ pies}$$

Por tanto, el volumen total de petróleo derramado es

$$V = 0.25\pi(191)^2 \approx 28\,652 \text{ pies}^3$$

(aproximadamente 214 317 galones).

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 2.6.7

Un lago está contaminado por los desechos de una planta localizada en su costa. Los ecologistas determinan que cuando el nivel de contaminantes es x partes por millón (ppm), habrá F peces de ciertas especies en el lago, donde

$$F = \frac{32\,000}{3 + \sqrt{x}}$$

Cuando quedan 4 000 peces en el lago, la contaminación se incrementa a una razón de 1.4 ppm/año. ¿A qué razón cambia la población de peces en este instante?

Solución

Se desea determinar $\frac{dF}{dt}$ cuando $F = 4\,000$ y $\frac{dx}{dt} = 1.4$. Cuando hay 4 000 peces en el lago, el nivel de contaminación x satisface

$$\begin{aligned} 4\,000 &= \frac{32\,000}{3 + \sqrt{x}} \\ 4\,000(3 + \sqrt{x}) &= 32\,000 \\ 3 + \sqrt{x} &= 8 \\ \sqrt{x} &= 5 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

Se calcula que

$$\frac{dF}{dx} = \frac{32\,000(-1)}{(3 + \sqrt{x})^2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{-16\,000}{\sqrt{x}(3 + \sqrt{x})^2}$$

y de acuerdo con la regla de la cadena

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt} = \left[\frac{-16\,000}{\sqrt{x}(3 + \sqrt{x})^2}\right]\frac{dx}{dt}$$

Sustituyendo $F = 4\,000$, $x = 25$ y $\frac{dx}{dt} = 1.4$, se llega a que

$$\frac{dF}{dt} = \left[\frac{-16\,000}{\sqrt{25}(3 + \sqrt{25})^2}\right](1.4) = -70$$

por lo que la población de peces disminuye en 70 peces por año.

EJEMPLO | 2.6.8

Cuando el precio de cierto artículo es p dólares por unidad, el fabricante está dispuesto a ofertar x miles de unidades, donde

$$x^2 - 2x\sqrt{p} - p^2 = 31$$

¿Con qué rapidez cambia la oferta cuando el precio es de \$9 por unidad y se incrementa a una razón de 20 centavos de dólar por semana?

www.FreeLibros.com

Solución

Se sabe que cuando $p = 9, \frac{dp}{dt} = 0.20$. Es necesario determinar $\frac{dx}{dt}$ en ese momento. Primero, observe que cuando $p = 9$, se tiene

$$\begin{aligned} x^2 - 2x\sqrt{9} - 9^2 &= 31 \\ x^2 - 6x - 112 &= 0 \\ (x + 8)(x - 14) &= 0 \\ x &= 14 \quad (x = -8 \text{ no tiene valor práctico}) \end{aligned}$$

Luego, se derivan implícitamente ambos lados de la ecuación de oferta con respecto al tiempo, para obtener

$$2x\frac{dx}{dt} - 2\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)\sqrt{p} + x\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}\right)\right] - 2p\frac{dp}{dt} = 0$$

Finalmente, sustituyendo $x = 14$, $p = 9$ y $\frac{dp}{dt} = 0.20$ en esta ecuación de razón y luego despejando para la razón buscada $\frac{dx}{dt}$, se obtiene

$$\begin{aligned} 2(14)\frac{dx}{dt} - 2\left[\sqrt{9}\frac{dx}{dt} + 14\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{9}}\right)(0.20)\right] - 2(9)(0.20) &= 0 \\ [28 - 2(3)]\frac{dx}{dt} &= 2(14)\left(\frac{1}{2\sqrt{9}}\right)(0.20) + 2(9)(0.20) \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{14\left(\frac{1}{3}\right)(0.20) + 18(0.20)}{22} \\ &\approx 0.206 \end{aligned}$$

Como la oferta está dada en términos de miles de unidades, se deduce que la oferta se incrementa a una razón de 0.206(1 000) = 206 unidades por semana.

PROBLEMAS | 2.6

En los problemas 1 a 6 determine $\frac{dy}{dx}$ *de dos formas:*

a) por derivación implícita
b) derivando una fórmula explícita para y.

En cada caso, demuestre que las dos respuestas son iguales.

1. $2x + 3y = 7$

2. $xy = 4$

3. $xy + 2y = 3$

4. $x^2 + y^3 = 12$

5. $xy + 2y = x^2$

6. $x + \frac{1}{y} = 5$

En los problemas 7 a 20 determine $\frac{dy}{dx}$ *por derivación implícita.*

7. $x^2 + y^2 = 25$

8. $x^2 + y = x^3 + y^2$

www.FreeLibros.com

9. $x^3 + y^3 = xy$

10. $5x - x^2y^3 = 2y$

11. $y^2 + 2xy^2 - 3x + 1 = 0$

12. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

13. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

14. $\sqrt{2x} + y^2 = 4$

15. $xy - x = y + 2$

16. $y^2 + 3xy - 4x^2 = 9$

17. $(2x + y)^3 = x$

18. $(x - 2y)^2 = y$

19. $(x^2 + 3y^2)^5 = 2xy$

20. $(3xy^2 + 1)^4 = 2x - 3y$

En los problemas 21 a 26 halle la ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado.

21. $x^2 = y^3$; (8, 4)

22. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2; \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

23. $xy = 2$; (2, 1)

24. $x^2y^3 - 2xy = 6x + y + 1$; (0, −1)

25. $(1 - x + y)^3 = x + 7$; (1, 2)

26. $(x^2 + 2y)^3 = 2xy^2 + 64$; (0, 2)

En los problemas 27 a 32 encuentre todos los puntos (ambas coordenadas) de la curva dada donde la recta tangente es a) horizontal y b) vertical.

27. $x + y^2 = 9$

28. $xy = 16y^2$

29. $x^2 + xy + y = 3$

30. $\frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 5$

31. $x^2 + xy + y^2 = 3$

32. $x^2 - xy + y^2 = 3$

En los problemas 33 y 34 utilice la derivación implícita para calcular la segunda derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$.

33. $x^2 + 3y^2 = 5$

34. $xy + y^2 = 1$

35. FABRICACIÓN La producción en cierta planta es $Q = 0.08x^2 + 0.12xy + 0.03y^2$ unidades por día, donde x es el número de horas-trabajador calificado utilizado y y, el número de horas-trabajador no calificado utilizado. Actualmente, se emplean 80 horas-trabajador calificado y 200 horas-trabajador no calificado cada día. Use el cálculo para determinar el cambio que debe hacerse en el número de horas de trabajo no calificado para compensar un incremento de 1 hora en el trabajo calificado, de tal manera que la producción se mantenga en su nivel actual.

36. FABRICACIÓN La producción de cierta planta es $Q = 0.06x^2 + 0.14xy + 0.05y^2$ unidades por día, donde x es el número de horas-trabajador calificado utilizado y y es el número de horas-trabajador no calificado utilizado. Actualmente, se emplean 60 horas-trabajador calificado y 300 horas-trabajador no calificado cada día. Utilice el cálculo para estimar el cambio que debe hacerse en el número de horas de trabajo no calificado para compensar un incremento de 1 hora en el trabajo calificado, de manera que la producción se mantenga en su nivel actual.

37. RAZÓN DE LA OFERTA Cuando el precio de cierto artículo es p dólares por unidad, el fabricante está dispuesto a ofertar x cientos de unidades, donde

$$3p^2 - x^2 = 12$$

¿Con qué rapidez cambia la oferta cuando el precio es de $4 por unidad y se incrementa a una razón de 87 centavos de dólar por mes?

38. RAZÓN DE LA DEMANDA Cuando el precio de cierto artículo es p dólares por unidad, los clientes demandan x cientos de unidades de dicho producto, donde

$$x^2 + 3px + p^2 = 79$$

¿Con qué rapidez cambia la demanda x con respecto al tiempo cuando el precio es $5 por unidad y disminuye a una razón de 30 centavos de dólar por mes?

39. CRECIMIENTO DE UN TUMOR Un tumor se modela como si fuera aproximadamente esférico, con radio R. Si el radio del tumor actualmente es $R = 0.54$ cm y se incrementa a una razón de 0.13 cm por mes, ¿cuál es la razón de cambio correspondiente del volumen $V = \frac{4}{3}\pi R^3$?

40. REFRIGERACIÓN Un bloque de hielo utilizado para refrigeración se modela como un

www.FreeLibros.com

cubo de lado s. Actualmente el bloque tiene un volumen de 125 000 cm^3 y se derrite a una razón de 1 000 cm^3 por hora.

a) ¿Cuál es la longitud actual s del lado del cubo? Actualmente, ¿a qué razón cambia s respecto al tiempo t?

b) ¿Cuál es la razón de cambio actual del área superficial, S, del bloque con respecto al tiempo? [*Nota:* Un cubo de lado s tiene un volumen $V = s^3$ y área superficial $S = 6s^2$.]

41. MEDICINA Se inserta un globo esférico pequeño en una arteria tapada y se infla a una razón de 0.002π mm^3/min. ¿Con qué rapidez crece el radio del globo cuando el radio es $R = 0.005$ mm? [*Nota:* Una esfera de radio R tiene volumen $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.]

42. CONTROL DE LA CONTAMINACIÓN Un estudio ambiental para cierta comunidad indica que habrá $Q(p) = p^2 + 4p + 900$ unidades de un contaminante dañino en el aire cuando la población sea p miles. Si la población actual es 50 000 habitantes y se incrementa a una razón de 1 500 por año, ¿a qué razón crece el nivel de contaminación?

43. RAZÓN DE LA DEMANDA Cuando el precio de cierto artículo es p dólares por unidad, los consumidores demandan x cientos unidades de dicho producto, donde $75x^2 + 17p^2 = 5\,300$ ¿Con qué rapidez cambia la demanda x con respecto al tiempo cuando el precio es \$7 y disminuye a una razón de 75 centavos de dólares por mes? (Es decir, $\frac{dp}{dt} = -0.75$.)

44. LEY DE BOYLE La ley de Boyle establece que cuando se comprime un gas a una temperatura constante, la presión P y el volumen V de una muestra dada satisface la ecuación $PV = C$, donde C es constante. Suponga que en cierto instante el volumen es 40 $pulg^3$, la presión es 70 $lb/pulg^2$ y el volumen se incrementa a una razón de 12 $pulg^3/s$. ¿Con qué rapidez está cambiando la presión en este instante? ¿Está aumentando o disminuyendo?

45. TASA METABÓLICA La *tasa metabólica basal* es la razón del calor producido por un animal por unidad de tiempo. Las observaciones indican que la tasa metabólica basal de un animal de sangre caliente de masa w kilogramos (kg) está dada por

$$M = 70w^{3/4} \text{ kilocalorías por día}$$

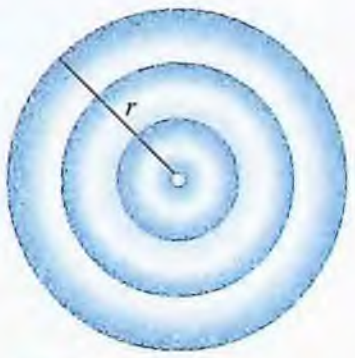
a) Determine la razón de cambio de la tasa metabólica de un jaguar de 80 kg que gana masa a una razón de 0.8 kg por día.

b) Encuentre la razón de cambio de la tasa metabólica de un avestruz de 50 kg que pierde masa a una razón de 0.5 kg por día.

46. VELOCIDAD DE UNA LAGARTIJA Los herpetólogos han propuesto utilizar la fórmula $s = 1.1w^{0.2}$ para estimar la velocidad máxima, s (metros por segundo), de una lagartija de masa w (gramos) en una carrera corta. ¿A qué razón se incrementa la velocidad máxima de una lagartija de 11 gramos en una carrera corta, si la lagartija crece a una razón de 0.02 gramos por día?

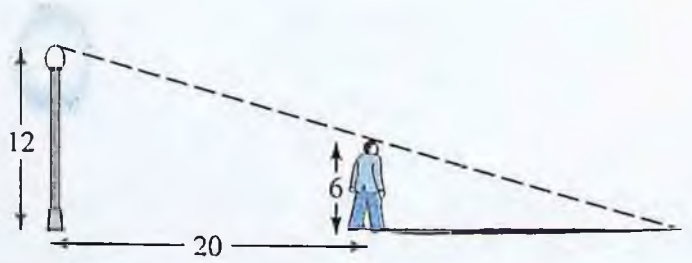
47. PRODUCCIÓN En cierta fábrica, la producción está dada por $Q = 60\,K^{1/3}L^{2/3}$ unidades, donde K es la inversión de capital (en miles de dólares) y L es el tamaño de la fuerza laboral, medida en horas-trabajador. Si la producción se mantiene constante, ¿a qué razón cambia la inversión de capital en el tiempo, cuando $K = 8$, $L = 1\,000$, y L está aumentando a una razón de 25 horas-trabajador por semana?
[*NOTA:* Las funciones de producción de la forma general $Q = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, como la del problema 47, donde A y α son constantes con $0 \leq \alpha \leq 1$, se llaman **funciones de producción Cobb-Douglas**. Este tipo de funciones aparecen en ejemplos y ejercicios de todo el texto, en especial en el capítulo 7.]

48. CONTAMINACIÓN DEL AGUA Una capa circular de aceite se expande de tal forma que su radio crece a una razón de 20 pies/h. ¿Con qué rapidez cambia el área de la capa cuando el radio es 200 pies?



PROBLEMA 48

49. Una persona de 6 pies de estatura camina a una razón de 4 pies/s alejándose de la base de un poste de luz de 12 pies de altura. ¿A qué razón cambia la longitud de su sombra cuando él se encuentra a 20 pies de la base del farol?



PROBLEMA 49

www.FreeLibros.com

50. QUÍMICA En un proceso químico *adiabático*, no hay cambio neto (ganancia ni pérdida) de calor. Suponga que un contenedor de oxígeno se somete a ese tipo de proceso. Entonces, si la presión en el oxígeno es P y su volumen es V, se puede demostrar que $PV^{1.4} = C$, donde C es una constante. En cierto instante, $V = 5$ m^3, $P = 0.6$ kg/m^2 y P está aumentando a 0.23 kg/m^2 por segundo. ¿Cuál es la razón de cambio de V? ¿Está V aumentando o disminuyendo?

51. FABRICACIÓN En cierta fábrica, la producción Q está relacionada con los insumos x y y por la ecuación

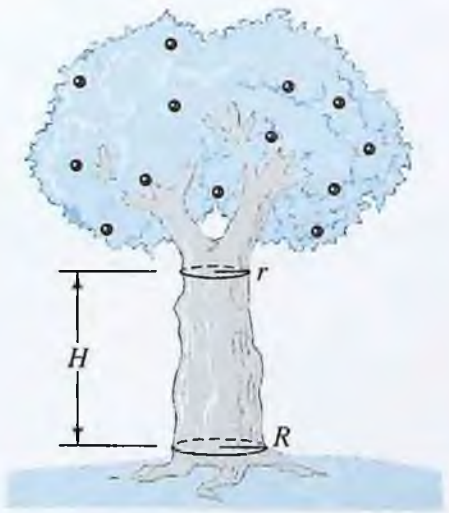
$$Q = 2x^3 + 3x^2y^2 + (1 + y)^3$$

Si los niveles actuales de los insumos son $x = 30$ y $y = 20$, use el cálculo para estimar el cambio en el insumo y qué deberá hacerse para compensar una reducción de 0.8 unidades en el insumo x, de manera que la producción se mantenga en su nivel actual.

52. PRODUCCIÓN DE MADERA Para calcular la cantidad de madera que hay en el tronco de un árbol, es razonable suponer que el tronco es un cono truncado (véase la figura). Si el radio superior del tronco es r, el radio inferior es R y la altura es H, el volumen de la madera está dado por

$$V = \frac{\pi}{3}H(R^2 + rR + r^2)$$

Suponga que r, R y H se incrementan a las respectivas razones de 4 pulg/año, 5 pulg/año y 9 pulg/año. ¿A qué razón está aumentando V en el instante cuando $r = 2$ pies, $R = 3$ pies y $H = 15$ pies?

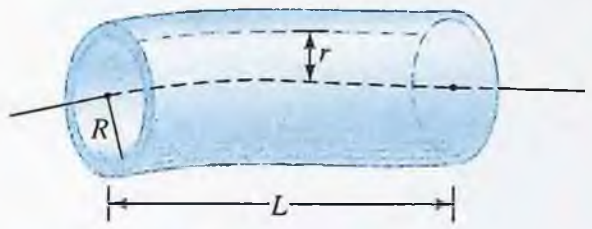


PROBLEMA 52

53. FLUJO SANGUÍNEO Una de las leyes de Poiseuille (véase el problema 57, sección 1.1) establece que la velocidad de la sangre que fluye a presión constante en un vaso sanguíneo a una distancia r desde el centro del vaso está dada por

$$v = \frac{K}{L}(R^2 - r^2)$$

donde K es una constante positiva, R es el radio del vaso y L es la longitud del vaso.[10] Suponga que el radio R y la longitud L del vaso cambian con el tiempo de tal manera que no se afecta la velocidad del flujo sanguíneo en el centro; es decir, v no cambia con el tiempo. Demuestre que en este caso, la razón de cambio relativa de L con respecto al tiempo debe ser el doble de la razón de cambio relativa de R.



PROBLEMA 53

54. FABRICACIÓN En cierta fábrica, la producción Q está relacionada con los insumos u y v mediante la ecuación

$$Q = 3u^2 + \frac{2u + 3v}{(u + v)^2}$$

Si los niveles actuales de los insumos son $u = 10$ y $v = 25$, use el cálculo para hallar el cambio que debe hacerse en el insumo v para compensar una reducción de 0.7 unidades en el insumo u, de manera que la producción se mantenga en su nivel actual.

55. Demuestre que la recta tangente a la curva

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0) es

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

56. Considere la ecuación $x^2 + y^2 = 6y - 10$.

a) Demuestre que no existen puntos (x, y) que satisfagan esta ecuación. [*Sugerencia:* Complete el cuadrado.]

b) Demuestre que aplicando derivación implícita a la ecuación dada, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{3 - y}$$

El objetivo de este ejercicio es demostrar que se debe tener cuidado cuando se aplica la derivación implícita.

[10] E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 3a. ed., Springer-Verlag, Nueva York, 1976, páginas 102-103.

www.FreeLibros.com

El hecho de que se pueda encontrar una derivada formalmente mediante la derivación implícita no quiere decir que la derivada tiene algún significado.

57. Demuestre que la regla de la potencia $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$ para el caso donde $n = r/s$ es un número racional. [*Sugerencia:* Observe que si $y = x^{r/s}$, entonces $y^s = x^r$ y utilice la derivación implícita.]

58. Use su calculadora graficadora para trazar la curva $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 8$. Trace la recta tangente a la curva en (1, 1). ¿Cuántas rectas tangentes horizontales tiene la curva? Encuentre la ecuación de cada tangente horizontal.

59. Use su calculadora graficadora para trazar la curva $11x^2 + 4xy + 14y^2 = 21$. Trace la recta tangente a la curva en $(-1, 1)$. ¿Cuántas rectas tangentes horizontales tiene la curva? Determine la ecuación de cada tangente horizontal.

60. Responda a las siguientes preguntas acerca de la curva $x^3 + y^3 = 3xy$ (llamada el **folio de Descartes**).

a) Encuentre la ecuación de cada tangente horizontal a la curva.

b) La curva interceca a la recta $y = x$ en exactamente un punto distinto al origen. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en este punto?

c) Trate de encontrar una forma para trazar la gráfica de la curva empleando su calculadora (no será fácil).

61. Use su calculadora graficadora para trazar la curva $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x$. Determine la ecuación de cada tangente horizontal a la curva. (La curva se llama **cardioide**.)

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Términos importantes, símbolos y fórmulas

Recta secante y recta tangente (96 y 98)

Tasa de cambio promedio e instantánea (97-98)

Cociente incremental

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (99)$$

Derivada de $f(x)$: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (99)

Derivación (96)

Función derivable (99)

La derivada $f'(x_0)$ como pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$ (99)

La derivada $f'(x_0)$ como tasa de cambio de $f(x)$ con respecto a x cuando $x = x_0$ (99)

Notaciones de la derivada de $f(x)$: $f'(x)$ y $\frac{df}{dx}$ (103)

Una función derivable es continua (104)

La regla de la constante: $\frac{d}{dx}[c] = 0$ (110)

La regla de la potencia: $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$ (110)

La regla del factor constante: $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{df}{dx}$ (112)

La regla de la suma: $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$ (112)

Tasa de cambio relativa de $Q(x)$: $\frac{Q'(x)}{Q(x)}$ (112)

Tasa de cambio porcentual de $Q(x)$: $\frac{100Q'(x)}{Q(x)}$ (112)

Movimiento rectilíneo: posición $s(t)$

velocidad $v(t) = s'(t)$

aceleración $v(t) = v'(t)$ (115)

El movimiento de un proyectil:

Altura $H(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0t + H_0$ (116)

La regla del producto:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{dg}{dx} + g(x)\frac{df}{dx} \quad (122)$$

La regla del cociente: Para $g(x) \neq 0$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{df}{dx} - f(x)\frac{dg}{dx}}{g^2(x)} \quad (124)$$

La segunda derivada de $f(x)$: $f''(x) = [f'(x)]' = \frac{d^2f}{dx^2}$ da la tasa de cambio de $f'(x)$ (127)

Notación para n-ésima derivada de $f(x)$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^nf}{dx^n} \quad (129)$$

www.FreeLibros.com

La regla de la cadena para $y = f(u(x))$: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$
o $[f(u(x))]' = f'(u)\,u'(x)$ (136)

La regla general de la potencia:
$$\frac{d}{dx}[h(x)]^n = n[h(x)]^{n-1}\frac{dh}{dx} \quad (140)$$

El costo marginal $C'(x_0)$ estima $C(x_0 + 1) - C(x_0)$, el costo adicional por la producción de la unidad $(x_0 + 1)$ (148)

El ingreso marginal $R'(x_0)$ estima $R(x_0 + 1) - R(x_0)$, el ingreso adicional por la producción de la unidad $(x_0 + 1)$ (148)

Utilidad marginal: $P'(x_0)$ estima $P(x_0 + 1) - P(x_0)$, la utilidad adicional por la producción de la unidad $(x_0 + 1)$ (148)

Aproximación por incrementos:
$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ (151)

Error propagado (151)

El diferencial de $y = f(x)$ es $dy = f'(x)\,dx$ (153)

Derivación implícita (159-160)

Tasas relacionadas (162)

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Revisión del capítulo 2

1. En cada caso, determine la derivada $\dfrac{dy}{dx}$.

a) $y = 3x^4 - 4\sqrt{x} + \dfrac{5}{x^2} - 7$

b) $y = (3x^3 - x + 1)(4 - x^2)$

c) $y = \dfrac{5x^2 - 3x + 2}{1 - 2x}$

d) $y = (3 - 4x + 3x^2)^{3/2}$

2. Determine la segunda derivada de la función
$$f(t) = t(2t + 1)^2.$$

3. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 2x + 1$ en el punto donde $x = -1$.

4. Determine la tasa de cambio de la función $f(x) = \dfrac{x + 1}{1 - 5x}$ con respecto a x cuando $x = 1$.

5. IMPUESTO SOBRE LA PROPIEDAD Los registros indican que x años después de 2000, el impuesto promedio sobre la propiedad para una casa de cuatro recámaras, en un suburbio de una ciudad importante, fue $T(x) = 3x^2 + 40x + 1\,800$ dólares.

a) ¿A qué razón se incrementó el impuesto a la propiedad con respecto al tiempo en 2003?

b) ¿A qué razón porcentual se incrementó el impuesto a la propiedad en 2003?

6. MOVIMIENTO EN UNA RECTA Un objeto se mueve a lo largo de una recta de tal forma que su posición en el tiempo t está dada por $s(t) = 2t^3 - 3t^2 + 2$ para $t \geq 0$.

a) Determine la velocidad $v(t)$ y la aceleración $a(t)$ del objeto.

b) ¿Cuándo el objeto está estacionario? ¿Cuándo avanza? ¿Cuándo retrocede?

c) ¿Cuál es la distancia total recorrida por el objeto para $0 \leq t \leq 2$?

7. COSTO DE PRODUCCIÓN Suponga que el costo de producción de x unidades de cierto bien es $C(x) = 0.04x^2 + 5x + 73$ cientos de dólares.

a) Use el costo marginal para calcular el costo de producción de la sexta unidad.

b) ¿Cuál es el costo real de producción de la sexta unidad?

8. PRODUCCIÓN INDUSTRIAL En cierta fábrica, la producción diaria es $Q = 500L^{3/4}$ unidades, donde L denota el tamaño de la fuerza laboral en horas-trabajador. Actualmente, se emplean 2 401 horas-trabajador cada día. Utilice el cálculo (incrementos) para estimar el efecto que tiene sobre la producción el incrementar el tamaño de la fuerza laboral en 200 horas-trabajador.

9. MEDICIÓN PEDIÁTRICA Los pediatras emplean la fórmula $S = 0.2029w^{0.425}$ para calcular el área superficial S (m^2) de un niño de 1 m de altura que pesa w kilogramos (kg). Un niño pesa 30 kg y gana peso a una razón de 0.13 kg por semana mientras permanece de 1 metro de altura. ¿A qué razón cambia el área superficial del niño?

10. CRECIMIENTO DE UN TUMOR Un tumor canceroso tiene forma aproximadamente esférica. Calcule el error porcentual que se puede permitir en la medición del radio r para garantizar que no se cometa un error mayor al 8% en el cálculo del volumen empleando la fórmula $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Problemas de repaso

En los problemas 1 y 2 utilice la definición de la derivada para determinar $f'(x)$.

1. $f(x) = x^2 - 3x + 1$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

En los problemas 3 a 13 encuentre la derivada de la función dada.

3. $f(x) = 6x^4 - 7x^3 + 2x + \sqrt{2}$

4. $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{3x^5} + 2\sqrt{x} - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1-2x}{x^3}$

5. $y = \dfrac{2-x^2}{3x^2+1}$

6. $y = (x^3 + 2x - 7)(3 + x - x^2)$

7. $f(x) = (5x^4 - 3x^2 + 2x + 1)^{10}$

8. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

9. $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 - \dfrac{5}{\sqrt{3x}}$

10. $y = \left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)^2$

11. $f(x) = (3x+1)\sqrt{6x+5}$

12. $f(x) = \dfrac{(3x+1)^3}{(1-3x)^4}$

13. $y = \sqrt{\dfrac{1-2x}{3x+2}}$

En los problemas 14 a 17 determine una ecuación para la recta tangente a la gráfica de la función dada en el punto indicado.

14. $f(x) = x^2 - 3x + 2; x = 1$

15. $f(x) = \dfrac{4}{x-3}; x = 1$

16. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}; x = 0$

17. $f(x) = \sqrt{x^2+5}; x = -2$

18. En cada uno de los casos siguientes determine la tasa de cambio de $f(t)$ con respecto a t en el valor dado de t.

a) $f(t) = t^3 - 4t^2 + 5t\sqrt{t} - 5$ en $t = 4$

b) $f(t) = \dfrac{2t^2-5}{1-3t}$ en $t = -1$

c) $f(t) = t^3(t^2 - 1)$ en $t = 0$

d) $f(t) = (t^2 - 3t + 6)^{1/2}$ en $t = 1$

19. En cada uno de los casos siguientes, encuentre la tasa de cambio porcentual de la función $f(t)$ con respecto a t en el valor dado de t.

a) $f(t) = t^2 - 3t + \sqrt{t}$ en $t = 4$

b) $f(t) = t^2(3 - 2t)^3$ en $t = 1$

c) $f(t) = \dfrac{1}{t+1}$ en $t = 0$

20. Utilice la regla de la cadena para determinar $\dfrac{dy}{dx}$.

a) $y = 5u^2 + u - 1; u = 3x + 1$

b) $y = \dfrac{1}{u^2}; u = 2x + 3$

21. Utilice la regla de la cadena para determinar $\dfrac{dy}{dx}$ para el valor dado de x.

a) $y = u^3 - 4u^2 + 5u + 2; u = x^2 + 1$; para $x = 1$

b) $y = \sqrt{u}, u = x^2 + 2x - 4$; para $x = 2$

22. Encuentre la segunda derivada de cada una de estas funciones:

a) $f(x) = 6x^5 - 4x^3 + 5x^2 - 2x + \dfrac{1}{x}$

b) $z = \dfrac{2}{1+x^2}$

c) $y = (3x^2 + 2)^4$

d) $f(x) = 2x(x+4)^3$

e) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$

23. Determine $\dfrac{dy}{dx}$ mediante derivación implícita.

a) $5x + 3y = 12$

b) $x^2y = 1$

c) $(2x + 3y)^5 = x + 1$

d) $(1 - 2xy^3)^5 = x + 4y$

24. Utilice la derivación implícita para encontrar la pendiente de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado.

a) $xy^3 = 8; (1, 2)$

b) $x^2y - 2xy^3 + 6 = 2x + 2y; (0, 3)$

www.FreeLibros.com

25. Utilice la derivación implícita para determinar $\frac{d^2y}{dx^2}$ si $3x^2 - 2y^2 = 6$.

26. Se lanza un proyectil verticalmente hacia arriba desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 160 pies/s.

a) ¿Cuándo el proyectil golpeará el suelo?

b) ¿Cuál es la velocidad de impacto?

c) ¿Cuándo alcanza el proyectil su máxima altura?

27. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN Suponga que una proyección a 5 años de tendencias de la población sugiere que después de t años, la población de cierta comunidad será P miles, donde

$$P(t) = -t^3 + 9t^2 + 48t + 200.$$

a) ¿A qué razón crecerá la población dentro de 3 años?

b) ¿A qué razón cambiará la razón de crecimiento de la población con respecto al tiempo 3 años después?

En los problemas 28 y 29 $s(t)$ denota la posición de un objeto moviéndose a lo largo de una recta.

a) Determine la velocidad y la aceleración del objeto y describa su movimiento durante el intervalo de tiempo indicado.

b) Calcule la distancia total recorrida por el objeto durante el intervalo de tiempo indicado.

28. $s(t) = 2t^3 - 21t^2 + 60t - 25;\ 1 \le t \le 6$

29. $s(t) = \dfrac{2t + 1}{t^2 + 12};\ 0 \le t \le 4$

30. TRÁNSITO RÁPIDO Después de x semanas, la cantidad de gente empleando un sistema de tránsito rápido nuevo fue aproximadamente $N(x) = 6x^3 + 500x + 8\,000$.

a) ¿A qué razón cambió el uso del sistema con respecto al tiempo después de 8 semanas?

b) ¿En cuánto cambió el uso del sistema durante la octava semana?

31. PRODUCCIÓN Se ha estimado que la producción semanal de cierta planta es $Q(x) = 50x^2 + 9\,000x$ unidades, donde x es el número de trabajadores empleados en la planta. Actualmente hay 30 trabajadores empleados en la planta.

a) Utilice el cálculo para estimar el cambio que provocará en la producción semanal la adición de 1 trabajador a la fuerza de trabajo.

b) Calcule el cambio real que provocará en la producción la adición de 1 trabajador.

32. POBLACIÓN Se ha estimado que después de t meses, la población de cierto pueblo será $P(t) = 3t + 5t^{3/2} + 6\,000$. ¿A qué razón porcentual cambiará la población con respecto al tiempo dentro de 4 meses?

33. PRODUCCIÓN En cierta fábrica, la producción diaria es $Q(L) = 20\,000L^{1/2}$ unidades, donde L denota el tamaño de la fuerza laboral medida en horas-trabajador. Actualmente se emplean 900 horas-trabajador cada día. Utilice el cálculo para estimar el efecto que causará sobre la producción la reducción de la fuerza laboral a 885 horas-trabajador.

34. PRODUCTO INTERNO BRUTO El producto interno bruto de cierto país fue $N(t) = t^2 + 6t + 300$ mil millones de dólares t años después de 1995. Utilice el cálculo para predecir el cambio porcentual en el PIB durante el segundo trimestre de 2003.

35. CONTAMINACIÓN El nivel de contaminación en el aire en cierta ciudad es proporcional al cuadrado de la población. Utilice el cálculo para estimar el porcentaje en que se incrementará el nivel de contaminación del aire si la población se incrementa en 5%.

36. EPIDEMIA DE SIDA En su fase inicial, específicamente en el periodo 1984-1990, la epidemia de SIDA se podía modelar[11] mediante la función cúbica

$$C(t) = -170.36t^3 + 1\,707.5t^2 + 1\,998.4t + 4\,404.8$$

para $0 \le t \le 6$, donde C es el número reportado de casos t años después del año base 1984.

a) Calcule e interprete la derivada $C'(t)$.

b) ¿A qué razón se propagó la epidemia en el año 1984?

c) ¿A qué razón porcentual se propagó la epidemia en 1984? ¿y en 1990?

37. DENSIDAD DE POBLACIÓN La fórmula $D = 36\,m^{-1.14}$ algunas veces se emplea para determinar la densidad ideal de la población D (individuos por kilómetro cuadrado) para un animal grande de masa m kilogramos (kg).

a) ¿Cuál es la densidad ideal de población para humanos, suponiendo que un humano común pesa cerca de 70 kg?

[11] *Mortality and Morbidity Weekly Report*, U.S. Centers for Disease Control, Vol. 40, Núm. 53 (2 de octubre, 1992).

RESUMEN DEL CAPÍTULO

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

b) El área de Estados Unidos es aproximadamente 9.2 millones de kilómetros cuadrados. ¿Cuál tendría que ser la población de Estados Unidos para qué la densidad de población fuera ideal?

c) Considere una isla de área 3 000 km^2. Se introducen 200 animales de masa $m = 30$ kg en la isla, y t años después, la población está dada por

$$P(t) = 0.43t^2 + 13.37t + 200$$

¿Cuánto tiempo toma para qué se alcance la población ideal? ¿A qué razón cambia la población cuando se logra la densidad ideal?

38. CRECIMIENTO BACTERIAL La población P de una colonia de bacterias t días después del inicio de la observación se modela mediante la función cúbica

$$P(t) = 1.035t^3 + 103.5t^2 + 6\,900t + 230\,000$$

a) Calcule e interprete la derivada $P'(t)$.

b) ¿A qué razón cambia la población después de 1 día? ¿Después de 10 días?

c) ¿Cuál es la población inicial de la colonia? ¿Cuánto tiempo toma que se duplique la población? ¿A qué razón crece la población en el instante en que se duplica?

39. PRODUCCIÓN La producción en cierta fábrica es $Q(L) = 600L^{2/3}$ unidades, donde L es el tamaño de la fuerza laboral. El fabricante desea aumentar la producción en 1%. Utilice el cálculo para estimar el incremento porcentual que se necesitará en la fuerza laboral.

40. PRODUCCIÓN La producción Q en cierta fábrica está relacionada con los insumos x y y mediante la ecuación

$$Q = x^3 + 2xy^2 + 2y^3$$

Si los niveles actuales de los insumos son $x = 10$ y $y = 20$, utilice el cálculo para estimar el cambio que deberá hacerse en el insumo y para compensar un incremento de 0.5 en el insumo x, de manera que la producción se mantenga en su nivel actual.

41. FLUJO SANGUÍNEO Los fisiólogos han observado que el flujo de la sangre de una arteria hacia un vaso capilar pequeño está dado por la fórmula

$$F = kD^2\sqrt{A - C} \quad (\text{cm}^3/\text{s})$$

donde D es el diámetro del vaso capilar, A es la presión en la arteria, C es la presión en el vaso capilar y k es una constante positiva.

a) ¿En cuánto cambia el flujo sanguíneo F con respecto a la presión C en el vaso capilar, si A y D se mantienen constantes? ¿Se incrementa o disminuye el flujo con el incremento de C?

b) ¿Cuál es la razón porcentual de cambio del flujo F con respecto a A si C y D se mantienen constantes?

42. CONTROL DE CONTAMINACIÓN Se estima que dentro de t años, la población de cierta comunidad suburbana será $p(t) = 10 - \dfrac{20}{(t+1)^2}$ miles. Un estudio ambiental indica que el nivel promedio diario de monóxido de carbono en el aire será $c(p) = 0.8\sqrt{p^2 + p + 139}$ unidades cuando la población sea p miles. ¿A qué razón porcentual cambiará el nivel de monóxido de carbono con respecto al tiempo dentro de 1 año?

43. Se determina que el radio de un círculo es 12 cm y se utiliza la fórmula $A = \pi r^2$ para calcular el área. Si la medida del radio tiene una imprecisión de 3%, ¿qué tan preciso será el cálculo del área?

44. Estime qué pasará con el volumen de un cubo si la longitud de cada lado disminuye en 2%. Exprese su respuesta como un porcentaje.

45. PRODUCCIÓN La producción en cierta fábrica es $Q = 600K^{1/2}L^{1/3}$ unidades, donde K denota la inversión de capital y L es el tamaño de la fuerza laboral. Calcule el incremento porcentual de la producción como resultado de un incremento de 2% en el tamaño de la fuerza laboral, si la inversión de capital no cambia.

46. FLUJO SANGUÍNEO La velocidad de la sangre que fluye a lo largo del eje central de cierta arteria es $S(R) = 1.8 \times 10^5 R^2$ centímetros por segundo, donde R es el radio de la arteria. Un investigador médico mide el radio de la arteria y encuentra que tiene 1.2×10^{-2} centímetros y comete un error de 5×10^{-4} centímetros. Estime en qué cantidad diferirá el valor calculado de la velocidad de la sangre del valor real de la velocidad, si se usa el valor incorrecto del radio en la fórmula.

47. TAMAÑO DE UN TUMOR La medida del radio de un tumor esférico resulta 1.2 cm y se usa la fórmula $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ para calcular el volumen. Si la medida del radio tiene un error de 3%, ¿qué tan preciso es el cálculo del volumen?

48. SISTEMA CARDIOVASCULAR Un modelo del sistema cardiovascular relaciona $V(t)$, el volumen de desplazamiento de la sangre en la aorta en un momento t durante la sístole (fase de contracción), con la presión $P(t)$ en la aorta durante la sístole mediante la ecuación

$$V(t) = [C_1 + C_2P(t)]\left(\frac{3t^2}{T^2} - \frac{2t^3}{T^3}\right)$$

www.FreeLibros.com

donde C_1 y C_2 son constantes positivas y T es la duración (fija) de la fase sístole.[12] Determine una relación entre las razones $< \frac{dV}{dt}$ y $\frac{dP}{dt}$.

49. DEMANDA DEL CONSUMIDOR Si se venden tostadoras eléctricas a p dólares la pieza, los consumidores locales comprarán $D(p) = \frac{32\,670}{2p + 1}$ tostadoras. Se estima que dentro de t meses, el precio unitario de las tostadoras será $p(t) = 0.04t^{3/2} + 44$ dólares. Calcule la razón de cambio de la demanda mensual de tostadoras con respecto al tiempo dentro de 25 meses. ¿La demanda estará aumentando o disminuyendo?

50. A mediodía un camión está en la intersección de dos caminos y se mueve hacia el norte a 70 km/hr. Una hora después, un automóvil pasa por la misma intersección, viajando hacia el este a 105 km/hr. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre el automóvil y el camión a las 2:00 p.m.?

51. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN Se proyecta que dentro de t años, la población de cierta comunidad suburbana será $P(t) = 20 - \frac{6}{t + 1}$ miles. Aproximadamente ¿qué porcentaje crecerá la población durante el próximo trimestre del año?

52. EFICIENCIA DEL TRABAJADOR Un estudio de eficiencia del turno de la mañana en cierta fábrica indica que un trabajador promedio que llega a las 8:00 a.m. habrá producido $Q(t) = -t^3 + 9t^2 + 12t$ unidades t horas más tarde.

a) Calcule la tasa de producción del trabajador $R(t)$ $R(t) = Q'(t)$.

b) ¿A qué razón cambia la tasa de producción del trabajador con respecto al tiempo a las 9:00 a.m.?

c) Utilice el cálculo para estimar el cambio en la tasa de producción del trabajador entre las 9:00 y las 9:06 a.m.

d) Calcule el cambio real en la tasa de producción del trabajador entre las 9:00 y las 9:06 a.m.

53. SEGURIDAD EN EL TRÁFICO Un automóvil viaja a 88 pies/s cuando el conductor aplica los frenos para evitar atropellar a un niño. Después de t segundos, el automóvil está a $s = 88t - 8t^2$ pies del punto donde aplicó los frenos. ¿Cuánto tarda el automóvil en detenerse y cuánto recorre antes de hacerlo?

54. MATERIAL DE CONSTRUCCIÓN Se está derramando arena de un saco de tal manera que después de t segundos, quedan

$$S(t) = 50\left(1 - \frac{t^2}{15}\right)^3$$

libras de arena en el saco.

a) ¿Cuánta arena había originalmente en el saco?

b) ¿A qué razón se derrama la arena del saco después de 1 segundo?

c) ¿Cuánto tiempo toma que se derrame toda la arena del saco? ¿A qué razón se derrama la arena del saco en el instante en que se vacía?

55. INFLACIÓN Se proyecta que dentro de t meses, el precio promedio por unidad para artículos de cierto sector de la economía será P dólares, donde

$$P(t) = -t^3 + 7t^2 + 200t + 300.$$

a) ¿A qué tasa se incrementará el precio por unidad con respecto al tiempo dentro de 5 meses?

b) ¿A qué razón cambiará la tasa del incremento del precio con respecto al tiempo dentro de 5 meses?

c) Utilice el cálculo para estimar el cambio en el incremento de la tasa de cambio durante la primera mitad del sexto mes.

d) Calcule el cambio real del incremento de la tasa del precio durante la primera mitad del sexto mes.

56. COSTO DE PRODUCCIÓN En cierta fábrica, se producen aproximadamente $q(t) = t^2 + 50t$ unidades durante las primeras t horas de un turno de producción, y el costo total de fabricar q unidades es $C(q) = 0.1q^2 + 10q + 400$ dólares. Determine la razón a la cual cambia el costo de fabricación con respecto al tiempo 2 horas después de iniciar la producción.

57. COSTO DE PRODUCCIÓN Se ha estimado que el costo mensual de producción de x unidades de un artículo es $C(x) = 0.06x + 3x^{1/2} + 20$ cientos de dólares. Suponga que la producción disminuye a una razón de 11 unidades por mes cuando la producción mensual es de 2 500 unidades. ¿A qué razón cambia el costo en este nivel de producción?

58. Calcule el mayor error porcentual que se puede permitir en la medición del radio de una esfera, si se desea que el error en el cálculo de su área superficial, empleando la fórmula $S = 4\pi r^2$, no sea mayor al 8%.

[12] J. G. Dafares, J. J. Osborn, y H. H. Hura, *Acta Physiol. Pharm. Neerl.*, Vol. 12, 1963, páginas 189-265.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

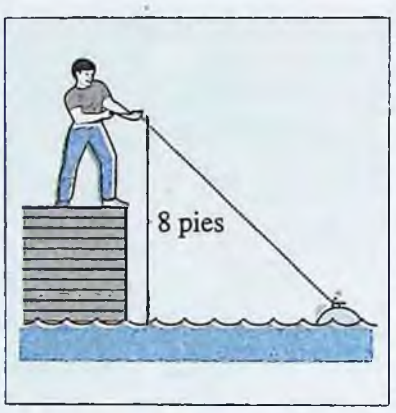
www.FreeLibros.com

59. Un balón de futbol hecho de cuero con un espesor de 1/8 pulg tiene un diámetro interior de 8.5 pulgadas. Calcule el volumen de su cubierta de cuero. [*Sugerencia:* Considere el volumen de la cubierta como un cierto cambio, ΔV, en volumen.]

60. Un automóvil, viajando hacia el norte a 60 mph, y un camión, viajando hacia el este a 45 mph, cruzan una intersección al mismo tiempo. ¿A qué razón cambia la distancia entre ellos 2 horas después?

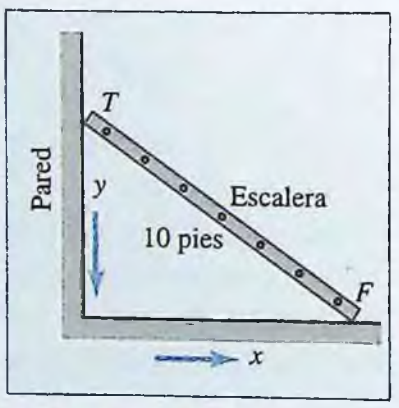
61. Un niño vuela un cometa que está a una altura de 80 pies por arriba de su mano. Si el papalote se mueve horizontalmente a una velocidad constante de 5 pies/s, ¿a qué razón cambia la distancia cuando el cometa está a 100 pies del niño?

62. Una persona parada en el extremo de un muelle 8 pies arriba del nivel del agua tira de una cuerda sujeta a una boya. Si la cuerda se recoge a una razón de 2 pies/min, ¿con qué rapidez se mueve la boya en el agua cuando está a 6 pies del muelle?



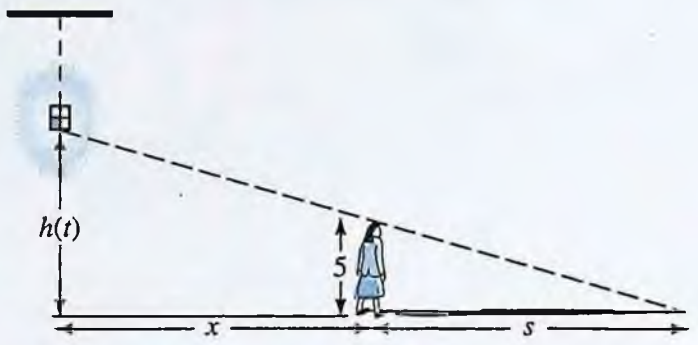
PROBLEMA 62

63. Una escalera de 10 pies de longitud se apoya en una pared. La parte superior de la escalera se resbala la pared abajo a una razón de 3 pies/s. ¿Con qué rapidez se aleja de la pared la base de la escalera cuando la parte superior está a 6 pies sobre el suelo?



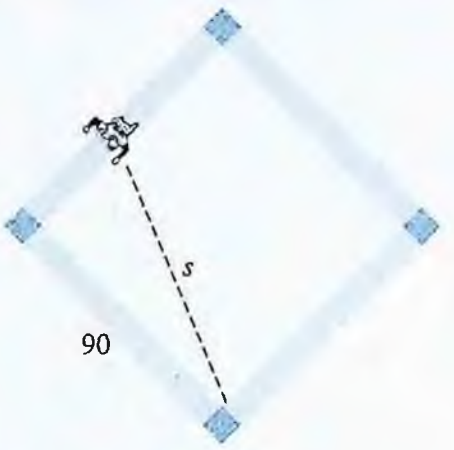
PROBLEMA 63

64. Una linterna cae desde la parte superior de un edificio de tal manera que después de t segundos está a $h(t) = 150 - 16t^2$ pies del suelo. Una mujer de 5 pies de estatura, parada originalmente justo debajo de la linterna, observa que comienza a caer y se aleja a una razón constante de 5 pies/s. ¿Con qué rapidez cambia la longitud de la sombra de la mujer cuando la linterna está a 10 pies del suelo?



PROBLEMA 64

65. Un campo de beisbol es un cuadrado de 90 pies de lado. Un corredor parte de la segunda base a la tercera a 20 pies/s. ¿Qué tan rápido cambia la distancia s entre el corredor y home cuando está a 15 pies de la tercera base?



PROBLEMA 65

66. COSTO DE FABRICACIÓN Suponga que el costo total de producción C en cierta fábrica es una función del número de q unidades producidas, que a su vez es una función del número t de horas durante las cuales la fábrica ha estado operando.

a) ¿Qué magnitud es representada por la derivada $\frac{dC}{dq}$? ¿En qué unidades se mide esta magnitud?

b) ¿Qué magnitud es representada por la derivada $\frac{dq}{dt}$? ¿En qué unidades se mide esta magnitud?

c) ¿Qué magnitud es representada por el producto $\frac{dC}{dq}\frac{dq}{dt}$? ¿En qué unidades se mide esta magnitud?

www.FreeLibros.com

67. Un objeto proyectado desde un punto P se mueve a lo largo de una recta. Se sabe que la velocidad del objeto es directamente proporcional al producto del tiempo que el objeto se ha estado moviendo y la distancia que se ha movido desde P. También se sabe que al término de 5 segundos, el objeto está a 20 pies de P y se mueve a una razón de 4 pies/s. Encuentre la aceleración del objeto en ese instante (cuando $t = 5$).

68. Encuentre todos los puntos (x, y) de la gráfica de la función $y = 4x^2$ con la propiedad de que la tangente a la gráfica en (x, y) pasa por el punto $(2,0)$.

69. Suponga que y es una función lineal de x; es decir, $y = mx + b$. ¿Qué le pasará a la razón porcentual de cambio de y con respecto a x cuando x se incrementa sin límite? Explique.

70. Determine una ecuación para la recta tangente a la curva

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

en el punto (x_0, y_0).

71. Sea $f(x) = (3x + 5)(2x^3 - 5x + 4)$. Utilice una calculadora graficadora para trazar $f(x)$ y $f'(x)$ en el mismo sistema de coordenadas. Utilice **TRACE** y **ZOOM** para encontrar donde $f'(x) = 0$.

72. Utilice una calculadora graficadora para trazar $f(x) = \dfrac{(2x + 3)}{(1 - 3x)}$ y $f'(x)$ en el mismo sistema de coordenadas. Utilice **TRACE** y **ZOOM** para encontrar dónde $f'(x) = 0$.

73. La curva $y^2(2 - x) = x$ se denomina **cisoide.** Utilice una calculadora graficadora para trazar esta curva, y determine las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica en el punto donde $x = 0.5$. ¿Qué le sucede a la gráfica cuando x se aproxima a 2 desde la izquierda? ¿Tiene la gráfica una recta tangente en el origen?

74. Un objeto se mueve a lo largo de una recta de tal manera que su posición en el momento t está dada por

$$s(t) = t^{5/2}(0.73t^2 - 3.1t + 2.7) \qquad \text{para } 0 \le t \le 2$$

a) Determine la velocidad $v(t)$ y la aceleración $a(t)$ y luego utilice una calculadora graficadora para trazar $s(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ en el mismo sistema de coordenadas, para $0 \le t \le 2$.

b) Utilice su calculadora para determinar un momento en el que $v(t) = 0$ para $0 \le t \le 2$. ¿Cuál es la posición del objeto en este instante?

c) ¿Cuándo toma $a(t)$ su menor valor ? ¿Dónde se encuentra el objeto en ese instante y cuál es su velocidad?

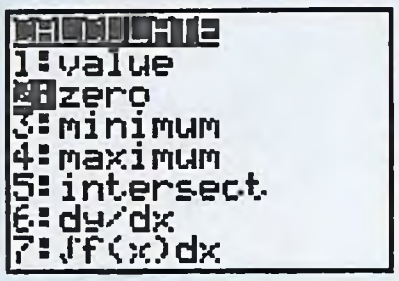
www.FreeLibros.com

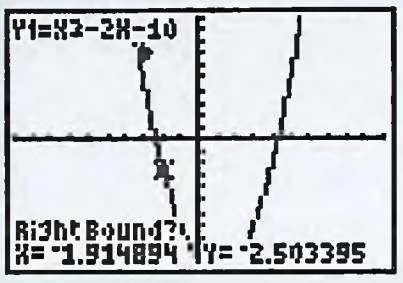
¡EXPLORE! ACTUALIZACIÓN

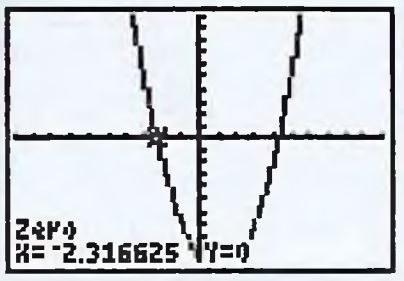
Determinación de raíces

1. Las intersecciones de una función con el eje x, también denominadas **raíces**, son características importantes de la función. Más adelante se verá a qué características de una función nos indican las raíces de su derivada. Por ahora, se explorarán las diferentes maneras en que una calculadora graficadora puede hallar las raíces.

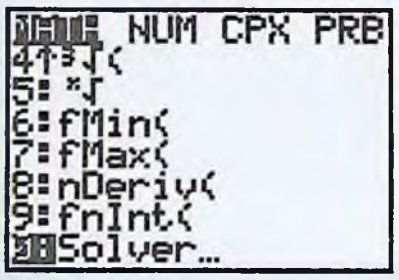
Verifique que su calculadora esté en modo de función (Func) accediendo el menú **MODE**. Introduzca $f(x) = x^2 - 2x - 10$ en Y1 del editor de ecuaciones (**Y=**). Grafique, empleando una ventana **ZOOM** estándar. Determine las intersecciones con el eje x trazando la gráfica o utilizando la opción de **ZOOM**. O bien, presione **CALC** (**2nd TRACE**) y seleccione 2:zero. Se necesitará especificar una frontera izquierda, una derecha y una estimación en el proceso. Verifique algebraicamente que la raíz negativa de esta función es $x = 1 - \sqrt{11}$.

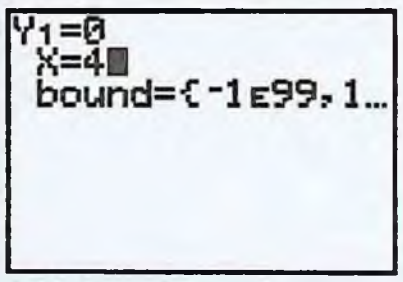


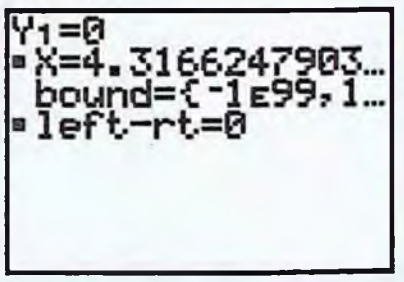




Otro método para determinar raíces es usando la instrucción solver de la ecuación de su calculadora graficadora. Acceda a la última línea de su tecla **MATH** (0:Solver). Escriba la ecuación a resolver, en este caso, Y1, en el solver de la ecuación, equ: 0 = Y1, y luego presione **ENTER**. Suponga que se trata de localizar la raíz positiva para $f(x)$ que se muestra en la gráfica anterior. Esa raíz parece muy cercana a $x = 4$, por lo que se usa este valor como punto de partida. Enseguida presione la tecla **ALPHA** y luego la tecla **ENTER** (**SOLVE**). Se puede comprobar que el valor resultante $x = 4.317$ es $x = 1 + \sqrt{11}$.





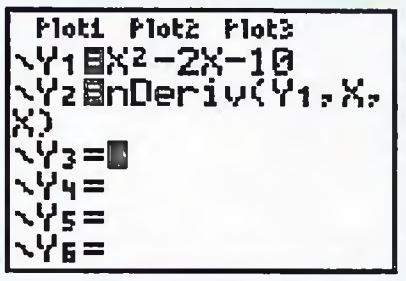


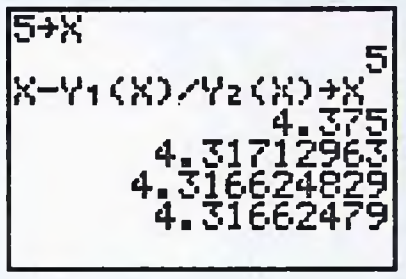
2. Otra manera de localizar una raíz es mediante el método de Newton, que es un algoritmo iterativo para encontrar raíces, y que se aproxima a la raíz a través de rectas tangentes. Véase la página 157.

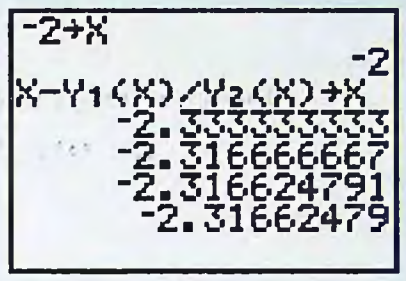
Apliquemos este método a $f(x) = x^2 - 2x - 10$. Ponga $f(x)$ en Y1 y escriba Y2 = nDeriv(Y1, X ,X), que es la derivada numérica de Y1, obtenida de la línea 8 de la tecla **MATH**. En el método de Newton requiere de un valor inicial. De la gráfica de $f(x)$ parece que la raíz positiva es menor que $x = 5$. En una pantalla limpia (**QUIT** = **2nd MODE**), introduzca el valor 5 en X escribiendo X → 5, y luego escriba el algoritmo de Newton, X − Y1(X)/Y2(X) → X. Ahora presione **ENTER** sucesivamente y observe la secuencia de valores resultantes. Note cuántas iteraciones se necesitaron para que dos aproximaciones sucesivas coincidieran en cuatro (o más) lugares decimales. Pruebe un

www.FreeLibros.com

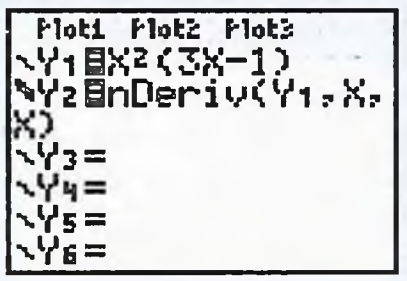
valor inicial de $x = 4$. ¿Elaboró una secuencia de aproximaciones para la misma raíz? ¿Qué tal si inició en $x = -2$?

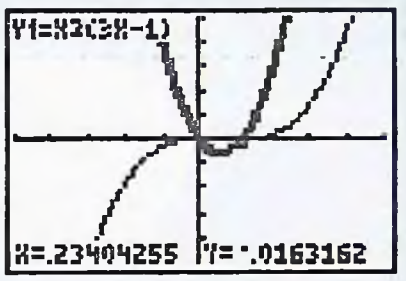




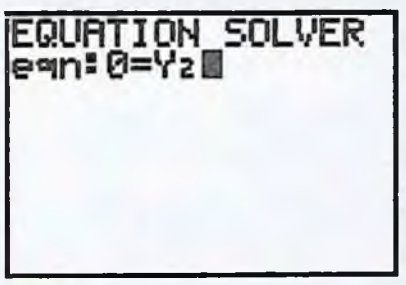


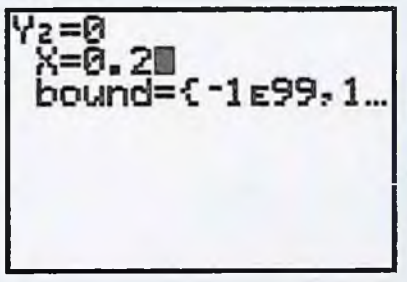
3. También se puede emplear esta capacidad de resolver ecuaciones para localizar las raíces de la derivada de una función. Como ejemplo, introduzca $f(x) = x^2(3x - 1)$ en Y1 del editor de ecuaciones y escriba Y2 = nDeriv(Y1, X, X). Utilice un estilo de trazo en negritas para Y2 y una panalla pequeña, **WINDOW** [−1, 1].2 por [−1, 1].2. De la gráfica que sigue, es evidente que una de las raíces de la derivada es $x = 0$. La otra raíz parece estar cerca de $x = 0.2$.

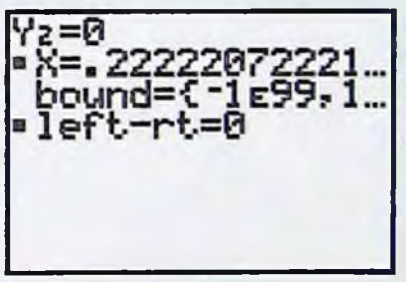




Para determinar la otra raíz, ponga Y2 en la posición del solver de ecuaciones, equ: 0=. Use $x = 0.2$ como punto inicial, y luego presione **ALPHA ENTER (SOLVE)** para obtener la segunda raíz de la derivada. ¿Qué sucede si introduce el valor inicial x igual a −0.2?







www.FreeLibros.com



REFLEXIONE ACERCA DE...

PROBLEMA





La palomilla de la manzana es un insecto que daña seriamente a las manzanas. Los gusanos de la manzana adultos emergen de sus capullos en primavera. Pronto se aparean y la hembra pone hasta 130 huevos pequeños en las hojas de los manzanos. Una vez que la larva de este gusano, también llamado gusano común de la manzana, sale de su huevo, va en busca de una manzana. El tiempo comprendido desde que sale del huevo hasta que encuentra una manzana se denomina **periodo de busqueda**. Cuando el gusano de la manzana encuentra una, se introduce en ella y se come la fruta y las semillas, con lo que acaba arruinándola. Después de 4 semanas, el gusano de la manzana sale de ella y se desliza bajo la corteza del árbol o en el suelo donde forma un capullo.

Las investigaciones acerca del comportamiento del gusano de la manzana indican que la duración del periodo de búsqueda $S(T)$ y el porcentaje de larvas que sobreviven este periodo de búsqueda $N(T)$, depende de la temperatura del aire T. Métodos de análisis de datos (regresión polinomial) aplicados a datos registrados a partir de observaciones sugieren que si T se mide en grados Celsius con $20 \leq T \leq 30$, entonces $S(T)$ y $N(T)$ se pueden modelar[13] mediante

$$S(T) = (-0.03T^2 + 1.6T - 13.65)^{-1} \text{ días}$$

y

$$N(T) = -0.85T^2 + 45.4T - 547$$

Utilice estas fórmulas para responder las siguientes preguntas.

Preguntas

1. ¿Qué predicen estas fórmulas para $S(T)$ y $N(T)$ sobre la duración del periodo de búsqueda y el porcentaje de larvas que sobreviven el periodo de búsqueda, cuando la temperatura del aire es 25 grados Celsius?
2. Trace la gráfica de $N(T)$ y determine la temperatura a la cual sobrevive el mayor

[13] P. L. Shaffer y H. J. Gold, "A Simulation Model of Population Dynamics of the Codling Moth *Cydia Pomonella*", *Ecological Modeling*, Vol. 30 (1985), páginas 247-274.

www.FreeLibros.com

porcentaje de gusanos de la manzana. Luego determine la temperatura a la cual sobrevive el menor porcentaje de larvas. (Recuerde, $20 \leq T \leq 30$.)

3. Determine $\frac{dS}{dT}$, la tasa de cambio del periodo de búsqueda con respecto a la temperatura T. ¿Cuándo es igual a cero esta razón? ¿Qué sucede (si es que ocurre algo) cuando $\frac{dS}{dT} = 0$?

4. Encuentre $\frac{dN}{dS}$, la tasa de cambio del porcentaje de larvas que sobreviven al periodo de búsqueda con respecto a la duración del periodo de búsqueda, empleando la regla de la cadena,

$$\frac{dN}{dT} = \frac{dN}{dS}\frac{dS}{dT}$$

¿Qué información proporciona (si es que proporciona alguna) esta razón?

www.FreeLibros.com

www.FreeLibros.com

CAPÍTULO 3



Una aplicación de la derivada es la determinación del punto de máxima eficiencia de un trabajador.

APLICACIONES ADICIONALES DE LA DERIVADA

1 Funciones crecientes y decrecientes; extremos relativos
2 Concavidad y puntos de inflexión
3 Trazado de curvas
4 Optimización
5 Aplicaciones adicionales de la optimización
Resumen del capítulo
Términos importantes, símbolos y fórmulas
Revisión del capítulo 3
Problemas de repaso
¡Explore! Actualización
Reflexiones acerca de...

www.FreeLibros.com

SECCIÓN 3.1 | Funciones crecientes y decrecientes; extremos relativos

De manera intuitiva, se considera que un función $f(x)$ es *creciente* cuando la gráfica de f sube, y que es *decreciente*, cuando la gráfica de f baja. Por ejemplo, en la figura 3.1 se muestra el gasto militar de los países que conformaban el antiguo bloque soviético durante el periodo crucial de 1990-1995, después de la disolución de la Unión Soviética, como un porcentaje del PIB (producto interno bruto). La forma de la gráfica sugiere que el gasto descendió marcadamente de 1990 a 1992, aumentó ligeramente de 1992 a 1994 y finalmente disminuyó todavía más.

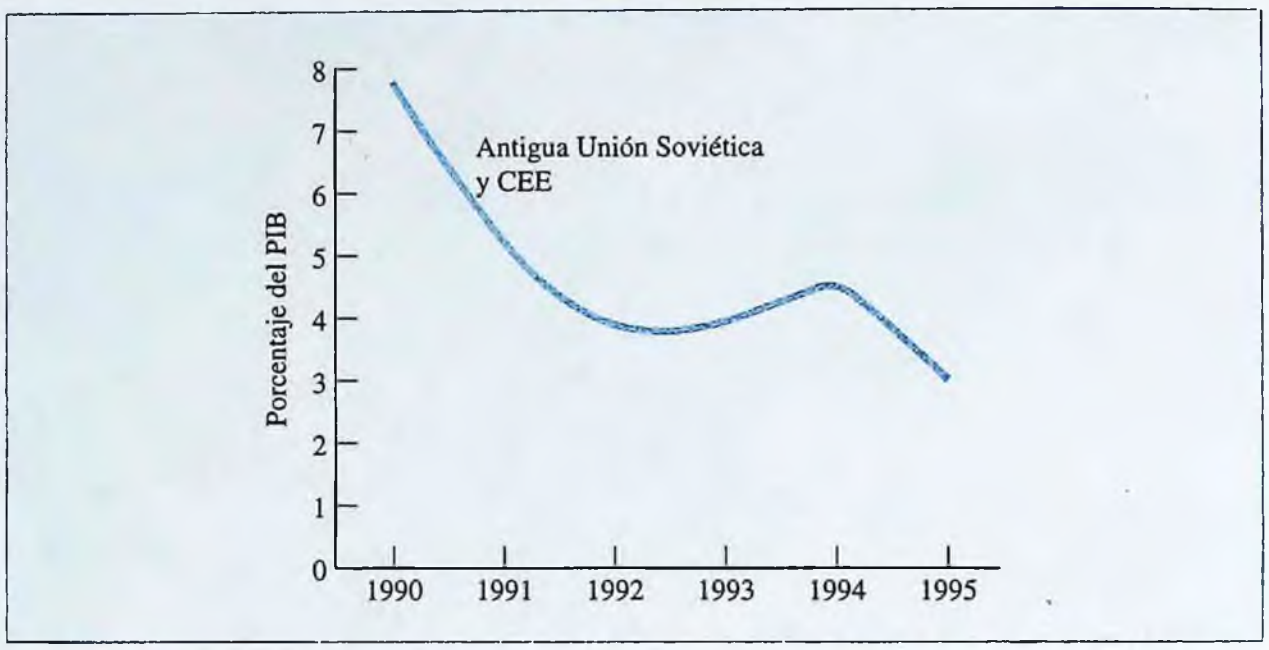


FIGURA 3.1 Gasto militar del bloque de países soviéticos como porcentaje del PIB.

A continuación se presenta una manera más formal para definir las funciones crecientes y decrecientes, las cuales se ilustran gráficamente en la figura 3.2.

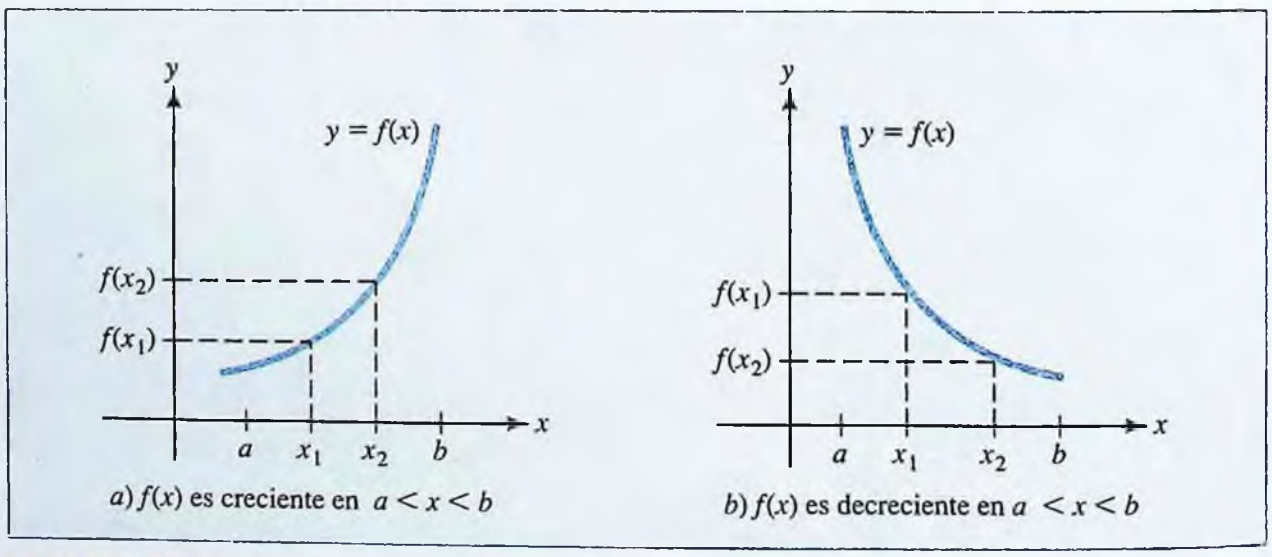


FIGURA 3.2 Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

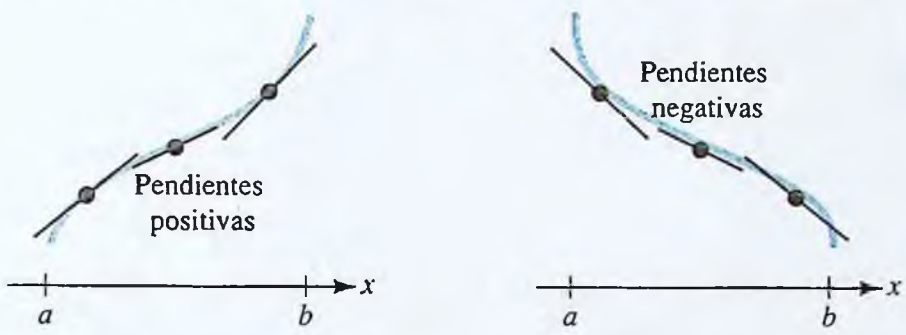
www.FreeLibros.com

Funciones crecientes y decrecientes ■ Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $a < x < b$, y sean x_1 y x_2 dos números del intervalo. Entonces

$f(x)$ es **creciente** en el intervalo si $f(x_2) > f(x_1)$ siempre que $x_2 > x_1$.

$f(x)$ es **decreciente** en el intervalo si $f(x_2) < f(x_1)$ siempre que $x_2 > x_1$.

Como se demuestra en la figura 3.3a, si la gráfica de una función $f(x)$ tiene rectas tangentes sólo con pendientes positivas en el intervalo $a < x < b$, entonces la gráfica será creciente y $f(x)$ aumentará en dicho intervalo. Como la pendiente de cada recta tangente está dada por la derivada $f'(x)$, se deduce que $f(x)$ es creciente (la gráfica asciende) sobre los intervalos donde $f'(x) > 0$. De manera similar, $f(x)$ es decreciente (la gráfica desciende) en los intervalos donde $f'(x) < 0$ (figura 3.3b).



a) $f'(x) > 0$ en $a < x < b$, entonces $f(x)$ es creciente.

b) $f'(x) < 0$ en $a < x < b$, entonces $f(x)$ es decreciente.

FIGURA 3.3 Criterio de la derivada para una función creciente y una decreciente.

Por la propiedad del valor intermedio (sección 1.6), se sabe que una función continua no puede cambiar de signo sin pasar primero por 0. Esto significa que, si se marcan sobre la recta numérica todos los valores de x donde $f'(x)$ es discontinua o $f'(x) = 0$, la recta quedará dividida en intervalos donde $f'(x)$ no cambia de signo. Por tanto, si al elegir un número de prueba c de cada intervalo, se determina que $f'(c) > 0$, entonces se sabe que $f'(x) > 0$ para *todos* los valores de x en ese intervalo, y $f(x)$ debe ser creciente (la gráfica asciende) en todo el intervalo. De manera similar, si $f'(c) < 0$, se deduce que $f(x)$ es decreciente (la gráfica desciende) en todo el intervalo. Estas anotaciones se pueden resumir como sigue.

Procedimiento para determinar los intervalos donde una función f crece o decrece usando la derivada

Paso 1. Encuentre todos los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$ o donde $f'(x)$ no es continua, y marque esos números sobre una recta numérica. Esto divide la recta en un número de intervalos abiertos.

Paso 2. Elija un número de prueba c para cada intervalo $a < x < b$ determinado en el paso 1 y evalúe $f'(c)$. Entonces

Si $f'(c) > 0$, la función $f(x)$ es creciente (la gráfica asciende) en $a < x < b$.

Si $f'(c) < 0$, la función $f(x)$ es decreciente (la gráfica desciende) en $a < x < b$.

Este procedimiento se ilustra en los ejemplos 3.1.1 y 3.1.2.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Siguiendo el ejemplo 3.1.1, introduzca $f(x)$ en Y1 utilizando un estilo de graficación en negritas y escriba Y2 = nDeriv(Y1, X, X), la primera derivada numérica de $f(x)$. Grafique ambas funciones utilizando la pantalla decimal alargada [−4.7, 4.7]1 por [−20, 20]2. ¿Puede identificar los intervalos donde $f(x)$ crece o decrece al examinar el comportamiento de $f'(x)$?

EJEMPLO | 3.1.1

Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento para la función

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7.$$

Solución

La derivada de $f(x)$ es

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x + 2)(x - 1)$$

que es continua en todos los puntos, con $f'(x) = 0$ donde $x = 1$ y $x = -2$. Los números -2 y 1 dividen el eje x en tres intervalos abiertos; que son $x < -2$, $-2 < x < 1$ y $x > 1$. Elija un número de prueba c para cada uno de estos intervalos; por ejemplo, $c = -3$ de $x < -2$, $c = 0$ de $-2 < x < 1$ y $c = 2$ de $x > 1$. Evalúe $f'(c)$ para cada número de prueba:

$$f'(-3) = 24 > 0 \qquad f'(0) = -12 < 0 \qquad f'(2) = 24 > 0$$

Se concluye que $f'(x) > 0$ para $x < -2$ y para $x > 1$, entonces $f(x)$ es creciente (la gráfica asciende) en esos intervalos. Asimismo, $f'(x) < 0$ en $-2 < x < 1$, entonces $f(x)$ es decreciente (la gráfica desciende) en este intervalo. En la tabla 3.1 se resumen estos resultados. La gráfica de $f(x)$ se muestra en la figura 3.4.

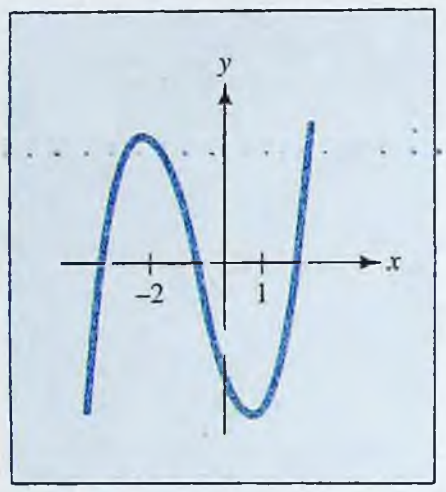
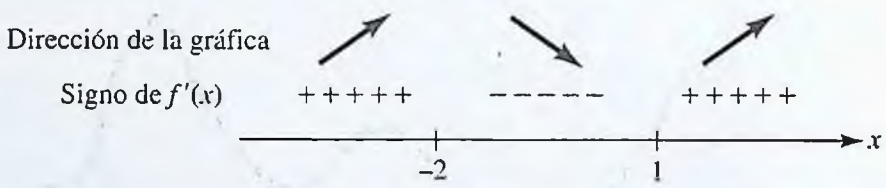


FIGURA 3.4 Gráfica de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$.

TABLA 3.1 Intervalos de crecimiento y decrecimiento para $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$

Intervalo	Número de prueba c	$f'(c)$	Conclusión	Dirección de la gráfica
$x < -2$	-3	$f'(-3) > 0$	f es creciente	sube
$-2 < x < 1$	0	$f'(0) < 0$	f es decreciente	baja
$x > 1$	2	$f'(2) > 0$	f es creciente	sube

NOTACIÓN De aquí en adelante se indicará el intervalo donde $f(x)$ es creciente con una "flecha hacia arriba" (↗) y el intervalo donde $f(x)$ es decreciente con "una flecha hacia abajo" (↘). Así, los resultados en el ejemplo 3.1.1 se pueden representar por el siguiente diagrama de flechas:



EJEMPLO | 3.1.2

Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento para la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$$

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Grafique

$$f(x) = x^2/(x - 2)$$

en estilo rectangular y

$$g(x) = x^2/(x - 4)$$

en negritas, usando la pantalla [−9.4, 9.4]1 por [−20, 30]5. ¿Qué efecto tiene el cambio en el denominador en los puntos más alto y más bajo de la gráfica? ¿Sobre cuál intervalo está $g(x)$ decreciendo?

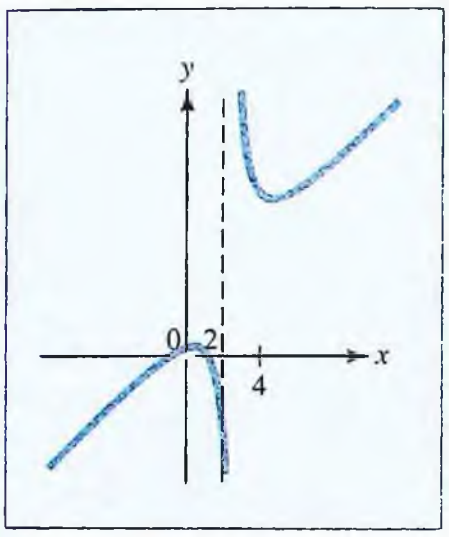


FIGURA 3.5 Gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$.

Solución

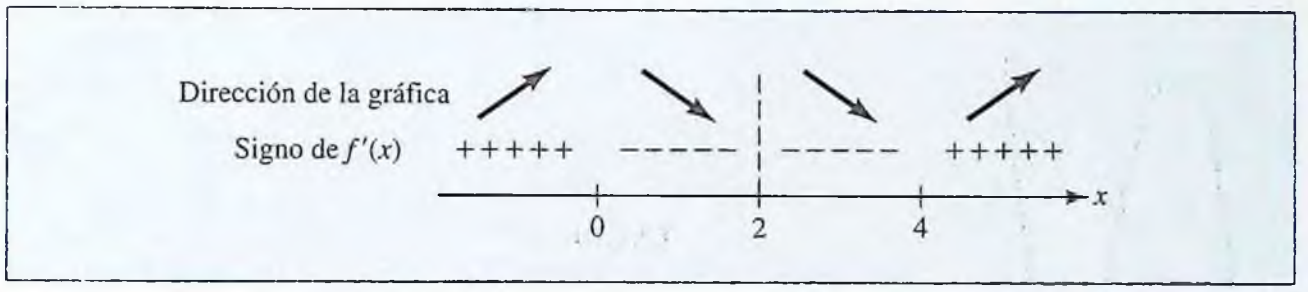
La función está definida para $x \neq 2$, y su derivada es

$$f'(x) = \frac{(x - 2)(2x) - x^2(1)}{(x - 2)^2} = \frac{x(x - 4)}{(x - 2)^2}$$

que es discontinua en $x = 2$ y tiene $f'(x) = 0$ en $x = 0$ y $x = 4$. Por tanto, hay cuatro intervalos donde el signo de $f'(x)$ no cambia: éstos son $x < 0$, $0 < x < 2$, $2 < x < 4$ y $x > 4$. Al elegir los números de prueba en estos intervalos (por ejemplo, -2, 1, 3 y 5, respectivamente), se encuentra que

$$f'(-2) = \frac{3}{4} > 0 \qquad f'(1) = -3 < 0 \qquad f'(3) = -3 < 0 \qquad f'(5) = \frac{5}{9} > 0$$

Se puede concluir que $f(x)$ es creciente (la gráfica asciende) para $x < 0$ y para $x > 4$ y que es decreciente (la gráfica desciende) para $0 < x < 2$ y para $2 < x < 4$. Estos resultados se resumen en el diagrama de flechas que se presenta a continuación [la recta vertical punteada indica que $f(x)$ no está definida en $x = 2$].



Intervalos de crecimiento y decrecimiento para $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$.

La gráfica de $f(x)$ se muestra en la figura 3.5. Se observa cómo la gráfica tiende a la recta vertical en $x = 2$, a medida que x se acerca a 2. Este comportamiento identifica a $x = 2$ como una *asíntota vertical* de la gráfica de $f(x)$. En la sección 3.3 se analizarán las asíntotas.

Extremos relativos

La simplicidad de las gráficas en las figuras 3.4 y 3.5 puede ser engañosa. Una gráfica más general se muestra en la figura 3.6. Observe que en C y E hay "cimas", y en B, D y G hay "valles". Por otra parte, en B, C, D y G hay tangentes horizontales,

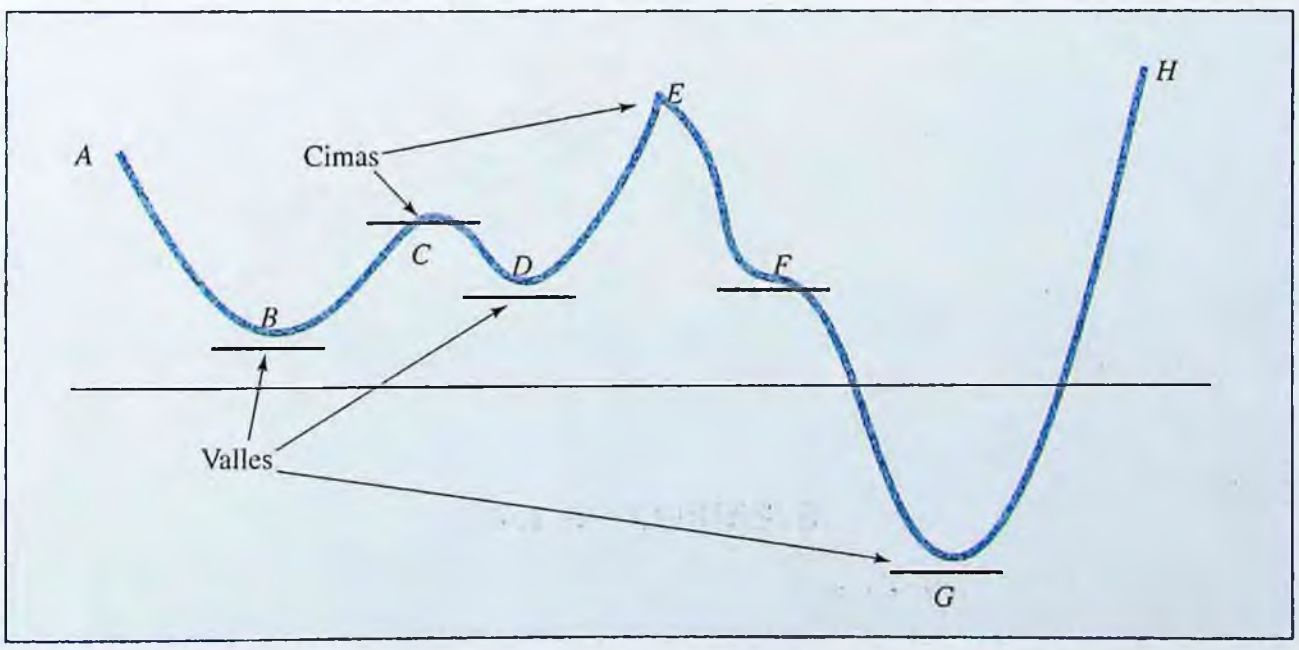


FIGURA 3.6 Gráfica con varios tipos de "cimas" y "valles".

www.FreeLibros.com

en el punto "agudo" E no se puede dibujar la tangente. Además, hay una tangente horizontal en F que no es ni cima ni valle. En esta sección y en la siguiente, se observará cómo pueden utilizarse los métodos de cálculo para localizar e identificar las "cimas" y "valles" de una gráfica. Esto a su vez proporciona la base para el procedimiento de trazado de curvas y para los métodos de optimización.

Menos informalmente, a una "cima" sobre la gráfica de una función f se le conoce como un **máximo relativo** de f, y a un "valle" como un **mínimo relativo**. Así, un máximo relativo es un punto sobre la gráfica de f que está al menos tan alto como cualquier otro punto cercano sobre la gráfica, mientras que un mínimo relativo está al menos tan bajo como cualquier punto cercano. En conjunto, a los máximos y mínimos relativos se les conoce como **extremos relativos**. En la figura 3.6, los máximos relativos se localizan en C y E, y los mínimos relativos están en B, D y G. Se observa que un extremo relativo no tiene que ser el punto más alto o el más bajo de toda la gráfica. Por ejemplo, en la figura 3.6, el punto más bajo en la gráfica está en el mínimo relativo G, pero el punto más alto ocurre a la derecha del extremo H. A continuación se presenta un resumen de esta terminología.

Extremos relativos ■ Se dice que la gráfica de la función $f(x)$ tiene un *máximo relativo* en $x = c$ si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en un intervalo $a < x < b$ que contiene a c. De manera similar, la gráfica tiene un *mínimo relativo* en $x = c$ si $f(c) \leq f(x)$ en dicho intervalo. En conjunto, los máximos y mínimos relativos de f se denominan *extremos relativos*.

Como una función $f(x)$ es creciente cuando $f'(x) > 0$ y decreciente cuando $f'(x) < 0$, los únicos puntos donde $f(x)$ puede tener extremos relativos son aquellos donde $f'(x) = 0$ o donde $f'(x)$ no existe. Tales puntos son tan importantes que se les da un nombre especial.

Números críticos y puntos críticos ■ Un número c en el dominio de $f(x)$ se denomina *número crítico* si $f'(x) = 0$ o $f'(c)$ no existe. El punto correspondiente $(c, f(c))$ en la gráfica de $f(x)$ se denomina un *punto crítico* de $f(x)$.

En la figura 3.7 se muestran tres funciones con puntos críticos en los cuales la derivada es cero. En este caso, la recta tangente a la gráfica en el punto crítico $(c, f(c))$ es horizontal ya que su derivada $f'(c)$ da la pendiente de la recta tangente en este punto y $f'(c) = 0$.

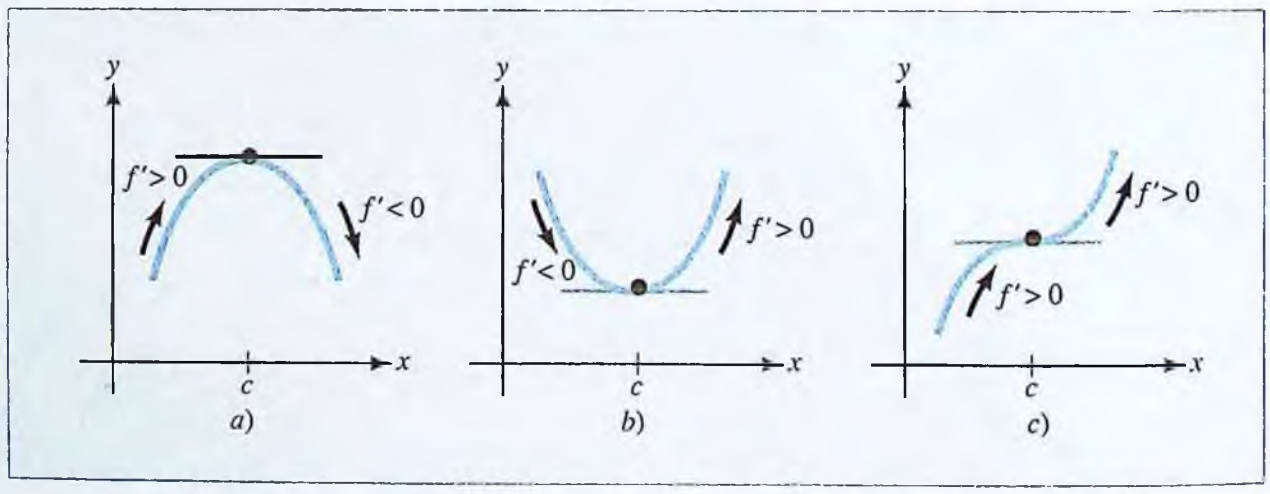


FIGURA 3.7 Tres puntos críticos donde $f'(x) = 0$: *a*) máximo relativo, *b*) mínimo relativo y *c*) ningún extremo relativo.

En la figura 3.8 se muestran tres funciones con puntos críticos en los que la derivada no está definida. En la figura 3.8*c* la recta tangente es vertical en $(c, f(c))$, de manera

www.FreeLibros.com

que la pendiente $f'(c)$ está indefinida. En las figuras 3.8*a* y 3.8*b*, no se puede trazar ninguna recta tangente (única) en el "pico", del punto $(c, f(c))$.

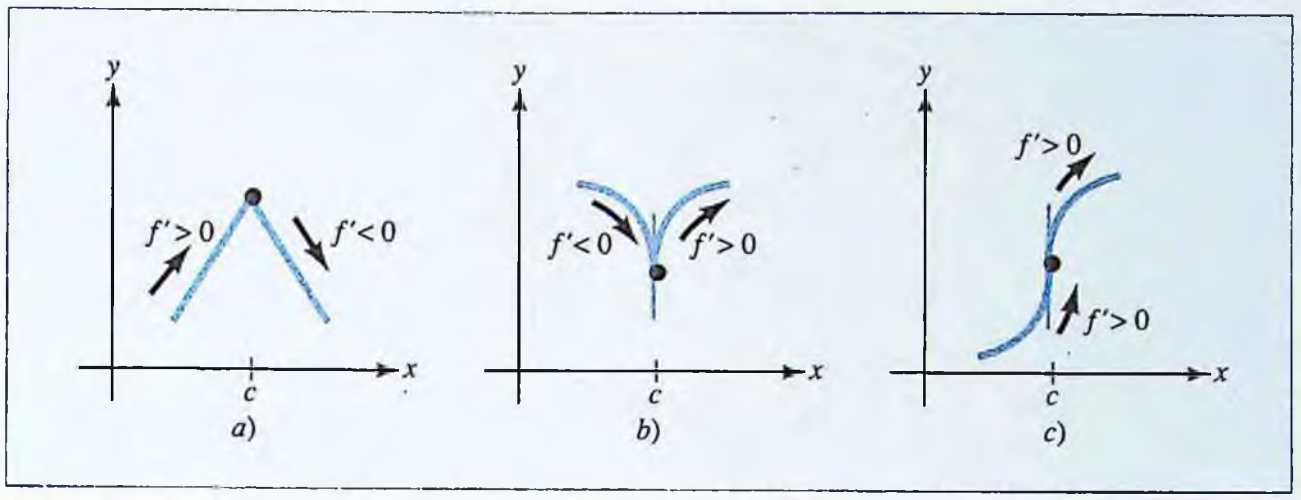


FIGURA 3.8 Tres puntos críticos donde $f'(x)$ es indefinida: *a*) máximo relativo, *b*) mínimo relativo y *c*) ningún extremo relativo.

Criterio de la primera derivada para extremos relativos

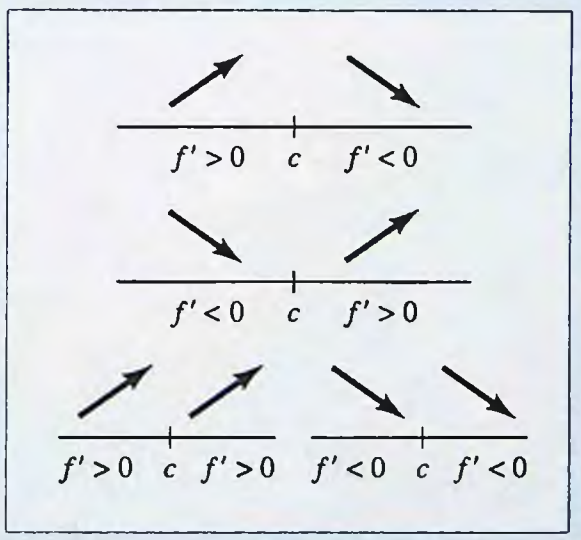
Las figuras 3.7 y 3.8 también sugieren un método para clasificar los puntos críticos como máximo relativo, mínimo relativo o ninguna de las dos cosas, usando el signo de la derivada. Suponga que c es un número crítico de f y que $f'(x) > 0$ a la izquierda de c, mientras que $f'(x) < 0$ a la derecha. Geométricamente esto significa que la gráfica de f es ascendente antes del punto crítico $P(c, f(c))$ y que después desciende, lo que implica que P es un máximo relativo. De igual forma, si $f'(x) < 0$ a la izquierda de c y $f'(x) > 0$ a la derecha, entonces la gráfica desciende antes de $P(c, f(c))$ y luego asciende, por tanto debe existir un mínimo relativo en P. Por otra parte, si la derivada tiene el mismo signo a ambos lados de c, entonces la gráfica o es ascendente en P o es descendente en P, y ahí no hay ningún extremo relativo. Estas observaciones se pueden resumir de la siguiente manera.

Criterio de la primera derivada para extremos relativos ■ Sea c un número crítico para $f(x)$ [es decir, $f(c)$ está definido y se tiene que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe]. Entonces el punto crítico $P(c, f(c))$ es

Un **máximo relativo** si $f'(x) > 0$ a la izquierda de c y $f'(x) < 0$ a la derecha de c

Un **mínimo relativo** si $f'(x) < 0$ a la izquierda de c y $f'(x) > 0$ a la derecha de c

No es un extremo relativo si $f'(x)$ tiene el mismo signo a ambos lados de c



EJEMPLO | 3.1.3

Encuentre todos los números críticos de la función

$$f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 3$$

y clasifique cada punto crítico como un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguna de las dos cosas.

www.FreeLibros.com

Solución

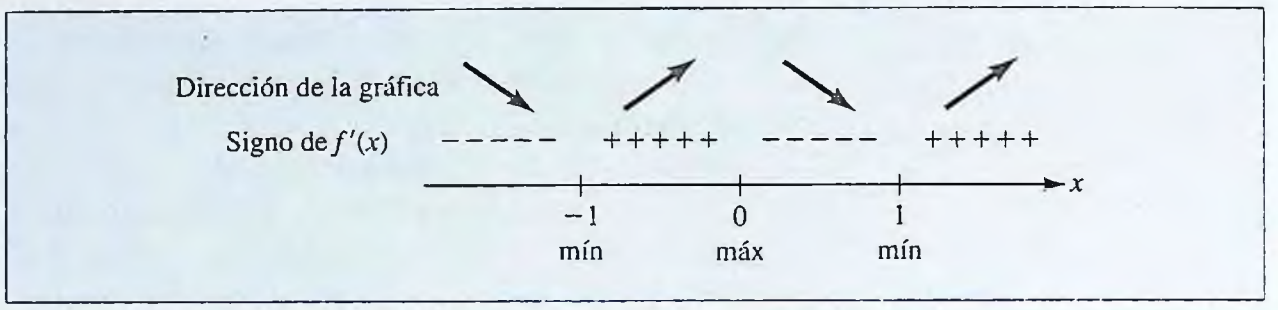
El polinomio $f(x)$ está definido para toda x y su derivada es

$$f'(x) = 8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1) = 8x(x - 1)(x + 1)$$

Como la derivada existe para toda x, los únicos números críticos están donde $f'(x) = 0$, es decir, $x = 0$, $x = 1$ y $x = -1$. Estos números dividen el eje x en cuatro intervalos, en cada uno de ellos el signo de la derivada no cambia; esto es, $x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$ y $x > 1$. Elija un número de prueba c en cada uno de estos intervalo (por ejemplo, -5, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, y 2, respectivamente) y evalúe $f'(c)$ en cada caso:

$$f'(-5) = -960 < 0 \quad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 > 0 \quad f'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{15}{8} < 0 \quad f'(2) = 48 > 0$$

De esta manera, la gráfica de f desciende para $x < -1$ y para $0 < x < 1$, mientras que asciende para $-1 < x < 0$ y para $x > 1$; entonces debe haber un máximo relativo en $x = 0$ y mínimos relativos en $x = -1$ y $x = 1$, como se indica en el siguiente diagrama de flechas.



Aplicaciones

Una vez que se han determinado los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función f, y se han encontrado sus extremos relativos, ya se puede obtener un esbozo de la gráfica de la función. Ahora se presenta una descripción paso a paso del procedimiento para el trazado de la gráfica de una función continua $f(x)$, utilizando la derivada $f'(x)$. En la sección 3.3 se extenderá este procedimiento para cubrir la situación donde $f(x)$ es discontinua.

Procedimiento para trazar la gráfica de una función continua $f(x)$ utilizando la derivada $f'(x)$

Paso 1. Determine el dominio de $f(x)$. Dibuje una recta numérica restringida a aquellos valores que están en el dominio de $f(x)$.

Paso 2. Encuentre $f'(x)$ y marque cada número crítico en la recta numérica restringida que se obtuvo en el paso 1. Luego analice el signo de la derivada para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ sobre la recta numérica restringida.

Paso 3. Para cada número crítico c, encuentre $f(c)$ y represente el punto crítico $P(c, f(c))$ en un plano coordenado, con un "gorro" ∩ si P es un máximo relativo (↗↘), o una "copa" ∪ si P es un mínimo relativo (↘↗). Trace las intersecciones y otros puntos clave que puedan encontrarse con facilidad.

Paso 4. Dibuje la gráfica f como una curva suave uniforme que une los puntos críticos de tal modo que asciende donde $f'(x) > 0$, desciende donde $f'(x) < 0$, y tiene una tangente horizontal donde $f'(x) = 0$.

EJEMPLO | 3.1.4

Dibuje la gráfica de la función $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 8$.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Grafique $f(x)$ del ejemplo 3.1.4 en negritas utilizando la pantalla $[-4.7, 4.7]1$ por $[-15, 45]5$. En la misma pantalla, grafique $g(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 + 2$, que es $f(x)$ con un cambio en el término constante de -8 a $+2$. ¿Qué efecto tiene este cambio sobre los valores críticos?

Solución

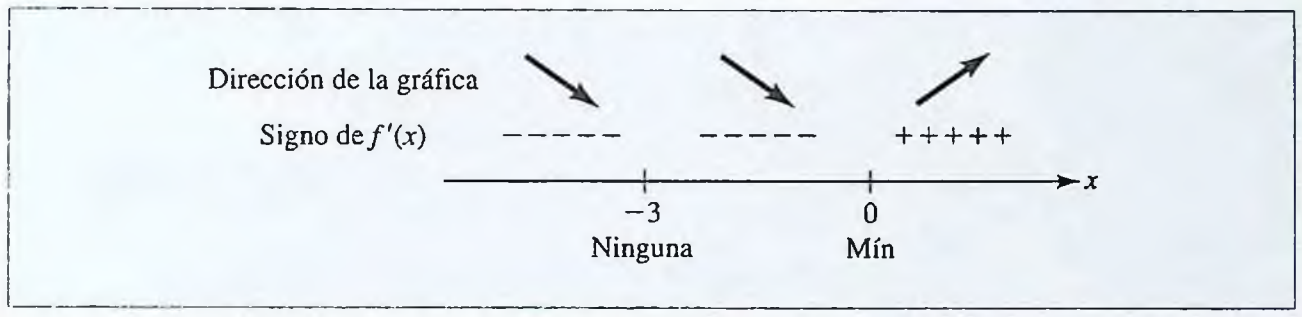
Como $f(x)$ es un polinomio, está definida para toda x. Su derivada es

$$f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 36x = 4x(x^2 + 6x + 9) = 4x(x + 3)^2$$

Como la derivada existe para toda x, los únicos números críticos están donde $f'(x) = 0$;a saber, en $x = 0$ y $x = -3$. Estos números dividen el eje x en tres intervalos, en cada uno de ellos el signo de la derivada $f'(x)$ no cambia; esto es, $x < -3$, $-3 < x < 0$ y $x > 0$. Elija un número de prueba c en cada intervalo (por ejemplo, -5, -1 y 1, respectivamente) y determine el signo de $f'(c)$:

$$f'(-5) = -80 < 0 \qquad f'(-1) = -16 < 0 \qquad f'(1) = 64 > 0$$

Así, la gráfica de f tiene tangentes horizontales donde x es -3 y 0; la gráfica desciende (f decrece) en los intervalos $x < -3$ y $-3 < x < 0$ y asciende (f crece) para $x > 0$, como se indica en el diagrama de flechas:



Interpretando el diagrama se ve que la gráfica cae en un tangente horizontal en $x = -3$, luego continúa cayendo hasta el mínimo relativo en $x = 0$, después de lo cual se eleva indefinidamente. Se encuentra que $f(-3) = 19$ y $f(0) = -8$. Para empezar a trazarla, represente una "copa" ∪ en el punto crítico $(0, -8)$ para indicar que allí ocurre un mínimo relativo (si hubiera habido un máximo relativo, se habría usado un "gorro" ∩), y un "giro" — en $(-3, 19)$, para indicar que la gráfica cae con una tangente horizontal en ese punto. Esto se muestra en la gráfica preliminar de la figura 3.9a. Por último, se completa el dibujo trazando una curva suave por los puntos críticos en las direcciones indicadas por las flechas, como se indica en la figura 3.9*b*.

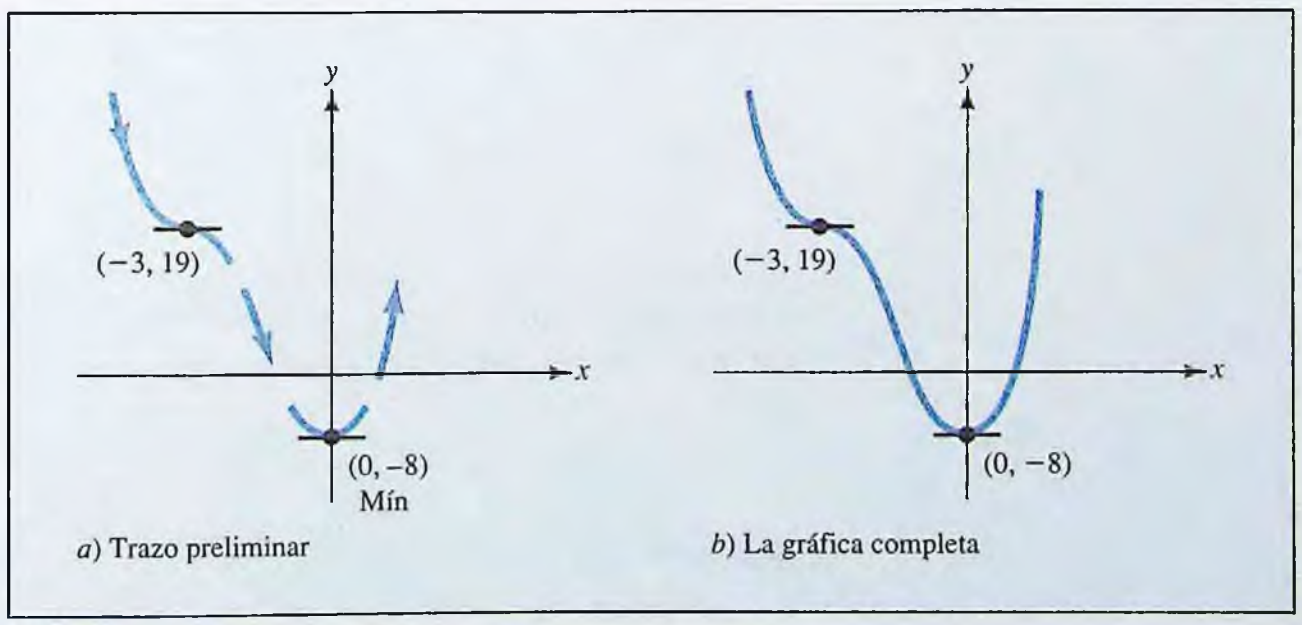


FIGURA 3.9 Gráfica de $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 8$.

www.FreeLibros.com

REPASO

Justo-a-tiempo

El producto *ab* satisface $ab \geq 0$ cuando ambos $a \geq 0$ y $b \geq 0$ o cuando $a \leq 0$ y $b \leq 0$. Si *a* y *b* tienen signos opuestos, entonces $ab \leq 0$.

EJEMPLO | 3.1.5

Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos relativos de la función $g(t) = \sqrt{3 - 2t - t^2}$. Trace la gráfica.

Solución

Como $\sqrt{u}$ está definida sólo para $u \geq 0$, el dominio de g será el conjunto de toda t tal que $3 - 2t - t^2 \geq 0$. Factorizando la expresión $3 - 2t - t^2$, se obtiene

$$3 - 2t - t^2 = (3 + t)(1 - t)$$

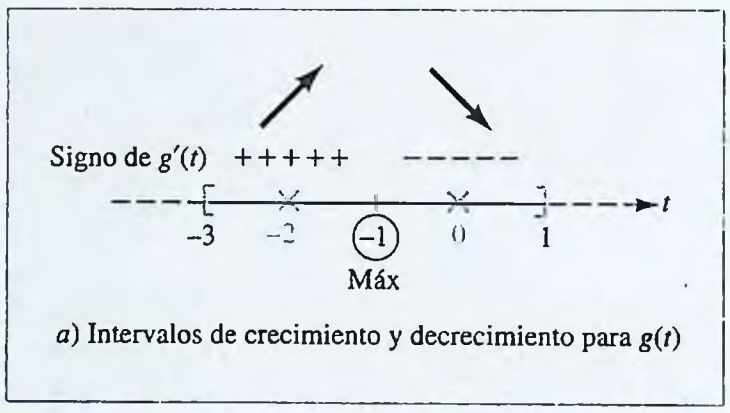
Observe que $3 + t \geq 0$ cuando $t \geq -3$ y que $1 - t \geq 0$ cuando $t \leq 1$. Se tiene $(3 + t)(1 - t) \geq 0$ cuando *ambos* términos son no negativos; es decir, cuando $t \geq -3$ y $t \leq 1$, o, lo que es lo mismo, cuando $-3 \leq t \leq 1$. Se debería pensar también en el caso $(3 + t)(1 - t) \geq 0$ si $3 + t \leq 0$ y $1 - t \leq 0$, pero esto no es posible (¿puede ver por qué?) De esta manera, $g(t)$ está definida sólo para $-3 \leq t \leq 1$.

Ahora, usando la regla de la cadena, calcule la derivada de $g(t)$:

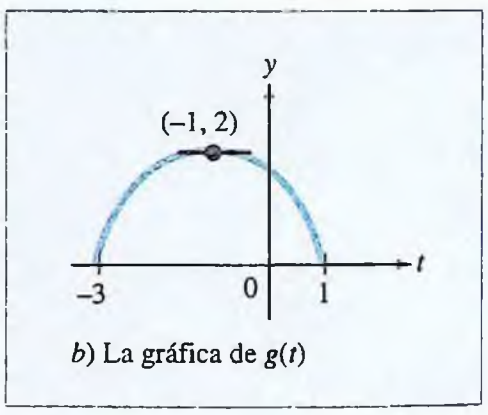
$$g'(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3 - 2t - t^2}}(-2 - 2t)$$

$$= \frac{-1 - t}{\sqrt{3 - 2t - t^2}}$$

Observe que $g'(t)$ no existe en los extremos $t = -3$ y $t = 1$ del domino de $g(t)$, y $g'(t) = 0$ sólo cuando $t = -1$. Luego, se marcan estos tres números críticos en una recta numérica restringida al dominio de g (a saber, $-3 \leq t \leq 1$), y se determina el signo de la derivada $g'(t)$ en los subintervalos $-3 < t < -1$ y $-1 < t < 1$, obteniendo el diagrama de flechas que se muestra en la figura 3.10a. Por último, se calcula $g(-3) = g(1) = 0$ y $g(-1) = 2$, y se observa que el diagrama de flechas sugiere que existe un máximo relativo en $(-1, 2)$. La gráfica completa se muestra en la figura 3.10*b*.



a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento para $g(t)$



b) La gráfica de $g(t)$

FIGURA 3.10 Trazando la gráfica de $g(t) = \sqrt{3 - 2t - t^2}$.

Algunas veces se conoce la gráfica de $f(x)$ con lo que se pueden usar la relación entre el signo de la derivada $f'(x)$ y los intervalos de crecimiento y decrecimiento para determinar la forma general de la gráfica de $f'(x)$. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 3.1.6.

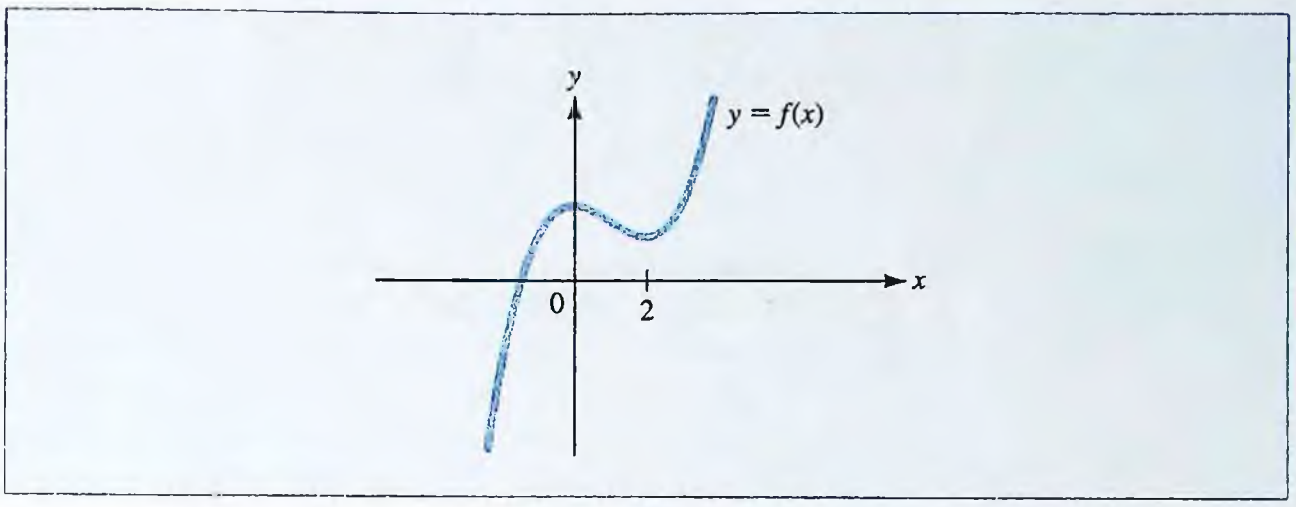
EJEMPLO | 3.1.6

A continuación se muestra la gráfica de una función $f(x)$. Trace una gráfica posible para la derivada $f'(x)$.

www.FreeLibros.com

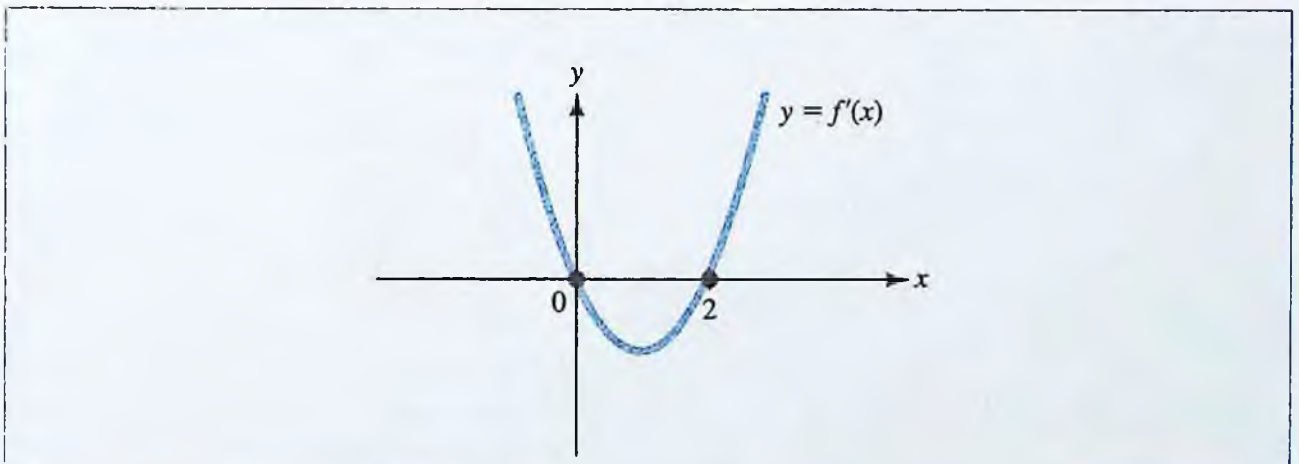
¡EXPLORE!

Introduzca $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ en Y1 y $f'(x)$ (mediante la derivada numérica) en Y2 utilizando el estilo de graficación en negritas y un tamaño de pantalla de [−4.7, 4.7]1 por [−10, 10]2. ¿Cómo se relacionan los extremos relativos de $f(x)$ con las características de la gráfica de $f'(x)$? ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de $f(x)$ en el intervalo [−2, 1]?



Solución

Como la gráfica de $f(x)$ desciende para $0 < x < 2$, se tiene $f'(x) < 0$ y la gráfica de $f'(x)$ está por abajo del eje x en este intervalo. De igual manera, para $x < 0$ y para $x > 2$, la gráfica de $f(x)$ asciende, de manera que $f'(x) > 0$ y la gráfica de $f'(x)$ está por arriba del eje x en ambos intervalos. La gráfica de $f(x)$ es "plana" (recta tangente horizontal) en $x = 0$ y $x = 2$, entonces $f'(0) = f'(2) = 0$, y $x = 0$ y $x = 2$ son las intersecciones de la gráfica de $f'(x)$ con el eje x. A continuación se presenta una posible gráfica que satisface estas condiciones:



En la sección 3.2 será refinado el procedimiento para el trazado de curvas usando la derivada $f'(x)$, al agregar características utilizando la segunda derivada $f''(x)$, y en la sección 3.3 se presentará un procedimiento más general para el trazado de curvas que incluye derivadas y límites. Los mismos razonamientos utilizados para analizar gráficas se pueden aplicar para determinar valores óptimos, tales como costo mínimo de un proceso de producción, o producción máxima sostenible de una empacadora de salmón. En el ejemplo 3.1.7 se ilustra un proceso de optimización que se analiza con mayor detalle en las secciones 3.4 y 3.5.

EJEMPLO | 3.1.7

El ingreso obtenido por la venta de una nueva clase de patín motorizado t semanas después de su introducción está dado por

$$R(t) = \frac{63t - t^2}{t^2 + 63} \qquad 0 \le t \le 63$$

millones de dólares. ¿Cuándo se alcanza el ingreso máximo? ¿Cuál es el ingreso máximo?

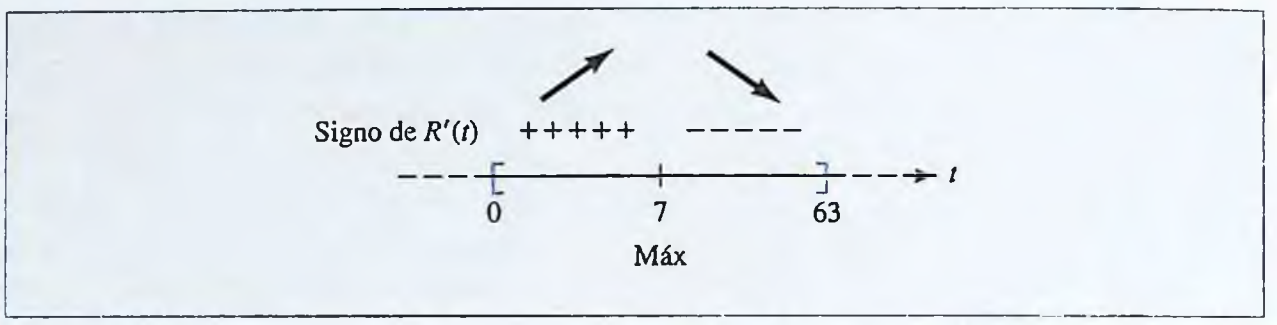
www.FreeLibros.com

Solución

Derivando $R(t)$ mediante la regla del cociente, se obtiene

$$R'(t) = \frac{(t^2 + 63)(63 - 2t) - (63t - t^2)(2t)}{(t^2 + 63)^2} = \frac{-63(t - 7)(t + 9)}{(t^2 + 63)^2}$$

Igualando el numerador de esta expresión de $R'(t)$ a 0, se halla que $t = 7$ es la única solución de $R'(t) = 0$ en el intervalo $0 \leq t \leq 63$, y, por lo tanto, es el único número crítico de $R(t)$ en su dominio. El número crítico divide el dominio $0 \leq t \leq 63$ en dos intervalos, $0 \leq t < 7$ y $7 < t \leq 63$. Evaluando $R'(t)$ en números de prueba en cada intervalo (por ejemplo, en $t = 1$ y $t = 9$), se obtiene el diagrama de flechas que se muestra a continuación.



El patrón de flechas indica que el ingreso aumenta a un t máximo en $t = 7$, después de lo cual disminuye. En el momento óptimo $t = 7$, el ingreso obtenido es

$$R(7) = \frac{63(7) - (7)^2}{(7)^2 + 63} = 3.5 \text{ millones de dólares}$$

En la figura 3.11 se muestra la gráfica de la función de ingreso $R(t)$. En ella se ve que inmediatamente después de su introducción, el patín motorizado es un producto muy popular, y que se alcanza un extremo en el ingreso de 3.5 millones de dólares, apenas 7 semanas después de su lanzamiento. Sin embargo, su popularidad, medida por el ingreso, luego empieza a bajar. Después de 63 semanas, el ingreso cesa completamente, los patines se retiran de los mostradores y se reemplazan por otra novedad. Un producto que exhibe este tipo de patrón de ingreso, con incrementos pronunciados seguidos por un descenso uniforme hacia 0, a veces se clasifica como una "moda".

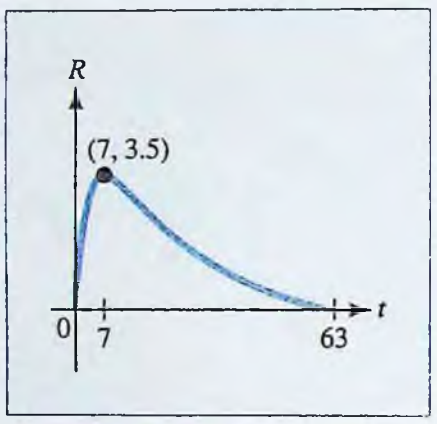
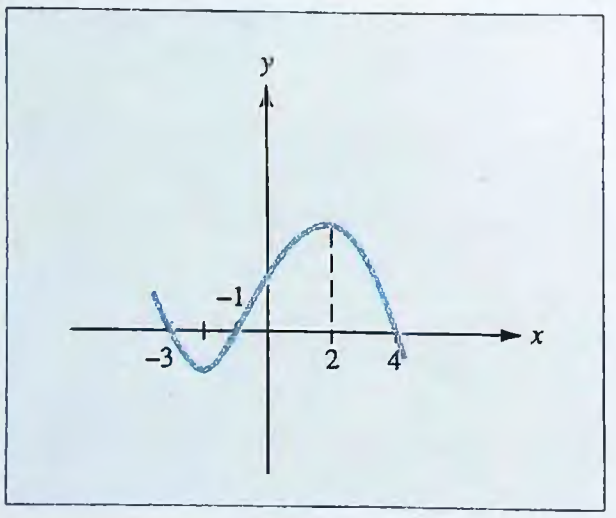


FIGURA 3.11 Gráfica de $R(t) = \dfrac{63t - t^2}{t^2 + 63}$ para $0 \leq t \leq 63$.

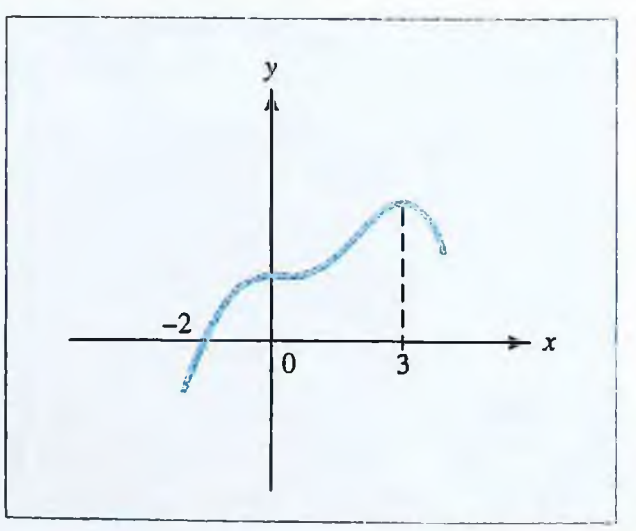
PROBLEMAS | 3.1

En los problemas 1 a 4 especifique los intervalos donde la derivada de la función dada es positiva o negativa.

1.

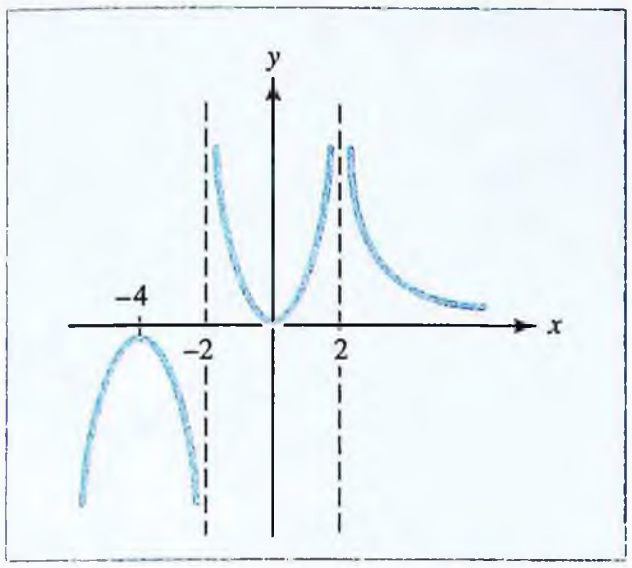


2.

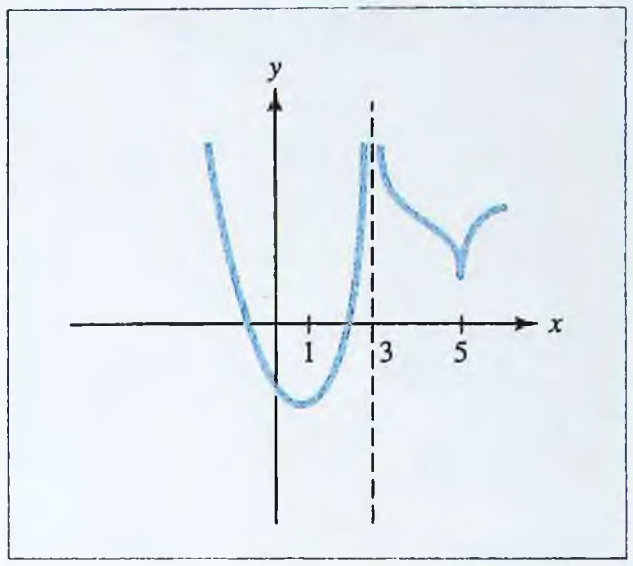


www.FreeLibros.com

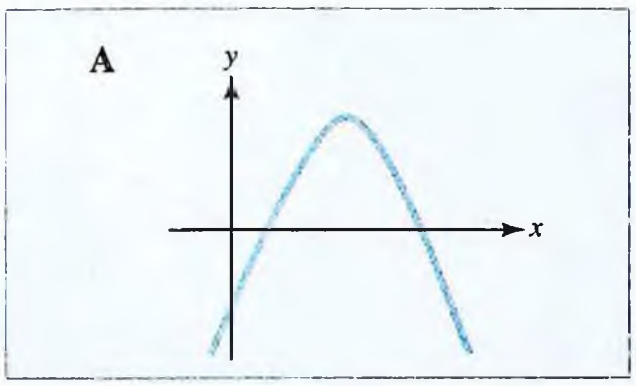
3.

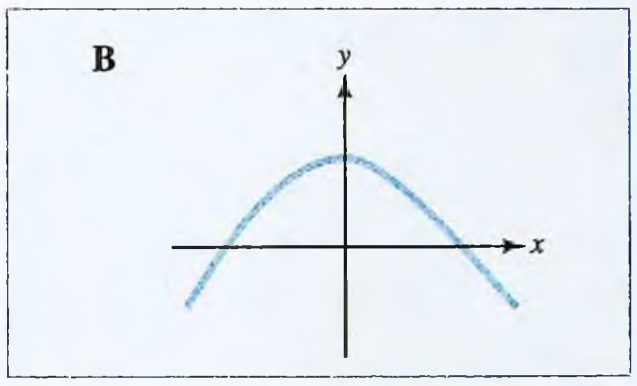


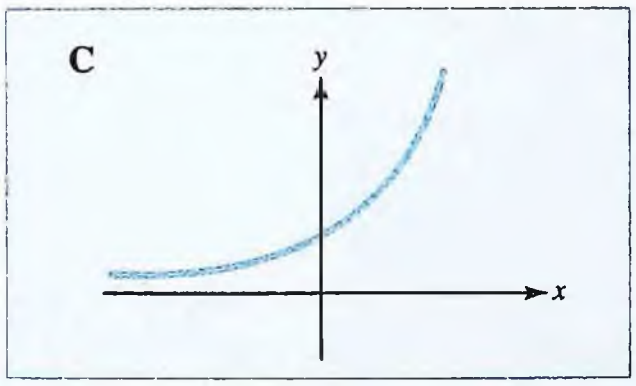
4.

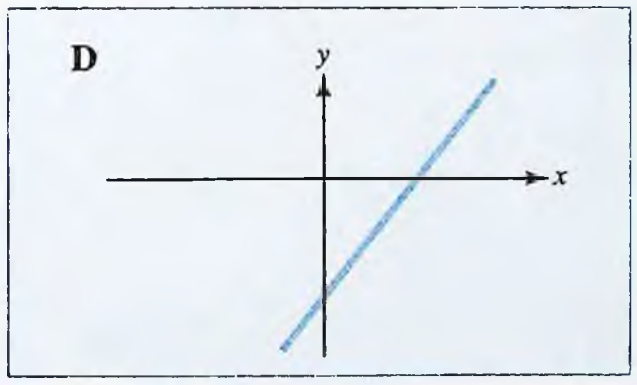


Cada una de las curvas A, B, C *y* D, *dadas aquí, es la gráfica de la derivada de una función, cuya gráfica se muestra en uno de los problemas 5 a 8. Empate cada gráfica con su derivada.*

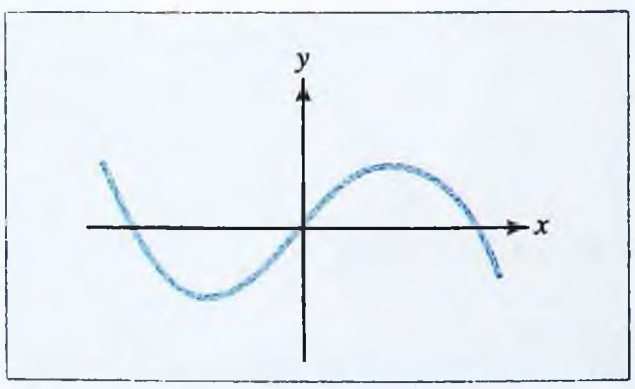




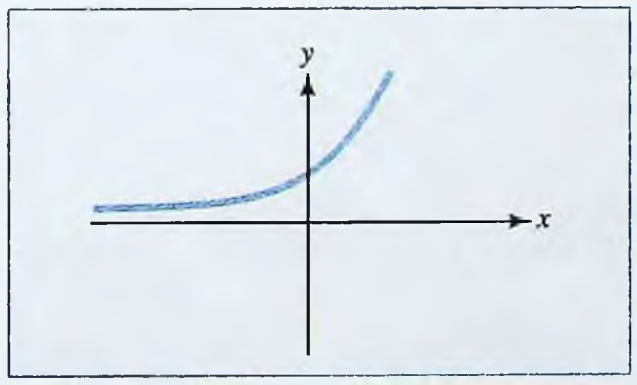




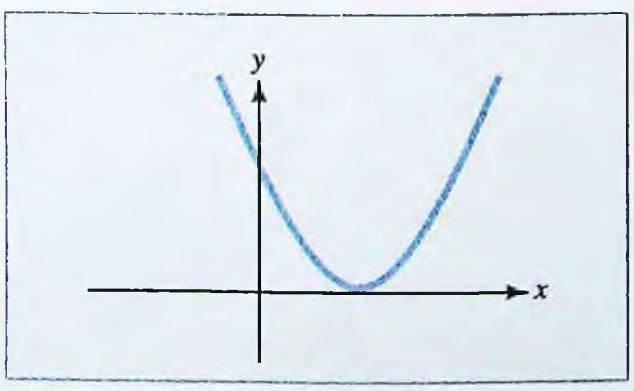
5.



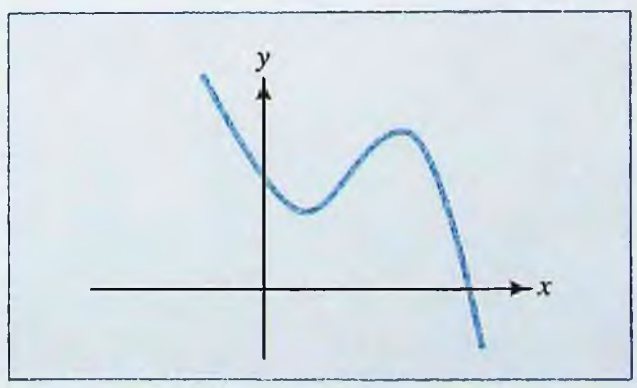
6.



7.



8.



www.FreeLibros.com

En los problemas 9 a 22 encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento para la función dada.

9. $f(x) = x^2 - 4x + 5$

10. $f(t) = t^3 + 3t^2 + 1$

11. $f(x) = x^3 - 3x - 4$

12. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 2$

13. $g(t) = t^5 - 5t^4 + 100$

14. $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

15. $f(t) = \frac{1}{4 - t^2}$

16. $g(t) = \frac{1}{t^2 + 1} - \frac{1}{(t^2 + 1)^2}$

17. $h(u) = \sqrt{9 - u^2}$

18. $f(x) = \sqrt{6 - x - x^2}$

19. $F(x) = x + \frac{9}{x}$

20 $f(t) = \frac{t}{(t + 3)^2}$

21. $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

22. $G(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$

En los problemas 23 a 34 determine los números críticos de la función dada y clasifique cada punto crítico como un máximo relativo, un mínimo relativo, o ni lo uno ni lo otro.

23. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$

24. $f(x) = 324x - 72x^2 + 4x^3$

25. $f(t) = 2t^3 + 6t^2 + 6t + 5$

26. $f(t) = 10t^6 + 24t^5 + 15t^4 + 3$

27. $g(x) = (x - 1)^5$

28. $F(x) = 3 - (x + 1)^3$

29. $f(t) = \frac{t}{t^2 + 3}$

30. $f(t) = t\sqrt{9 - t}$

31. $h(t) = \frac{t^2}{t^2 + t - 2}$

32. $g(x) = 4 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$

33. $S(t) = (t^2 - 1)^4$

34. $F(x) = \frac{x^2}{x - 1}$

En los problemas 35 a 44 use el cálculo para representar la gráfica de la función dada.

35. $f(x) = x^3 - 3x^2$

36. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

37. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 2$

38. $g(x) = 3 - (x + 1)^3$

39. $f(t) = 2t^3 + 6t^2 + 6t + 5$

40. $f(x) = x^3(x + 5)^2$

41. $g(t) = \frac{t}{t^2 + 3}$

42. $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}$

43. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 4$

44. $H(x) = \frac{1}{50}(3x^4 - 8x^3 - 90x^2 + 70)$

www.FreeLibros.com

En los problemas 45 a 48 se da la derivada de una función $f(x)$. En cada caso encuentre los números críticos de $f(x)$ y clasifíquelos como un máximo relativo, un mínimo relativo o ni lo uno ni lo otro, según corresponda.

45. $f'(x) = x^2(4 - x^2)$

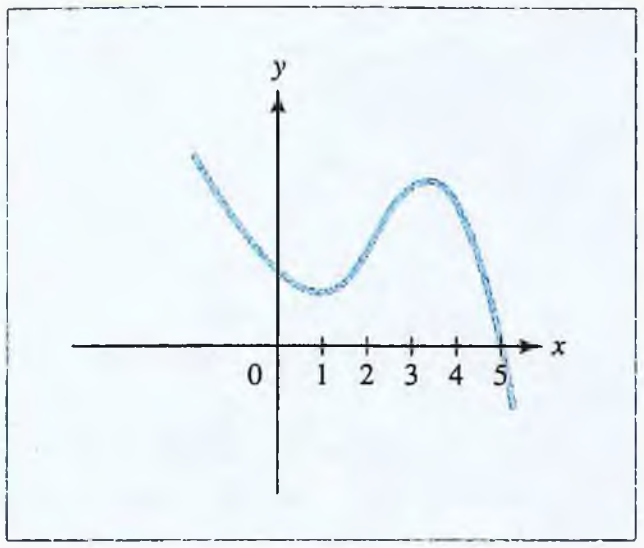
46. $f'(x) = \dfrac{x(2 - x)}{x^2 + x + 1}$

47. $f'(x) = \dfrac{(x + 1)^2(4 - 3x)^3}{(x^2 + 1)^2}$

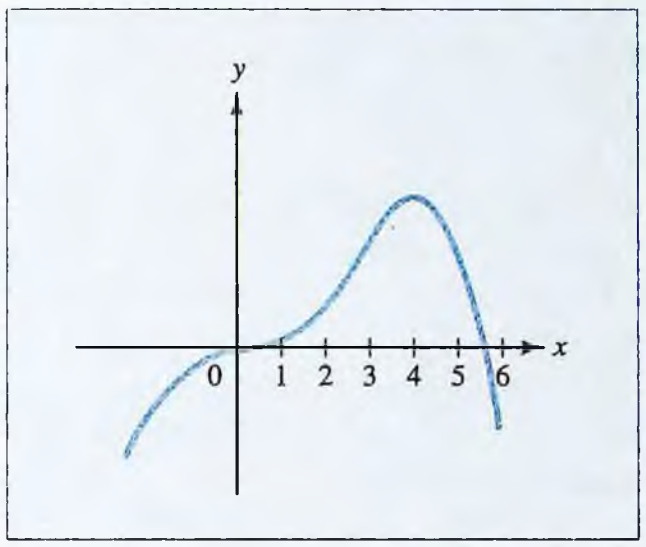
48. $f'(x) = x^3(2x - 7)^2(x + 5)$

En los problemas 49 a 52 se da la gráfica de una función f. En cada caso represente una gráfica para f'.

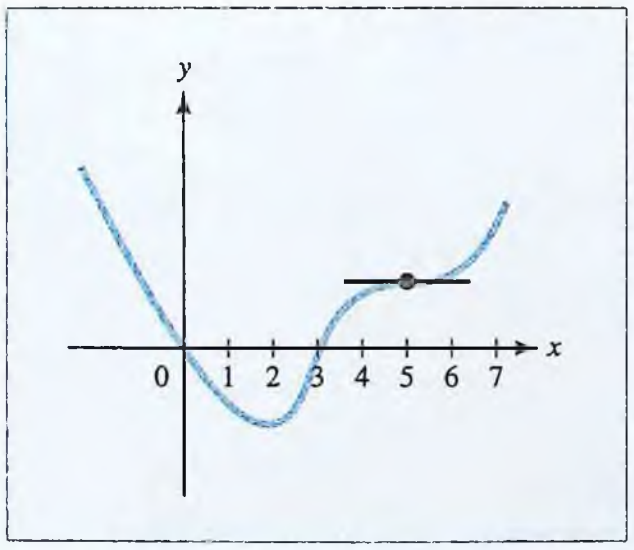
49.



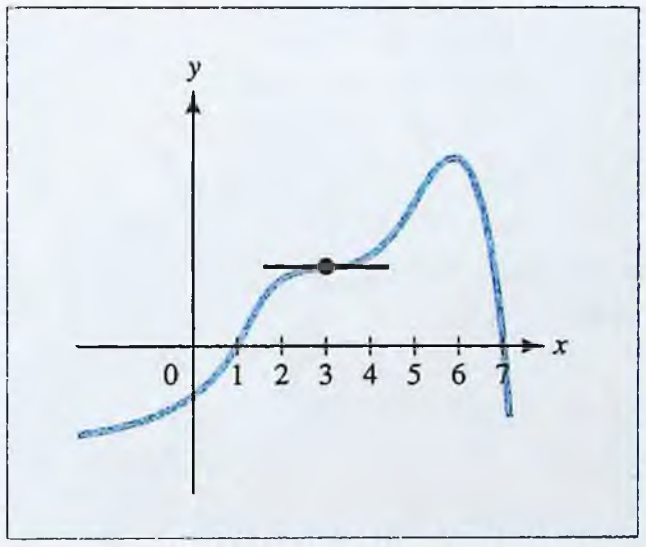
50.



51.



52.



53. CRECIMIENTO DE UNA ESPECIE El porcentaje de larvas que salen de los huevos del gusano de la manzana[1] a una temperatura T (grados Celsius) está dado por

$$H(T) = -0.53T^2 + 25T - 209 \quad \text{para } 15 \leq T \leq 30$$

Dibuje la gráfica de la función $H(T)$. ¿A qué temperatura $T(15 \leq T \leq 30)$ sale el máximo porcentaje de larvas? ¿Cuál es el porcentaje máximo? (Véa el artículo de "Reflexiones acerca de", que aparece en la página 180, para obtener mayor información sobre el gusano de la manzana.)

54. ANÁLISIS MARGINAL El costo total de producir x unidades de cierto artículo está dado por $C(x) = \sqrt{5x + 2} + 3$. Trace la curva de costo y encuentre el costo marginal. ¿El costo marginal crece o decrece con el aumento de la producción?

55. ANÁLISIS MARGINAL Sea $p = (10 - 3x)^2$ para $0 \leq x \leq 3$ el precio al cual se venderán x cientos de unidades de cierto artículo, y sea $R(x) = xp(x)$ el ingreso obtenido de la venta de las x unidades. Encuentre el ingreso marginal $R'(x)$ y dibuje las curvas de ingreso y de ingreso marginal en la misma gráfica. ¿Para qué nivel de producción se maximiza el ingreso?

[1] P. L. Shaffer y H. J. Gold, "A Simulation Model of Population Dynamics of the Codling Moth *Cydia pomonelia*", *Ecological Modelling*, Vol. 30 (1985), páginas 247-274.

www.FreeLibros.com

56. UTILIDAD PARA UN MONOPOLISTA Para producir x unidades de cierto producto, un monopolista tiene un costo total de

$$C(x) = 2x^2 + 3x + 5$$

y obtiene un ingreso total de $R(x) = xp(x)$, donde $p(x) = 15 - 2x$ es el precio al cual se venderán x unidades. Encuentre la función de utilidad $P(x) = R(x) - C(x)$ y trace su gráfica. ¿Para qué nivel de producción se maximiza la utilidad?

57. MEDICINA La concentración de un medicamento t horas después de haber sido inyectado en el brazo de un paciente está dada por

$$C(t) = \frac{0.15t}{t^2 + 0.81}$$

Trace la gráfica de la función de concentración. ¿Cuándo ocurre la máxima concentración?

58. CONTROL DE LA CONTAMINACIÓN Los comisionados de cierta ciudad determinan que cuando se gastan x millones de dólares para el control de la contaminación, el porcentaje de contaminación eliminada está dado por

$$P(x) = \frac{100\sqrt{x}}{0.04x^2 + 12}$$

a) Dibuje la gráfica de $P(x)$.

b) ¿Cuál será el gasto de eliminar el máximo porcentaje de contaminación?

59. PUBLICIDAD Una compañía determina que si se gastan x miles de dólares en publicidad de cierto producto, entonces se venderán $S(x)$ unidades del producto, donde

$$S(x) = -2x^3 + 27x^2 + 132x + 207 \qquad 0 \le x \le 17$$

a) Dibuje la gráfica de $S(x)$.

b) ¿Cuántas unidades se venderán si no se gasta nada en publicidad?

c) ¿Cuánto se debe gastar en publicidad para maximizar el nivel de ventas?

60. PUBLICIDAD Conteste las preguntas del problema 59 para la función de ventas

$$S(x) = \frac{200x + 1\,500}{0.02x^2 + 5}$$

61. ADMINISTRACIÓN DE UNA PESCADERÍA El administrador de una pescadería determina que t semanas después de que 300 peces de cierta especie se introducen en un estanque, el peso promedio de los peces (en libras) en las primeras 10 semanas será

$$w(t) = 3 + t - 0.05t^2$$

El administrador determina además que la proporción de peces que todavía están vivos después de t semanas está dada por

$$p(t) = \frac{31}{31 + t}$$

a) La producción esperada de peces, $Y(t)$, después de t semanas es el peso total de los peces que todavía están vivos. Exprese $Y(t)$ en términos de $w(t)$ y $p(t)$ y dibuje la gráfica de $Y(t)$ para $0 \le t \le 10$.

b) ¿Cuándo será máxima la producción esperada $Y(t)$? ¿Cuál es la máxima producción?

62. ADMINISTRACIÓN DE UNA PESCADERÍA Para la situación descrita en el problema 61, suponga que a la pescadería le cuesta $C(t) = 50 + 1.2t$ cientos de dólares mantener y monitorear el estanque durante t semanas, después de que se introdujeron los peces, y que cada pez obtenido después de t semanas se puede vender a \$2.75 la libra.

a) Si se pescan todos los peces que quedan vivos en el estanque después de t semanas, exprese la utilidad obtenida por la pescadería como una función de t.

b) ¿Cuándo se deben pescar los peces para obtener la máxima utilidad? ¿Cuál es la máxima utilidad?

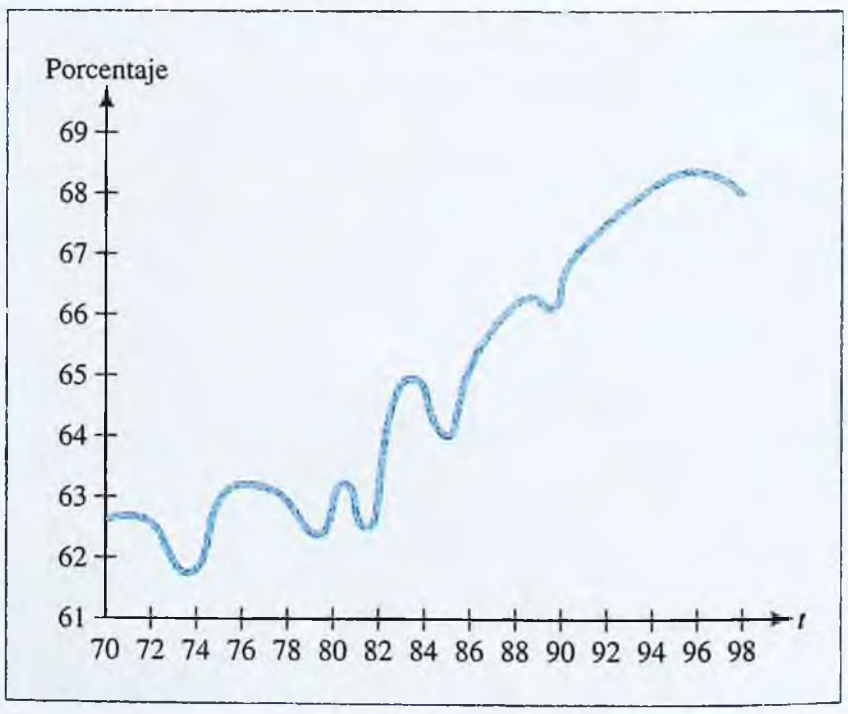
63. PRODUCTO INTERNO BRUTO La gráfica muestra el consumo de la generación correspondiente a la explosión demográfica, medido como un porcentaje del PIB (Producto Interno Bruto) total durante el periodo 1970-1997.

a) ¿En qué años ocurrieron máximos relativos?

b) ¿En qué años ocurrieron mínimos relativos?

c) ¿Aproximadamente a qué tasa aumentó el consumo en 1987?

d) ¿Aproximadamente a qué tasa disminuyó el consumo en 1972?



Consumo de la generación correspondiente a la explosión demográfica como porcentaje del PIB.
Fuente: Bureau of Economic Analysis

www.FreeLibros.com

64. Dibuje la gráfica de una función que tenga todas las siguientes propiedades:
a) $f'(0) = f'(1) = f'(2) = 0$
b) $f'(x) < 0$ cuando $x < 0$ y $x > 2$
c) $f'(x) > 0$ cuando $0 < x < 1$ y $1 < x < 2$

65. Dibuje la gráfica de una función que tenga todas las siguientes propiedades:
a) $f'(0) = f'(1) = f'(2) = 0$
b) $f'(x) < 0$ cuando $0 < x < 1$
c) $f'(x) > 0$ cuando $x < 0$, $1 < x < 2$ y $x > 2$

66. Dibuje la gráfica de una función que tenga todas las siguientes propiedades:
a) $f'(x) > 0$ cuando $x < -5$ y cuando $x > 1$
b) $f'(x) < 0$ cuando $-5 < x < 1$
c) $f(-5) = 4$ y $f(1) = -1$

67. Dibuje la gráfica de una función que tenga todas las siguientes propiedades:
a) $f'(x) < 0$ cuando $x < -1$
b) $f'(x) > 0$ cuando $-1 < x < 3$ y cuando $x > 3$
c) $f'(-1) = 0$ y $f'(3) = 0$

68. Encuentre las constantes a, b y c de manera que la gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo en (5, 12) y corte el eje y en (0, 3).

69. Encuentre las constantes a, b, c y d de manera que la gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo relativo en $(-2, 8)$ y un mínimo relativo en $(1, -19)$.

70. Dibuje la gráfica de $f(x) = (x - 1)^{2/5}$. Explique por qué $f'(x)$ no está definida en $x = 1$.

71. Dibuje la gráfica de $f(x) = (1 - x)^{3/5}$.

72. Utilice el cálculo para probar que el extremo relativo de la función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

ocurre cuando $x = -\dfrac{b}{2a}$. ¿Dónde crece $f(x)$ y dónde decrece?

73. Utilice el cálculo para probar que el extremo relativo de la función cuadrática $y = (x - p)(x - q)$ ocurre entre sus intersecciones con el eje x.

En los problemas 74 a 77 utilice una calculadora graficadora para trazar la gráfica de $f(x)$. Luego encuentre $f'(x)$ y grafíquela en el mismo sistema de coordenadas (pantalla) como lo hizo para $f(x)$. Por último, utilice **TRACE**, **ZOOM** *u otra instrucción para hallar los valores de x donde $f'(x) = 0$.*

74. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 4$

75. $f(x) = (x^2 + x - 1)^3(x + 3)^2$

76. $f(x) = x^5 - 7.6x^3 + 2.1x^2 - 5$

77. $f(x) = (1 - x^{1/2})^{1/2}$

78. Utilice una calculadora graficadora para trazar la gráfica de $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 11$. Luego represente la gráfica de $g(x) = (x + 1)^3 + 3(x + 1)^2 - 5(x + 1) + 11$ en el mismo sistema de coordenadas. ¿Qué función $h(x)$ tendría una gráfica igual a la de $f(x)$, sólo que corrida 2 unidades hacia arriba y 3 hacia la izquierda?

79. Sea $f(x) = 4 + \sqrt{9 - 2x - x^2}$. Antes de dibujar esta función, ¿cómo cree que será la gráfica? Ahora utilice una calculadora graficadora para dibujar la gráfica. ¿Tuvo usted razón?

80. Sea $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x - 11$. Utilice una calculadora graficadora para dibujar la gráfica de $f(x)$. Luego, en el mismo sistema de coordenadas trace la gráfica de

$$g(x) = f(2x) = (2x)^3 - 6(2x)^2 + 5(2x) - 11$$

¿Qué relación existe (si la hay) entre las dos gráficas?

SECCIÓN 3.2 | Concavidad y puntos de inflexión

En la sección 3.1 se observó cómo utilizar el signo de la derivada de $f'(x)$ para determinar dónde $f(x)$ es creciente o decreciente y dónde su gráfica tiene extremos relativos. En esta sección se analizará que la segunda derivada $f''(x)$ también proporciona información útil sobre la gráfica de $f(x)$. A manera de introducción, ahora se describe brevemente una situación de la industria, que puede ser analizada utilizando la segunda derivada.

El número de unidades que un trabajador de una fábrica puede producir en t horas, luego de llegar a su trabajo, está dado por una función $Q(t)$ semejante a la que se muestra en la figura 3.12. Observe que al comienzo la gráfica no está muy inclinada. Sin embargo, la inclinación aumenta hasta que la gráfica llega a un punto de máxima inclinación, después del cual comienza a disminuir. Esto refleja el hecho de que al inicio la tasa de producción del trabajador es baja. Sin embargo, la tasa de producción aumenta a

www.FreeLibros.com

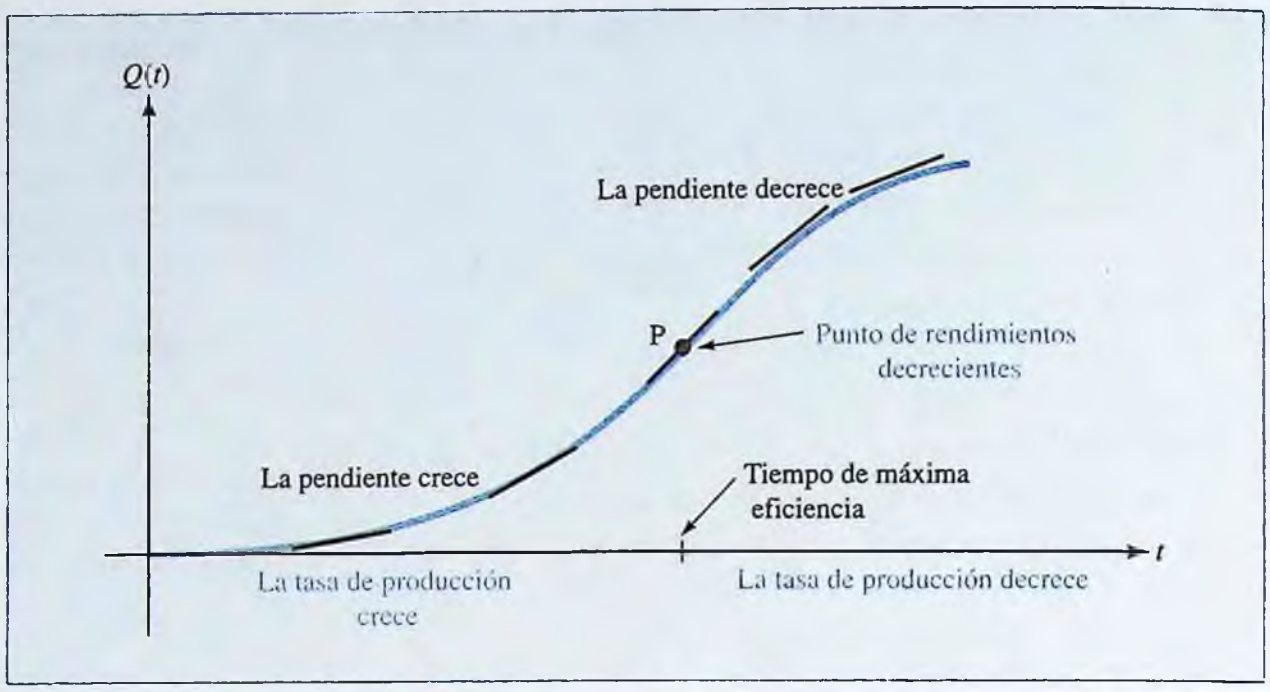


FIGURA 3.12 La producción $Q(t)$ de un trabajador de una fábrica t horas después de llegar al trabajo.

medida que el trabajador establece una rutina y continúa aumentando hasta que el trabajador se desempeña con máxima eficiencia. Luego aparece la fatiga, y la tasa de producción comienza a disminuir. Al punto P de la curva donde se alcanza la máxima eficiencia se le conoce en economía como el **punto de los rendimientos decrecientes**.

El comportamiento de la gráfica de esta función de producción a ambos lados del punto de los rendimientos decrecientes se puede describir en términos de sus rectas tangentes. A la izquierda de este punto, la pendiente de la tangente aumenta a medida que t aumenta. A la derecha de este punto, la pendiente de la tangente disminuye cuando t incrementa. Lo que se analizará en esta sección con la ayuda de la segunda derivada es ese aumento o disminución de las pendientes. (Más tarde, en esta misma sección, se regresará a los temas de eficiencia del trabajador y de los rendimientos decrecientes del ejemplo 3.2.6.)

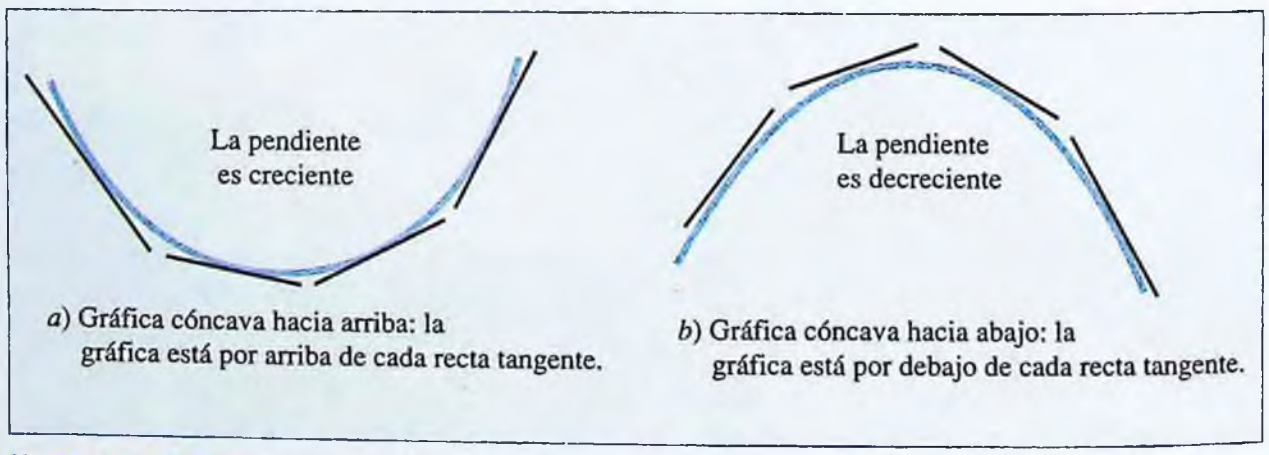
Concavidad

El crecimiento y decrecimiento de la pendiente de la recta tangente a la curva se describirá en términos de una característica gráfica denominada **concavidad**. A continuación se da la definición que se usará.

Concavidad ▪ Si la función $f(x)$ es derivable en el intervalo $a < x < b$, entonces la gráfica de f es

cóncava hacia arriba en $a < x < b$ si f' es creciente en ese intervalo

cóncava hacia abajo en $a < x < b$ si f' es decreciente en ese intervalo



a) Gráfica cóncava hacia arriba: la gráfica está por arriba de cada recta tangente.

b) Gráfica cóncava hacia abajo: la gráfica está por debajo de cada recta tangente.

FIGURA 3.13 Concavidad.

www.FreeLibros.com

Asimismo, una gráfica es cóncava hacia arriba en un intervalo si ella se encuentra por arriba de todas sus rectas tangentes en el intervalo (figura 3.13*a*), y cóncava hacia abajo en un intervalo si se encuentra por debajo de todas sus rectas tangentes (figura 3.13*b*). De manera informal, en la parte cóncava hacia arriba de la gráfica "se acumula el agua", mientras que por la parte cóncava hacia abajo "el agua corre", como se ilustra en la figura 3.14.

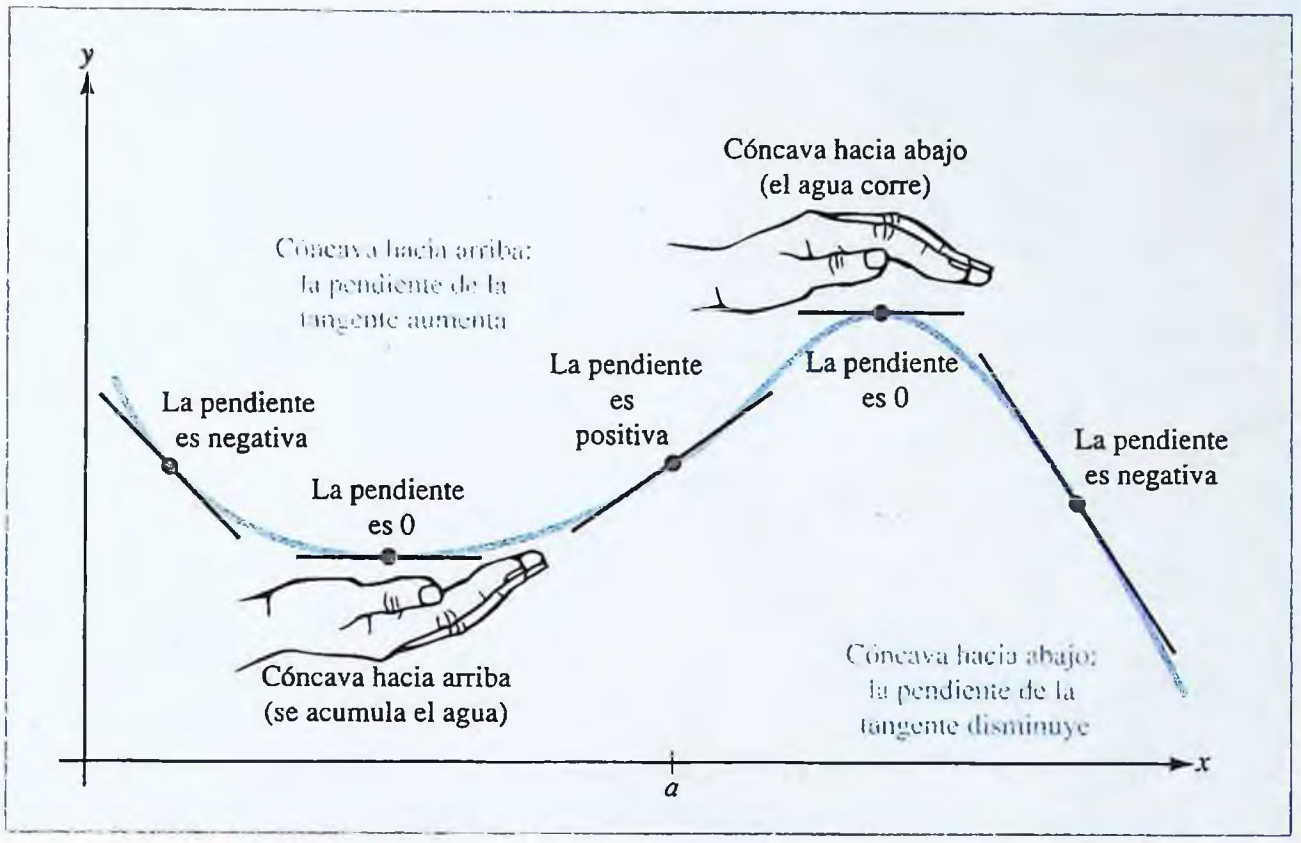


FIGURA 3.14 Concavidad y pendiente de la tangente.

Determinación de intervalos de concavidad usando el signo de f''

Hay una forma simple de caracterizar la concavidad de la gráfica de una función $f(x)$ en términos de su segunda derivada $f''(x)$. En particular, en la sección 3.1 se observó que una función $f(x)$ es creciente donde *su* derivada es positiva. Así, la función derivada $f'(x)$ debe ser creciente donde su derivada, $f''(x)$ es positiva. Se supone que si $f''(x) > 0$ en un intervalo $a < x < b$, entonces $f'(x)$ es creciente, lo cual a su vez significa que la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba de este intervalo. De igual forma, en un intervalo $a < x < b$, donde $f''(x) < 0$, la derivada $f'(x)$ será decreciente y la gráfica de $f(x)$ será cóncava hacia abajo. Teniendo en cuenta estas observaciones se puede modificar el procedimiento estudiado en la sección 3.1 para determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento, con el fin de obtener un método para determinar los intervalos de diferente concavidad.

Procedimiento de la segunda derivada para determinar intervalos de concavidad para una función f

Paso 1. Encuentre todos los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$ o $f''(x)$ no es continua, y marque esos números en un recta numérica. Esto divide la recta en un número de intervalos abiertos.

Paso 2. Elija un número de prueba c de cada intervalo $a < x < b$ determinado en el paso 1 y evalúe $f''(c)$. Entonces,

Si $f''(c) > 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba en $a < x < b$.

Si $f''(c) < 0$, entonces la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo en $a < x < b$.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Siguiendo el ejemplo 3.2.1, introduzca $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 7x - 3$ en Y1 usando un estilo de graficación en negrillas. Escriba Y2 = nDeriv(Y1, X, X) y elimine la selección moviendo el cursor al signo igualdad y presionando **ENTER**. Esto definirá Y2 pero no lo graficará. Escriba Y3 = −nDeriv(Y2, X, X). Grafique Y1 y Y3 utilizando la pantalla [−2.35, 2.35]1 por [−18, 8]2. ¿Cómo corresponde el comportamiento de Y3, que es $f''(x)$, con la concavidad de $f(x)$, en particular para X = −1, 0 y 1?

EJEMPLO | 3.2.1

Determine los intervalos de diferente concavidad para la función

$$f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 7x - 3$$

Es decir, determine dónde la gráfica de f es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo.

Solución

Se tiene que

$$f'(x) = 12x^5 - 20x^3 + 7$$

y

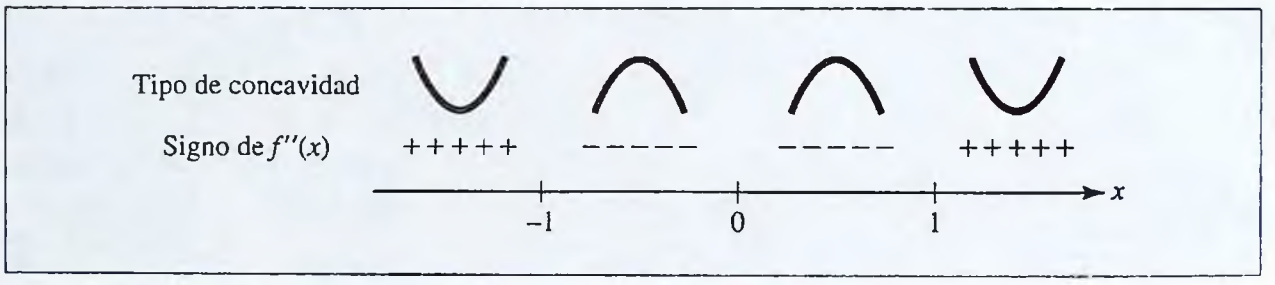
$$f''(x) = 60x^4 - 60x^2 = 60x^2(x^2 - 1) = 60x^2(x - 1)(x + 1)$$

La segunda derivada $f''(x)$ es continua para toda x, y $f''(x) = 0$ para $x = 0$, $x = 1$, y $x = -1$. Estos números dividen el eje x en cuatro intervalos en los cuales $f''(x)$ no cambia de signo; estos son $x < -1$, $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$, y $x > 1$. Evaluando $f''(x)$ en números de prueba en cada uno de estos intervalos (por ejemplo, en $x = -2$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, y $x = 5$, respectivamente), se halla que

$$f''(-2) = 720 > 0 \qquad f''\left(\tfrac{-1}{2}\right) = \tfrac{-45}{4} < 0$$

$$f''\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{-45}{4} < 0 \qquad f''(5) = 36\,000 > 0$$

Así, la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba para $x < -1$ y para $x > 1$ y cóncava hacia abajo para $-1 < x < 0$ y para $0 < x < 1$, como se indica en el siguiente diagrama de concavidad.



Intervalos de concavidad para $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 7x - 3$

En la figura 3.15 se muestra la gráfica de $f(x)$.

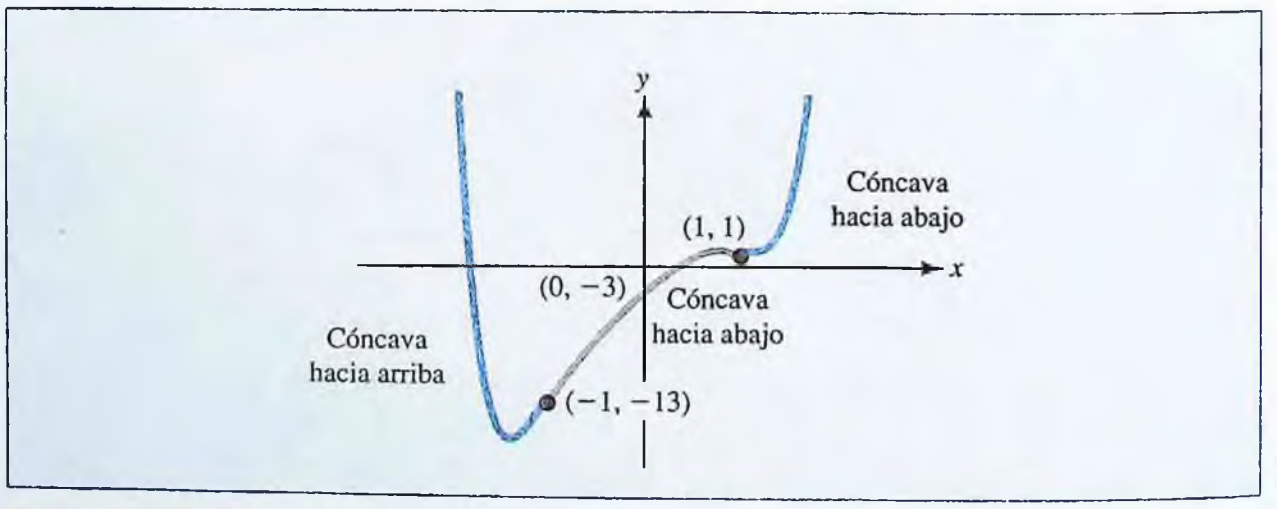


FIGURA 3.15 Gráfica de $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 7x - 3$.

www.FreeLibros.com

NOTA No confunda la concavidad de una gráfica con su "dirección" (subiendo o bajando). Una función f puede ser creciente o decreciente en un intervalo, sin importar si su gráfica es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo en ese intervalo. Las cuatro posibilidades se ilustran en la figura 3.16. ■

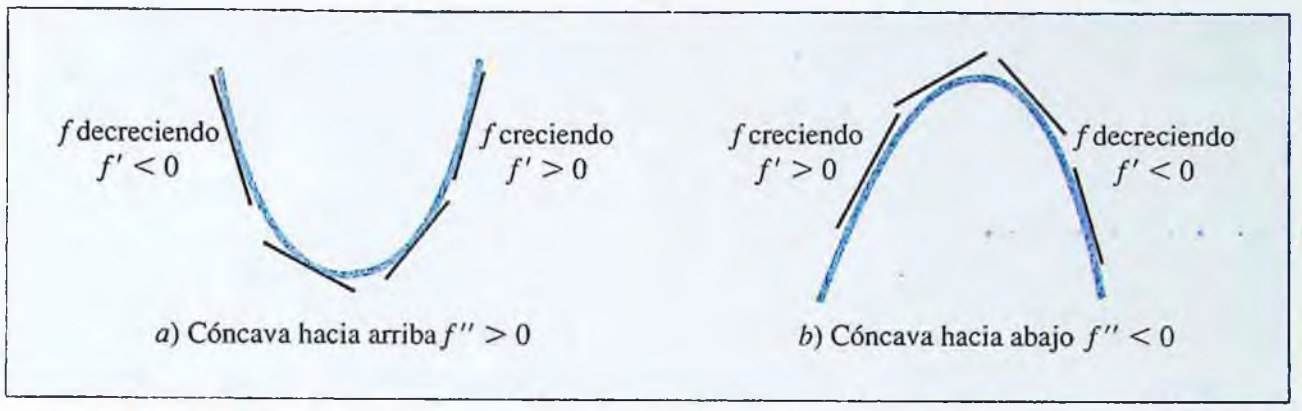


FIGURA 3.16 Posibles combinaciones de crecimiento, decrecimiento y concavidad.

Puntos de inflexión

Un punto de la gráfica de una función continua f donde la concavidad cambia se llama **punto de inflexión de f**. Por ejemplo, el diagrama de concavidad para la función $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 7x - 3$ que se analizó en el ejemplo 3.2.1 muestra que la concavidad de la gráfica de f cambia de ser hacia arriba a ser hacia abajo en $x = -1$ y de hacia abajo a hacia arriba en $x = 1$, entonces $(-1, -13)$ y $(1, 1)$ son puntos de inflexión de la gráfica de f. Con frecuencia los puntos de inflexión son de especial interés en ciertas aplicaciones. Por ejemplo, el punto de los rendimientos decrecientes de la curva de producción mostrada en la figura 3.12 es un punto de inflexión.

En un punto de inflexión $(c, f(c))$ de f, la gráfica de $f(x)$ no puede ser cóncava hacia arriba ni cóncava hacia abajo, entonces $f''(c)$ no puede ser positiva ni negativa. Así, $f''(c)$ no existe o $f''(c) = 0$. Esta observación permite determinar los puntos de inflexión como sigue:

Procedimiento para determinar los puntos de inflexión de una función f

Paso 1. Calcule $f''(x)$ y determine todos los números en el dominio de f donde $f''(x) = 0$ y $f''(x)$ no es continua.

Paso 2. Para cada número c hallado en el paso 1, determine el signo de $f''(x)$ a la izquierda y a la derecha de $x = c$. Si $f''(x) > 0$ en un lado de $x = c$ y $f''(x) < 0$ en el otro lado, entonces $(c, f(c))$ es un punto de inflexión.

EJEMPLO | 3.2.2

En cada caso, encuentre todos los puntos de inflexión de la función dada.

a) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 1$

b) $g(x) = x^{1/3}$

Solución

a) Se observa que $f(x)$ existe para toda x y que

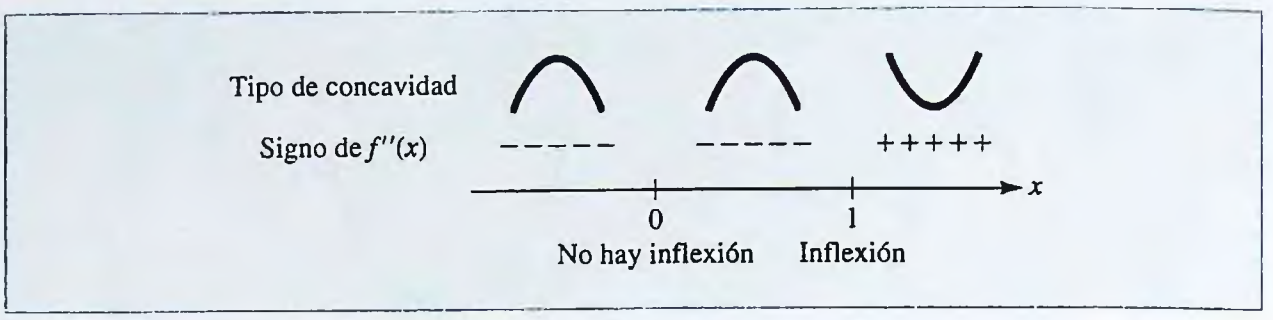
$$f'(x) = 15x^4 - 20x^3$$
$$f''(x) = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x - 1)$$

Por tanto, $f''(x)$ es continua para toda x y $f''(x) = 0$ cuando $x = 0$ y $x = 1$. Probando el signo de $f''(x)$ en cada lado de $x = 0$ y $x = 1$ (digamos, en $x = -1$, $\frac{1}{2}$, y 2), se obtiene

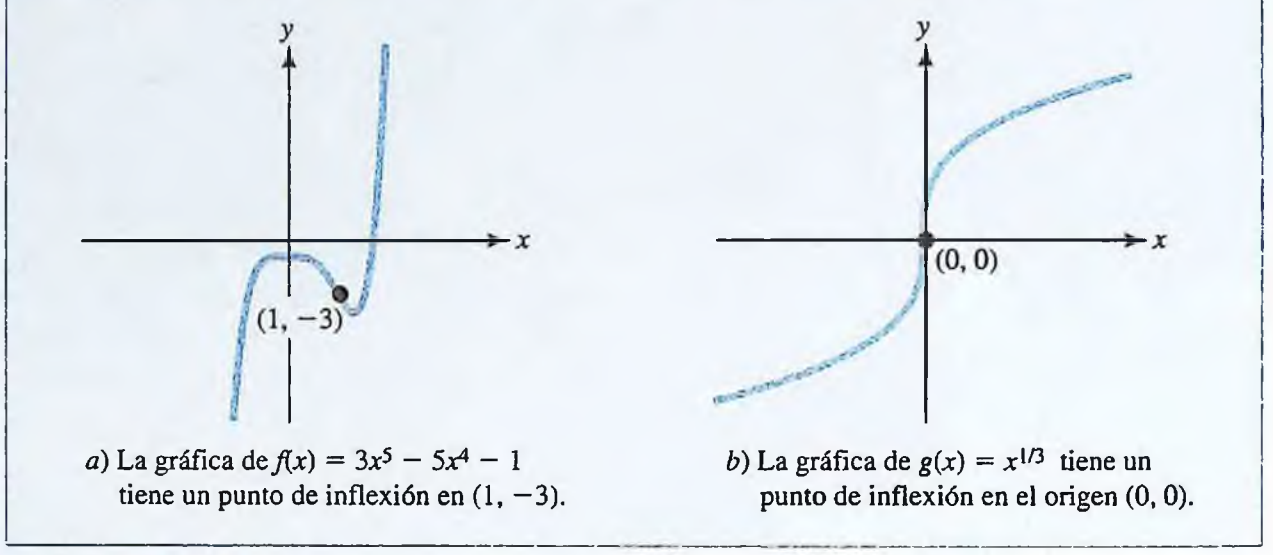
www.FreeLibros.com

$$f''(-1) = -120 < 0 \qquad f''\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{-15}{2} < 0 \quad f''(2) = 240 > 0$$

que conduce al patrón de concavidad mostrado en este diagrama:



Se observa que la concavidad no cambia en $x = 0$ pero cambia de hacia abajo a hacia arriba en $x = 1$. Como $f(1) = -3$, se tiene que $(1, -3)$ es un punto de inflexión de f. En la figura 3.17*a* se muestra la gráfica de f.



a) La gráfica de $f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 1$ tiene un punto de inflexión en $(1, -3)$.

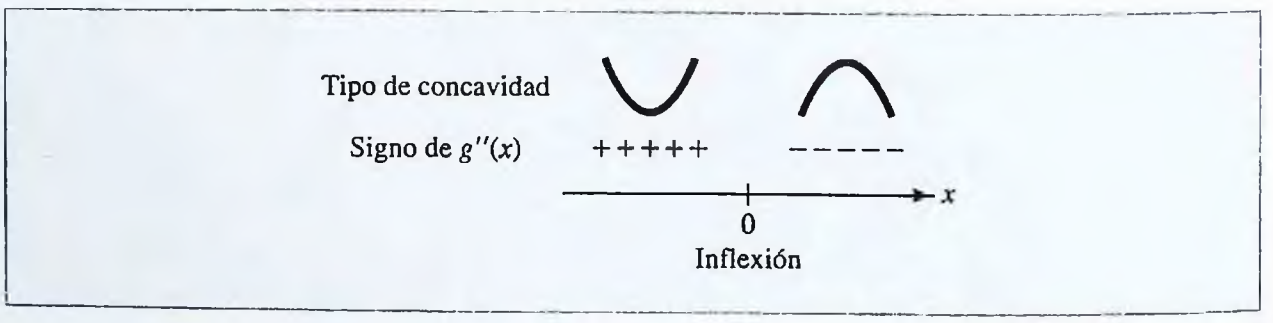
b) La gráfica de $g(x) = x^{1/3}$ tiene un punto de inflexión en el origen $(0, 0)$.

FIGURA 3.17 Dos gráficas con puntos de inflexión.

b) La función $g(x)$ es continua para toda x, y como

$$g'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \qquad \text{y} \qquad g''(x) = \frac{-2}{9}x^{-5/3}$$

resulta que $g''(x)$ nunca es 0, pero no existe cuando $x = 0$. Al probar el signo de $g''(x)$ a cada lado de $x = 0$, se obtienen los resultados que se ilustran en el siguiente diagrama de concavidad:

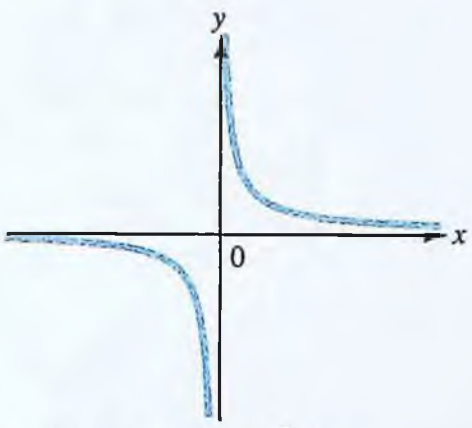


Como la concavidad de la gráfica cambia en $x = 0$ y $g(0) = 0$, existe un punto de inflexión en el origen $(0, 0)$. En la figura 3.17*b* se muestra la gráfica de g.

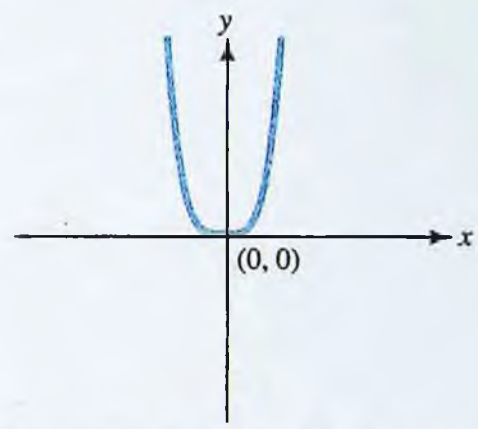
www.FreeLibros.com

NOTA Una función puede tener un punto de inflexión sólo donde sea continua. En particular, si $f(c)$ no está definida, no puede haber un punto de inflexión en $x = c$, aunque $f''(x)$ cambia de signo en $x = c$. Por ejemplo, si $f(x) = 1/x$, entonces $f''(x) = 2/x^3$, de manera que $f''(x) < 0$, si $x < 0$, y $f''(x) > 0$, si $x > 0$. La concavidad cambia de hacia abajo a hacia arriba en $x = 0$ (véase la figura 3.18a), pero no hay punto de inflexión en $x = 0$ ya que $f(0)$ no está definida.

Además, el saber que $f(c)$ está definida y que $f''(c) = 0$ no es garantía de que $(c, f(c))$ sea un punto de inflexión. Por ejemplo, si $f(x) = x^4$, entonces $f(0) = 0$ y $f''(x) = 12x^2$ de manera que $f''(0) = 0$. Sin embargo, $f''(x) > 0$ para cualquier número $x \neq 0$, entonces la gráfica de f es siempre cóncava hacia arriba, y no hay punto de inflexión en (0, 0) (véase la figura 3.18*b*). ■



a) Gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$. La concavidad cambia en $x = 0$ pero no hay punto de inflexión ya que $f(0)$ no está definida



b) La gráfica de $f(x) = x^4$ es siempre cóncava hacia arriba, de manera que (0, 0) no es un punto de inflexión a pesar de que $f''(0) = 0$.

FIGURA 3.18 Una gráfica no necesariamente tiene un punto de inflexión donde $f'' = 0$ o f'' no existe.

Trazado de curvas usando la segunda derivada

Geométricamente, los puntos de inflexión se encuentran donde la gráfica "se tuerce". A continuación se presenta un resumen de las posibilidades de la gráfica.

Comportamiento de la gráfica de $f(x)$ en un punto de inflexión $P(c, f(c))$

La gráfica es ascendente ($f' > 0$)

Antes de P(para $x < c$)	Después de P(para $x > c$)	Forma de la gráfica en P
$f'' > 0$	$f'' < 0$	
$f'' < 0$	$f'' > 0$	

La gráfica es descendente ($f' < 0$)

Antes de P(para $x < c$)	Después de P(para $x > c$)	Forma de la gráfica en P
$f'' > 0$	$f'' < 0$	
$f'' < 0$	$f'' > 0$	

En la figura 3.19 se muestran varios puntos de inflexión que pueden aparecer en una gráfica.

www.FreeLibros.com

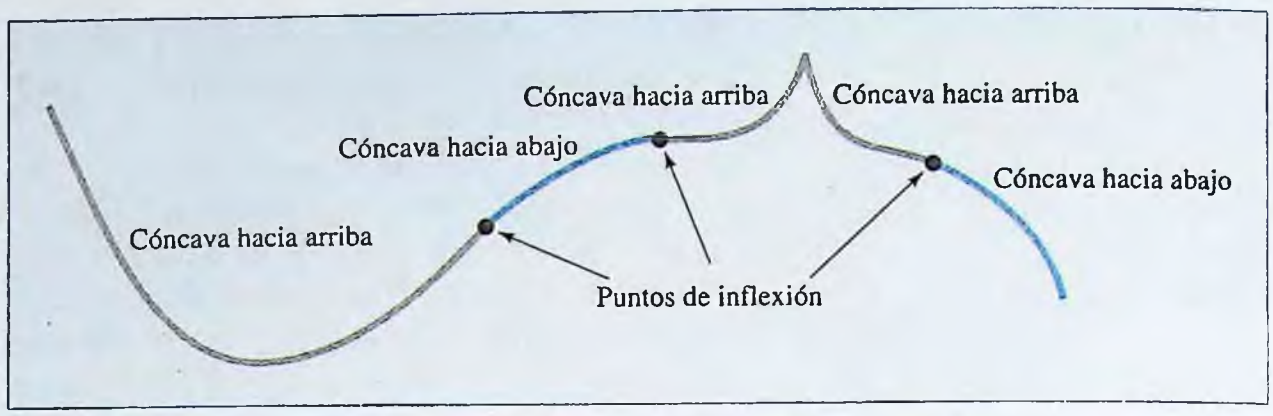


FIGURA 3.19 Gráfica que muestra diferente concavidad y puntos de inflexión.

Juntando los criterios de concavidad y puntos de inflexión a los métodos de la primera derivada, analizados en la sección 3.1, se puede trazar una gran variedad de gráficas de manera muy detalladas. A continuación se presenta un ejemplo.

EJEMPLO | 3.2.3

Determine dónde la función

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 18x + 15$$

es creciente o decreciente, y dónde su gráfica es cóncava hacia arriba y hacia abajo. Encuentre todos los extremos relativos y puntos de inflexión, y dibuje la gráfica.

Solución

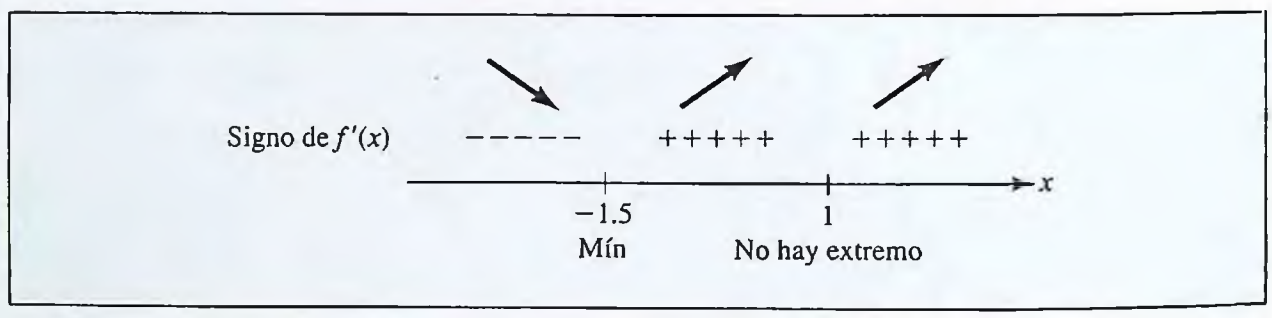
Primero, observe que, como $f(x)$ es un polinomio, ella es continua para toda x, al igual que las derivadas $f'(x)$ y $f''(x)$. La primera derivada de $f(x)$ es

$$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 - 24x + 18 = 6(x - 1)^2(2x + 3)$$

y $f'(x) = 0$ sólo cuando $x = 1$ y $x = -1.5$. El signo de $f'(x)$ no cambia para $x < -1.5$ ni en el intervalo $-1.5 < x < 1$, ni para $x > 1$. Evaluando $f'(x)$ en números de prueba de cada intervalo (por ejemplo, en -2, 0 y 3) se obtiene el diagrama de flechas que a continuación se muestra. Observe que existe un mínimo relativo en $x = -1.5$, pero no hay extremo en $x = 1$.

¡EXPLORE!

Gráficamente confirme los resultados del ejemplo 3.2.3, graficando primero $f(x)$ en negritas, contra $f'(x)$ y observando la ubicación de los extremos relativos. Luego grafique $f(x)$ en negritas contra $f''(x)$ y observe cómo cambia la concavidad de $f(x)$.

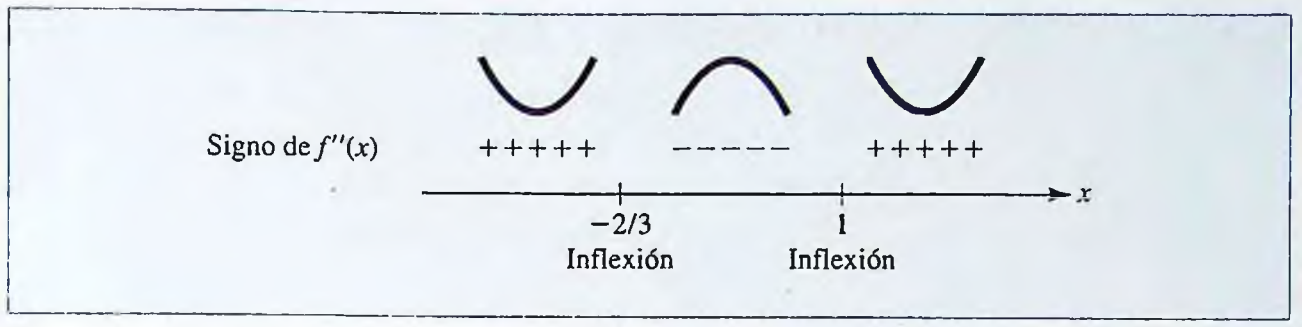


La segunda derivada es

$$f''(x) = 36x^2 - 12x - 24 = 12(x - 1)(3x + 2)$$

y $f''(x) = 0$ sólo cuando $x = 1$ y $x = \frac{-2}{3}$. El signo de $f''(x)$ no cambia dentro de los intervalos $x < \frac{-2}{3}$, $\frac{-2}{3} < x < 1$, y $x > 1$. Evaluando $f''(x)$ en números de prueba de cada intervalo, se obtiene el diagrama de concavidad que ahora se muestra.

www.FreeLibros.com



Los patrones de estos dos diagramas sugieren que existe un mínimo relativo en $x = -1.5$ y puntos de inflexión en $x = -2/3$ y $x = 1$ (porque la concavidad cambia en ambos puntos).

Para trazar la gráfica, se calcula que

$$f(-1.5) = -17.06 \quad f\left(\tfrac{-2}{3}\right) = -1.15 \quad f(1) = 22$$

y se traza una "copa" ∪ en $(-1.5, -17.06)$ para señalar el mínimo relativo ubicado allí. De igual forma, se representan los giros ∩ en $\left(\frac{-2}{3}, -1.15\right)$ y ∪ en $(1, 22)$ para indicar la forma de la gráfica cerca de los puntos de inflexión. Utilizando los diagramas de flecha y de concavidad, se obtiene el diagrama preliminar mostrado en la figura 3.20*b*. Por último, la gráfica se completa como se muestra en la figura 3.20*b*, pasando una curva suave por el punto mínimo, los puntos de inflexión y la intersección con el eje y $(0, 15)$.

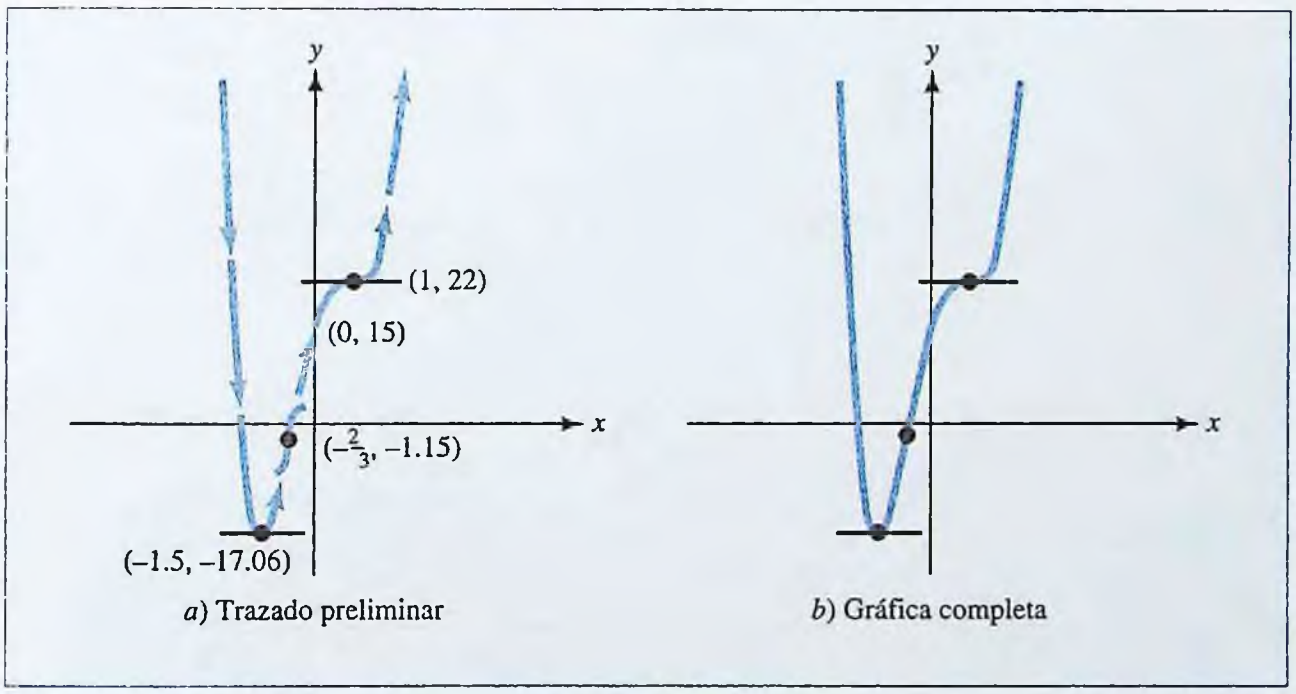


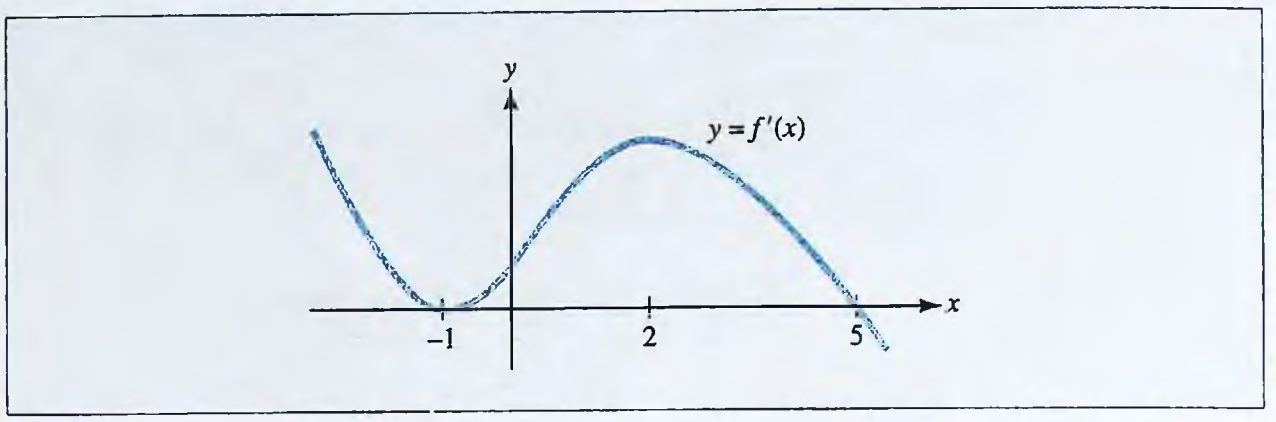
FIGURA 3.20 Gráfica de $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 18x + 15$.

Algunas veces se da la gráfica de la función derivada $f'(x)$, y se pide analizar la gráfica de la propia $f(x)$. Por ejemplo, para un fabricante que conoce el costo marginal $C'(x)$ asociado con la producción de x unidades de cierto artículo, sería muy razonable saber tanto como sea posible acerca del costo total $C(x)$. El siguiente ejemplo ilustra un procedimiento para llevar a cabo este tipo de análisis.

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 3.2.4

En la siguiente figura se presenta la gráfica de la derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$. Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la concavidad de $f(x)$; también localice todos los extremos relativos y los puntos de inflexión. Luego, trace una curva que tenga todas estas características.



Solución

Primero observe que para $x < -1$, la gráfica de $f'(x)$ está por arriba del eje x, por lo que $f'(x) > 0$ y la gráfica de $f(x)$ es ascendente. La gráfica de $f'(x)$ también es descendente para $x < -1$, lo cual significa que $f''(x) < 0$ y que la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo. De la misma manera, se pueden analizar otros intervalos, los resultados se resumen en la siguiente tabla.

x	Característica de $y = f'(x)$	Característica de $y = f(x)$
$x < -1$	f' es positiva, decreciente	f es creciente; cóncava hacia abajo
$x = -1$	intersección con el eje x; tangente horizontal	tangente horizontal; posible punto de inflexión ($f'' = 0$)
$-1 < x < 2$	f' es positiva, creciente	f es creciente; cóncava hacia arriba
$x = 2$	tangente horizontal	posible punto de inflexión
$2 < x < 5$	f' es positiva, decreciente	f es creciente; cóncava hacia arriba
$x = 5$	intersección con el eje x	tangente horizontal
$x > 5$	f' es negativa; decreciente	f es decreciente; cóncava hacia abajo

Como la concavidad cambia en $x = -1$ (de abajo hacia arriba), allí hay un punto de inflexión con una tangente horizontal. En $x = 2$, hay también un punto de inflexión (la concavidad cambia de arriba hacia abajo), pero no hay ninguna tangente horizontal. La gráfica de $f(x)$ es ascendente a la izquierda de $x = 5$ y descendente a la derecha, por lo que debe haber un máximo relativo en $x = 5$.

En la figura 3.21 se muestra una posible gráfica con todas las características dadas para $y = f(x)$. Sin embargo, debido a que no se conocen los valores de $f(-1), f(2)$ y $f(5)$, muchas otras gráficas también tendrán las mismas características.

www.FreeLibros.com

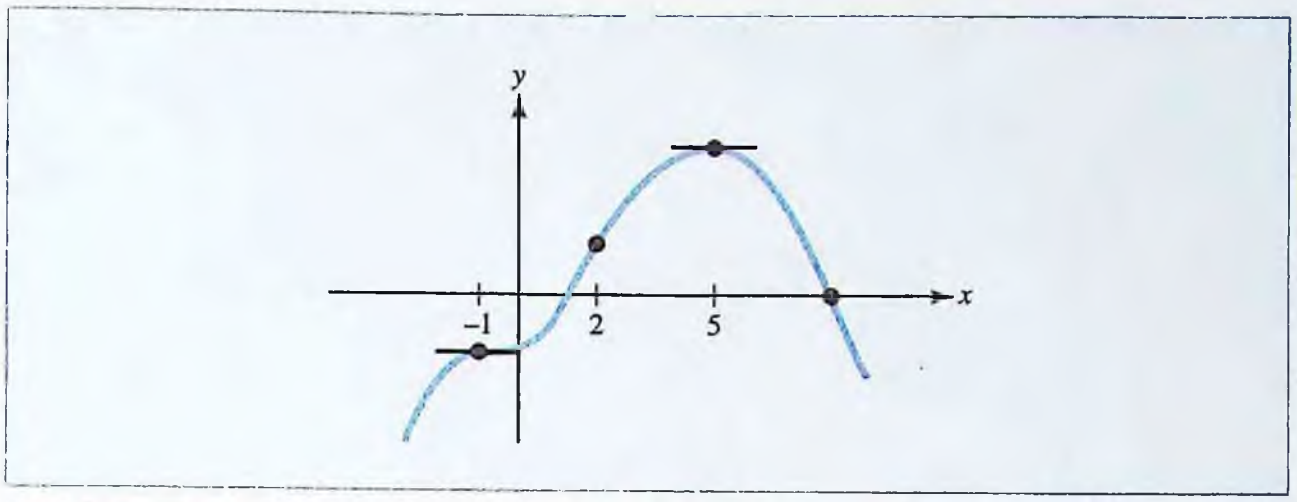


FIGURA 3.21 Una posible gráfica para $y = f(x)$.

Criterio de la segunda derivada

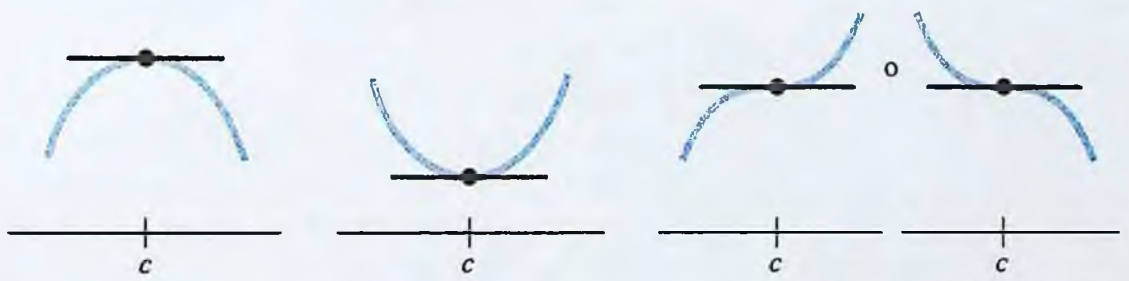
La segunda derivada se puede utilizar para clasificar un punto crítico de una función como un máximo o un mínimo relativo. A continuación se enuncia el procedimiento conocido como el **criterio de la segunda derivada.**

Criterio de la segunda derivada ■ Se supone que $f''(x)$ existe en un intervalo abierto que contiene $x = c$ y que $f'(c) = 0$.

Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $x = c$.

Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $x = c$.

Sin embargo, si $f''(c) = 0$ o si $f''(c)$ no existe, entonces el criterio no es suficiente y f puede tener un máximo relativo, un mínimo relativo o ningún extremo relativo en $x = c$.



a) Máximo relativo $f'(c) = 0,\ f''(c) < 0$

b) Mínimo relativo $f'(c) = 0,\ f''(c) > 0$

c) Ningún extremo $f'(c) = 0,\ f''(c) = 0$

FIGURA 3.22 El criterio de la segunda derivada.

Para entender cómo funciona el criterio de la segunda derivada se muestra la figura 3.22, donde aparecen las cuatro situaciones posibles cuando $f'(c) = 0$. La figura 3.22*a* sugiere que en un máximo relativo, la gráfica de f debe ser cóncava hacia abajo, entonces $f''(c) < 0$. De igual forma, en un mínimo relativo (figura 3.22*b*) la gráfica de f debe ser cóncava hacia arriba, entonces $f''(c) > 0$. Por otra parte, la figura 3.22*c* sugiere que si un punto donde $f'(c) = 0$ no es un extremo relativo, entonces éste deber ser un punto de inflexión y $f''(c) = 0$ (si $f''(c)$ está definida). Se deduce que si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces $P(c, f(c))$ debe ser un máximo relativo, en tanto si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, el punto crítico correspondiente debe ser un mínimo relativo.

En el ejemplo 3.2.5 se ilustra el uso del criterio de la segunda derivada.

www.FreeLibros.com

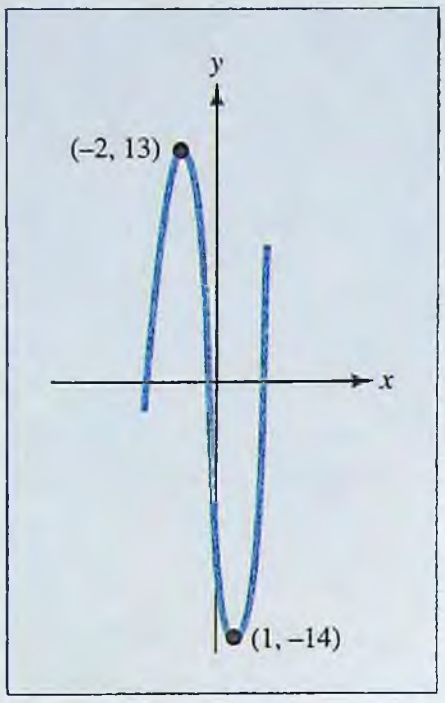


FIGURA 3.23 Gráfica de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$.

EJEMPLO | 3.2.5

Encuentre los puntos críticos de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ y utilice el criterio de la segunda derivada para clasificar cada punto crítico como un máximo o un mínimo relativo.

Solución

Como la primera derivada de

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x + 2)(x - 1)$$

es cero cuando $x = -2$ y $x = 1$, entonces los puntos correspondientes $(-2, 13)$ y $(1, -14)$ son los puntos críticos de f. Para averiguar qué hay en estos puntos, se calcula la segunda derivada

$$f''(x) = 12x + 6$$

y se evalúa en $x = -2$ y $x = 1$. Como

$$f''(-2) = -18 < 0$$

se deduce que el punto crítico $(-2, 13)$ es un máximo relativo, y puesto que

$$f''(1) = 18 > 0$$

se deduce que el punto crítico $(1, -14)$ es un mínimo relativo. Como referencia, se traza la gráfica de f en la figura 3.23.

NOTA Aunque fue fácil utilizar el criterio de la segunda derivada para clasificar los puntos críticos del ejemplo 3.2.5, el criterio tiene algunas limitaciones. Para algunas funciones, calcular la segunda derivada consume mucho tiempo, lo que puede disminuir lo atractivo del criterio. Además, el criterio se aplica sólo a puntos críticos en los cuales la derivada es cero y no a aquellos donde la derivada no está definida. Por último, si tanto $f'(c)$ como $f''(c)$ son cero, el criterio de la segunda derivada no dice nada sobre la naturaleza del punto crítico. Esto se ilustra en la figura 3.24 , donde se muestran las gráficas de tres funciones cuyas primera y segunda derivadas son cero cuando $x = 0$. Cuando no es conveniente o posible aplicar el criterio de la segunda derivada para clasificar los puntos críticos, se puede utilizar el criterio de la primera derivada descrito en la sección 3.1. ■

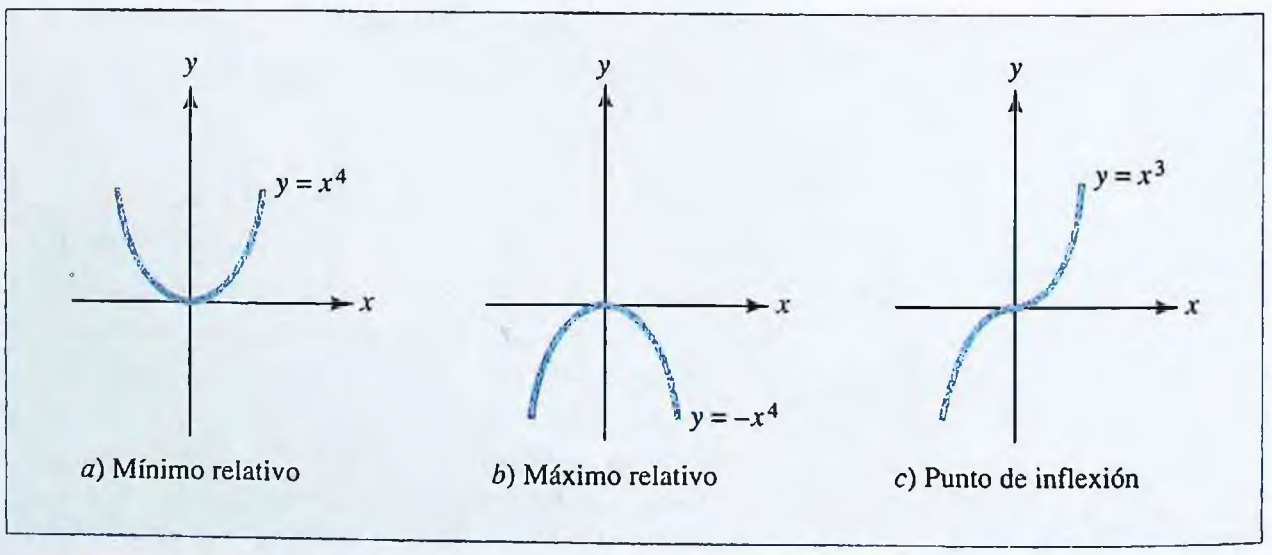


FIGURA 3.24 Tres funciones cuyas primera y segunda derivadas son cero en $x = 0$.

www.FreeLibros.com

En el ejemplo 3.2.6 se retoman los conceptos de eficiencia del trabajador y retornos decrecientes, que se examinaron con la ayuda de la figura 3.12 al inicio de esta sección. El objetivo es maximizar la *tasa* de producción del trabajador; es decir, la derivada de la producción del trabajador. De aquí que se igualará a cero la *segunda* derivada de la producción y se determinará un punto de inflexión de la función de producción, lo que se interpreta como el punto de retornos decrecientes de la producción.

EJEMPLO | 3.2.6

Un estudio de eficiencia del turno de la mañana de una fábrica indica que un trabajador promedio, que comienza a trabajar a las 8:00 a.m., habrá producido $Q(t) = -t^3 + 9t^2 + 12t$ unidades t horas después. ¿En qué momento el trabajador se desempeña con mayor eficiencia?

Solución

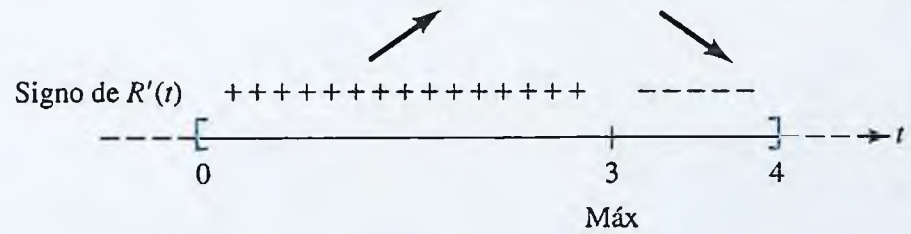
La tasa de producción del trabajador es la derivada de la función producción $Q(t)$; es decir

$$R(t) = Q'(t) = -3t^2 + 18t + 12$$

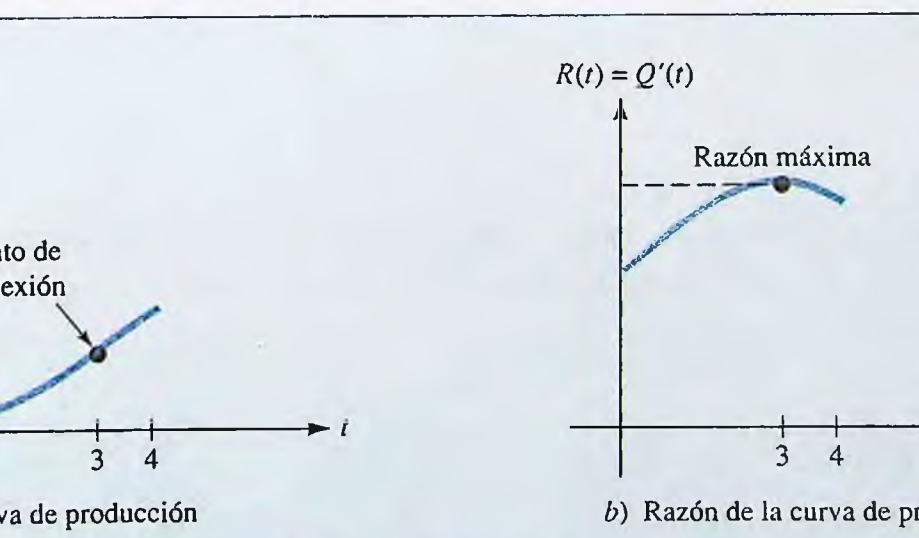
Suponga que el turno de la mañana va de las 8:00 a.m. hasta el mediodía; la meta es hallar la tasa más alta $R(t)$ para $0 \leq t \leq 4$. La derivada de la función tasa de producción es

$$R'(t) = Q''(t) = -6t + 18$$

que es cero cuando $t = 3$, positiva para $0 < t < 3$, y negativa para $3 < t < 4$, como se indica en al diagrama de flechas que se muestra a continuación.



Entonces, la tasa de producción $R(t)$ aumenta para $0 < t < 3$, disminuye para $3 < t < 4$, y tiene un valor máximo cuando $t = 3$ (11:00 a.m.). Esto significa que la función de producción $Q(t)$ tiene un punto de inflexión en $t = 3$, y como $Q''(t) = R'(t)$ el signo cambia en ese momento. En la figura 3.25*a* se muestra la gráfica de la función de producción $Q(t)$, mientras que la función de la tasa de producción se muestra en la figura 3.25*b*.



a) Curva de producción

b) Razón de la curva de producción

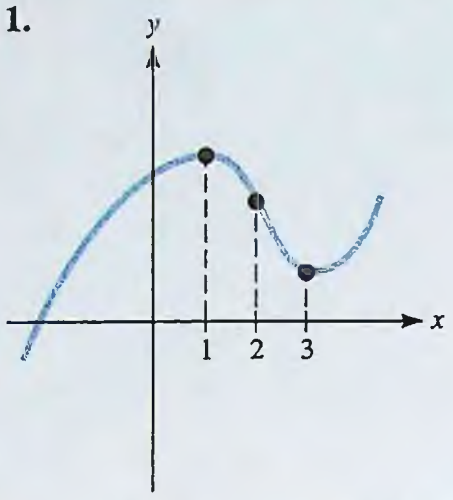
FIGURA 3.25 Producción de un trabajador promedio.

www.FreeLibros.com

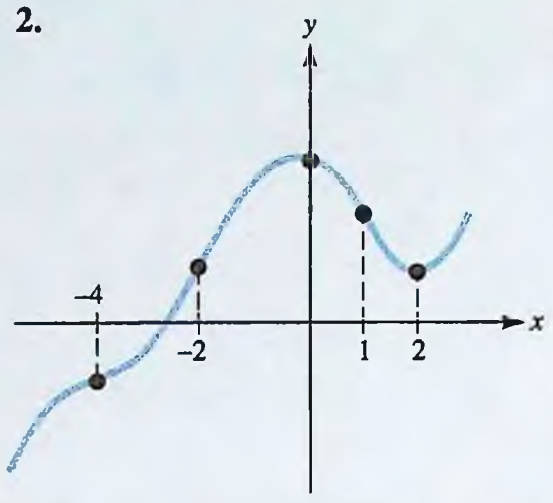
PROBLEMAS | 3.2

En los problemas 1 a 4 determine dónde es positiva y dónde es negativa la segunda derivada de la función.

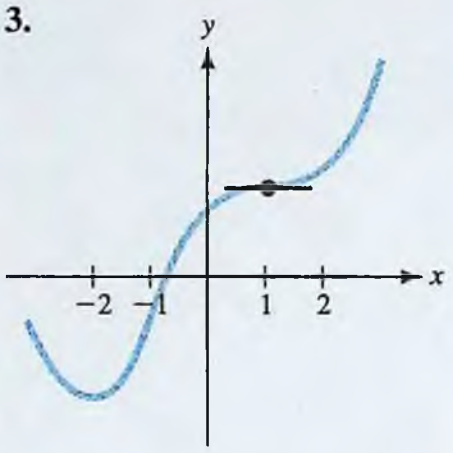
1.



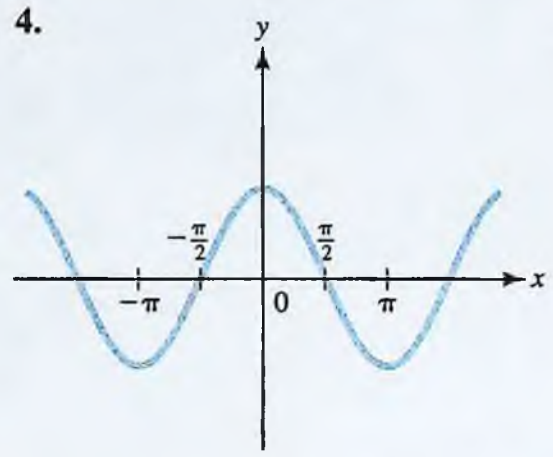
2.



3.



4.



En los problemas 5 a 12 determine dónde es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo la gráfica de la función dada. Encuentre las coordenadas de todos los puntos de inflexión.

5. $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 1$

6. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10x - 9$

7. $f(x) = x(2x + 1)^2$

8. $f(s) = s(s + 3)^2$

9. $g(t) = t^2 - \dfrac{1}{t}$

10. $F(x) = (x - 4)^{7/3}$

11. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 7x - 5$

12. $g(x) = 3x^5 - 25x^4 + 11x - 17$

En los problemas 13 a 26 determine dónde es creciente o decreciente la función dada, y dónde su gráfica es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. Encuentre los extremos relativos y los puntos de inflexión y dibuje la gráfica de la función.

13. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 9x + 2$

14. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

15. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

16. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

17. $f(x) = (x - 2)^3$

18. $f(x) = x^5 - 5x$

www.FreeLibros.com

19. $f(x) = (x^2 - 5)^3$

20. $f(x) = (x - 2)^4$

21. $f(s) = 2s(s + 4)^3$

22. $f(x) = (x^2 - 3)^2$

23. $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

24. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

25. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

26. $f(x) = x^4 + 6x^3 - 24x^2 + 24$

En los problemas 27 a 38 use el criterio de la segunda derivada para hallar los máximos y mínimos relativos de la función dada.

27. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

28. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

29. $f(x) = (x^2 - 9)^2$

30. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

31. $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{18}{x}$

32. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 2}$

33. $f(x) = x^2(x - 5)^2$

34. $f(x) = \left(\dfrac{x}{x + 1}\right)^2$

35. $h(t) = \dfrac{2}{1 + t^2}$

36. $f(s) = \dfrac{s + 1}{(s - 1)^2}$

37. $f(x) = \dfrac{(x - 2)^3}{x^2}$

38. $h(t) = \dfrac{(t + 3)^3}{(t - 1)^2}$

En los problemas 39 a 42 se da la segunda deriva $f''(x)$ de cierta función. En cada caso, utilice esta información para determinar dónde la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo; además encuentre todos los valores de x para los cuales hay un punto de inflexión. [No se requiere hallar $f(x)$ o las coordenadas y de los puntos de inflexión.]

39. $f''(x) = x^2(x - 3)(x - 1)$

40. $f''(x) = x^3(x^2 + 2x - 3)$

41. $f''(x) = (x - 1)^{1/3}$

42. $f''(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 4}$

En los problemas 43 a 46 se da la primera derivada $f'(x)$ de cierta función $f(x)$. En cada caso,

a) Encuentre los intervalos en los cuales f es creciente o decreciente.

b) Encuentre los intervalos en los cuales f es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.

c) Encuentre las coordenadas x de los extremos relativos y puntos de inflexión de f.

d) Trace una gráfica posible de $f(x)$.

43. $f'(x) = x^2 - 4x$

44. $f'(x) = x^2 - 2x - 8$

45. $f'(x) = 5 - x^2$

46. $f'(x) = x(1 - x)$

47. Trace la gráfica de una función que tiene las siguientes propiedades:

a) $f'(x) > 0$ cuando $x < -1$ y cuando $x > 3$

b) $f'(x) < 0$ cuando $-1 < x < 3$

c) $f''(x) < 0$ cuando $x < 2$

d) $f''(x) > 0$ cuando $x > 2$

48. Trace la gráfica de una función f que tiene las siguientes propiedades:

a) La gráfica tiene discontinuidades en $x = -1$ y en $x = 3$

b) $f'(x) > 0$ para $x < 1, x \neq -1$

c) $f'(x) < 0$ para $x > 1, x \neq 3$

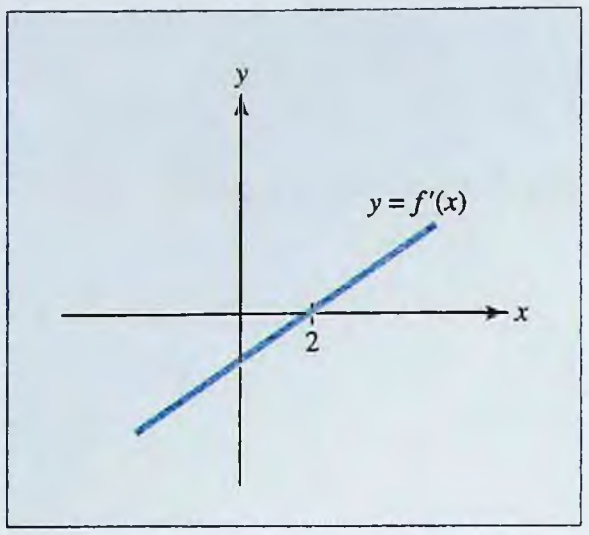
d) $f''(x) > 0$ para $x < -1$ y $x > 3$ y $f''(x) < 0$ para $-1 < x < 3$

e) $f(0) = 0 = f(2), f(1) = 3$

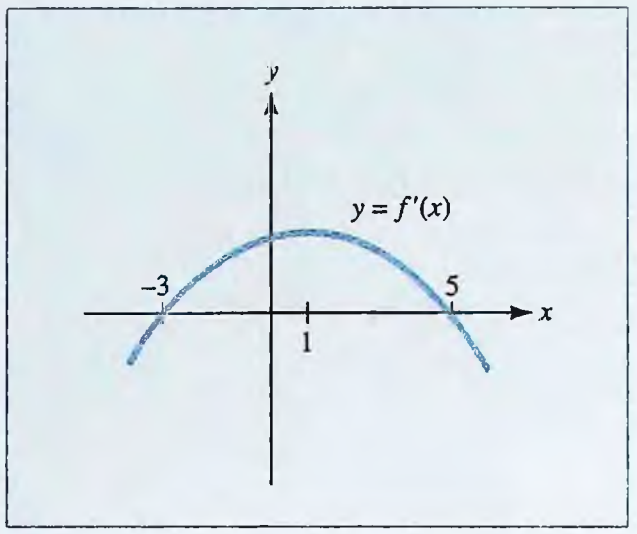
www.FreeLibros.com

En los problemas 49 a 52 se da la gráfica de una función derivada $y = f'(x)$. *Describa la función* $f(x)$ *y trace una gráfica posible de* $y = f(x)$.

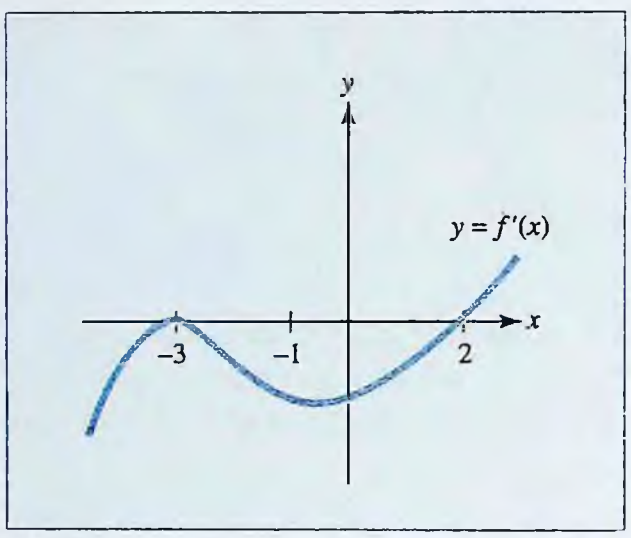
49.



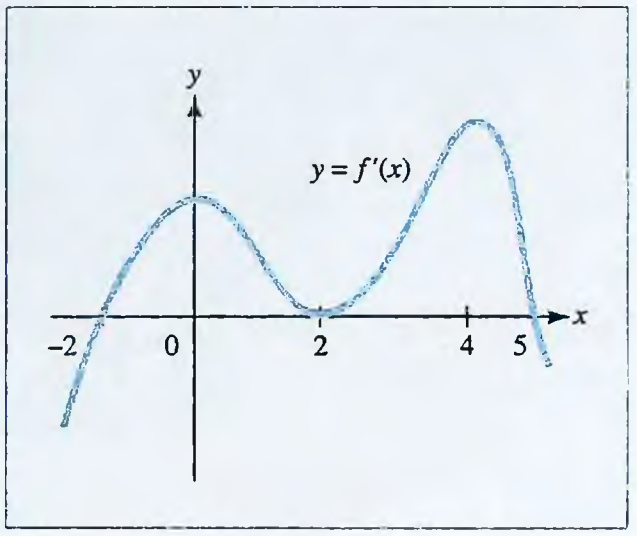
50.



51.



52.



53. ANÁLISIS MARGINAL El costo de producir x unidades de un artículo por semana es

$$C(x) = 0.3x^3 - 5x^2 + 28x + 200$$

a) Encuentre el costo marginal $C'(x)$ y trace su gráfica junto con la gráfica de $C(x)$ en el mismo sistema de coordenadas.

b) Encuentre todos los valores de x donde $C''(x) = 0$ ¿Cómo se relacionan estos niveles de producción con la gráfica del costo marginal?

54. VENTAS Una compañía estima que cuando se gasten x miles de dólares en mercadotecnia de cierto producto, se venderán $Q(x)$ unidades del producto, donde

$$Q(x) = -4x^3 + 252x^2 - 3\,200x + 17\,000$$

para $10 \leq x \leq 40$. Trace la gráfica de $Q(x)$. ¿Dónde tiene la gráfica un punto de inflexión? ¿Cuál es el significado del gasto en mercadotecnia que corresponde a este punto?

55. EFICIENCIA DE UN TRABAJADOR Un estudio de eficiencia del turno de la mañana en una fábrica (8:00 a.m. a 12:00 del mediodía) indica que un trabajador promedio que llega al trabajo a las 8:00 a.m., habrá producido Q unidades t horas más tarde, donde $Q(t) = -t^3 + \frac{9}{2}t^2 + 15t$.

a) ¿A qué hora de la mañana es más eficiente el desempeño del trabajador?

b) ¿A qué hora de la mañana es menos eficiente el desempeño del trabajador?

56. EFICIENCIA DE UN TRABAJADOR Un estudio de eficiencia del turno de la mañana en cierta fábrica (de 8:00 a.m. a 12:00 del mediodía)

www.FreeLibros.com

indica que un trabajador promedio que llega al trabajo a las 8:00 a.m., habrá ensamblado $Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t$ radios de transistores t horas más tarde.

a) ¿A qué hora de la mañana es más eficiente el desempeño del trabajador?

b) ¿A qué hora de la mañana es menos eficiente el desempeño del trabajador?

57. CRECIMIENTO DEMOGRÁFICO Una proyección a 5 años de las tendencias demográficas señala que dentro de t años, la población de cierta comunidad será $P(t) = -t^3 + 9t^2 + 48t + 50$ miles.

a) ¿En qué momento durante el periodo de 5 años crecerá la población con más rapidez?

b) ¿En qué momento durante el periodo de 5 años crecerá la población con menos rapidez?

c) ¿En qué momento la tasa de crecimiento demográfico cambia con mayor rapidez?

58. ELIMINACIÓN DE DESECHOS PELIGROSOS Ciertos desechos peligrosos tienen la propiedad de producir un efecto de inhibición tóxica a medida que aumenta la concentración de sustrato (la sustancia presenta cambios por acción enzimática). Un modelo matemático para este comportamiento es la **ecuación de Haldane**.[2]

$$R(S) = \frac{cS}{a + S + bS^2}$$

donde R es la tasa de crecimiento específico de la sustancia (la tasa a la cual se dividen las células); S es la concentración de sustrato, y a, b y c son constantes positivas.

a) Trace las gráfica de $R(S)$. ¿Tiene la gráfica un punto más alto? ¿Tiene un punto más bajo? ¿Tiene un punto de inflexión? ¿Qué le ocurre a la tasa de crecimiento cuando S crece cada vez más? Interprete sus observaciones.

b) Lea un artículo sobre manejo de desechos peligrosos, y escriba un párrafo sobre cómo se utilizan los modelos matemáticos en el desarrollo de métodos para eliminar los desechos. Un buen comienzo es la referencia citada en este texto.

59. CRECIMIENTO DEMOGRÁFICO Los estudios demuestran que, con frecuencia, cuando los factores ambientales imponen un límite superior al tamaño posible de la población $P(t)$, la población tiende a crecer de tal manera que la tasa de cambio porcentual de $P(t)$ satisface

$$\frac{100\,P'(t)}{P(t)} = A - BP(t)$$

donde A y B son constantes positivas. ¿Dónde tiene la gráfica de $P(t)$ un punto de inflexión? ¿Qué significado tiene este punto? (Dé la respuesta en términos de A y B.)

60. PROPAGACIÓN DE UNA EPIDEMIA Sea $Q(t)$ el número de personas de una población N_0 infectado con cierta enfermedad t días después del comienzo de una epidemia. Los estudios indican que la tasa $R(Q)$ a la cual la epidemia se propaga es conjuntamente proporcional al número de personas que han contraído la enfermedad y al número de personas que no la han contraído; entonces $R(Q) = kQ(N_0 - Q)$. Trace la gráfica de la función tasa de propagación e interprétela. En particular, ¿qué significa el punto más alto en la gráfica de $R(Q)$?

61. CRECIMIENTO DE UN TEJIDO Suponga que el tejido de cierto cultivo tiene un área $A(t)$ en un tiempo t y un área potencial M. Con base en propiedades de la división celular, es razonable suponer que el área A crece a una tasa conjuntamente proporcional a $\sqrt{A(t)}$ y $M - A(t)$; es decir

$$\frac{dA}{dt} = k\sqrt{A(t)}\,[M - A(t)]$$

donde k es una constante positiva.

a) Sea $R(t) = A'(t)$ la tasa de crecimiento del tejido. Demuestre que $R'(t) = 0$ cuando $A(t) = M/3$.

b) ¿Es la tasa de crecimiento del tejido máxima o mínima cuando $A(t) = M/3$? [*Sugerencia*: Use el criterio de la primera o el de la segunda derivada.]

c) Con base en la información dada y en lo que usted ha descubierto en el inciso *a*), ¿qué puede decir acerca de la gráfica de $A(t)$?

62. Use el cálculo para demostrar que la gráfica de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ es cóncava hacia arriba si a es positiva y cóncava hacia abajo si a es negativa.

63. Dada la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$, complete estos pasos:

a) Grafíquela utilizando $[-10, 10]1$ por $[-10, 10]1$ y $[-10, 10]1$ por $[-20, 20]2$.

b) Complete la tabla:

x	−4	−2	−1	0	1	2
$f(x)$						
$f'(x)$						
$f''(x)$						

[2] Michael D. La Grega, Philip L. Buckingham y Jeffrey C. Evans, *Hazardous Waste Management*, McGraw-Hill, Nueva York, 1994, página 578.

www.FreeLibros.com

c) Aproxime las intersecciones con el eje x y con el eje y con dos lugares decimales.
d) Encuentre los puntos máximos y mínimos relativos.
e) Encuentre los intervalos sobre los cuales $f(x)$ es creciente.
f) Encuentre los intervalos sobre los cuales $f(x)$ es decreciente.
g) Encuentre los puntos de inflexión.
h) Encuentre los intervalos sobre los cuales la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia arriba.
i) Encuentre los intervalos sobre los cuales la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo.
j) Demuestre que la concavidad cambia de hacia arriba a hacia abajo, o viceversa, cuando x se mueve de un valor un poco menor a un valor un poco mayor que el punto de inflexión.
k) Encuentre los valores máximos y mínimos de esta función, para $-4 \leq x \leq 2$.

64. Repita el problema 63 para la función

$$f(x) = 3.7x^4 - 5.03x^3 + 2x^2 - 0.7$$

SECCIÓN 3.3 | Trazado de curvas

Hasta ahora en este capítulo se ha analizado cómo utilizar la derivada $f'(x)$ para hallar dónde la gráfica de $f(x)$ es ascendente y dónde es descendente, y cómo utilizar la segunda derivada $f''(x)$ para determinar la concavidad de la gráfica. De la misma forma que estas herramientas son adecuadas para ubicar los puntos altos y bajos de una gráfica y para marcar sus giros y vueltas, también existen otras características gráficas que pueden describirse mejor con la ayuda de límites.

Recuerde de la sección 1.5 que un límite de la forma $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ o $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, en los cuales la variable independiente x puede aumentar o disminuir sin límite, se denomina *límite al infinito*. Por otra parte, si los mismos valores funcionales $f(x)$ crecen sin límite cuando x se aproxima al número c, entonces se dice que $f(x)$ tiene *límite infinito* en $x = c$ y se escribe como $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$, si $f(x)$ aumenta indefinidamente cuando x tiende a c o $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ si $f(x)$ disminuye indefinidamente. En conjunto, los límites al infinito y los límites infinitos son llamados **límites que conciernen al infinito**. El primer objetivo en esta sección es ver cómo los límites que conciernen al infinito pueden interpretarse como un comportamiento gráfico. Esta información se combinará con los métodos de las derivadas de las secciones 3.1 y 3.2 con el fin de obtener un procedimiento general para el trazado de gráficas.

REPASO

Justo-a-tiempo

Es importante recordar que ∞ *no* es un número. Se usa sólo para representar un proceso de crecimiento sin límites o el resultado de tal crecimiento.

Asíntotas verticales

Los límites que conciernen al infinito se pueden usar para describir características gráficas llamadas *asíntotas*. En particular, se dice que la gráfica de una función $f(x)$ tiene una **asíntota vertical** en $x = c$ si $f(x)$ aumenta o disminuye sin límite cuando x tiende a c, tanto por la derecha como por la izquierda.

Por ejemplo, considere la función racional

$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}$$

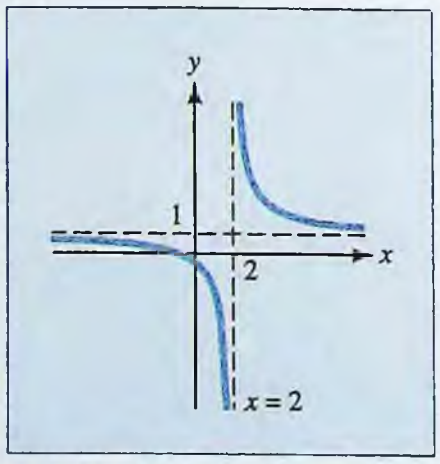


FIGURA 3.26 La gráfica de $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$.

Cuando x se aproxima a 2 por la izquierda ($x < 2$), los valores funcionales disminuyen sin límite, pero aumentan sin límite si x se aproxima a 2 por la derecha ($x > 2$). Este comportamiento se ilustra en la siguiente tabla y se muestra gráficamente en la figura 3.26.

x	1.95	1.97	1.99	1.999	2	2.001	2.005	2.01
$f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$	−59	−99	−299	−2999	indefinido	3001	601	301

www.FreeLibros.com

El comportamiento en este ejemplo se puede resumir como sigue: usando la notación de límite lateral que se introdujo en la sección 1.6:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x-2} = +\infty$$

De manera similar, se usa la notación de límite para definir el concepto de asíntota vertical.

Asíntotas verticales ■ La recta $x = c$ es una *asíntota vertical* de la gráfica de $f(x)$ si, ya sea

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty \quad (\text{o } -\infty)$$

o

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \quad (\text{o } -\infty)$$

En general, una función racional $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ tiene una asíntota vertical $x = c$ siempre y cuando $q(c) = 0$ pero $p(c) \neq 0$. A continuación se presenta un ejemplo de una función con una asíntota vertical.

EJEMPLO | 3.3.1

Determine todas las asíntotas verticales de la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$$

Solución

Sean $p(x) = x^2 - 9$ y $q(x) = x^2 + 3x$ el numerador y el denominador de $f(x)$, respectivamente. Entonces $q(x) = 0$ cuando $x = -3$ y cuando $x = 0$. Sin embargo, para $x = -3$ también se tiene que $p(-3) = 0$ y

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = \lim_{x\to -3} \frac{x-3}{x} = 2$$

Esto significa que la gráfica de $f(x)$ tiene un "hoyo" en el punto $(-3, 2)$ y $x = -3$ *no* es una asíntota vertical de la gráfica.

Sin embargo se tiene $p(0) \neq 0$ y $q(0) = 0$, lo cual sugiere que el eje y (la recta vertical $x = 0$) es una asíntota vertical de la gráfica de $f(x)$. Este comportamiento asintótico se verifica comprobando que

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = -\infty$$

En la figura 3.27 se muestra la gráfica de $f(x)$.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Tomando como referencia al ejemplo 3.3.1, guarde $f(x) = (x^2 - 9)/(x^2 + 3x)$ en Y1 y grafíquela usando la pantalla [−4.7, 4.7]1 por [−6.2, 6.2]1. Use la instrucción **TRACE** para confirmar que $f(x)$ no está definida en X = −3 y X = 0. ¿Cómo indica su calculadora que en estos puntos la función no está definida?

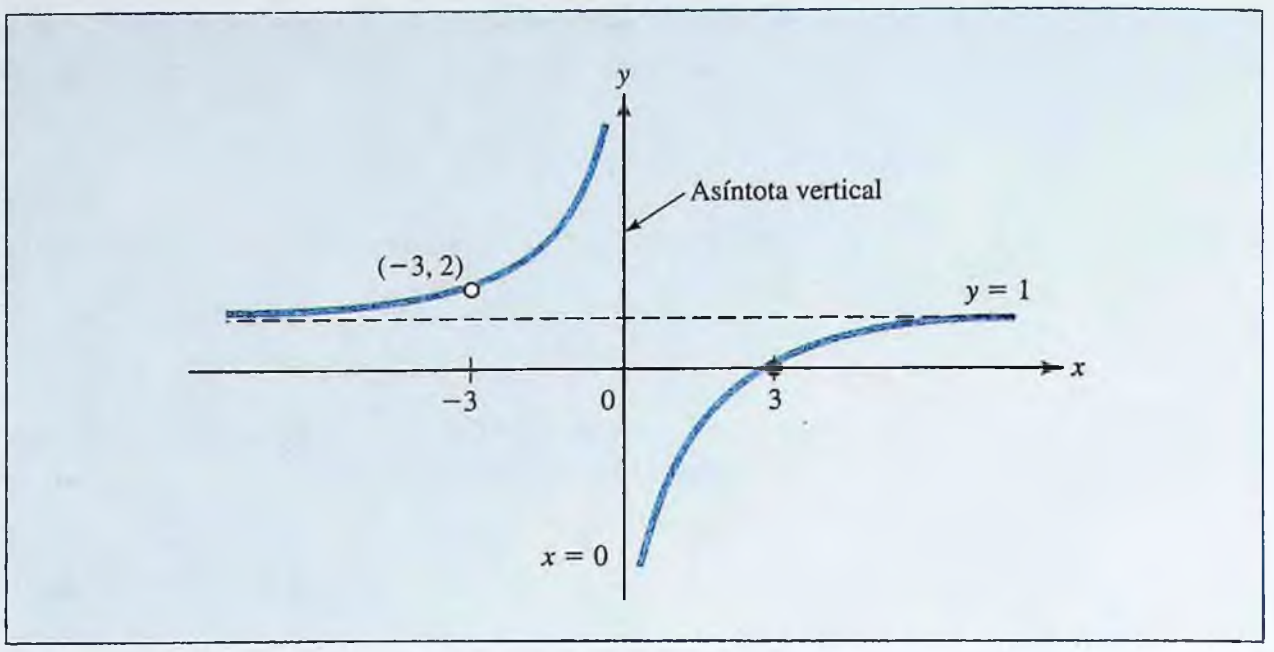


FIGURA 3.27 Gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 3x}$.

Asíntotas horizontales

En la figura 3.27, se observa que la gráfica se aproxima a la recta horizontal $y = 1$ a medida que x aumenta o disminuye sin límite; es decir,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 3x} = 1$$

En general, cuando una función $f(x)$ tiende hacia un valor finito b cuando x aumenta o disminuye sin límite (o ambos, como en el ejemplo), entonces la recta horizontal $y = b$ recibe el nombre de **asíntota horizontal** de la gráfica de $f(x)$. A continuación se da una definición.

Asíntotas horizontales La recta horizontal $y = b$ es llamada *asíntota horizontal* de la gráfica de $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

REPASO

Justo-a-tiempo

Recuerde las reglas del recíproco de la potencia para límites (p. 65 en la sección 1.5):

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{A}{x^k} = 0$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{A}{x^k} = 0$$

para A y k, constantes, con $k > 0$.

EJEMPLO | 3.3.2

Determine todas las asíntotas horizontales de la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$$

Solución

Si se divide cada término de la función racional $f(x)$ entre x^2 (la potencia más grande de x en el denominador), se encuentra que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2/x^2}{x^2/x^2 + x/x^2 + 1/x^2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 + 1/x + 1/x^2} = \frac{1}{1 + 0 + 0} = 1 \qquad \textit{regla del recíproco de la potencia}$$

y de manera similar,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2 + x + 1} = 1$$

www.FreeLibros.com

Así, la gráfica de $f(x)$ tiene $y = 1$ como un asíntota horizontal. La gráfica se muestra en la figura 3.28 .

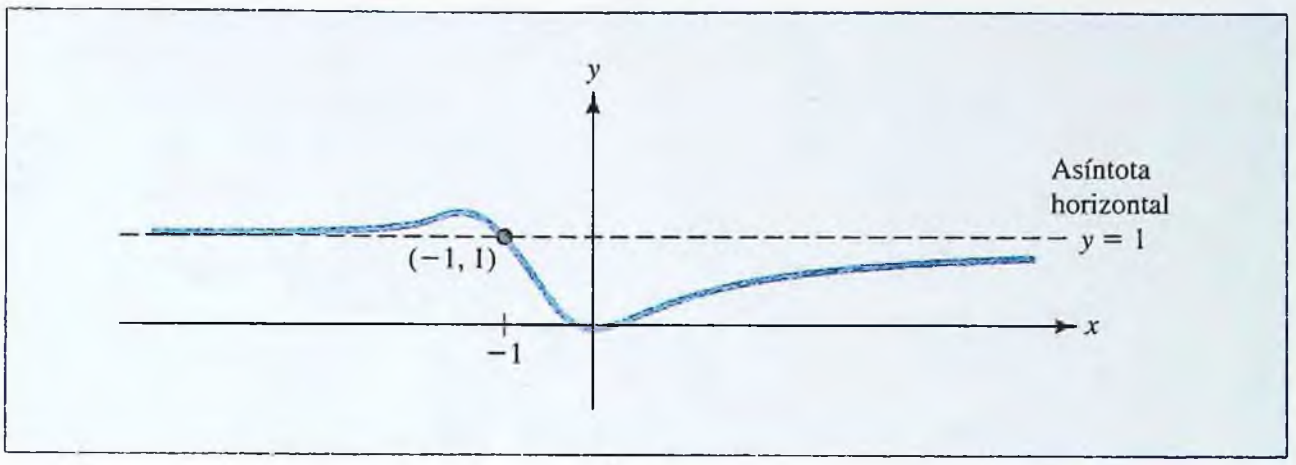


FIGURA 3.28 Gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x + 1}$.

NOTA La gráfica de una función $f(x)$ nunca puede cruzar una asíntota vertical $x = c$ ya que al menos uno de los límites laterales $\lim_{x \to c^-} f(x)$ o $\lim_{x \to c^+} f(x)$ es indefinido. Sin embargo, es posible que una gráfica cruce sus asíntotas horizontales. Como referencia, en el ejemplo 3.3.2, la gráfica de $y = \dfrac{x^2}{x^2 + x + 1}$ cruza la asíntota horizontal $y = 1$ en el punto donde

$$\frac{x^2}{x^2 + x + 1} = 1$$
$$x^2 = x^2 + x + 1$$
$$x = -1$$

es decir, en el punto $(-1, 1)$. ■

Procedimiento general para trazar gráficas

Ahora se tienen las herramientas necesarias para describir un procedimiento general para trazar diversas gráficas.

Un procedimiento general para trazar la gráfica de $f(x)$

Paso 1. Encuentre el dominio de $f(x)$ (es decir, donde $f(x)$ está definida).

Paso 2. Encuentre y represente todas las intersecciones. La intersección con el eje y (donde $x = 0$) es por lo general fácil de hallar, pero las intersecciones con el eje x (donde $f(x) = 0$) pueden requerir el uso de la calculadora.

Paso 3. Determine todas las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica. Dibuje las asíntotas en un plano coordenado.

Paso 4. Encuentre $f'(x)$ y utilícela para determinar los números críticos de $f(x)$ y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Paso 5. Determine todos los extremos relativos (ambas coordenadas). Represente cada máximo relativo con un "gorro" (∩) y cada mínimo relativo con una "copa" (∪).

(*continúa*)

www.FreeLibros.com

Paso 6. Calcule $f''(x)$ y utilícela para determinar los intervalos de diferente concavidad y los puntos de inflexión. Represente cada punto de inflexión con un "giro" para sugerir la forma de la gráfica cerca del punto.

Paso 7. Ahora ya tiene una gráfica preliminar, con asíntotas en su sitio, intersecciones trazadas, flechas que indican la dirección de la gráfica, y "gorros", "copas" y "giros" que sugieren la forma en los puntos clave. Represente puntos adicionales si se requieren, y complete el trazado uniendo los puntos marcados en las direcciones indicadas. Debe recordar que la gráfica no puede cruzar una asíntota vertical.

A continuación se muestra un análisis paso a paso de la gráfica de una función racional.

EJEMPLO | 3.3.3

Dibuje la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

Solución

Pasos 1 y 2. La función está definida para toda x excepto para $x = -1$, y la única intersección con los ejes es el origen $(0, 0)$.

Paso 3. La recta $x = -1$ es una asíntota vertical de la gráfica de $f(x)$ ya que $f(x)$ disminuye indefinidamente cuando x se aproxima a -1 por cualquier lado; es decir,

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x}{(x+1)^2} = \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{(x+1)^2} = -\infty$$

Además, como

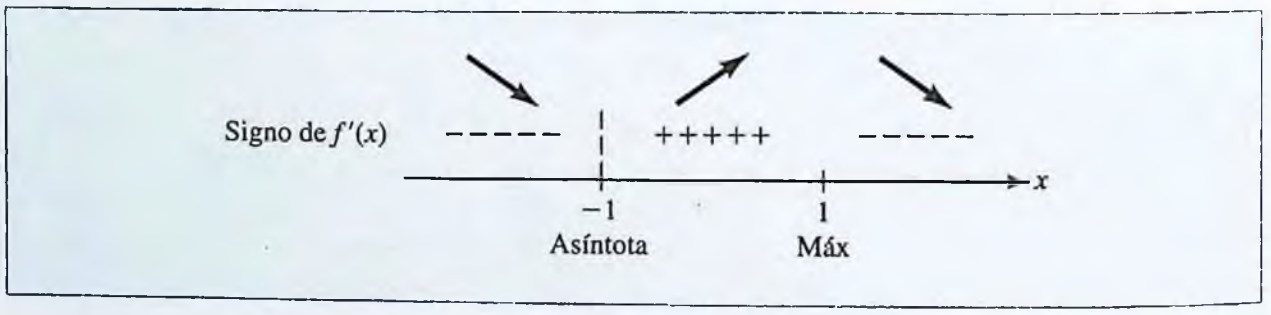
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = 0$$

la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal. Se dibujan rectas punteadas $x = -1$ y $y = 0$ en un plano coordenado.

Paso 4. Aplicando la regla del cociente, calcule la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2(1) - x[2(x+1)(1)]}{(x+1)^4} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$$

Como $f'(1) = 0$, se deduce que $x = 1$ es un número crítico. Observe que aunque $f'(-1)$ no existe, $x = -1$ no es un número crítico porque no está en el dominio de $f(x)$. Marque $x = 1$ y $x = -1$ en la recta numérica, y dibuje una recta vertical con líneas discontinuas en $x = -1$ para indicar que ahí hay una asíntota vertical. Después evalúe $f'(x)$ con números de prueba adecuados (es decir, en -2, 0 y 3) para obtener el diagrama de flechas que se muestra a continuación.



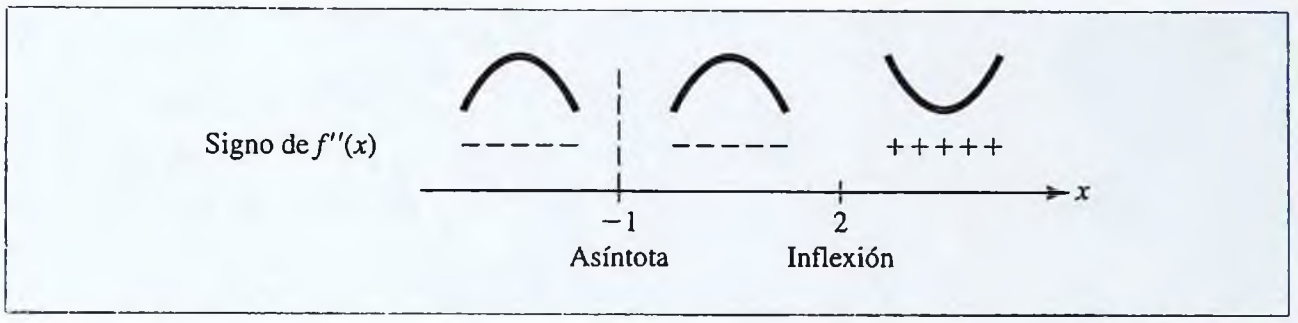
www.FreeLibros.com

Paso 5. El patrón de flechas del diagrama, obtenido en el paso 4, indica que hay un máximo relativo en $x = 1$. Como $f(1) = \frac{1}{4}$, trace una "copa" en $\left(1, \frac{1}{4}\right)$.

Paso 6. Aplique la regla del cociente para obtener

$$f''(x) = \frac{2(x-2)}{(x+1)^4}$$

Como $f''(x) = 0$ en $x = 2$ y $f''(x)$ no existe en $x = -1$, marque -1 y 2 sobre la recta numérica y calcule el signo de $f''(x)$ en los intervalos $x < -1$. $-1 < x < 2$, y $x > 2$ para obtener el siguiente diagrama de concavidad.



Observe que la concavidad cambia en $x = 2$. Como $f(2) = \frac{2}{9}$ trace un "giro" ∿ en $\left(2, \frac{2}{9}\right)$. para indicar que ahí hay un punto de inflexión.

Paso 7. En la figura 3.29*a* se muestra la gráfica preliminar. Observe que la asíntota vertical (línea punteada) divide la gráfica en dos partes. Una los trazos de cada parte mediante una curva suave para obtener la gráfica completa que se muestra en la figura 3.29*b*.

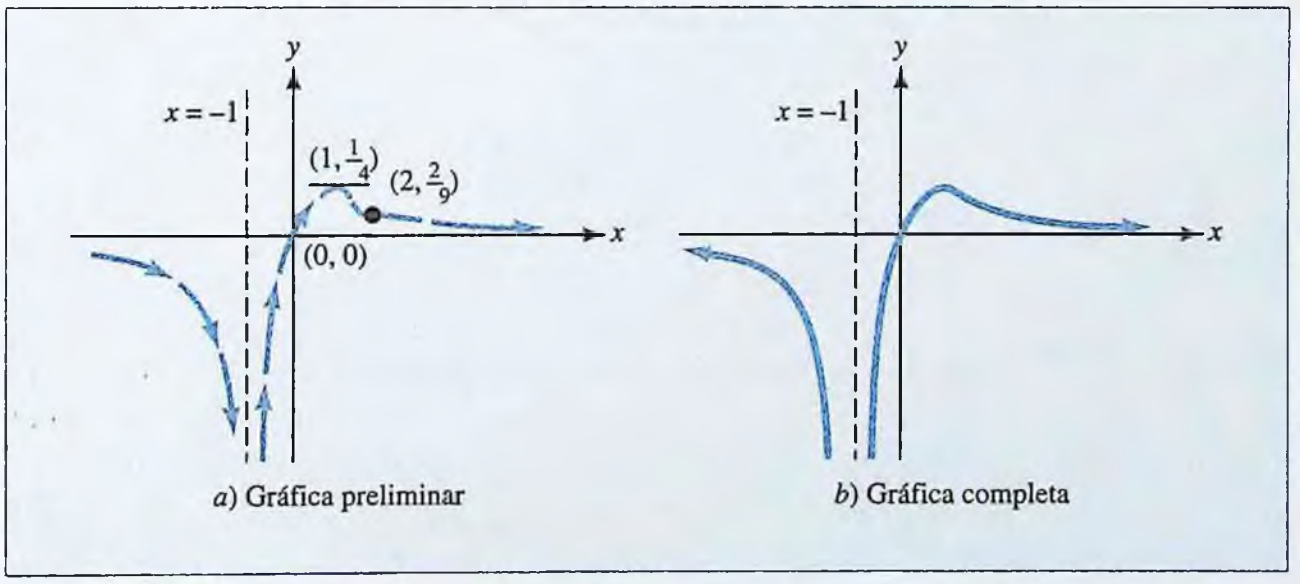


FIGURA 3.29 Gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

En el ejemplo 3.3.4, se traza la gráfica de una función racional más complicada utilizando una forma condensada de la solución paso a paso que se desarrolló en el ejemplo 3.3.3.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Introduzca la función $f(x)$ del ejemplo 3.3.4 en el editor de ecuaciones. Compare la gráfica obtenida utilizando la pantalla estándar [−10, 10]1 por [−10, 10]1 con la gráfica obtenida utilizando la variante [−9.4, 9.4]1 por [−1, 10]1. ¿Cómo se comporta la gráfica de $f(x)$ cuando usted traza los puntos correspondientes a valores grandes de x?

EJEMPLO | 3.3.4

Dibuje la gráfica de

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 2x - 15}$$

Solución

Como $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$, la función $f(x)$ está definida para toda x excepto $x = -5$ y $x = 3$. La única intersección con los ejes es el origen (0, 0).

Observe que $x = 3$ y $x = -5$ son asíntotas verticales ya que si se escribe $f(x) = p(x)/q(x)$, donde $p(x) = 3x^2$ y $q(x) = x^2 + 2x - 15$, entonces $q(3) = 0$ y $q(-5) = 0$, mientras que $p(3) \neq 0$ y $p(-5) \neq 0$. Además, $y = 3$ es una asíntota horizontal ya que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{x^2 + 2x - 15} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{1 + 2/x - 15/x^2} = \frac{3}{1 + 0 - 0} = 3$$

y de igual forma, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$. Se comienza el dibujo preliminar trazando las asíntotas $x = 3$, $x = -5$ y $y = 3$ como líneas discontinuas en un plano coordenado.

Luego, se utiliza la regla del cociente para obtener

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 2x - 15)(6x) - (2x + 2)(3x^2)}{(x^2 + 2x - 15)^2} = \frac{6x(x - 15)}{(x^2 + 2x - 15)^2}$$

Note que $f'(x) = 0$ cuando $x = 0$ y $x = 15$ y que esa $f'(x)$ no existe cuando $x = -5$ y $x = 3$. Marque los números -5, 0, 3 y 15 sobre la recta numérica y obtenga el diagrama de flechas que se muestra en la figura 3.30*a*; el signo de $f'(x)$ se determina con números de prueba apropiados (por ejemplo, -7, -1, 2, 5 y 20). Interpretando el diagrama de flechas, vemos que existe un máximo relativo en $x = 0$ y un mínimo relativo en $x = 15$. Como $f(0) = 0$ y $f(15) \approx 2.81$, se representa un "gorro" en (0, 0) sobre la gráfica preliminar y una "copa" en (15, 2.81).

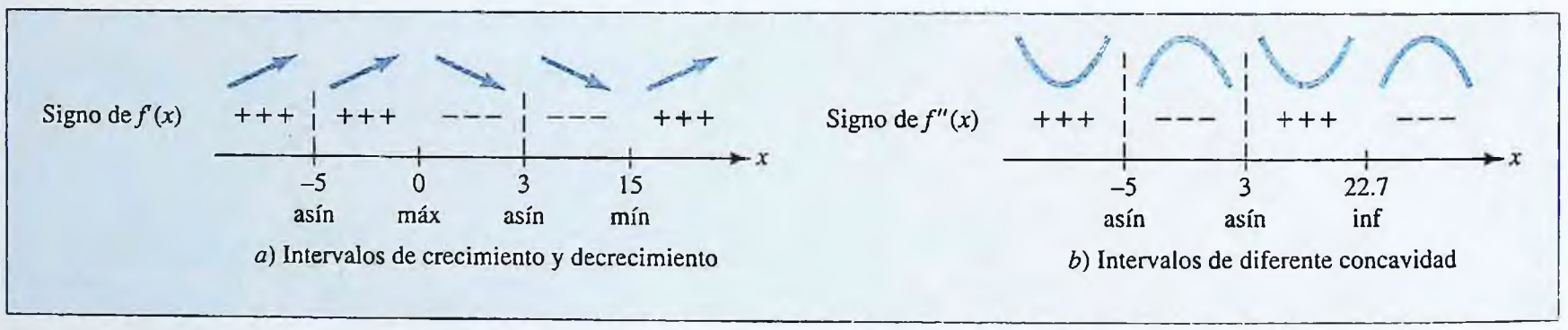


FIGURA 3.30 Diagramas de flechas y concavidad para $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 2x - 15}$.

Aplique nuevamente la regla del cociente para obtener

$$f''(x) = \frac{-6(2x^3 - 45x^2 - 225)}{(x^2 + 2x - 15)^3}$$

Observe que $f''(x)$ no existe cuando $x = -5$ y $x = 3$, y que $f''(x) = 0$ cuando

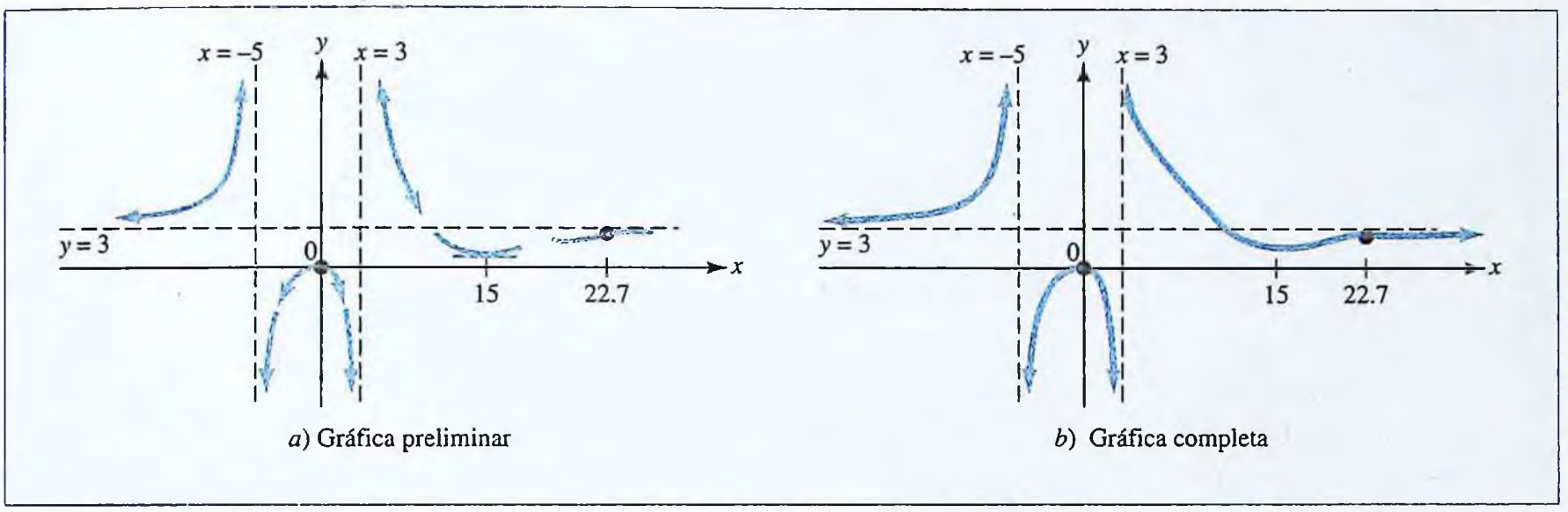
$$2x^3 - 45x^2 - 225 = 0$$

$x \approx 22.7$ *redondeado con la calculadora*

www.FreeLibros.com

Marque los números $x = -5$, 3 y 22.7 sobre la recta numérica y construya el diagrama de concavidad mostrado en la figura 3.30*b*, el signo de $f''(x)$ se determina con números de prueba apropiados (por ejemplo, en -6, 0, 4 y 25). La concavidad cambia en los tres puntos de subdivisión, pero sólo $x = 22.7$ corresponde a un punto de inflexión porque $x = -5$ y $x = 3$ no están en el dominio de $f(x)$. Se calcula $f(22.7) \approx 2.83$ y se representa un "giro" ( ) en (22.7, 2.83).

En la figura 3.31*a* se muestra la gráfica preliminar. Note que las dos asíntotas verticales dividen la gráfica en tres partes. Una las características de cada parte por separado, mediante una curva suave para obtener la gráfica completa que se muestra en la figura 3.31*b*.



a) Gráfica preliminar

b) Gráfica completa

FIGURA 3.31 Gráfica de $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 2x - 15}$.

Cuando no existe $f'(c)$ en un número $x = c$ del dominio de $f(x)$, hay varias posibilidades para la gráfica de $f(x)$ en el punto $(c, f(c))$. Dos de esos casos se examinan en el ejemplo 3.3.5.

EJEMPLO | 3.3.5

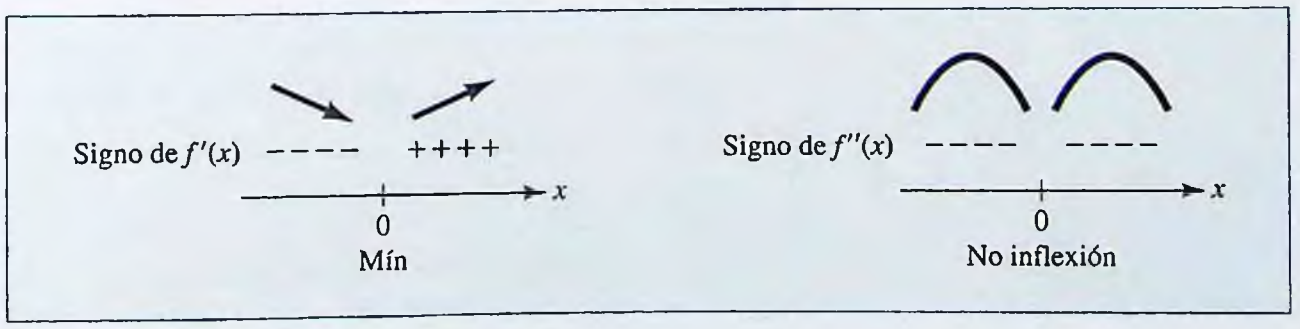
Dibuje las gráficas de $f(x) = x^{2/3}$ y $g(x) = (x - 1)^{1/3}$.

Solución

Ambas funciones están definidas para toda x. Para $f(x) = x^{2/3}$ se tiene

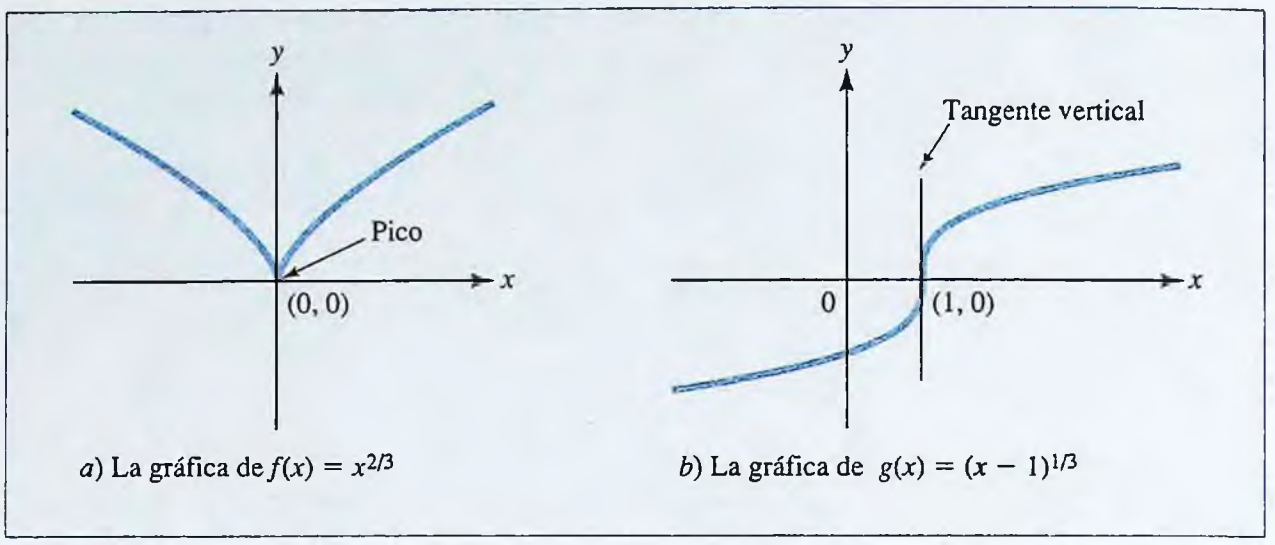
$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} \qquad \text{y} \qquad f''(x) = \frac{-2}{9}x^{-4/3} \qquad x \neq 0$$

El único punto crítico es (0, 0) y los intervalos de crecimiento y decrecimiento y de concavidad son como se muestran:



www.FreeLibros.com

Interpretando estos diagramas, se concluye que la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia abajo para toda $x \neq 0$ pero es decreciente para $x < 0$ mientras que es creciente para $x > 0$. Así que la gráfica de $f(x)$ tiene un mínimo relativo en el origen (0, 0) y su forma es $\vee$, y se llama "cúspide". En la figura 3.32*a* se muestra la gráfica de $f(x)$.



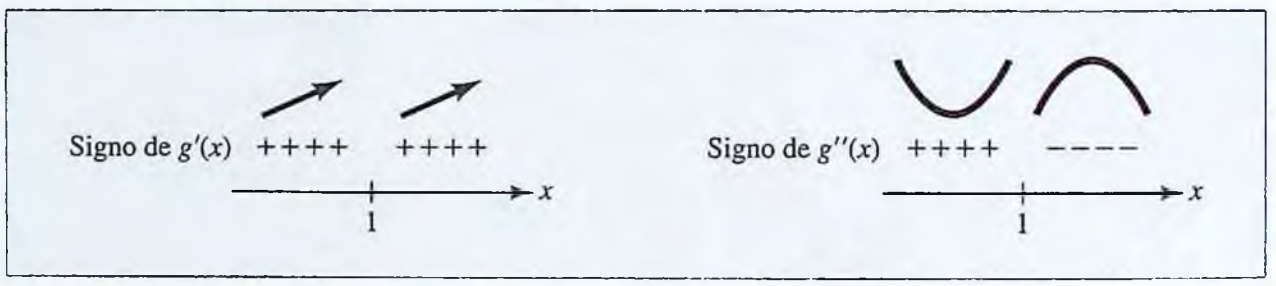
a) La gráfica de $f(x) = x^{2/3}$ *b*) La gráfica de $g(x) = (x - 1)^{1/3}$

FIGURA 3.32 Gráfica con un pico y gráfica con una tangente vertical.

Las derivadas de $g(x) = (x - 1)^{1/3}$ están dadas por

$$g'(x) = \frac{1}{3}(x - 1)^{-2/3} \qquad \text{y} \qquad g''(x) = \frac{-2}{9}(x - 1)^{-5/3} \qquad x \neq 1$$

El único punto crítico es (1, 0); y los intervalos de crecimiento y decrecimiento así como los de diferente concavidad son:



De esta forma, la gráfica de $g(x)$ es creciente para toda $x \neq 1$ pero es cóncava hacia arriba para $x < 1$ y cóncava hacia abajo para $x > 1$. Esto significa que (1, 0) es un punto de inflexión, pero además, se observa que

$$\lim_{x \to 1^-} g'(x) = \lim_{x \to 1^+} g'(x) = +\infty$$

Geométricamente esto significa que cuando x se aproxima a 1 por ambos lados, la recta tangente en $(x, g(x))$ se hace más y más inclinada (con pendiente positiva). Esto se puede interpretar como que la gráfica de $g(x)$ tiene una recta tangente en (1, 0) con pendiente "infinita"; es decir, una recta **tangente vertical**. En la figura 3.32*b* se muestra la gráfica de $g(x)$.

Algunas veces es útil representar las observaciones respecto a una magnitud en forma gráfica. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 3.3.6.

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 3.3.6

La población de una comunidad era de 230 000 en 1990 y aumentó a una tasa creciente en los siguientes 5 años, hasta llegar al nivel de 300 000 en 1995. Luego continuó aumentando, pero a una tasa decreciente, hasta que llegó a 350 000 en 2002. Después de esto la población disminuyó a una tasa decreciente durante los siguientes 3 años y llegó a 320 000. A partir de ese momento continuará decreciendo a una tasa creciente aproximándose a los 280 000 a largo plazo. Represente esta información en forma gráfica.

Solución

Sea $P(t)$ la población de la comunidad t años después del año base de 1990, donde P se mide en unidades de 10 000 personas. Como la población se incrementa a un tasa creciente los siguientes 5 años, de 230 000 a 300 000, la gráfica de $P(t)$ sube de (0, 23) a (5, 30) y es cóncava hacia arriba para $0 < t < 5$. La población continúa en aumento hasta el 2002, pero a una tasa decreciente hasta que llega a un valor máximo de 350 000. Es decir, la gráfica continúa subiendo de (5, 30) hasta un punto máximo en (12, 35), pero es cóncava hacia abajo. Como la gráfica cambia de concavidad en $x = 5$ (de arriba hacia abajo), tiene un punto de inflexión en (5, 30).

En los siguientes 3 años la población disminuye a una tasa decreciente, de manera que la gráfica de $P(t)$ es descendiente y cóncava hacia abajo, para $12 < t < 15$. Como la población continuará disminuyendo del nivel de 320 000 alcanzados en 2005, pero a una tasa creciente, la gráfica baja desde el punto (15, 32) para $t > 15$, pero es cóncava hacia arriba. El cambio de concavidad en $x = 15$ (de abajo hacia arriba) significa que (15, 32) es otro punto de inflexión.

La afirmación "la población decrece a una tasa creciente" para $t > 15$ significa que la población está cambiando a una tasa negativa, que es cada vez menos negativa cuando el tiempo aumenta. En otras palabras, la declinación en la población "se frena" después del 2005. Esto, junto con la afirmación que la población "se aproxima a 280 000 a largo plazo" sugiere que la curva de la población $y = P(t)$ "se aplana" y se aproxima a $y = 28$ de manera asintótica, cuando $t \to +\infty$.

En la tabla 3.2 se resumen estas observaciones y en la figura 3.33 se representan graficamente.

TABLA 3.2 Comportamiento de una población $P(t)$

Periodo	La función $P(t)$ es . . .	y la gráfica de $P(t)$ es . . .
$t = 0$	$P(0) = 23$	está en el punto (0, 23)
$0 < t < 5$	aumenta a una razón creciente	sube y es cóncava hacia arriba
$t = 5$	$P(5) = 30$	está en el punto de inflexión (5, 30)
$5 < t < 12$	aumenta a una razón decreciente	sube y es cóncava hacia abajo
$t = 12$	$P(12) = 35$	está en la cima (12, 35)
$12 < t < 15$	disminuye a una razón decreciente	baja y es cóncava hacia abajo
$t = 15$	$P(15) = 32$	está en el punto de inflexión (15, 32)
$t > 15$	disminuye a una razón creciente y gradualmente tiende a 28	baja y es cóncava hacia arriba, se aproxima asintóticamente a $y = 28$

www.FreeLibros.com

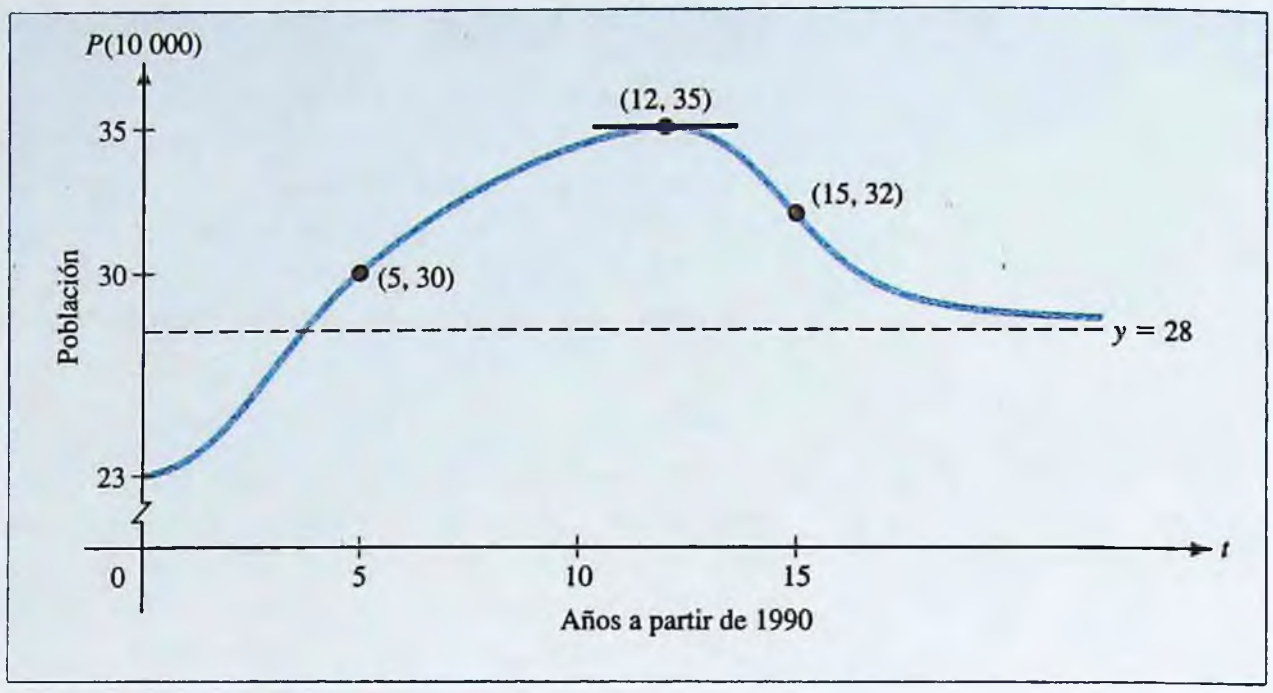
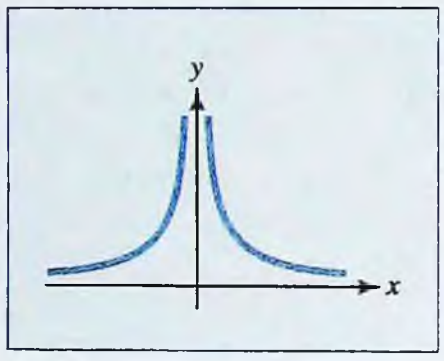


FIGURA 3.33 Gráfica de la función de población.

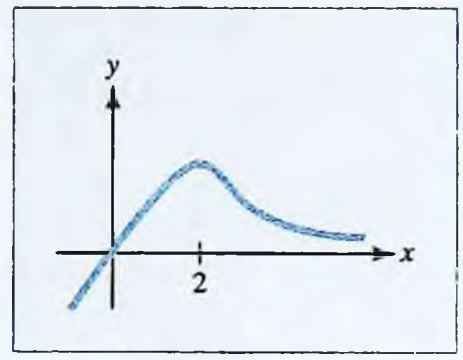
PROBLEMAS | 3.3

En los problemas 1 a 8 indique las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica dada.

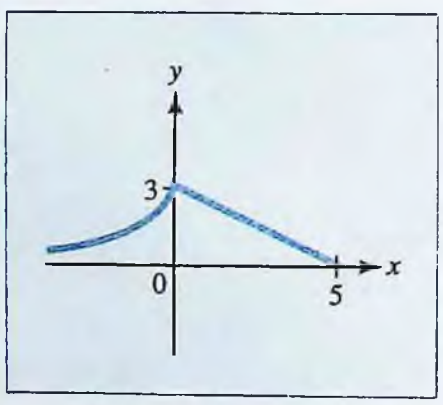
1.



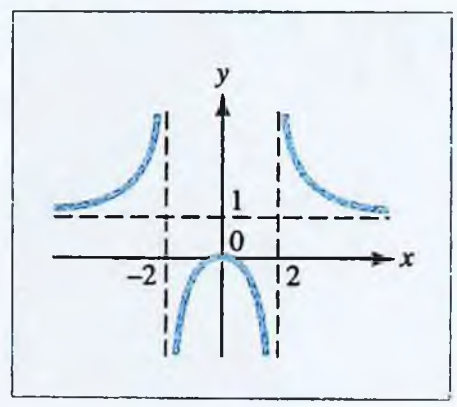
2.



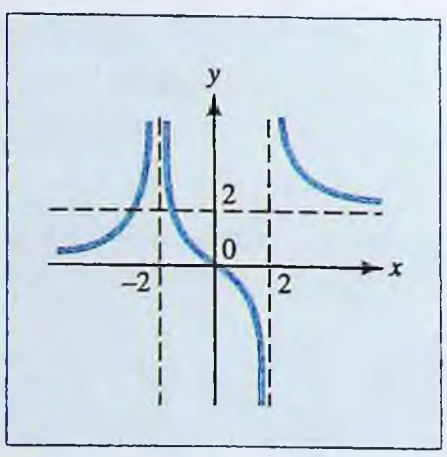
3.



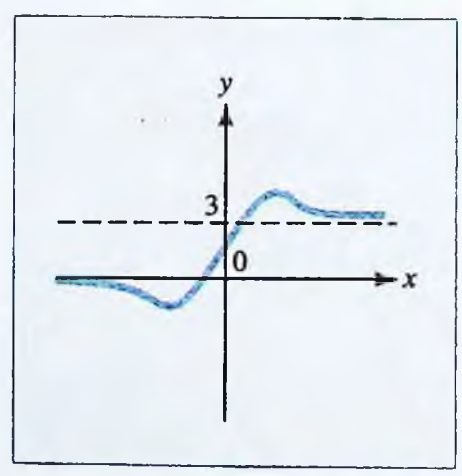
4.



5.

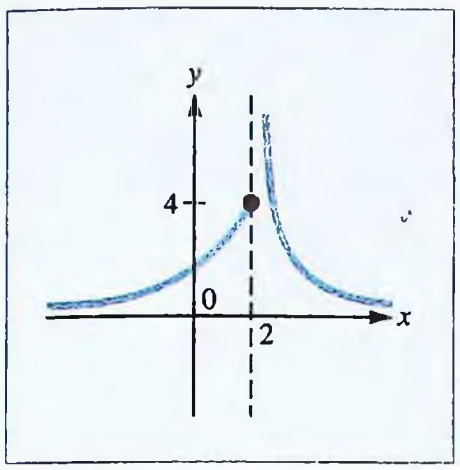


6.

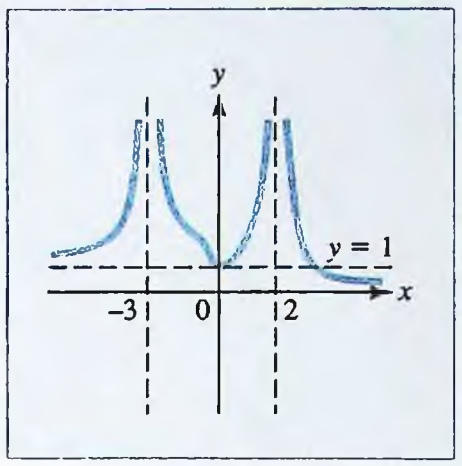


www.FreeLibros.com

7.



8.



En los problemas 9 a 16 encuentre todas las asíntotas verticales y horizontales en la gráfica de la función dada.

9. $f(x) = \dfrac{3x - 1}{x + 2}$

10. $f(x) = \dfrac{x}{2 - x}$

11. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$

12. $f(t) = \dfrac{t + 2}{t^2}$

13. $f(t) = \dfrac{t^2 + 3t - 5}{t^2 - 5t + 6}$

14. $g(x) = \dfrac{5x^2}{x^2 - 3x + 4}$

15. $h(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x - 1}$

16. $g(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}$

En los problemas 17 a 32 trace la gráfica de la función dada.

17. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

18. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 93$

19. $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2$

20. $f(x) = 3x^4 - 4x^2 + 3$

21. $f(x) = (2x - 1)^2(x^2 - 9)$

22. $f(x) = x^3 - 3x^4$

23. $f(x) = \dfrac{1}{2x + 3}$

24. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 5}$

25. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

26. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 2}$

27. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

28. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

29. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 1}$

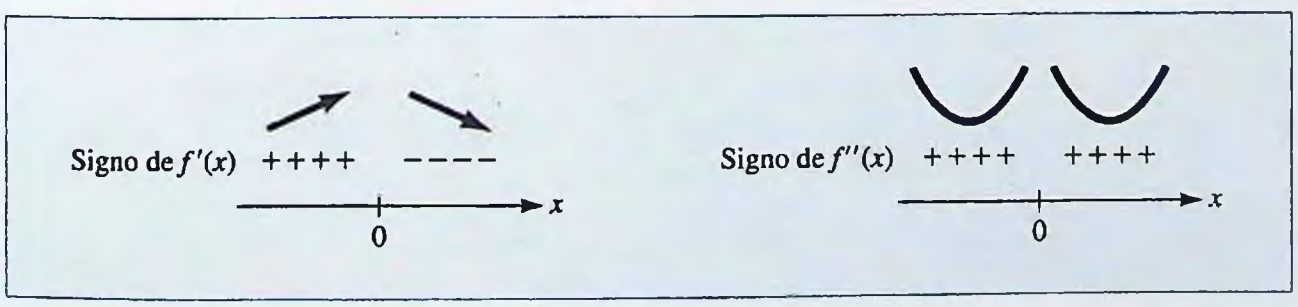
30. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}$

31. $f(x) = x^{3/2}$

32. $f(x) = x^{4/3}$

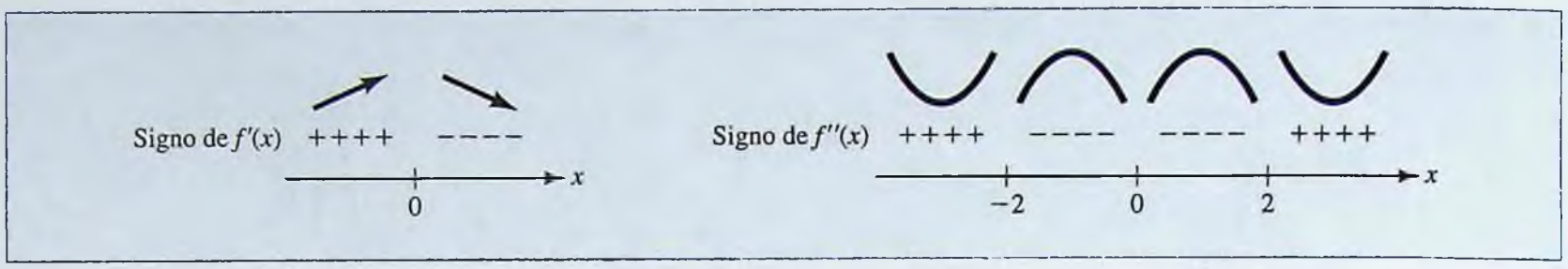
En los problemas 33 a 38 se dan los diagramas que indican los intervalos de crecimiento o decrecimiento y la concavidad.Trace una gráfica posible de una función con esas características.

33.

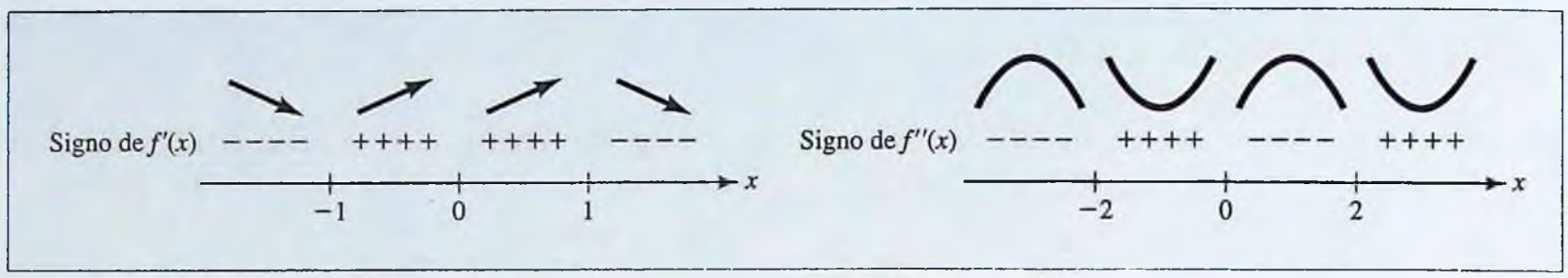


www.FreeLibros.com

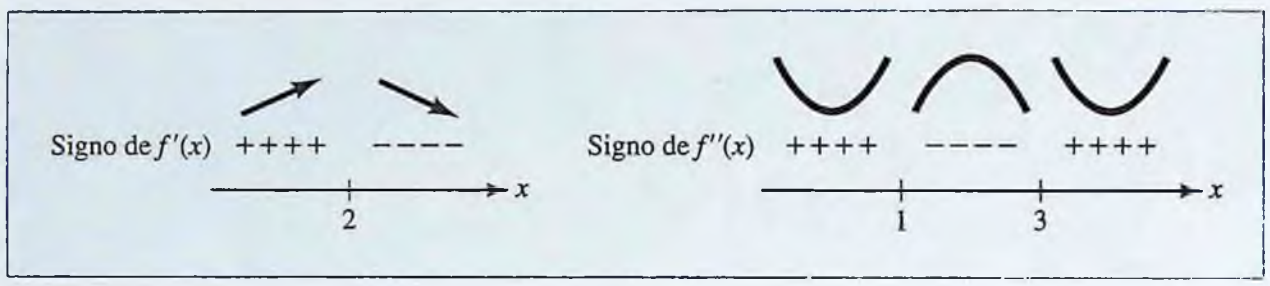
34.



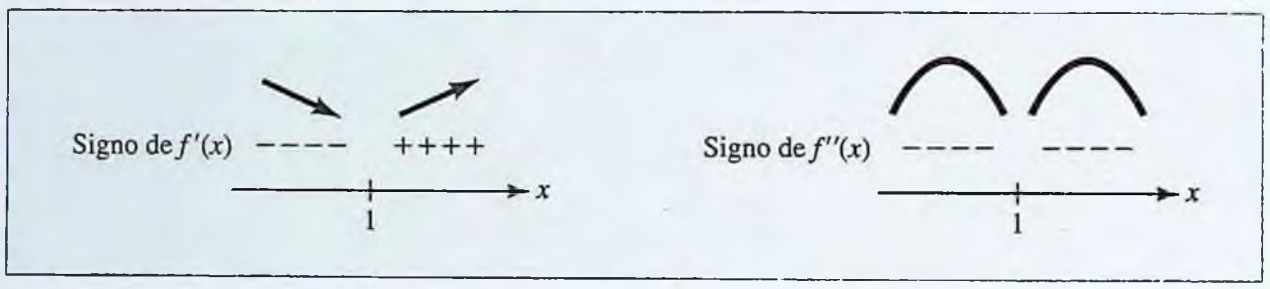
35.



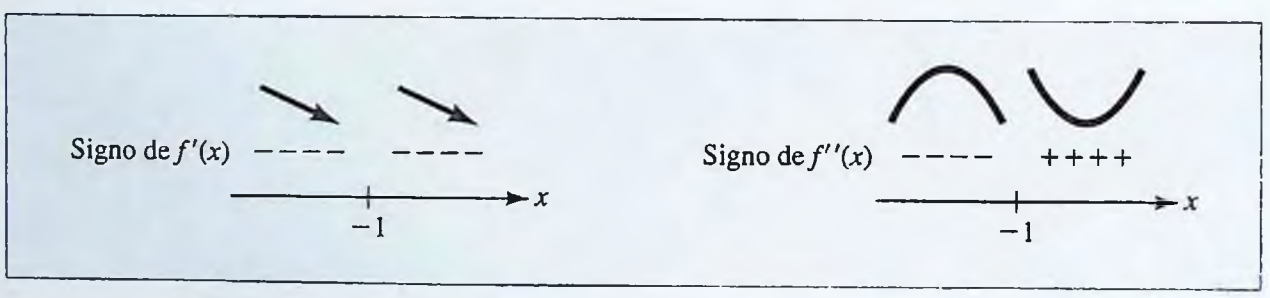
36.



37.



38.



En los problemas 39 y 40 se da la derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$ derivable. En cada caso:

a) Encuentre los intervalos de crecimiento y de decrecimiento para $f(x)$.
b) Determine los valores de x para los cuales la gráfica de $f(x)$ tiene máximos y mínimos relativos.
c) Encuentre $f'(x)$ y determine los intervalos de concavidad para la gráfica de $f(x)$.
d) ¿Para qué valores de x la gráfica de $f(x)$ tiene puntos de inflexión?

39. $f'(x) = x^3(x-2)^2$

40. $f'(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)^2}$

www.FreeLibros.com

41. Encuentre las constantes A y B de manera que la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{Ax - 3}{5 + Bx}$$

tenga $x = 2$ como una asíntota vertical y $y = 4$ como una asíntota horizontal. Una vez determinadas A y B, trace la gráfica de $f(x)$.

42. CONCENTRACIÓN DE UN MEDICAMENTO Se inyecta cierto medicamento a un paciente al mediodía y se le toman muestras de sangre a intervalos regulares para determinar la concentración de dicho medicamento en el organismo del paciente. Se observa que la concentración aumenta a una tasa creciente con respecto al tiempo hasta la 1 p.m., y en las siguientes 3 horas, continúa aumentando pero a una tasa decreciente, hasta que llega a una concentración máxima a las 4 p.m. Luego la concentración disminuye a una tasa decreciente hasta las 5 p.m., después de lo cual disminuye a un tasa creciente hasta llegar a cero. Trace una posible gráfica para la concentración del medicamento $C(t)$ como una función del tiempo.

43. POBLACIÓN DE BACTERIAS La población de una colonia de bacterias aumenta a una tasa creciente durante 1 hora, después de lo cual continúa aumentando, pero a una tasa que decrece gradualmente hasta cero. Trace una posible gráfica para la población $P(t)$ como una función del tiempo t.

44. EPIDEMIOLOGÍA Los epidemiólogos que estudian una enfermedad contagiosa observan que el número de nuevas personas contagiadas aumenta a una tasa creciente durante los primeros 3 años de la epidemia. En ese momento se introduce un nuevo medicamento y el número de personas infectadas disminuye a una tasa decreciente. Dos años después de su introducción, el medicamento comienza a perder efectividad. El número de nuevos casos continúa disminuyendo por 1 año más, pero a una tasa creciente, para luego aumentar nuevamente a una tasa creciente. Dibuje una gráfica posible para el número de nuevos casos $N(t)$ como una función del tiempo.

45. ADOPCIÓN DE UNA TECNOLOGÍA Dibuje una posible gráfica para el porcentaje de viviendas que adoptan un nuevo tipo de tecnología electrónica para el consumidor, si el porcentaje aumenta a una tasa creciente durante los primeros 2 años, después de los cuales la tasa de incremento disminuye de forma que la penetración de la tecnología en el mercado, se aproxima con el paso del tiempo a 90%.

46. PSICOLOGÍA EXPERIMENTAL Para estudiar la tasa a la cual aprenden los animales, un estudiante de psicología realizó un experimento de laboratorio en el que se soltaba una rata a través de un laberinto repetidamente. Suponga que el tiempo que necesitó la rata para atravesar el laberinto en el n-ésimo intento fue aproximadamente $f(n) = 3 + \frac{12}{n}$ minutos.

a) Dibuje la gráfica de la función $f(n)$.

b) ¿Qué porción de la gráfica es importante en la situación práctica considerada?

c) ¿Qué ocurre con la gráfica cuando n crece ilimitadamente? Interprete la respuesta en términos prácticos.

47. COSTO PROMEDIO El costo total para producir x unidades de cierto artículo es C miles de dólares, donde $C(x) = 3x^2 + x + 48$, y el costo promedio es

$$A(x) = \frac{C(x)}{x} = 3x + 1 + \frac{48}{x}$$

a) Encuentre todas las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de $A(x)$.

b) Observe que a medida que x crece más y más, el término $48/x$ en A/x se hace más y más pequeño. ¿Qué indica esto acerca de la relación entre la curva del costo promedio $y = A(x)$ y la recta $3x + 1$?

c) Trace la gráfica de $A(x)$ incorporando el resultado del inciso *b*) en su dibujo. [*Nota*: La recta $y = 3x + 1$ es recibe el nombre de *asíntota oblicua* (o *inclinada*) de la gráfica.]

48. COSTO DE INVENTARIO Un fabricante estima que si cada envío de materia prima contiene x unidades, el costo total en dólares de obtener y almacenar el suministro anual de materias primas será $C(x) = 2x + \frac{80\,000}{x}$.

a) Encuentre todas las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de $C(x)$.

b) Observe que cuando x crece más y más, el término $\frac{80\,000}{x}$ en $C(x)$ se hace más y más pequeño. ¿Qué se puede decir acerca de la relación entre la curva de costos $y = C(x)$ y la recta $y = 2x$?

c) Trace la gráfica de $C(x)$, incorporando el resultado del inciso *b*) en su dibujo. [*Nota*: La recta $y = 2x$ es denominada *asíntota oblicua* (o *inclinada*) de la gráfica].

49. COSTO DE DISTRIBUCIÓN El número de horas-trabajador W requerido para distribuir nuevos directorios telefónicos a x% de las viviendas en cierta comunidad se modela por la función

$$W(x) = \frac{200x}{100 - x}$$

www.FreeLibros.com

a) Dibuje la gráfica de $W(x)$.
b) Suponga que sólo se dispone de 1 500 horas-trabajador para distribuir los directorios telefónicos. ¿Qué porcentaje de viviendas no recibirán sus nuevos directorios?

50. INMUNIZACIÓN Se supone que durante un programa nacional para inmunizar a la población contra cierta forma de influenza, los funcionarios de salud pública encontraron que el costo de vacunar al x por ciento de la población susceptible sería aproximadamente

$$C(x) = \frac{1.7x}{100 - x}$$

millones de dólares.
a) Trace la gráfica de la función de costo $C(x)$.
b) Suponga que se dispone de 40 millones de dólares para suministrar la vacuna. ¿Qué porcentaje de la población susceptible no se vacunará?

51. ENCUESTAS POLÍTICAS En una encuesta solicitada por un político se estima que t días después de que él se declaró a favor de un proyecto controversial, el porcentaje de sus simpatizantes (aquellos que lo apoyan en su posición frente al proyecto) que todavía le dan su apoyo está dado por

$$S(t) = \frac{100(t^2 - 3t + 25)}{t^2 + 7t + 25}$$

La votación se va a efectuar en 10 días después de que anuncie su posición.
a) Trace la gráfica $S(t) = 0 \leq t \leq 10$.
b) ¿Cuándo tendrá el político el apoyo en su nivel más bajo? ¿Cuál es su nivel mínimo de apoyo?
c) La derivada $S'(t)$ puede considerarse como una tasa de aprobación. ¿Es positiva o negativa su tasa de aprobación en el momento de la votación? ¿Estará aumentando o disminuyendo la tasa de aprobación en ese momento? Interprete sus resultados.

52. PUBLICIDAD Un fabricante de motocicletas estima que si se gastan x miles de dólares en publicidad, entonces para $x > 0$ se venderán

$$M(x) = 2\,300 + \frac{125}{x} - \frac{500}{x^2}$$

motocicletas.
a) Dibuje la gráfica de la función de ventas $M(x)$.
b) ¿Qué nivel de gastos en publicidad da como resultado las máximas ventas? ¿Cuál es el nivel máximo de ventas?

53. ADMINISTRACIÓN DE COSTOS Una compañía utiliza un camión para entregar sus productos. Para estimar los costos, el gerente modela el consumo de gasolina mediante la función

$$G(x) = \frac{1}{2\,000}\left(\frac{800}{x} + 5x\right)$$

gal/milla, suponiendo que se maneja el camión a velocidad constante de x millas por hora, para $x \geq 5$. Al conductor se le paga a \$18 la hora, por un recorrido de 400 millas, y la gasolina cuesta \$1.89 por galón. Las normas de la autopista exigen que $30 \leq x \leq 65$.
a) Encuentre una expresión para el costo total del viaje $C(x)$. Trace la gráfica de $C(x)$ para el intervalo de velocidad permitido $30 \leq x \leq 65$.
b) ¿Qué velocidad permitida minimiza el costo total del viaje? ¿Cuál es el costo total mínimo?

54. Sea $f(x) = x^{1/3}(x - 4)$.
a) Encuentre $f'(x)$ y determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento para $f(x)$. Halle todos los extremos relativos de la gráfica de $f(x)$.
b) Encuentre $f''(x)$ y determine los intervalos de diferente concavidad para $f(x)$. Halle todos los puntos de inflexión en la gráfica de $f(x)$.
c) Encuentre todas las intersecciones de la gráfica de $f(x)$ con los ejes de coordenadas. ¿Tiene asíntotas la gráfica?
d) Trace la gráfica de $f(x)$.

55. Repita el problema 54 para la función

$$f(x) = x^{2/3}(2x - 5).$$

56. Repita el problema 54 para la función

$$f(x) = \frac{x + 9.4}{25 - 1.1x - x^2}$$

57. Sea $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$ y sea $g(x) = \dfrac{x - 1.01}{x^2 - 1}$.
a) Utilice una calculadora graficadora para trazar la gráfica de $f(x)$. ¿Qué sucede en $x = 1$?
b) Trace la gráfica de $g(x)$. ¿Qué pasa ahora en $x = 1$?

www.FreeLibros.com

SECCIÓN 3.4 | Optimización

Ya se han analizado diferentes situaciones donde fueron usados los métodos del cálculo para determinar el valor máximo o mínimo de la función de interés (por ejemplo, máxima utilidad o mínimo costo). En la mayoría de tales problemas de optimización, el objetivo es hallar el máximo o el mínimo absoluto de una cierta función en un intervalo en particular. El máximo absoluto de una función en un intervalo es el mayor valor de la función en ese intervalo, mientras que el mínimo absoluto es el menor valor. A continuación se enunciará una definición de extremos absolutos.

Máximos y mínimos absolutos de una función ▣ Sea f una función definida en un intervalo I, que contiene el número c. Entonces,

$f(c)$ es el *máximo absoluto* de f en I si $f(c) \geq f(x)$ para toda x de I

$f(c)$ es el *mínimo absoluto* de f en I si $f(c) \leq f(x)$ para toda x de I

En conjunto, los máximos y mínimos absolutos se denominan *extremos absolutos*.

Los extremos absolutos a veces coinciden con los extremos relativos, pero no siempre es así. Por ejemplo, en la figura 3.34 el máximo absoluto y el máximo relativo en el intervalo $a \leq x \leq b$ es el mismo, pero el mínimo absoluto se alcanza en el extremo izquierdo $x = a$.

¡EXPLORE!

Utilice una calculadora graficadora para dibujar $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x+2}}$ con la pantalla modificada a [0, 4.7]1 por [0, 60]5. Utilice la instrucción Trace u otras instrucciones de su calculadora para hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo [1, 3].

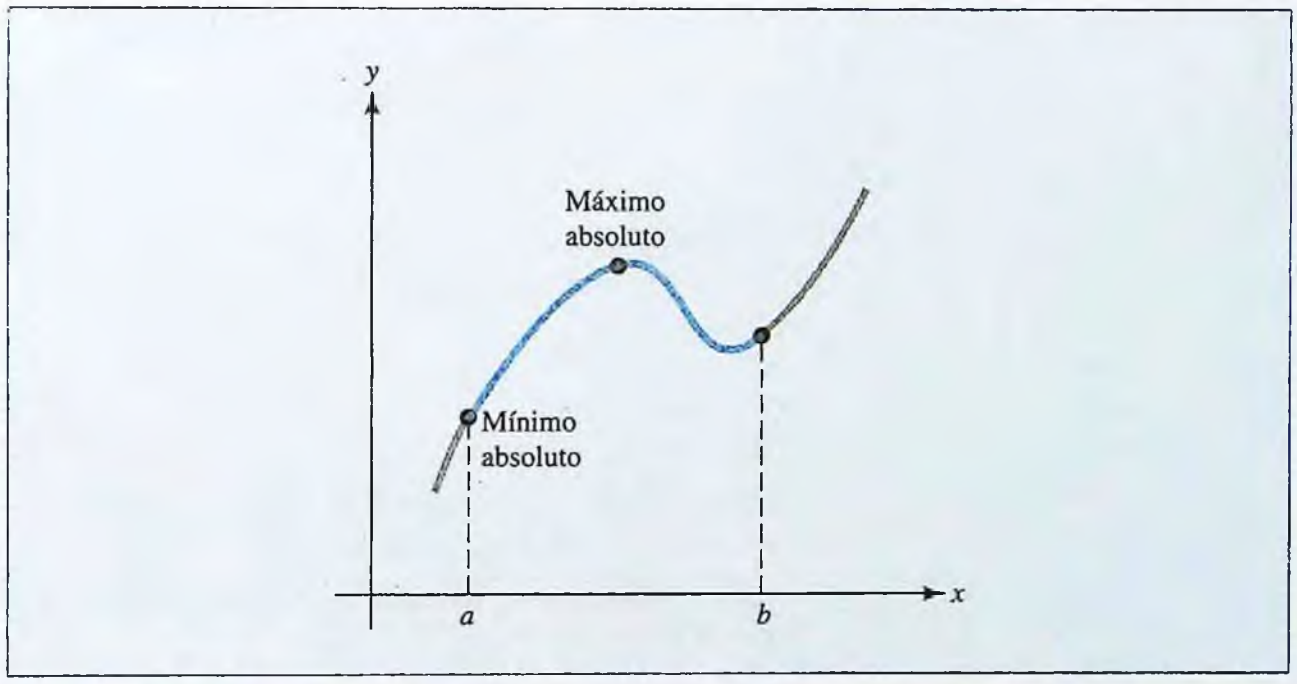


FIGURA 3.34 Extremos absolutos.

En esta sección se estudiará cómo hallar los extremos absolutos de las funciones en un intervalo. Para comenzar se consideran intervalos de la forma $a \leq x \leq b$, que son "cerrados", porque incluyen ambos extremos, a y b. Se puede demostrar que una función continua en ese intervalo tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en el intervalo. Además, cada extremos absoluto puede ocurrir en cualquiera de los extremos del intervalo, (en a o en b), o en un número crítico interior c, entre a y b (es decir, $a < c < b$)(figura 3.35).

Propiedad del valor extremo ▣ Una función $f(x)$ que es continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ tiene su extremo absoluto en el intervalo, ya sea en un extremo del intervalo (a o b), o en un número crítico c, tal que $a < c < b$.

www.FreeLibros.com

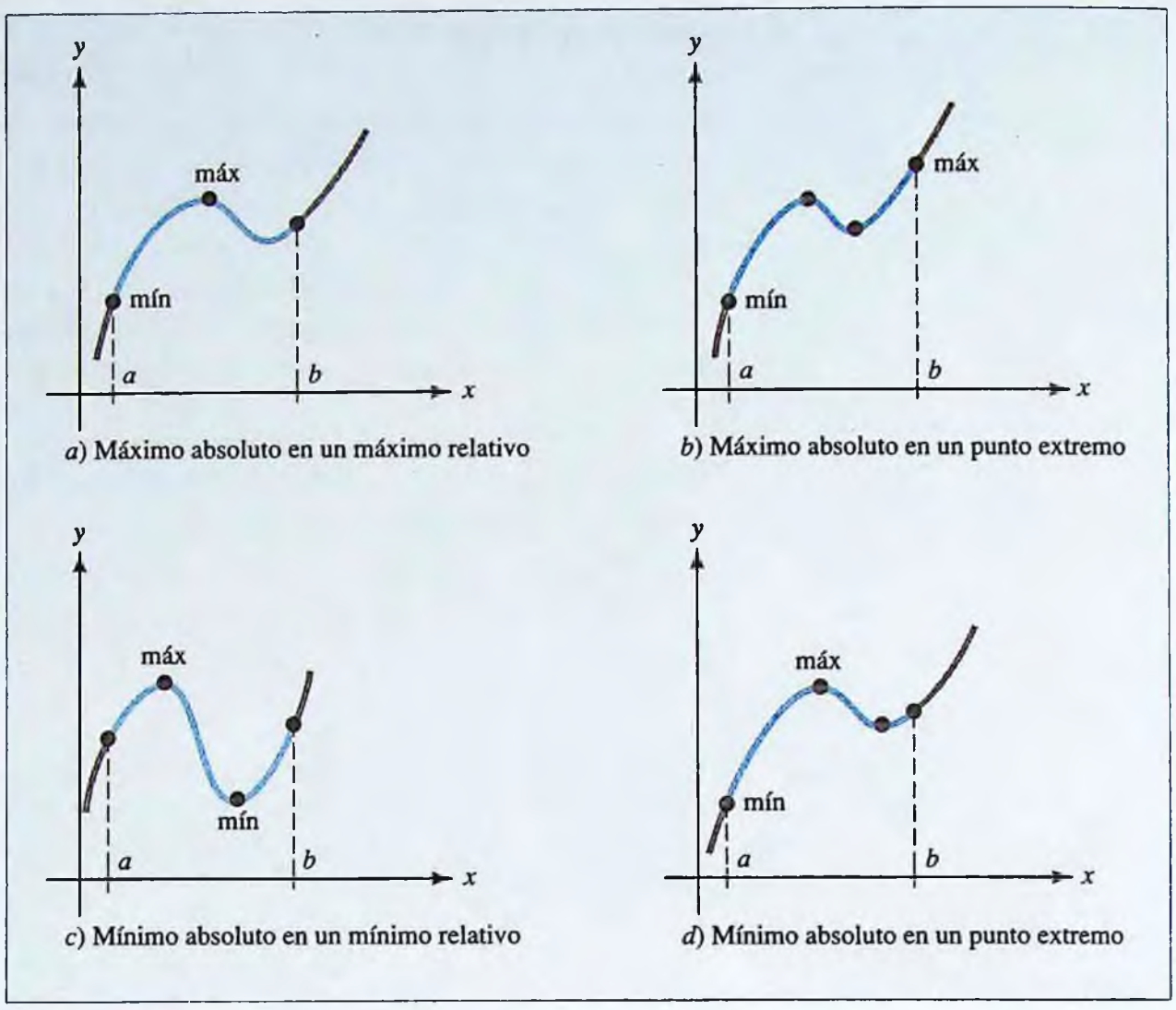


FIGURA 3.35 Extremos absolutos de una función continua en $a \leq x \leq b$.

Con la propiedad del valor extremo se pueden hallar los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ utilizando el siguiente procedimiento directo.

Cómo hallar los extremos absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado $a \leq x \leq b$

Paso 1. Encuentre todos los números críticos de f en el intervalo abierto $a < x < b$.

Paso 2. Calcule $f(x)$ en los números críticos encontrados en el paso 1 y en los extremos $x = a$ y $x = b$.

Paso 3. **Interpretación:** Los valores más grandes y más pequeños encontrados en el paso 2 son, respectivamente, los valores máximo absoluto y mínimo absoluto de $f(x)$ en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$.

Este procedimiento se ilustra en los ejemplos 3.4.1 a 3.4.3.

www.FreeLibros.com

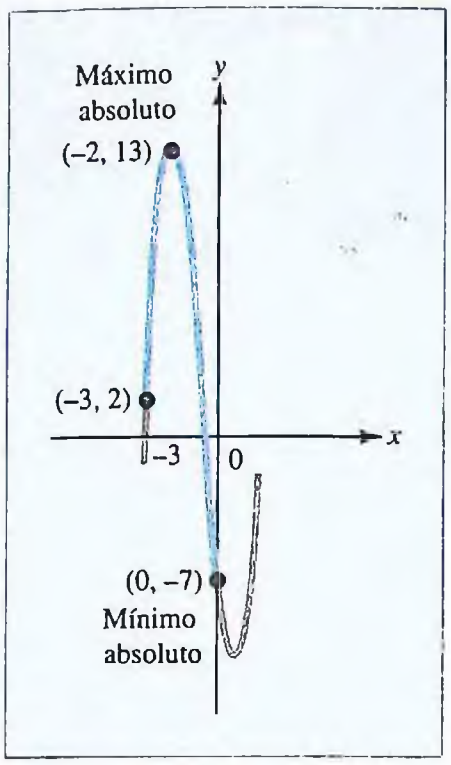


FIGURA 3.36 El extremo absoluto en $-3 \leq x \leq 0$ para $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$.

EJEMPLO | 3.4.1

Encuentre el máximo absoluto y el mínimo absoluto de la función

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$$

en el intervalo $-3 \leq x \leq 0$.

Solución

De la derivada

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x + 2)(x - 1)$$

se tiene que los números críticos son $x = -2$ y $x = 1$. De éstos, sólo $x = -2$ está en el intervalo $-3 \leq x \leq 0$. Calcule $f(x)$ en $x = -2$ y en los extremos $x = -3$ y $x = 0$.

$$f(-2) = 13 \qquad f(-3) = 2 \qquad f(0) = -7$$

Compare estos valores para concluir que el máximo absoluto de f en el intervalo $-3 \leq x \leq 0$ es $f(-2) = 13$ y que el mínimo absoluto es $f(0) = -7$.

Observe que no se tuvo que clasificar los puntos críticos ni dibujar la gráfica para ubicar los extremos absolutos. El dibujo de la figura 3.36 se presenta sólo como ilustración.

¡EXPLORE!

Refiérase al ejemplo 3.4.2. Debido al aumento en el límite de velocidad, la velocidad al cruzar la salida es ahora

$$S_1(t) = t^3 - 10.5t^2 + 30t + 25.$$

Grafique $S(t)$ y $S_1(t)$ utilizando la pantalla [0, 6]1 por [20, 60]5. ¿En qué instante entre 1 p.m. y 6 p.m. se alcanza la máxima velocidad utilizando $S_1(t)$? ¿En qué instante se alcanza la mínima velocidad?

EJEMPLO | 3.4.2

Durante varias semanas, el departamento de autopistas ha estado registrando la velocidad del flujo de tráfico en una vía rápida que pasa por cierta salida del centro de la ciudad. Los datos sugieren que entre la 1:00 y las 6:00 p.m., en un día normal de la semana, la velocidad del tráfico en la salida es aproximadamente $S(t) = t^3 - 10.5t^2 + 30t + 20$ millas por hora, donde t es el número de horas después del mediodía. ¿En qué instante entre la 1:00 p.m. y las 6:00 p.m. el tráfico se mueve más rápido y en qué instante se mueve más lentamente?

Solución

El objetivo es hallar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de la función $S(t)$ en el intervalo $1 \leq t \leq 6$. De la derivada

$$S'(t) = 3t^2 - 21t + 30 = 3(t^2 - 7t + 10) = 3(t - 2)(t - 5)$$

se tienen los números críticos $t = 2$ y $t = 5$, ambos están en el intervalo $1 \leq t \leq 6$.

Calcule $S(t)$ para estos valores de t y en los extremos $t = 1$ y $t = 6$ para obtener

$$S(1) = 40.5 \qquad S(2) = 46 \qquad S(5) = 32.5 \qquad S(6) = 38$$

Como el mayor de estos valores es $S(2) = 46$ y el menor es $S(5) = 32.5$, se puede concluir que el tráfico se mueve más rápido a las 2:00 p.m. cuando la velocidad es de 46 millas por hora, y más lento a las 5:00 p.m. cuando su velocidad es de 32.5 millas por hora. Como referencia se muestra la gráfica de S en la figura 3.37.

www.FreeLibros.com

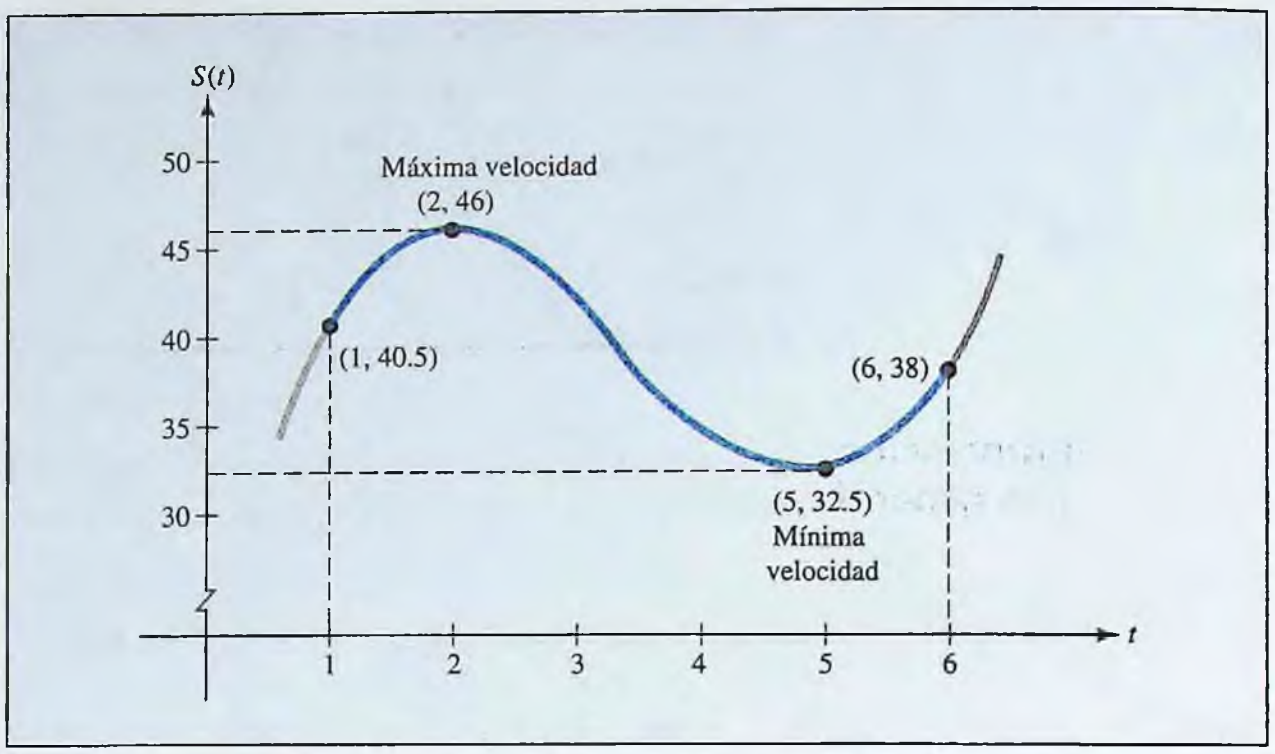


FIGURA 3.37 Velocidad del tráfico $S(t) = t^3 - 10.5t^2 + 30t + 20$.

EJEMPLO | 3.4.3

Cuando alguien tose, el radio de la tráquea disminuye afectando la velocidad del aire en la tráquea. Si r_0 es el radio normal de la tráquea, la relación entre la velocidad S del aire y el radio r de la tráquea durante el acceso de tos está dada por una función de la forma $S(r) = ar^2(r_0 - r)$, donde a es una constante positiva.[3] Encuentre el radio r para el cual la velocidad del aire es la mayor.

Solución

El radio r de la tráquea contraída no puede ser mayor que el radio normal r_0 ni menor que cero. Por tanto, el objetivo es hallar el máximo absoluto de $S(r)$ en el intervalo $0 \leq r \leq r_0$.

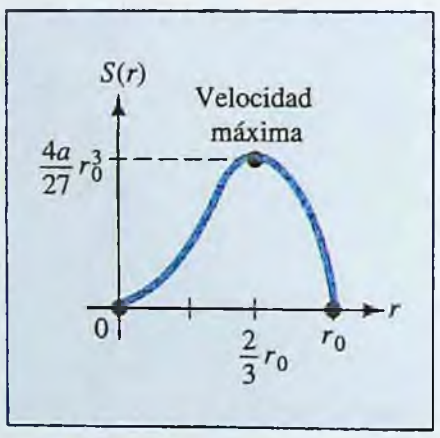


FIGURA 3.38 La velocidad del aire durante un acceso de tos
$S(r) = ar^2(r_0 - r)$.

Primero derive $S(r)$ con respecto a r utilizando la regla del producto y factorizando la derivada como sigue (se observa que a y r_0 son constantes):

$$S'(r) = -ar^2 + (r_0 - r)(2ar) = ar[-r + 2(r_0 - r)] = ar(2r_0 - 3r)$$

Luego iguale a cero la derivada factorizada y resuelva para obtener los números críticos:

$$ar(2r_0 - 3r) = 0$$

$$r = 0 \qquad \text{o} \qquad r = \frac{2}{3}r_0$$

Ambos valores de r están en el intervalo $0 \leq r \leq r_0$, y de hecho, uno es un punto extremo del intervalo. Calcule $S(r)$ para estos dos valores de r y para el otro extremo, $r = r_0$. Así obtiene

$$S(0) = 0 \qquad S\left(\frac{2}{3}r_0\right) = \frac{4a}{27}r_0^3 \qquad S(r_0) = 0$$

[3] Philip M. Tuchinsky, "The Human Cough", *UMAP Modules 1976: Tools for Teaching*. Consortium for Mathematics and Its Application, Inc., Lexington, MA, 1977.

www.FreeLibros.com

Comparando estos valores se concluye que la velocidad del aire es máxima cuando el radio de la tráquea contraída es $\frac{2}{3}r_0$; es decir, cuando es dos tercios del radio de la tráquea no contraída.

En la figura 3.38 se muestra una gráfica de la función $S(r)$. Observe que, evidentemente las intersecciones de la gráfica con el eje r corresponden a los factores de $S(r) = ar^2(r_0 - r)$. Note también que la gráfica tiene una tangente horizontal cuando $r = 0$, lo cual refleja el hecho de que $S'(0) = 0$.

Optimización más general

Cuando el intervalo en donde se desea maximizar o minimizar una función continua no es de la forma $a \leq x \leq b$, entonces no se puede aplicar el procedimiento ilustrado en el ejemplo 3.4.1. Esto se debe a que no hay garantía de que la función tenga un máximo absoluto o un mínimo absoluto en dicho intervalo. Por otra parte, si existe un extremo absoluto y la función es continua en el intervalo, entonces ese extremo absoluto se alcanza en un extremo relativo o en un punto final contenido en el intervalo. En la figura 3.39 se ilustran varias posibilidades para funciones en intervalos no acotados.

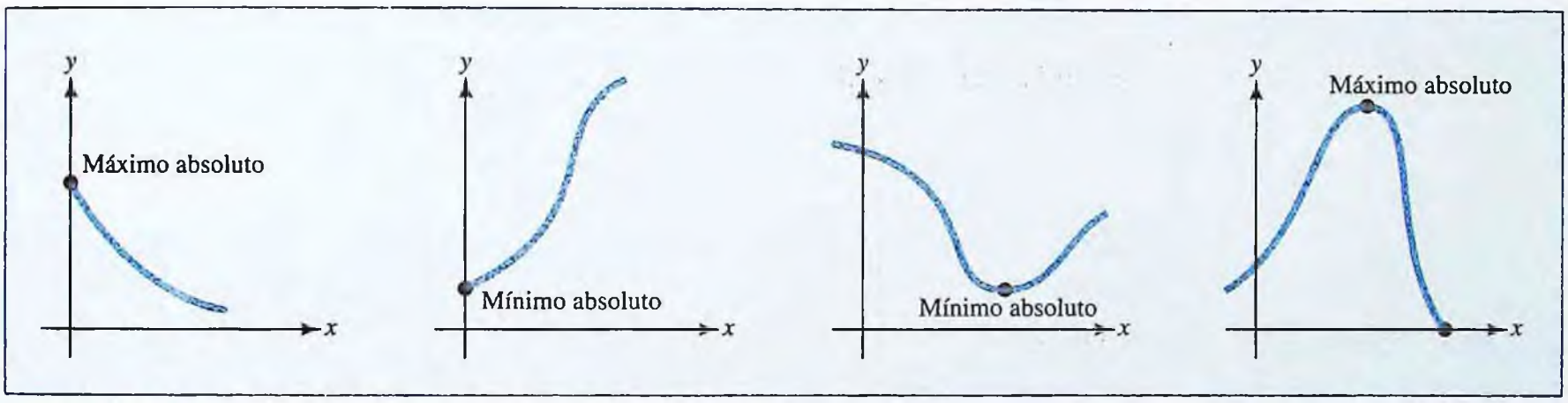


FIGURA 3.39 Extremos de funciones definidas en intervalos no acotados.

Para encontrar los extremos absolutos de una función continua en un intervalo que no es de la forma $a \leq x \leq b$, se evalúa la función en todos los puntos críticos y puntos finales contenidos en el intervalo. Sin embargo, antes de llegar a una conclusión definitiva, se debe averiguar si la función tiene realmente extremos relativos en el intervalo. Una forma de hacerlo es usar la primera derivada para determinar dónde la función es creciente y dónde es decreciente, luego trazar la gráfica. La técnica se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO | 3.4.4

Encuentre el máximo absoluto y el mínimo absoluto, (si los hay) de la función $f(x) = x^2 + \frac{16}{x}$ en el intervalo $x > 0$.

Solución

La función es continua en el intervalo $x > 0$ ya que su única discontinuidad ocurre en $x = 0$. La derivada es

$$f'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2} = \frac{2(x^3 - 8)}{x^2}$$

www.FreeLibros.com

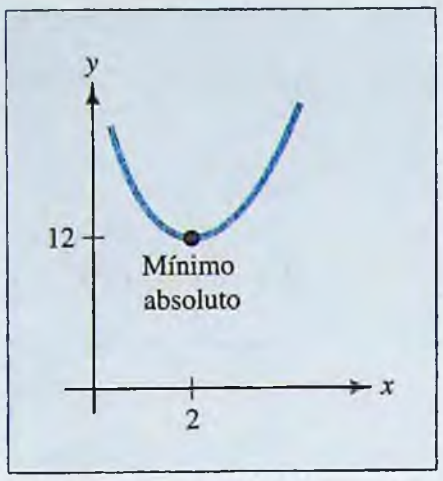


FIGURA 3.40 La función $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$ en el intervalo $x > 0$.

que es cero cuando

$$x^3 - 8 = 0 \qquad x^3 = 8 \qquad \text{o} \qquad x = 2$$

Como $f'(x) < 0$ para $0 < x < 2$ y $f'(x) > 0$ para $x > 2$, la gráfica de f es decreciente para $0 < x < 2$ y creciente para $x > 2$, como se muestra en la figura 3.40. De ahí se sigue que

$$f(2) = 2^2 + \frac{16}{2} = 12$$

es el mínimo absoluto de f en el intervalo $x > 0$ y no hay ningún máximo absoluto.

El procedimiento ilustrado en el ejemplo 3.4.4 se puede usar cuando se desea hallar el mayor o el menor valor de una función f que es continua en un intervalo I, donde ella tiene *exactamente un* número crítico c. En particular, si se satisface esta condición y $f(x)$ tiene un máximo (mínimo) *relativo* en $x = c$, también tiene allí un máximo (mínimo) *absoluto*. Para entender por qué sucede esto suponga que la gráfica tiene un mínimo relativo en $x = c$. Entonces la gráfica siempre es decreciente antes de c y siempre es creciente después de c, porque otro cambio de dirección requeriría de un segundo punto crítico (véase la figura 3.41). Así, el mínimo relativo es también el mínimo absoluto. Estas observaciones sugieren que cualquier criterio para extremos relativos se vuelve criterio para extremos absolutos en este caso especial. A continuación se presenta el criterio de la segunda derivada para extremos absolutos.

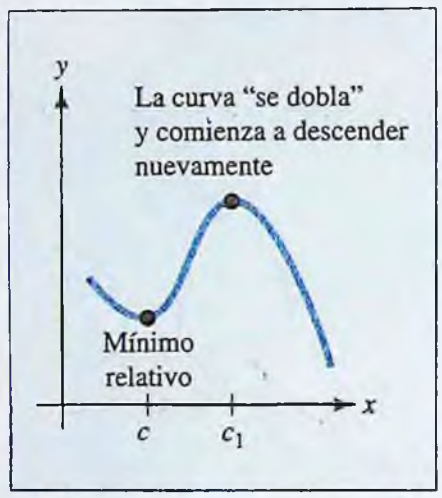


FIGURA 3.41 El mínimo relativo no es el mínimo absoluto porque hay otro punto crítico.

Criterio de la segunda derivada para extremos absolutos ■ Suponga que $f(x)$ es continua en un intervalo I, donde $x = c$ es el único número crítico, y que $f'(c) = 0$. Entonces,

si $f''(c) > 0$, el mínimo absoluto de $f(x)$ en I es $f(c)$

si $f''(c) < 0$, el máximo absoluto de $f(x)$ en I es $f(c)$

En el ejemplo 3.4.5 se ilustra cómo utilizar en la práctica el criterio de la segunda derivada para extremos absolutos.

EJEMPLO | 3.4.5

Un fabricante estima que cuando se producen q unidades de cierto artículo cada mes, el costo total es $C(q) = 0.4q^2 + 3q + 40$ miles de dólares, y las q unidades se pueden vender a un precio de $p(q) = 22.2 - 1.2q$ dólares por unidad.

a) Determine el nivel de producción que proporciona la máxima utilidad. ¿Cuál es la máxima utilidad?

b) ¿En qué nivel de producción se minimiza el costo promedio por unidad $A(q) = \dfrac{C(q)}{q}$?

c) ¿En qué nivel de producción el costo promedio es igual al costo marginal $C'(q)$?

Solución

a) El ingreso es

$$R(q) = qp(q) = q(22.2 - 1.2q) = -1.2q^2 + 22.2q$$

www.FreeLibros.com

miles de dólares, entonces la utilidad es

$$P(q) = R(q) - C(q) = -1.2q^2 + 22.2q - (0.4q^2 + 3q + 40)$$
$$= -1.6q^2 + 19.2q - 40$$

miles de dólares. Se tiene que

$$P'(q) = -1.6(2q) + 19.2 = -3.2q + 19.2$$
$$= 0$$

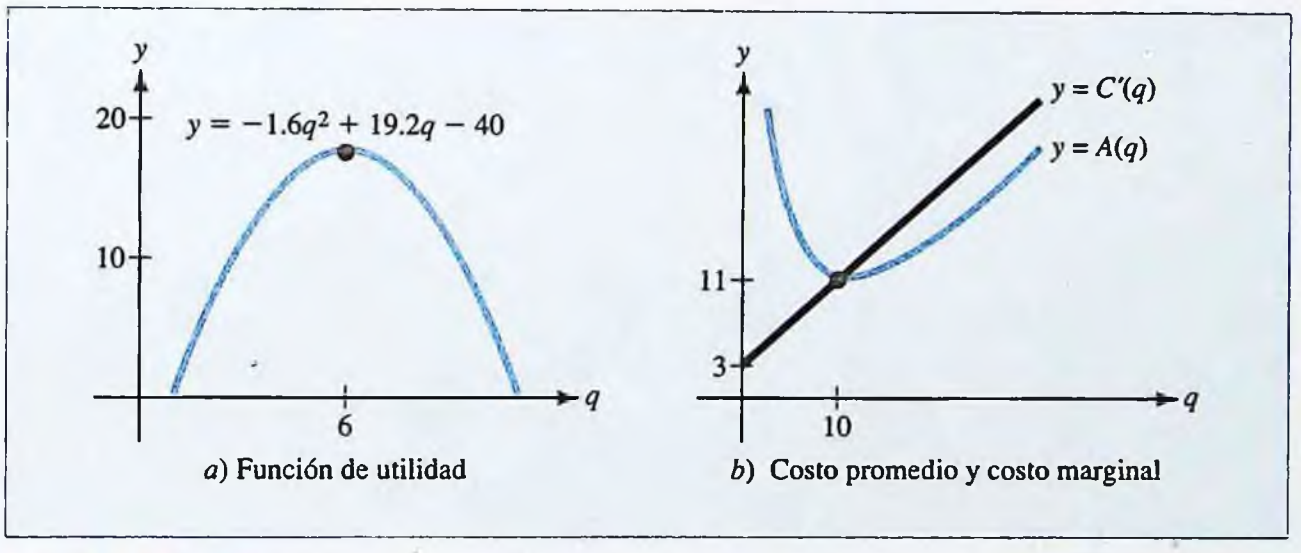
cuando

$$-3.2q + 19.2 = 0$$
$$q = \frac{19.2}{3.2} = 6$$

Como $P''(q) = -3.2$, se sigue que $P''(6) < 0$, y el criterio de la segunda derivada indica que la utilidad máxima se alcanza cuando se producen $q = 6$ (miles) unidades. La máxima utilidad es

$$P(6) = -1.6(6)^2 + 19.2(6) - 40$$
$$= 17.6$$

miles de dólares ($17 600). En la figura 3.42*a* se muestra la gráfica de la función de utilidad.



a) Función de utilidad *b*) Costo promedio y costo marginal

FIGURA 3.42 Gráficas de utilidad, costo promedio y costo marginal para el ejemplo 3.4.5.

b) El costo promedio es

$$A(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{0.4q^2 + 3q + 40}{q} \qquad \frac{\textit{miles de dólares}}{\textit{miles de unidades}}$$
$$= 0.4q + 3 + \frac{40}{q} \qquad \frac{\textit{dólares}}{\textit{unidad}}$$

para $q > 0$ (el nivel de producción no puede ser negativo o cero). Se tiene que

$$A'(q) = 0.4 - \frac{40}{q^2} = \frac{0.4q^2 - 40}{q^2}$$

el cual es 0 para $q > 0$ sólo cuando $q = 10$. Como

$$A''(q) = \frac{80}{q^3} > 0 \quad \text{cuando } q > 0$$

www.FreeLibros.com

entonces, del criterio de la segunda derivada para extremos absolutos se deduce que el costo promedio $A(q)$ se minimiza cuando $q = 10$ (mil) unidades. El costo promedio mínimo es

$$A(10) = 0.4(10) + 3 + \frac{40}{10} = 11 \qquad \textit{dólares/unidad}$$

c) El costo marginal es $C'(q) = 0.8q + 3$, y es igual al costo promedio cuando

$$0.8q + 3 = 0.4q + 3 + \frac{40}{q}$$

$$0.4q = \frac{40}{q}$$

$$0.4q^2 = 40$$

$$q = 10 \text{ (mil) unidades}$$

que es igual al nivel de producción óptimo del inciso *b*). En la figura 3.42*b* se muestran las gráficas del costo marginal $C'(q)$ y del costo promedio $A(q) = \dfrac{C(q)}{q}$.

Dos principios generales del análisis marginal

Si el ingreso obtenido por la venta de q unidades es $R(q)$, y el costo de producir esas unidades es $C(q)$, entonces la utilidad es $P(q) = R(q) - C(q)$. Como

$$P'(q) = [R(q) - C(q)]' = R'(q) - C'(q)$$

se sigue que $P'(q) = 0$ cuando $R'(q) = C'(q)$. Si también es cierto que $P''(q) < 0$, o, lo que es lo mismo, $R''(q) < C''(q)$, entonces la utilidad será máxima.

Criterio del análisis marginal para la utilidad máxima ■ La utilidad $P(q) = R(q) - C(q)$ es máxima en un nivel de producción q, donde el ingreso marginal es igual al costo marginal, y la razón de cambio del costo marginal excede a la razón de cambio del ingreso marginal; es decir, donde

$$R'(q) = C'(q) \qquad \text{y} \qquad R''(q) < C''(q)$$

Como muestra, en el ejemplo 3.4.5 el ingreso es $R(q) = -1.2q^2 + 22.2q$ y el costo es $C(q) = 0.4q^2 + 3q + 40$; de manera que el ingreso marginal es $R'(q) = -2.4q + 22.2$ y el costo marginal es $C'(q) = 0.8q + 3$. Así, el ingreso marginal es igual al costo marginal cuando

$$R'(q) = C'(q)$$

$$-2.4q + 22.2 = 0.8q + 3$$

$$3.2q = 19.2$$

$$q = 6$$

que es el nivel de producción correspondiente a la utilidad máxima, ya determinado en el inciso *a*) del ejemplo 3.4.5. Observe que también se satisface $R'' < C''$, ya que $R'' = -2.4$ y $C'' = 0.8$.

En el inciso *c*) del ejemplo 3.4.5, se halló que el costo marginal es igual al costo promedio en el nivel de producción donde el costo promedio es mínimo. Esto, tampoco es una casualidad. Para comprender por qué, suponga que $C(q)$ es el costo de producir q

www.FreeLibros.com

unidades de un artículo. Luego el costo promedio por unidad es $A(q) = \dfrac{C(q)}{q}$, y al aplicar la regla del cociente, se obtiene

$$A'(q) = \frac{qC'(q) - C(q)}{q^2}$$

Así, $A'(q) = 0$ cuando el numerador del miembro derecho es cero. Es decir, cuando

$$qC'(q) = C(q)$$

o, lo que es lo mismo, cuando

$$\underset{\substack{\text{costo}\\ \text{marginal}}}{C'(q)} = \underset{\substack{\text{costo}\\ \text{promedio}}}{\frac{C(q)}{q}} = A(q)$$

Para mostrar que el costo promedio es mínimo donde el costo promedio es igual al costo marginal, es necesario hacer algunas suposiciones razonables acerca del costo total (véase el problema 52).

Criterio del análisis marginal para el costo promedio mínimo

El costo promedio es mínimo en el nivel de producción donde el costo promedio es igual al costo marginal; es decir, cuando $A(q) = C'(q)$.

A continuación se da una explicación informal de la relación entre costo promedio y costo marginal, que aparece con frecuencia en los textos de economía. El costo marginal (CM) es aproximadamente igual al costo de producir una unidad adicional. Si producir la unidad adicional cuesta menos que el costo promedio (CP) de las unidades existentes (si CM $<$ CP), entonces la unidad menos costosa reducirá el costo promedio por unidad. Por otra parte, si producir la unidad adicional cuesta más que el costo promedio de las unidades existentes (es decir, si CM $>$ CP), entonces esta unidad más costosa aumentará el costo promedio por unidad. Sin embargo, si el costo de la unidad adicional es igual al costo promedio de las unidades existentes (si CM $=$ CP), entonces el costo promedio no aumentará ni disminuirá, lo que significa que $(\text{CP})' = 0$.

La relación entre costo promedio y costo marginal se puede generalizar para ser aplicada a cualquier par de cantidades promedio y marginal. La única modificación posible concierne a la naturaleza del punto crítico que se tiene cuando la cantidad promedio es igual a la cantidad marginal. Por ejemplo, usualmente el ingreso promedio tiene un *máximo* relativo (en lugar de un mínimo), cuando el ingreso promedio es igual al ingreso marginal.

Elasticidad del precio de la demanda

En la sección 1.1 se introdujo el concepto económico de demanda como un medio para expresar la relación entre el precio unitario p de un artículo y el número de unidades q que son demandadas (es decir, producidas y compradas) por los consumidores a ese precio. Previamente se había expresado el precio unitario p como una función del nivel de producción q, pero para el presente análisis es más conveniente hacerlo al revés, escribir la de la demanda respecto al precio como $q = D(p)$.

En general, un aumento en el precio unitario de un artículo da como resultado una disminución de la demanda, pero la sensibilidad de respuesta de la demanda a un cambio en el precio varía de un producto a otro. Por ejemplo, la demanda de productos tales como jabón, pilas alcalinas o sal, no se afectarán mucho por un pequeño porcentaje de cambio en el precio unitario, mientras que un cambio porcentual en el precio de los boletos de avión o en los pagos hipotecarios puede afectar dramáticamente la demanda.

www.FreeLibros.com

La sensibilidad de la demanda se mide comúnmente como el cociente de la tasa porcentual del cambio en la cantidad demandada, entre la tasa porcentual del cambio en el precio. Este cociente es aproximadamente igual al cambio producido en la demanda por un cambio de 1% en el precio unitario. De la sección 2.2 se tiene que la tasa porcentual de cambio de una magnitud $Q(x)$ está dada por $\dfrac{100Q'(x)}{Q(x)}$. En particular, si la función demanda $q = D(p)$ es derivable, entonces

$$\left[\begin{array}{c}\textbf{Tasa porcentual de}\\ \textbf{cambio de la demanda } \boldsymbol{q}\end{array}\right] = \frac{100\,\dfrac{dq}{dp}}{q}$$

y

$$\left[\begin{array}{c}\textbf{Tasa porcentual de}\\ \textbf{cambio del precio } \boldsymbol{p}\end{array}\right] = \frac{100\,\dfrac{dp}{dp}}{p} = \frac{100}{p}$$

Así, la sensibilidad al cambio en el precio se mide por el cociente

$$\frac{\textbf{Tasa de cambio porcentual de } \boldsymbol{q}}{\textbf{Tasa de cambio porcentual de } \boldsymbol{p}} = \frac{\dfrac{100\,\dfrac{dq}{dp}}{q}}{\dfrac{100}{p}} = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$

que en economía recibe el nombre de *elasticidad de la demanda respecto al precio*. Para resumir:

Elasticidad de la demanda respecto al precio ▪ Si $q = D(p)$ unidades de un artículo son demandadas en el mercado a un precio unitario p, donde D es una función derivable, entonces la **elasticidad de la demanda respecto al precio** para el artículo está dada por

$$E(p) = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$

y se interpreta como

$$E(p) \approx \left[\begin{array}{c}\text{Tasa de cambio porcentual de la demanda } q\\ \text{producida por una tasa de cambio de 1\% en el precio } p\end{array}\right]$$

NOTA Como la demanda q disminuye cuando aumenta el precio unitario p, se tiene que $\dfrac{dq}{dp} < 0$. Por tanto, como $q > 0$ y $p > 0$, se tiene que la elasticidad de la demanda respecto al precio será negativa; es decir,

$$E(p) = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} < 0$$

Por ejemplo, decir que cierto artículo tiene una elasticidad de la demanda respecto al precio de -0.5, a un cierto precio unitario p, significa que 10% de aumento en el precio del artículo resultará en una disminución de aproximadamente 5% en el número de unidades demandadas (vendidas). Estas ideas se ilustran con mayor detalle en el ejemplo 3.4.6. ▪

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 3.4.6

Suponga que la demanda q y el precio p de cierto artículo están relacionados por la ecuación lineal $q = 240 - 2p$ (para $0 \leq p \leq 120$).

a) Exprese la elasticidad de la demanda respecto al precio como una función de p.

b) Calcule la elasticidad de la demanda respecto al precio cuando el precio es $p = 100$. Interprete su respuesta.

c) Calcule la elasticidad de la demanda respecto al precio cuando el precio es $p = 50$. Interprete su respuesta.

d) ¿A qué precio es igual la elasticidad de la demanda respecto al precio a -1? ¿Cuál es la importancia económica de este precio?

Solución

a) La elasticidad de la demanda respecto al precio es

$$E(p) = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{p}{q}(-2) = \frac{-2p}{240 - 2p} = \frac{-p}{120 - p}$$

b) Cuando $p = 100$, la elasticidad de la demanda respecto al precio es

$$E(100) = \frac{-100}{120 - 100} = -5$$

Es decir, cuando el precio es $p = 100$, 1% de aumento en el precio producirá una disminución en la demanda de aproximadamente 5%.

c) Cuando $p = 50$, la elasticidad de la demanda respecto al precio es

$$E(50) = \frac{-50}{120 - 50} \simeq -0.71$$

Es decir, cuando el precio es $p = 50$, 1% de aumento en el precio producirá una disminución en la demanda de aproximadamente 0.71%.

d) La elasticidad de la demanda respecto al precio será igual a -1 cuando

$$-1 = \frac{-p}{120 - p} \qquad 120 - p = p \qquad 2p = 120 \qquad \text{o} \qquad p = 60$$

A este precio, 1% de aumento en el precio ocasionará una disminución en la demanda de aproximadamente el mismo porcentaje.

Existen tres niveles de elasticidad dependiendo de si $|E(p)|$ es mayor que, menor que o igual a 1. A continuación se da una descripción e interpretación económica de cada nivel.

Niveles de elasticidad

$|E(p)| > 1$ **Demanda elástica.** El porcentaje en el que disminuye la demanda es mayor que el porcentaje de aumento del precio que lo provocó. Así, la demanda es relativamente sensible al cambio en el precio.

$|E(p)| < 1$ **Demanda inelástica.** El porcentaje en el que disminuye la demanda es menor que el porcentaje de aumento del precio que lo provocó. Cuando esto ocurre, la demanda es relativamente insensible a cambios en el precio.

$|E(p)| = 1$ **La demanda es de elasticidad unitaria (o unitaria).** El porcentaje de cambio del precio y de la demanda son (aproximadamente) iguales.

www.FreeLibros.com

Para ilustrar lo anterior, en el ejemplo 4.6*b* se encontró que $E(100) = -5$. Así, la demanda es elástica con respecto al precio cuando $p = 100$ ya que $|E(100)| = 5 > 1$. En el inciso *c*) del mismo ejemplo, se halló que $|E(50)| = |-0.71| < 1$, de manera que la demanda es inelástica cuando $p = 50$. Por último, en el inciso *d*), se determinó $|E(60)| = |-1| = 1$, lo cual significa que la demanda es de elasticidad unitaria cuando $p = 60$.

El nivel de elasticidad de la demanda para un artículo proporciona información útil acerca del ingreso total R obtenido por la venta de q unidades del artículo a p dólares por unidad. Si se supone que la demanda q es una función derivable del precio unitario p, el ingreso es $R(p) = pq(p)$ y, derivando implícitamente con respecto a p, se tiene que

$$\frac{dR}{dp} = p\frac{dq}{dp} + q \qquad \textit{por la regla del producto}$$

Para obtener la elasticidad $E(p) = \dfrac{p}{q}\dfrac{dq}{dp}$ en esa expresión, simplemente se multiplica el miembro derecho por $\dfrac{q}{q}$ como sigue:

$$\frac{dR}{dp} = \frac{q}{q}\left(p\frac{dq}{dp} + q\right) = q\left(\frac{p}{q}\frac{dq}{dp} + 1\right) = q[E(p) + 1]$$

Suponga que la demanda es elástica, de manera que $|E(p)| > 1$. Entonces $E(p) < -1$ [ya que $E(p) < 0$], así que $[E(p) + 1] < 0$ y

$$\frac{dR}{dp} = q(p)\,[E(p) + 1] < 0$$

lo que significa que el resultado de una pequeña disminución en el precio causará una disminución en el ingreso. De igual forma, cuando la demanda es inelástica, se tiene $-1 < E(p) < 0$ así que $[E(p) + 1] > 0$ y $\dfrac{dR}{dp} > 0$. En este caso, un pequeño aumento en el precio provocará un aumento en el ingreso. Si la demanda es de elasticidad unitaria, entonces $E(p) = -1$ así $\dfrac{dR}{dp} = 0$ y un pequeño aumento en el precio dejará al ingreso aproximadamente sin cambio (ni aumentará ni disminuirá). Estas observaciones se pueden resumir como sigue.

Niveles de elasticidad y efecto sobre el ingreso

Si la demanda es **elástica** ($|E(p)| > 1$), el ingreso $R = pq(p)$ disminuye cuando el precio p aumenta.

Si la demanda es **inelástica** ($|E(p)| < 1$), el ingreso R aumenta cuando el precio p aumenta.

Si la demanda es de **elasticidad unitaria** ($|E(p)| = 1$), el ingreso R no se afecta por un pequeño cambio en el precio.

En la figura 3.43 se muestra la relación entre ingreso y precio. Se observa que la curva de ingreso es creciente cuando la demanda es inelástica, decreciente cuando la demanda es inelástica y tiene una recta tangente horizontal cuando la demanda es de elasticidad unitaria.

www.FreeLibros.com

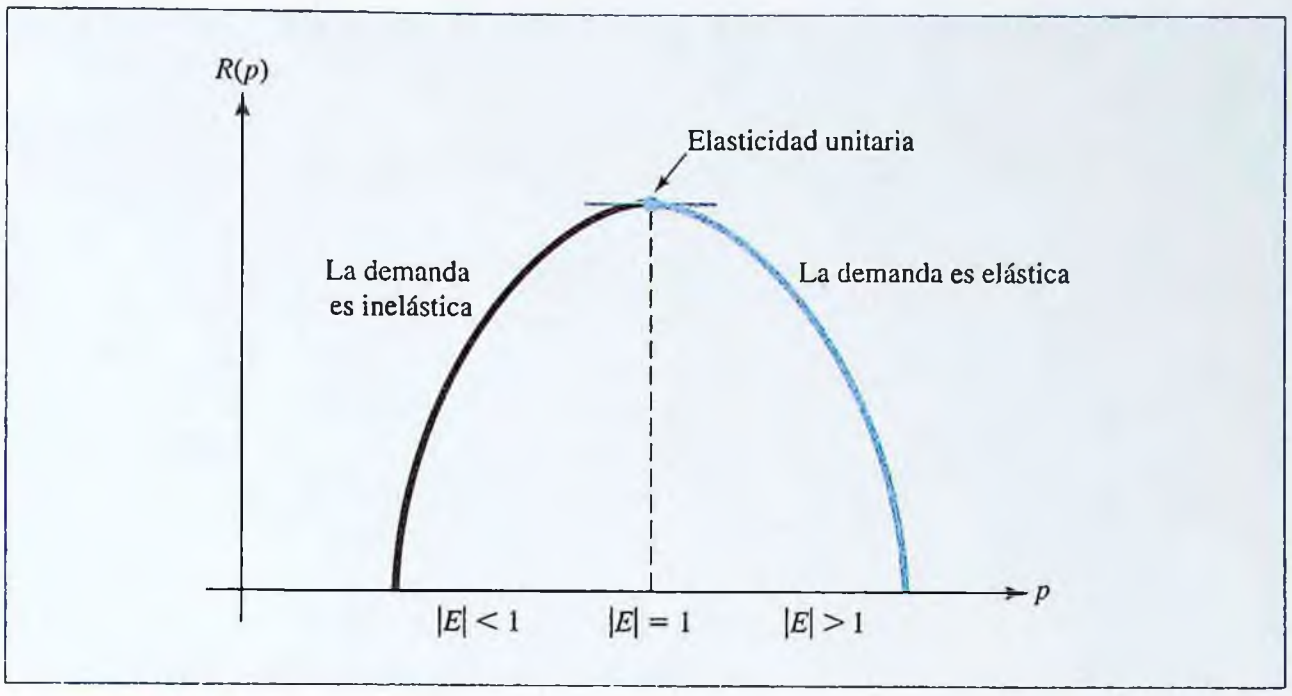


FIGURA 3.43 Ingreso como una función del precio.

La relación entre la elasticidad de la demanda y el ingreso total se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO | 3.4.7

El gerente de una librería determina que cuando el precio de cierta novela es de p dólares por ejemplar, la demanda diaria es $q = 300 - p^2$ ejemplares, donde $0 \leq p \leq \sqrt{300}$.

a) Determine dónde la demanda es elástica, inelástica y de elasticidad unitaria con respecto al precio.

b) Interprete los resultados del inciso *a*) en términos del comportamiento del ingreso total como una función del precio.

Solución

a) La elasticidad de la demanda es

$$E(p) = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{p}{300 - p^2}(-2p) = \frac{-2p^2}{300 - p^2}$$

y como $0 \leq p \leq \sqrt{300}$,

$$|E(p)| = \frac{2p^2}{300 - p^2}$$

La demanda es de elasticidad unitaria cuando $|E| = 1$; es decir, cuando

$$\begin{aligned} \frac{2p^2}{300 - p^2} &= 1 \\ 2p^2 &= 300 - p^2 \\ 3p^2 &= 300 \\ p &= \pm 10 \end{aligned}$$

de la cual sólo $p = 10$ está el intervalo de interés $0 \leq p \leq \sqrt{300}$. Si $0 \leq p < 10$, entonces

$$|E| = \frac{2p^2}{300 - p^2} < \frac{2(10)^2}{300 - (10)^2} = 1$$

www.FreeLibros.com

de manera que la demanda es inelástica. De igual forma, si $10 < p < \sqrt{300}$, entonces

$$|E| = \frac{2p^2}{300 - p^2} > \frac{2(10)^2}{300 - (10)^2} = 1$$

y la demanda es elástica.

b) El ingreso total, $R = pq$, aumenta cuando la demanda es inelástica, es decir, cuando $0 \leq p < 10$. Para este rango de precios, un aumento porcentual en el precio provoca una disminución porcentual más pequeña de la demanda. Así que la librería obtendrá más dinero por cada aumento en el precio hasta llegar a los \$10 por ejemplar.

Sin embargo, para el intervalo de precios $10 < p \leq \sqrt{300}$, la demanda es elástica, así que el ingreso es decreciente. Si se fija el precio de venta del libro en este rango, un incremento porcentual en el precio provoca una mayor disminución porcentual de la demanda. Por tanto, si la librería aumenta el precio más allá de los \$10 por ejemplar, perderá ingreso.

Esto significa que el precio óptimo es \$10 por ejemplar, que es el que corresponde a elasticidad unitaria. En la figura 3.44 se muestran las gráficas de las funciones de demanda e ingreso.

¡EXPLORE!

Suponga que la ecuación demanda/precio del ejemplo 3.4.7 es $q = 300 - ap^2$. Describa cómo se afecta el precio cuando la demanda es de elasticidad unitaria para $a = 0, 1, 3,$ o 5 examinando la gráfica de $300 - ax^2$ para estos valores de a. Use una pantalla de [0, 20]1 por [0, 400]50.

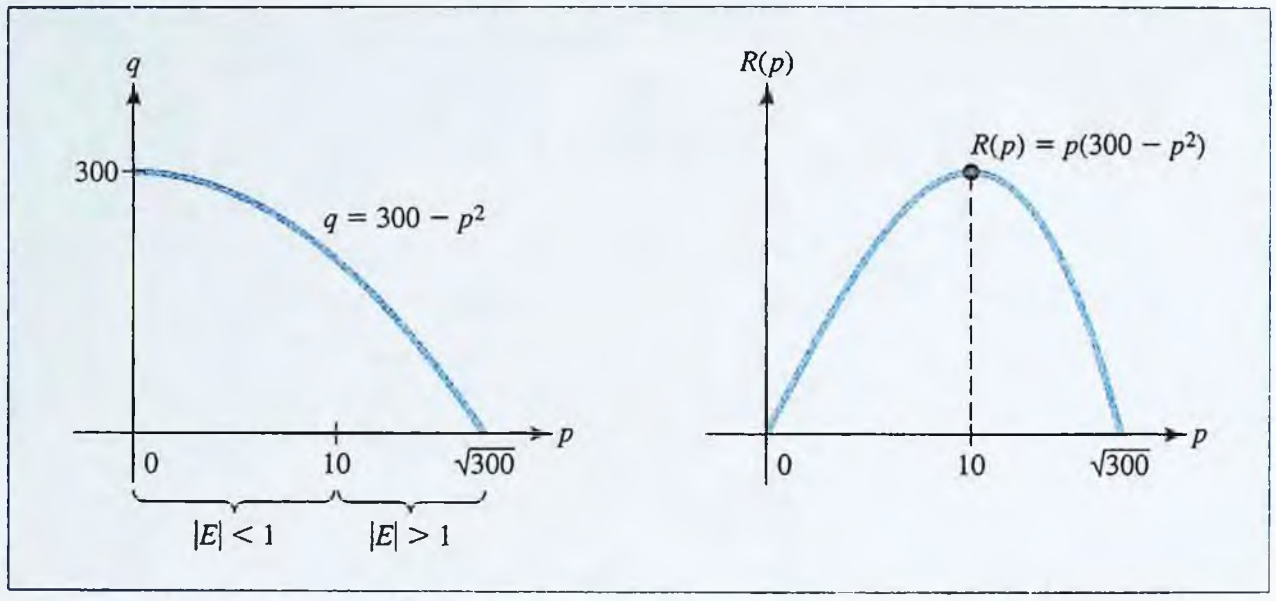


FIGURA 3.44 Curvas de demanda y de ingreso para el ejemplo 3.4.7.

PROBLEMAS | 3.4

En los problemas 1 a 16 halle el máximo y el mínimo absolutos (si los hay) de la función dada en el intervalo especificado.

1. $f(x) = x^2 + 4x + 5; -3 \leq x \leq 1$

2. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1; -3 \leq x \leq 2$

3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 2; 0 \leq x \leq 2$

4. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 1; 0 \leq x \leq 5$

5. $f(t) = 3t^5 - 5t^3; -2 \leq t \leq 0$

6. $f(x) = 10x^6 + 24x^5 + 15x^4 + 3; -1 \leq x \leq 1$

7. $f(x) = (x^2 - 4)^5; -3 \leq x \leq 2$

8. $f(t) = \frac{t^2}{t - 1}; -2 \leq t \leq -\frac{1}{2}$

9. $g(x) = x + \frac{1}{x}; \frac{1}{2} \leq x \leq 3$

10. $g(x) = \frac{1}{x^2 - 9}; 0 \leq x \leq 2$

11. $f(u) = u + \frac{1}{u}; u > 0$

12. $f(u) = 2u + \frac{32}{u}; u > 0$

www.FreeLibros.com

13. $f(x) = \dfrac{1}{x}; x > 0$

14. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}; x > 0$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}; x \geq 0$

16. $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}; x \geq 0$

UTILIDAD MÁXIMA Y COSTO PROMEDIO MÍNIMO *En los problemas 17 a 22 se da el precio $p(q)$ al cual se pueden vender q unidades de cierto artículo y el costo total $C(q)$ de producir las q unidades. En cada caso:*

a) Encuentre la función utilidad $P(q)$, el ingreso marginal $R'(q)$ y el costo marginal $C'(q)$. Trace las gráficas de $P(q)$, $R'(q)$ y $C'(q)$ en el mismo sistema de coordenadas y determine el nivel de producción q donde se maximiza $P(q)$.

b) Encuentre el costo promedio $A(q)$ y trace las gráficas de $A(q)$ y del costo marginal $C'(q)$ en el mismo sistema de coordenadas. Determine el nivel de producción q donde se minimiza $A(q)$.

17. $p(q) = 49 - q; C(q) = \dfrac{1}{8}q^2 + 4q + 200$

18. $p(q) = 37 - 2q; C(q) = 3q^2 + 5q + 75$

19. $p(q) = 180 - 2q; C(q) = q^3 + 5q + 162$

20. $p(q) = 710 - 1.1q^2;$
$C(q) = 2q^3 - 23q^2 + 90.7q + 151$

21. $p(q) = 1.0625 - 0.0025q; C(q) = \dfrac{q^2+1}{q+3}$

22. $p(q) = 81 - 3q; C(q) = \dfrac{q+1}{q+3}$

ELASTICIDAD DE LA DEMANDA *En los problemas 23 a 28 calcule la elasticidad de la demanda para la función de demanda dada $D(p)$, y determine si la demanda es elástica, inelástica o de elasticidad unitaria, para el precio indicado p.*

23. $D(p) = -1.3p + 10; p = 4$

24. $D(p) = -1.5p + 25; p = 12$

25. $D(p) = 200 - p^2; p = 10$

26. $D(p) = \sqrt{400 - 0.01p^2}; p = 120$

27. $D(p) = \dfrac{3\,000}{p} - 100; p = 10$

28. $D(p) = \dfrac{2\,000}{p^2}; p = 5$

29. INGRESO PROMEDIO Suponga que el ingreso total en dólares proveniente de la venta de q unidades de cierto artículo es $R(q) = -2q^2 + 68q - 128$.

a) ¿En qué nivel de ventas el ingreso promedio por unidad es igual al ingreso marginal?

b) Verifique que el ingreso promedio es creciente si el nivel de ventas es menor que el nivel obtenido en el inciso *a)*, y decreciente si el nivel de ventas es mayor que el nivel obtenido en el inciso *a)*.

c) En el mismo sistema de coordenadas, dibuje la gráfica de las partes importantes de las funciones de ingreso promedio e ingreso marginal.

30. ¿En qué puntos la tangente a la curva $y = 2x^3 - 3x^2 + 6x$ tiene la pendiente más pequeña? ¿Cuál es la pendiente de la tangente en este punto?

31. ¿Para qué valor de x en el intervalo $-1 \leq x \leq 4$ es más inclinada la gráfica de la función

$$f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

¿Cuál es la pendiente de la tangente en este punto?

En los problemas 32 a 38 resuelva el problema de optimización práctica y utilice una de las técnicas de esta sección para verificar que se ha encontrado realmente el extremo absoluto deseado.

32. RADIODIFUSIÓN Una estación de radio que sólo transmite noticias realizó una encuesta sobre los hábitos de escucha de los residentes locales entre las 5:00 p.m. y la medianoche. La encuesta indica que el porcentaje de la población adulta local que sintoniza la estación x horas después de las 5:00 p.m. es

$$f(x) = \frac{1}{8}(-2x^3 + 27x^2 - 108x + 240)$$

a) ¿A qué hora entre las 5 p.m. y la medianoche escucha la emisora el mayor número de personas? ¿Qué porcentaje de la población representan los oyentes en ese momento?

b) ¿A qué hora entre las 5 p.m. y la medianoche escucha la emisora el menor número de personas? ¿Qué porcentaje de la población representan los oyentes en ese momento?

33. SOCIOS Suponga que x años después de su fundación en 1989, el total de afiliados a cierta asociación nacional de consumidores es

$$f(x) = 100(2x^3 - 45x^2 + 264x)$$

www.FreeLibros.com

a) ¿En qué momento, entre 1989 y 2003, tuvo la asociación el mayor número de miembros? ¿Cuántos eran los miembros en ese momento?

b) ¿En qué momento, entre 1989 y 2003, tuvo la asociación el menor número de miembros? ¿Cuántos eran los miembros en ese momento?

34. VELOCIDAD DE VUELO En un modelo[4] desarrollado por C. J. Pennycuick, se indica que la potencia P requerida por un ave para mantener el vuelo está dada por la fórmula

$$P = \frac{w^2}{2\rho S v} + \frac{1}{2}\rho A v^3$$

donde v es la velocidad relativa del ave, w es el peso, ρ es la densidad del aire, y S y A son constantes positivas relacionadas con el tamaño y la forma del ave. ¿Qué velocidad relativa v minimiza la potencia requerida por el ave?

35. APRENDIZAJE En un modelo de aprendizaje son posibles dos respuestas (A y B) para cada una de las series de observaciones. Si existe una probabilidad p de obtener la respuesta A en cualquier observación individual, la probabilidad de respuesta A exactamente n veces en una serie de m observaciones es $F(p) = p^n(1 - p)^{m-n}$. El **estimador de máxima verosimilitud** es el valor de p que maximiza $F(p)$ para $0 \leq p \leq 1$. ¿Para qué valor de p ocurre esto?

36. CRECIMIENTO DE UNA ESPECIE Algo más sobre el gusano de la manzana (recuerde el problema 53 de la sección 3.1).[5] El porcentaje de gusanos de la manzana que sobreviven la etapa de crisálida a una temperatura dada T (grados Celsius), se modela por la fórmula

$$P(T) = -1.42T^2 + 68T - 746 \quad \text{para } 20 \leq T \leq 30$$

Encuentre las temperaturas a las cuales sobrevive el mayor y el menor porcentaje de crisálidas.

37. CIRCULACIÓN DE LA SANGRE La ley de Poiseuille establece que la velocidad de la sangre que está a r centímetros del eje central de una arteria de radio R es $S(r) = c(R^2 - r^2)$, donde c es una constante positiva. ¿Dónde es mayor la velocidad de la sangre?

38. POLÍTICA Una encuesta indica que x meses después de que una candidata a un puesto de administración pública declara su candidatura, ella tendrá el apoyo de $S(x)$ por ciento de votos, donde

$$S(x) = \frac{1}{29}(-x^3 + 6x^2 + 63x + 1\,080) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 12$$

Si la elección se realiza en noviembre, ¿cuándo debería anunciar su candidatura política? ¿Podría aspirar a ganar si necesita por lo menos 50% de los votos?

39. ELASTICIDAD DE DEMANDA Cuando se fija el precio de un artículo a p dólares la unidad, los consumidores demandan q unidades, donde p y q están relacionados por la ecuación $q^2 + 3pq = 22$.

a) Halle la elasticidad de la demanda para este artículo.

b) Para un precio unitario de \$3, ¿es la demanda elástica, inelástica o de elasticidad unitaria?

40. ELASTICIDAD DE LA DEMANDA Cuando una tienda de electrónica fija el precio de cierta marca de estéreo en p cientos de dólares la unidad, comprueba que se venden q unidades mensualmente, donde $q^2 + 2p^2 = 41$.

a) Encuentre la elasticidad de la demanda para ese artículo.

b) Para un precio unitario de $p = 4$ (\$400), ¿es la demanda elástica, inelástica o de elasticidad unitaria?

41. DEMANDA DE ARTE Una galería de arte ofrece pinturas de artistas famosos. Si cada pintura de una edición limitada tiene un precio de p dólares, se espera que se vendan $q = 500 - 2p$ pinturas.

a) Hay disponible sólo 50 pinturas. ¿Qué limitaciones impone esto en el rango posible de precios p?

b) Encuentre la elasticidad de la demanda. Determine los valores de p para los cuales la demanda es elástica, inelástica y de elasticidad unitaria.

c) Interprete los resultados del inciso *b*) en términos del comportamiento del ingreso total como una función del precio unitario p.

d) Si usted fuera el propietario de la galería, ¿qué precio le pondría a cada pintura? Explique las razones de su decisión.

42. DEMANDA DE BOLETOS DE AVIÓN Una aerolínea determina que cuando un boleto de ida y vuelta entre los Ángeles y San Francisco cuesta p dólares ($0 \leq p \leq 160$), la demanda diaria de boletos es $q = 256 - 0.01p^2$.

a) Encuentre la elasticidad de la demanda. Determine los valores de p para los cuales la demanda es elástica, inelástica y de elasticidad unitaria.

b) Interprete los resultados del inciso *a*) en términos del comportamiento del ingreso total como una función del precio unitario p.

c) ¿Qué precio recomendaría cobrar por cada boleto de avión? Explique su razonamiento.

---

[4] C. J. Pennycuick, "The Mechanics of Bird Migration", Ibis III, páginas 525-556.

[5] P. L. Shaffer y H. J. Gold, "A Simulation Model of Population Dynamics of the Codling Moth, *Cydia pomonelia*", *Ecological Modeling*, Vol. 30, 1985, páginas 247-274.

www.FreeLibros.com

43. ORNITOLOGÍA Recuerde del problema 60 en la sección 2.4 que, de acuerdo con los resultados[6] de Tucker y Schmidt-Koenig, la energía gastada por ciertas especies de periquitos está dada por

$$E(v) = \frac{1}{v}[0.074(v - 35)^2 + 22]$$

donde v es la velocidad del ave (en km/h).

a) ¿Qué velocidad minimiza el gasto de energía?

b) Lea un artículo acerca de cómo se pueden utilizar los métodos matemáticos para el estudio del comportamiento animal y escriba un parágrafo si piensa que tales métodos son válidos. Puede comenzar con la referencia citada en este problema.

44. CONSUMO NACIONAL Suponga que el consumo total nacional está dado por una función $C(x)$, donde x es el ingreso total nacional. La derivada $C'(x)$ se denomina **propensión marginal al consumo**. Entonces $S = x - C$ representa los ahorros totales nacionales, y $S'(x)$ se conoce como **propensión marginal al ahorro**. Suponga que la función de consumo es $C(x) = 8 - 0.8x - 0.8\sqrt{x}$. Encuentre la propensión marginal al consumo y determine el valor de x que corresponde al menor ahorro total.

45. SENSIBILIDAD A LOS MEDICAMENTOS Con frecuencia, la reacción del cuerpo a los medicamentos se modela[7] por una ecuación de la forma

$$R(D) = D^2\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3}\right)$$

donde D es la dosis, y C (constante) es la dosis máxima que se puede administrar. La razón de cambio $R(D)$ con respecto a D se denomina **sensibilidad**.

a) Determine el valor de D para el cual la sensibilidad es la mayor. ¿Cuál es la mayor sensibilidad? (Exprese su respuesta en términos de C.)

b) ¿Cuál es la reacción (en términos de C) cuando se usa la dosis que resulta en la mayor sensibilidad?

46. AERODINÁMICA En el diseño de aeroplanos, una característica importante es el muy conocido "factor de arrastre", que es la fuerza retardadora ejercida sobre el avión por el aire. Un modelo mide el arrastre por una función de la forma

$$F(v) = Av^2 + \frac{B}{v^2}$$

donde A y B son constantes positivas. Se ha descubierto de manera experimental que el arrastre se minimiza cuando $v = 160$ millas/h. Utilice esta información para encontrar el cociente $\frac{B}{A}$.

47. ELECTRICIDAD Cuando una resistencia de R ohms se conecta a una batería con fuerza electromotriz de E volts y una resistencia interna de r ohms, la corriente que pasa es de I amperes y genera una potencia de P watts, donde

$$I = \frac{E}{r + R} \qquad \text{y} \qquad P = I^2R$$

Suponiendo que r es constante, ¿qué valor de R proporciona la máxima potencia?

48. SOBREVIVENCIA DE VIDA ACUÁTICA Se sabe que la cantidad de agua que ocupa 1 litro a 0 °C ocupa

$$V(T) = \left(\frac{-6.8}{10^8}\right)T^3 + \left(\frac{8.5}{10^6}\right)T^2 - \left(\frac{6.4}{10^5}\right)T + 1$$

litros cuando la temperatura es T °C, para $0 \le T \le 30$.

a) Utilice una calculadora graficadora para trazar $V(T)$, para $0 \le T \le 10$. La densidad del agua es máxima cuando $V(T)$ es mínima. ¿A qué temperatura ocurre esto?

b) ¿Le extraña la respuesta del inciso *a*)? Pues sí, debería sorprenderle. El agua es el único líquido cuya máxima densidad ocurre *por encima* de su punto de congelación (0 °C para el agua). Lea un artículo sobre la supervivencia de vida acuática durante el invierno y luego escriba un párrafo acerca de cómo las propiedades del agua examinadas en este problema están relacionadas con tal supervivencia.

49. PRODUCCIÓN DE CÉLULAS Recuerde del problema 60 en la sección 2.3 que un modelo útil para la producción $p(x)$ de células en la sangre considera una función de la forma

$$p(x) = \frac{Ax}{B + x^m}$$

donde x es el número de células presentes y A, B y m son constantes positivas.[8]

a) Encuentre la tasa de producción de sangre $R(x) = p'(x)$ y determine dónde $R(x) = 0$.

b) Encuentre la tasa a la cual $R(x)$ cambia con respecto a x y determine dónde $R'(x) = 0$.

c) Si $m > 1$, ¿el número crítico diferente de cero encontrado en el inciso *b*) corresponde a un máximo relativo o a un mínimo relativo? Explique.

---

[6] V. A. Tucker y K. Schmidt-Koenig, "Flight Speeds of Birds in Relation to Energetics and Wind Directions", *The Auk*, Vol. 88 (1971), páginas 97-107.

[7] R. M. Thrall *et al.*, *Some Mathematical Models in Biology*, U. of Michigan, 1967.

[8] M. C. Mackey y L. Glass, "Oscillations and Chaos in Physiological Control Systems", *Science*, Vol. 197, páginas 287-289.

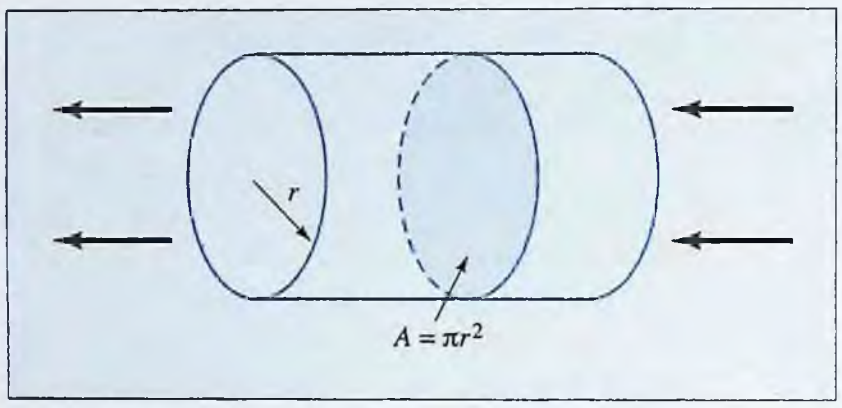
www.FreeLibros.com

50. AMPLITUD DE LA OSCILACIÓN En física, se puede demostrar que una partícula forzada a oscilar en un medio resistente tiene una amplitud $A(r)$ dada por

$$A(r) = \frac{1}{(1 - r^2)^2 + kr^2}$$

donde r es el cociente de la frecuencia forzada entre la frecuencia natural de oscilación, y k es una constante positiva que mide el efecto de amortiguamiento del medio resistente. Demuestre que $A(r)$ tiene exactamente un número crítico positivo. ¿Corresponde a un máximo relativo o a un mínimo relativo? ¿Se puede comentar algo acerca de los extremos *absolutos* de $A(r)$?

51. RESPIRACIÓN Los fisiólogos definen el flujo de aire F, en la tráquea, mediante la fórmula $F = SA$, donde S es la velocidad del aire y A es el área de la sección transversal de la tráquea.



a) Suponga que la tráquea tiene una sección transversal circular de radio r. Utilice la fórmula para calcular la velocidad del aire en la tráquea durante un acceso de tos, como el del ejemplo 3.4.3, para expresar el flujo de aire F en términos de r.

b) Encuentre el radio r para el cual el flujo es máximo.

52. ANÁLISIS MARGINAL Suponga $q > 0$ unidades de un artículo se producen a un costo total de $C(q)$ dólares y a un costo promedio de $A(q) = \dfrac{C(q)}{q}$. En esta sección, se demostró que $q = q_c$ satisface $A'(q_c) = 0$ si y sólo si $C'(q_c) = A(q_c)$; es decir, cuando el costo marginal es igual al costo promedio. El propósito de este problema es demostrar que $A(q)$ es *mínimo* cuando $q = q_c$.

a) En términos generales, el costo de producir un artículo aumenta a una tasa creciente cuando se producen más y más artículos. Utilizando este principio económico, ¿qué se puede comentar acerca del signo de $C''(q)$ cuando q aumenta?

b) Demuestre que $A''(q_c) > 0$ si y sólo si $C''(q_c) > 0$. Después utilice el inciso *a*) para argumentar que el costo $A(q)$ se minimiza cuando $q = q_c$.

53. ELASTICIDAD E INGRESO Suponga que la demanda de cierto artículo está dada por $q = b - ap$, donde a y b son constante positivas, y $0 \le p \le b/a$.

a) Exprese la elasticidad de la demanda como una función de p.

b) Demuestre que la demanda es de elasticidad unitaria en el punto medio, $p = b/2a$, del intervalo $0 \le p \le b/a$.

c) ¿Para qué valores de p es elástica la demanda? ¿Para cuáles es inelástica?

54. ELASTICIDAD DE LA DEMANDA RESPECTO AL INGRESO La **elasticidad de la demanda respecto al ingreso** se define como el cambio porcentual de la cantidad comprada, dividido entre el cambio porcentual del ingreso real.

a) Escriba una fórmula para la elasticidad de la demanda respecto al ingreso E en términos del ingreso real I y de la cantidad comprada Q.

b) En Estados Unidos, ¿cuál esperaría que fuera mayor, la elasticidad de la demanda respecto al ingreso para autos o para la comida? Explique su razonamiento.

c) ¿Cuál cree que sea el significado de una elasticidad *negativa* de la demanda respecto al ingreso? ¿Cuáles de los siguientes artículos esperaría que tuviera $E < 0$: ropa usada, computadoras personales, boletos de autobús, refrigeradores, autos usados? Explique su razonamiento.

d) Lea un artículo sobre elasticidad de la demanda respecto al ingreso y escriba un párrafo explicando por qué la elasticidad de la demanda respecto al ingreso para comida es mucho mayor en un país en desarrollo que en uno como los Estados Unidos o Japón.[9]

55. ELASTICIDAD Suponga que la ecuación de demanda para cierto producto es $q = \dfrac{a}{p^m}$, donde a y m son constantes positivas. Demuestre que la elasticidad de la demanda es igual a $-m$ para todos los valores de p. Interprete este resultado.

[9] Podría encontrar un útil punto de comienzo para su investigación en el siguiente texto: Campbell R. McConnell y Stanley L. Brue, *Microeconomics*, 12a. ed., McGraw-Hill, Inc., Nueva York, 1993.

www.FreeLibros.com

SECCIÓN 3.5 Aplicaciones adicionales de la optimización

En la sección 3.4 se analizaron diferentes aplicaciones en las que se daba una fórmula y se pedía determinar si se tenía un valor máximo o mínimo. Casi siempre en la práctica las cosas no son tan sencillas, es necesario que primero se reúna información sobre una manitud de interés, y luego se formule y analice un modelo matemático apropiado.

En esta sección se aprenderá cómo combinar las técnicas de construcción de modelos de la sección 1.4 con las técnicas de optimización de la sección 3.4. A continuación se presenta un procedimiento para tratar dichos problemas.

Guías generales para resolver problemas de optimización

Paso 1. Comenzar por decidir con precisión si se desea maximizar o minimizar. Una vez hecho esto, asignar nombres a todas las variables de interés. Puede ser de gran utilidad seleccionar letras que sugieran la naturaleza o el papel de la magnitud, como "I" para "ingreso".

Paso 2. Después de asignar variables, expresar las relaciones entre las variables en términos de ecuaciones o desigualdades. Una figura puede ayudar.

Paso 3. Expresar la magnitud a optimizar (maximizar o minimizar) en términos de una sola variable (la variable independiente). Para ello, puede ser necesario usar una o más de las ecuaciones disponibles del paso 2 para eliminar otras variables. También hay que determinar cualquier restricción necesaria en la variable independiente.

Paso 4. Si $f(x)$ es la magnitud a optimizar, calcular $f'(x)$ y hallar todos los números críticos de f. Luego se debe encontrar el valor máximo o mínimo requerido, utilizando los métodos de la sección 3.4 (el teorema del valor extremo o el criterio de la segunda derivada para extremos absolutos). Es recomendable verificar el valor de $f(x)$ en los extremos del intervalo.

Paso 5. Interpretar los resultados en términos de las magnitudes físicas, geométricas o económicas correspondientes.

Este procedimiento se ilustra en los ejemplos 3.5.1 a 3.5.3 .

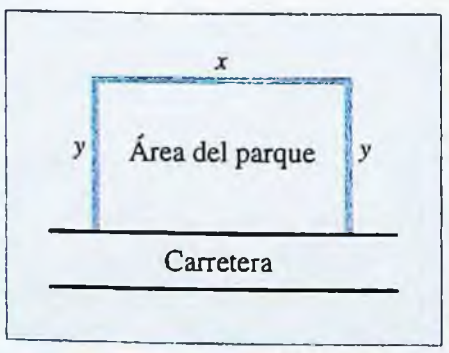


FIGURA 3.45 Área rectangular del parque.

EJEMPLO | 3.5.1

El departamento de comunicaciones y transportes planea construir un parque para motociclistas junto a una autopista principal. El parque será rectangular con un área de 5 000 yardas cuadradas y estará cercado por los tres lados no adyacentes a la autopista. ¿Cuál es la cantidad mínima de cerca requerida para este trabajo? ¿Qué longitud y ancho debe tener el parque para que la cantidad de cerca sea minima?

Solución

Paso 1. Dibuje el área de descanso, como la que aparece en la figura 3.45. Sea x (yardas) la longitud del parque (el lado paralelo a la autopista) y sea y (yardas) el ancho.

Paso 2. Como el parque va a tener un área de 5 000 yardas cuadradas, entonces $xy = 5\,000$.

www.FreeLibros.com

Paso 3. La longitud de la cerca es $F = x + 2y$, donde x y y son positivas, ya que de otra manera no existiría el parque. Como

$$xy = 5\,000 \qquad \text{o bien} \qquad y = \frac{5\,000}{x}$$

se puede eliminar y de la fórmula para F y así obtener una fórmula en términos sólo de x:

$$F(x) = x + 2y = x + 2\left(\frac{5\,000}{x}\right) = x + \frac{10\,000}{x} \qquad \text{para } x > 0$$

Paso 4. La derivada de $F(x)$ es

$$F'(x) = 1 - \frac{10\,000}{x^2}$$

y se obtienen los números críticos para $F(x)$ planteando$F'(x) = 0$ y resolviendo para x:

$$F'(x) = 1 - \frac{10\,000}{x^2} = 0$$

$$\frac{x^2 - 10\,000}{x^2} = 0 \qquad \textit{escriba la fracción con un denominador común}$$

$$x^2 = 10\,000 \qquad \textit{iguale el numerador a 0}$$

$$x = 100 \qquad \textit{deseche } -100\textit{, ya que } x > 0$$

Como $x = 100$ es el único número crítico en el intervalo $x > 0$, se puede aplicar el criterio de la segunda derivada para extremos absolutos. La segunda derivada de $F(x)$ es

$$F''(x) = \frac{20\,000}{x^3}$$

entonces $F''(100) > 0$ y hay un mínimo absoluto de $F(x)$ donde $x = 100$. Como referencia, en la figura 3.46 se muestra la gráfica de la función del cercado $F(x)$.

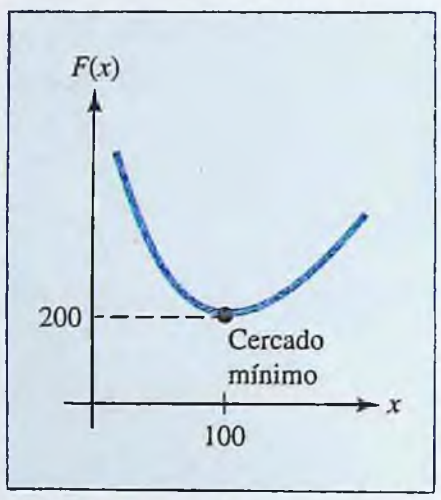


FIGURA 3.46 Gráfica de $F(x) = x + \dfrac{10\,000}{x}$ para $x > 0$.

Paso 5. Se calcula que la cantidad mínima de cerca es

$$F(100) = 100 + \frac{10\,000}{100} = 200 \text{ yardas}$$

que corresponden al parque de $x = 100$ yardas de longitud y

$$y = \frac{5\,000}{100} = 50 \text{ yardas}$$

de ancho.

EJEMPLO | 3.5.2

Se debe construir una lata cilíndrica para almacenar un volumen fijo de líquido. El costo del material que se usará para la parte superior e inferior de la lata es de 3 centavos de dólar por pulgada cuadrada, y el costo del material que se usará en la parte lateral es de 2 centavos de dólar por pulgada cuadrada. Use el cálculo para deducir una relación simple entre el radio y la altura de la lata de manera que su construcción cueste lo menos posible.

Solución

Sea r el radio, h la altura, C el costo (en centavos) y V el volumen (fijo). El objetivo es minimizar el costo. Entonces tiene que:

$$\text{Costo} = \begin{matrix}\text{costo de la}\\ \text{parte superior}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{costo de la}\\ \text{parte inferior}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{costo de la}\\ \text{parte lateral}\end{matrix}$$

Justo-a-tiempo

www.FreeLibros.com

donde, para cada componente el costo se calcula con

$$\text{Costo} = (\text{costo por pulgada cuadrada})(\text{área})$$

De aquí que, $\text{Costo de la parte superior} = \text{costo de la parte inferior} = 3(\pi r^2)$

y $\text{Costo de la parte lateral} = 2(2\pi rh) = 4\pi rh$

y el costo total es

$$C = \underbrace{3\pi r^2}_{\text{superior}} + \underbrace{3\pi r^2}_{\text{inferior}} + \underbrace{4\pi rh}_{\text{lateral}} = 6\pi r^2 + 4\pi rh$$

Antes de intentar aplicar el cálculo, se debe escribir el costo en términos de una sola variable. Para hacer esto, use el hecho de que la lata tiene un volumen fijo, V_0, y despeje h de la ecuación $V_0 = \pi r^2 h$, obteniendo

$$h = \frac{V_0}{\pi r^2}$$

Luego sustituya esta expresión de h en la fórmula de C para expresar el costo en términos sólo de r:

$$C(r) = 6\pi r^2 + 4\pi r\left(\frac{V_0}{\pi r^2}\right) = 6\pi r^2 + \frac{4V_0}{r}$$

El radio r puede ser cualquier número positivo, así que el objetivo es encontrar el mínimo absoluto de $C(r)$ para $r > 0$. Derivando $C(r)$, se obtiene

$$C'(r) = 12\pi r - \frac{4V_0}{r^2} \qquad \textit{recuerde que } V_0 \textit{ es una constante}$$

Como $C'(r)$ existe para todo $r > 0$, cualquier número crítico $r = R$ debe satisfacer $C'(R) = 0$; es decir,

$$C'(R) = 12\pi R - \frac{4V_0}{R^2} = 0$$

$$12\pi R = \frac{4V_0}{R^2}$$

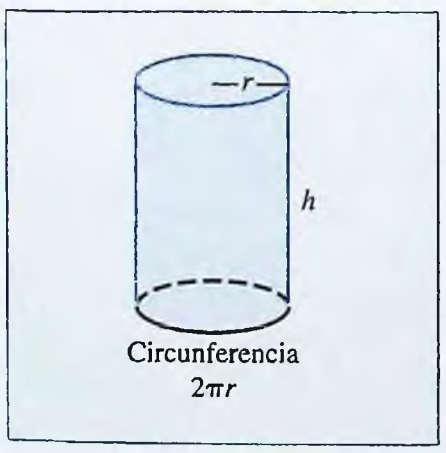
$$R^3 = \frac{4V_0}{12\pi}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{V_0}{3\pi}}$$

Justo-a-tiempo

REPASO

Un cilindro de radio r y altura h tiene un área lateral (curva) $A = 2\pi rh$ y un volumen $V = \pi r^2 h$.



Si H es la altura de la lata que corresponde al radio R, entonces $V_0 = \pi r^2 H$, y como R debe satisfacer

$$12\pi R = \frac{4V_0}{R^2}$$

se llega a que

$$12\,\pi R = \frac{4(\pi R^2 H)}{R^2} = 4\pi H$$

o

$$H = \frac{12\pi R}{4\pi} = 3R$$

www.FreeLibros.com

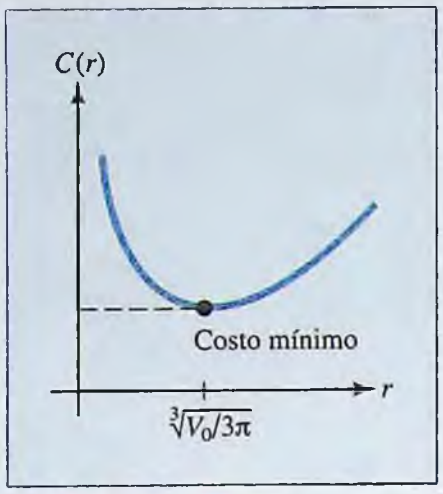


FIGURA 3.47 La función de costo $C(r) = 6\pi r^2 + \dfrac{4V}{r}$ para $r > 0$.

Por último, observe que la segunda derivada de $C(r)$ satisface

$$C''(r) = 12\pi + \frac{8V_0}{r^3} > 0 \qquad \text{para todo } r > 0$$

Por tanto, como $r = R$ es el único número crítico para $C(r)$, y ya que $C''(R) > 0$, el criterio de la segunda derivada para los extremos absolutos garantiza que, cuando el costo total de construcción de la lata es minimo, la altura de la lata es tres veces su radio. En la figura 3.47 se muestra la gráfica de la función de costo $C(r)$.

EJEMPLO | 3.5.3

Un fabricante puede producir cintas de video en blanco a un costo de \$2 por casete. Los casetes se han estado vendiendo a \$5 la pieza, y a ese precio, los consumidores han estado comprando 4 000 casetes al mes. El fabricante planea aumentar el precio de los casetes y estima que por cada aumento de \$1 en el precio, se venderán 400 casetes menos cada mes. ¿A qué precio debe vender los casetes el fabricante para maximizar la utilidad?

Solución

Sea x el nuevo precio al que se venderán los casetes y $P(x)$ la utilidad correspondiente. El objetivo es maximizar la utilidad. Igual que en el ejemplo 4.5 de la sección 1.4, comience por enunciar la fórmula para la utilidad.

$$\text{Utilidad} = (\text{número de casetes vendidos})(\text{utilidad por casete})$$

Como se han estado vendiendo 4 000 casetes cada mes cuando el precio es \$5 y se venderán 400 menos cada mes por cada aumento de \$1 en el precio, se deduce que

$$\text{Número de casetes vendidos} = 4\,000 - 400(\text{número de aumentos de \$1})$$

El número de aumentos de \$1 en el precio es la diferencia $x - 5$ entre los precios de venta nuevo y viejo. De aquí que,

$$\begin{aligned}\text{Número de casetes vendidos} &= 4\,000 - 400(x - 5)\\ &= 400[10 - (x - 5)]\\ &= 400(15 - x)\end{aligned}$$

La utilidad por casete simplemente es la diferencia entre el precio de venta x y el costo de \$2. Es decir,

$$\text{Utilidad por casete} = x - 2$$

Reuniendo todo,

$$P(x) = 400(15 - x)(x - 2)$$

El objetivo es encontrar el máximo absoluto de la función utilidad $P(\mathrm{x})$. Para determinar el intervalo significativo para este problema, observe que el nuevo precio x debe ser al menos tan alto como el precio anterior de \$5, por lo que se tiene que $x \geq 5$. Por otra parte, el número de casetes vendidos es $400(15 - x)$, que resultaría negativo si $x > 15$. Si se supone que el fabricante nocobrará un precio tan alto a los casetes como para que nadie los compre, el problema de optimización se puede restringir al intervalo cerrado $5 \leq x \leq 15$.

www.FreeLibros.com

Para encontrar los puntos críticos, calcule la derivada utilizando las reglas del producto y del factor constante, y obtenga

$$P'(x) = 400[(15 - x)(1) + (x - 2)(-1)]$$
$$= 400(15 - x - x + 2) = 400(17 - 2x)$$

que es cero cuando

$$17 - 2x = 0 \qquad \text{o bien} \qquad x = 8.5$$

Comparando los valores de la función utilidad

$$P(5) = 12\,000 \qquad P(8.5) = 16\,900 \qquad \text{y} \qquad P(15) = 0$$

en este valor crítico y en los extremos del intervalo, se puede concluir que la utilidad máxima posible es \$16 900, la cual se generará si los casetes se venden a \$8.50 la pieza. En la figura 3.48 se muestra la gráfica de la función utilidad como una referencia.

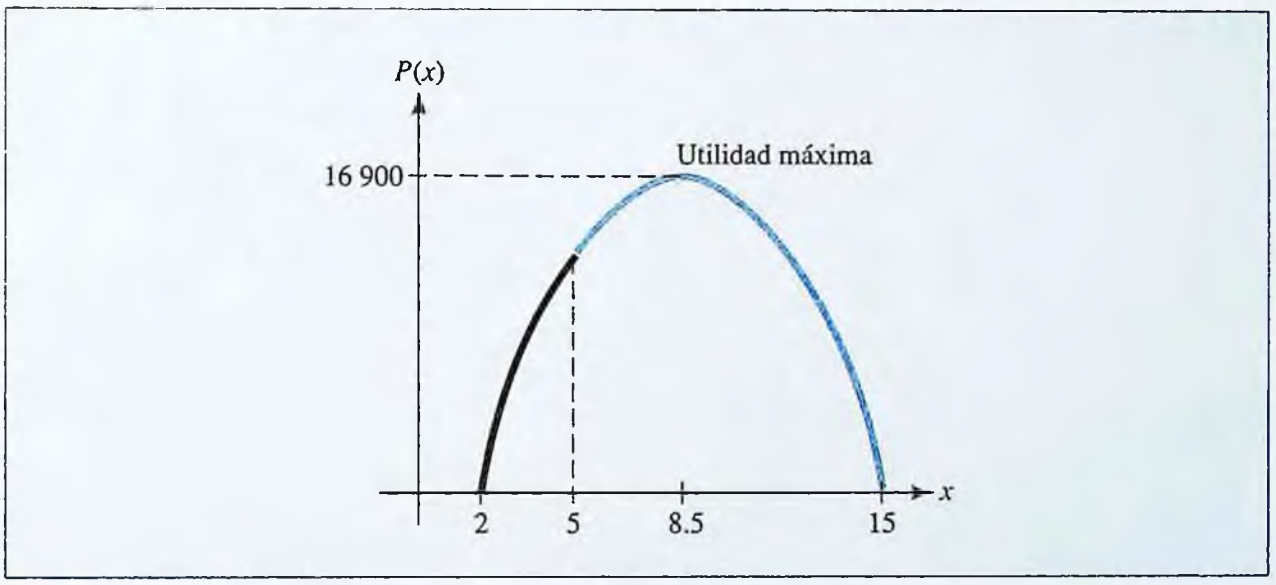


FIGURA 3.48 La función de utilidad $P(x) = 400(15 - x)(x - 2)$.

NOTA **Una solución alternativa al problema de maximización de la utilidad del ejemplo 3.5.3**

Como el número de casetes vendidos en el ejemplo 3.5.3 se describe en términos del número N de aumentos de \$1 en el precio, se puede usar N como la variable independiente en la solución, en lugar del nuevo precio. Con esta elección, se tiene que

$$\text{Número de casetes} = 4\,000 - 400N$$
$$\text{Utilidad por casete} = (N + 5) - 2 = N + 3$$

Así, la utilidad total es

$$P(N) = (4\,000 - 400N)(N + 3) = 400(10 - N)(N + 3)$$

y el intervalo significativo es $0 \le N \le 10$ (¿comprende por qué?). El máximo absoluto en este caso se tiene cuando $N = 3.5$ (complete los detalles); es decir, cuando el viejo precio aumenta de 5 a $5 + 3.5 = 8.5$ dólares (\$8.50). Como se esperaba, este resultado es igual al obtenido utilizando el precio como la variable independiente en el ejemplo 3.5.3. ■

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Remítase al ejemplo 3.5.4. Introduzca $P(x) = 75/x + 300/(15 - x)$ en Y1 y grafíquela utilizando la pantalla modificada [0, 14]1 por [0, 350]1. Ahora use la instrucción **TRACE** para mover el cursor de X = 1 a 14 y confirme la ubicación correspondiente a la mínima contaminación. Para observar el comportamiento de la derivada $P'(x)$, escriba Y2 = nDeriv(Y1, X, X) y grafíquela utilizando la pantalla [0, 14]1 por [−75, 300]1. ¿Qué observa?

En ciudades modernas, donde con frecuencia las áreas residenciales se desarrollan cerca de plantas industriales, es importante monitorear y controlar la emisión de contaminantes. En el ejemplo 3.5.4 se analiza un problema de modelación en el que se utiliza el cálculo para determinar la ubicación de una comunidad donde la contaminación sea mínima.

EJEMPLO | 3.5.4

Dos plantas industriales, A y B, se localizan a 15 millas una de la otra, y emiten 75 ppm (partes por millón) y 300 ppm de partículas contaminantes, respectivamente. Cada planta está rodeada por un área restringida de 1 milla de radio, donde no se permiten viviendas; además, la concentración de contaminantes que llega a cualquier otro punto Q desde cada planta decrece como el recíproco de la distancia entre la planta y Q. ¿Dónde se deberá ubicar una casa sobre un camino que une las dos plantas para minimizar la contaminación total que llega desde ambas plantas?

Solución

Suponga que una casa H se ubica a x millas de la planta A y, por tanto, $15 - x$ millas de la planta B, donde x satisface $1 \leq x \leq 14$ ya que hay 1 milla de área restringida alrededor de cada planta (véase la figura 3.49). Como la concentración de partículas contaminantes que llega a H desde cada planta disminuye como el recíproco de la distancia de la planta a H, la concentración de contaminantes de la planta A es $75/x$ y de la planta B es $300/(15 - x)$. Así, la concentración total de partículas contaminantes que llegan a H está dada por la función

$$P(x) = \underbrace{\frac{75}{x}}_{\text{contamina-ción de A}} + \underbrace{\frac{300}{15 - x}}_{\text{contamina-ción de B}}$$

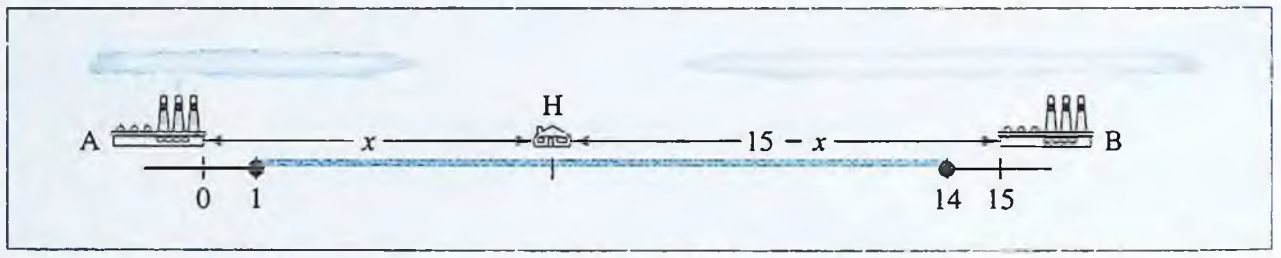


FIGURA 3.49 Contaminación en una casa ubicada entre dos plantas industriales.

Para minimizar la contaminación total $P(x)$, primero encuentre la derivada $P'(x)$ y resuelva $P'(x) = 0$. Aplicando la regla del cociente y la regla de la cadena obtiene

$$P'(x) = \frac{-75}{x^2} + \frac{-300(-1)}{(15 - x)^2} = \frac{-75}{x^2} + \frac{300}{(15 - x)^2}$$

Resolviendo $P'(x) = 0$, se tiene que

$$\frac{-75}{x^2} + \frac{300}{(15 - x)^2} = 0$$

$$\frac{75}{x^2} = \frac{300}{(15 - x)^2}$$

$$75(15 - x)^2 = 300x^2 \qquad \text{al multiplicar en cruz}$$

$$x^2 - 30x + 225 = 4x^2 \qquad \text{al dividir entre 75 y expandir}$$

$$3x^2 + 30x - 225 = 0 \qquad \text{agrupando términos semejantes}$$

www.FreeLibros.com

$$3(x-5)(x+15)=0 \qquad \textit{factorizando}$$
$$x=5,\ x=-15$$

El único número crítico en el intervalo permitido, $1 \le x \le 14$, es $x = 5$. Evaluando $P(x)$ en $x = 5$ y en los dos extremos del intervalo, $x = 1$ y $x = 14$, se obtiene

$$P(1) \approx 96.43 \text{ ppm}$$
$$P(5) = 45 \text{ ppm}$$
$$P(14) \approx 305.36 \text{ ppm}$$

Así, la contaminación total es mínima cuando la casa se ubica a 5 millas de la planta A.

REPASO

Justo-a-tiempo

El símbolo ≈ significa "aproximadamente igual a". Así $a \approx b$ significa "a es aproximadamente igual a b".

EJEMPLO 3.5.5

Se va a tender un cable desde una planta generadora de energía eléctrica, ubicada sobre un lado de un río de 900 metros de ancho, hasta una fábrica que se encuentra al otro lado, 3 000 metros río abajo. El costo de tender el cable bajo el agua es \$5 por metro, mientras que el costo de tenderlo sobre tierra es \$4 por metro. ¿Cuál es la ruta más económica para tender el cable?

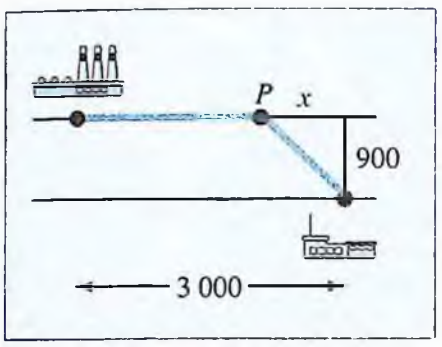


FIGURA 3.50 Posiciones relativas de la fábrica, el río y la planta eléctrica.

Solución

Para ayudarle a entender la situación comience por dibujar un diagrama como el de la figura 3.50. (Advierta que al dibujar el diagrama en la figura 3.50, se supone que el cable debería tenderse en *línea recta* de la planta de generación eléctrica hasta algún punto en la orilla opuesta. ¿Comprende por qué se justifica esta suposición?)

El objetivo es minimizar el costo de instalación del cable. Sea C este costo y represente C de la siguiente forma:

$$C = 5(\text{número de metros de cable bajo el agua}) + 4(\text{número de metros de cable sobre tierra})$$

Como se desea describir la ruta óptima sobre la cual se va a tender el cable, será conveniente escoger una variable en términos de la cual se pueda ubicar fácilmente el punto P. En la figura 3.51 se muestran dos elecciones razonables para la variable x.

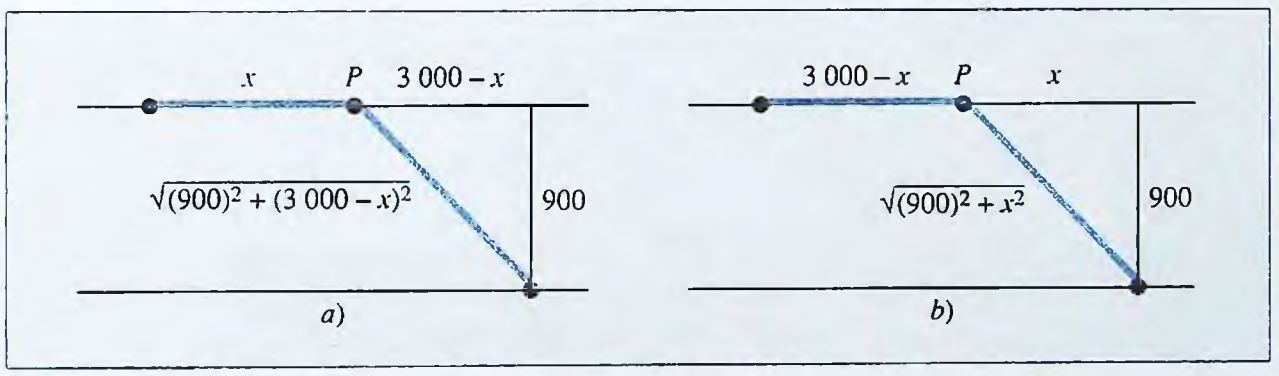
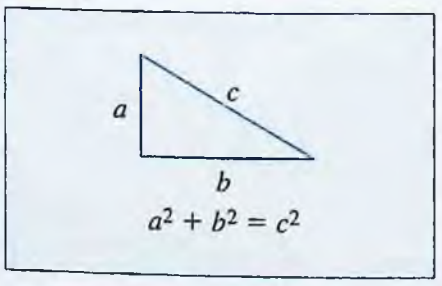


FIGURA 3.51 Dos formas de seleccionar la variable x.

REPASO

Justo-a-tiempo

El teorema de Pitágoras establece que el cuadrado de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.



Antes de lanzarse a hacer cálculos, tome un minuto para decidir cuál selección de variables resulta más cómoda. En la figura 3.51a, la distancia por debajo del agua desde la planta de generación eléctrica hasta el punto P es (por el teorema de Pitágoras) $\sqrt{(900)^2 + (3\,000 - x)^2}$, y la función costo total correspondiente es

$$C(x) = 5\sqrt{(900)^2 + (3\,000 - x)^2} + 4x$$

En la figura 3.51b, la distancia por debajo del agua es $\sqrt{(900)^2 + x^2}$, y la función costo total es

$$C(x) = 5\sqrt{(900)^2 + x^2} + 4(3\,000 - x)$$

www.FreeLibros.com

La segunda función es la más cómoda ya que el término $3\,000 - x$ simplemente se multiplica por 4, mientras que en la primera función ese término está elevado al cuadrado y aparece bajo el símbolo de radical. Por tanto debe seleccionarse x como en la figura 3.51*b* y trabajar con la función costo total

$$C(x) = 5\sqrt{(900)^2 + x^2} + 4(3\,000 - x)$$

Como las distancias x y $3\,000 - x$ no pueden ser negativas, el intervalo significativo es $0 \leq x \leq 3\,000$ y el objetivo es encontrar el mínimo absoluto de la función $C(x)$ en ese intervalo cerrado. Para hallar los valores críticos, calcule la derivada

$$C'(x) = \frac{5}{2}[(900)^2 + x^2]^{-1/2}(2x) - 4 = \frac{5x}{\sqrt{(900)^2 + x^2}} - 4$$

e, igualando a cero, se obtiene

$$\frac{5x}{\sqrt{(900)^2 + x^2}} - 4 = 0 \quad \text{o bien} \quad \sqrt{(900)^2 + x^2} = \frac{5}{4}x$$

Eleve al cuadrado ambos miembros de la ecuación y despeje x para obtener

$$(900)^2 + x^2 = \frac{25}{16}x^2$$

$$x^2 = \frac{16}{9}(900)^2$$

$$x = \pm\frac{4}{3}(900) = \pm 1\,200$$

Como el único valor positivo $x = 1\,200$ está en el intervalo $0 \leq x \leq 3\,000$, evalúe $C(x)$ en su punto crítico y en los extremos $x = 0$ y $y = 3\,000$. Como

$$C(0) = 5\sqrt{(900)^2 + 0} + 4(3\,000 - 0) = 16\,500$$

$$C(1\,200 = 5\sqrt{(900)^2 + (1\,200)^2} + 4(3\,000 - 1\,200) = 14\,700$$

$$C(3\,000 = 5\sqrt{(900)^2 + (3\,000)^2} + 4(3\,000 - 3\,000) = 15\,660$$

se deduce que el costo mínimo de instalación es \$14 700, lo que se obtiene si el cable llega a la orilla opuesta 1 200 metros río abajo de la planta de generación eléctrica.

En el ejemplo 3.5.6 la función que se maximiza tiene significado práctico sólo cuando su variable independiente es un número entero. Sin embargo, el procedimiento de optimización conduce a un valor fraccionario de esta variable, y se requiere un análisis adicional para obtener una solución con sentido.

EJEMPLO | 3.5.6

Una compañía de autobuses alquilará un autobús con capacidad para 50 personas a grupos de 35 personas o más. Si un grupo tiene exactamente 35 personas, cada persona paga \$60. En grupos mayores la tarifa de cada uno se reduce en \$1 por cada persona adicional a las 35. Determine el tamaño del grupo para el cual el ingreso de la compañía de autobuses será máximo.

Solución

Sea R el ingreso de la compañía de autobuses. Entonces,

$$R = (\text{número de personas en el grupo})(\text{tarifa por persona})$$

www.FreeLibros.com

Puede tomar x como el número total de personas en el grupo, pero es un poco más cómodo que x denote el número de personas adicionales a las 35. Entonces,

$$\text{Número de personas en el grupo} = 35 + x$$

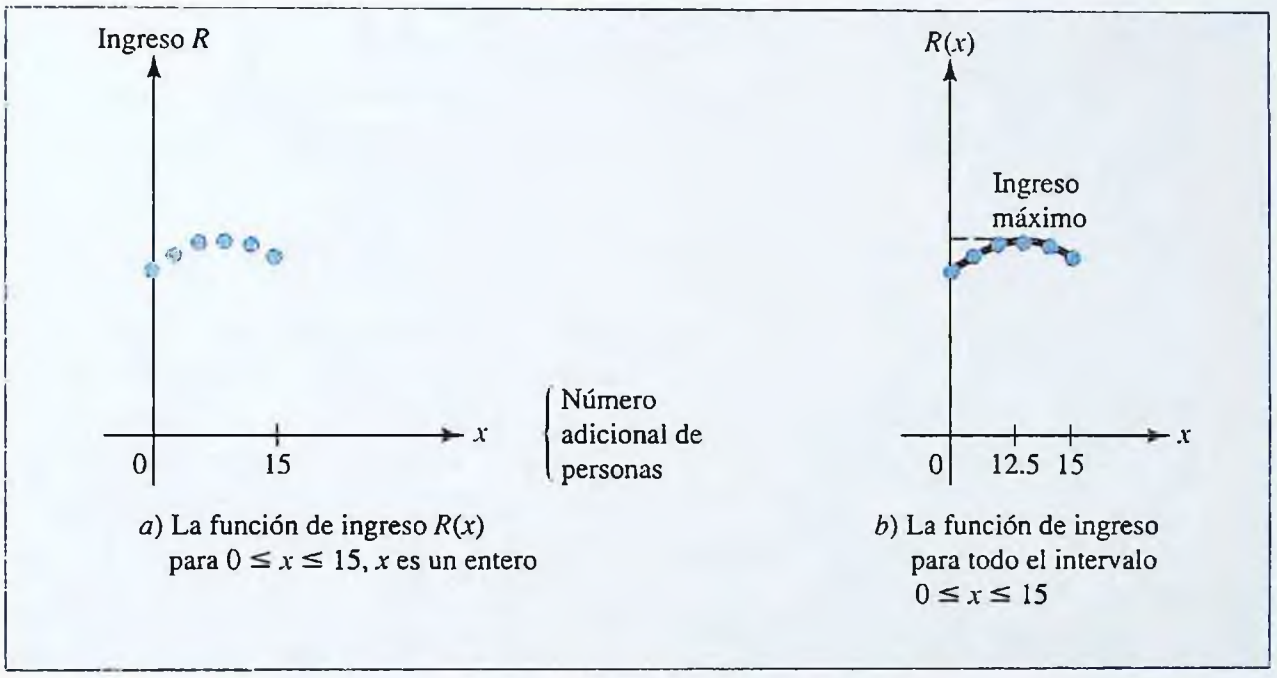
y

$$\text{Tarifa por persona} = 60 - x$$

así que la función ingreso es

$$R(x) = (35 + x)(60 - x)$$

Como x representa el número de personas adicionales a las 35 pero menor a las 50, se desea maximizar $R(x)$ para un entero positivo x en el intervalo $0 \leq x \leq 15$ (véase la figura 3.52*a*). Sin embargo, para utilizar los métodos de cálculo, considere la función *continua* $R(x) = (35 + x)(60 - x)$ definida en todo el intervalo $0 \leq x \leq 15$ (véase la figura 3.52*b*).



a) La función de ingreso $R(x)$ para $0 \leq x \leq 15$, x es un entero

b) La función de ingreso para todo el intervalo $0 \leq x \leq 15$

FIGURA 3.52 La función de ingreso $R(x) = (35 + x)(60 - x)$.

La derivada es

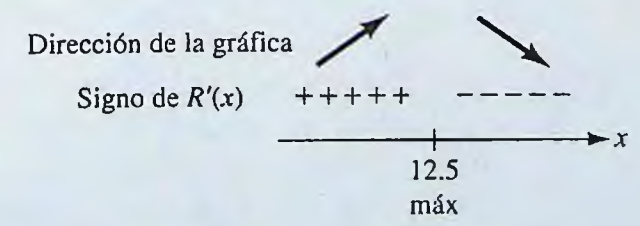
$$R'(x) = (35 + x)(-1) + (60 - x)(1) = 25 - 2x$$

que es cero cuando $x = 12.5$. Como

$$R(0) = 2\,100 \qquad R(12.5) = 2\,256.25 \qquad R(15) = 2\,250$$

se deduce que el máximo absoluto de $R(x)$ en el intervalo $0 \leq x \leq 15$ se alcanza cuando $x = 12.5$.

Pero x representa cierto número de personas y debe ser un número entero. Por esto, $x = 12.5$ no puede ser la solución a este problema de optimización práctica. Para encontrar el valor *entero* óptimo de x, observe que R es creciente para $0 < x < 12.5$ y decreciente para $x > 12.5$, como se muestra en el siguiente diagrama (véase también la figura 3.52*b*).



www.FreeLibros.com

Por lo que el valor entero óptimo de x es $x = 12$ o $x = 13$. Como

$$R(12) = 2\,256 \qquad \text{y} \qquad R(13) = 2\,256$$

se puede concluir que el ingreso de la compañía de autobuses será máximo cuando el grupo tenga 12 o 13 personas adicionales a las 35; es decir, para grupos de 47 o 48. El ingreso en cualquiera de los casos será de $2 256.

Control de inventario

El control de inventario es una consideración importante en los negocios. En particular, por cada pedido de materias primas el fabricante debe pagar gastos de manejo y transporte. Cuando llegan las materias primas, éstas deben almacenarse hasta que se necesiten y el almacenamiento da lugar a costos. Si cada pedido de materias primas es grande, se requerirán pocos envíos y los costos de manejo y transporte serán bajos, mientras que los costos de almacenamiento serán altos. Por otra parte, si cada pedido es pequeño, los costos de manejo y transporte de los pedidos serán altos porque se requerirán muchos envíos, pero los costos de almacenamiento serán pequeños. En el ejemplo 3.5.7 se muestra cómo se pueden utilizar los métodos del cálculo para determinar el tamaño del pedido que minimice el costo total.

EJEMPLO | 3.5.7

Un fabricante de bicicletas compra 6 000 llantas al año a un distribuidor. El costo por la orden y el transporte es de $20 por pedido, el costo de almacenamiento es 96 centavos por llanta al año, y cada llanta cuesta $5.75. Suponga que las llantas se utilizan a una razón constante durante todo el año y que cada pedido llega justo cuando se está acabando el pedido anterior. ¿Cuántas llantas debe ordenar el fabricante en cada pedido para minimizar el costo?

Solución

El objetivo es minimizar el costo total, que se puede expresar como

$$\text{Costo total} = \begin{matrix}\text{costo de}\\ \text{almacenamiento}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{costo de}\\ \text{los pedidos}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{costo de}\\ \text{la compra}\end{matrix}$$

Sea x el número de llantas en cada pedido y $C(x)$ el costo total correspondiente en dólares. Entonces,

$$\text{Costo de los pedidos} = (\text{costo por pedido})(\text{número de pedidos})$$

Como se solicitan 6 000 llantas durante el año y cada pedido contiene x llantas, el número de pedidos es $\dfrac{6\,000}{x}$ y entonces

$$\text{Costo de los pedidos} = 20\left(\frac{6\,000}{x}\right) = \frac{120\,000}{x}$$

Además

$$\begin{aligned}\text{Costo de compra} &= (\text{número total de llantas pedidas})(\text{costo por llanta})\\ &= 6\,000(5.75) = 34\,500\end{aligned}$$

Determinar el costo de almacenamiento es un poco más complicado. Cuando llega un pedido, todas las x llantas se colocan en el almacén y se van sacando a razón constante. El inventario decrece linealmente hasta que no quedan llantas, y en ese momento llega el siguiente pedido. La situación se ilustra en la figura 3.53*a*. Por obvias razones, esto es lo que en ocasiones se denomina **patrón de inventario justo a tiempo.**

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Tome como referencia el ejemplo 3.5.7 y la función de costo $C(t)$, pero varíe el costo por pedido q = \$20. Grafique la función de costo para q = 10, 15, 20 y 25 usando una pantalla de [0, 6 000]500 por [0, 5 000]500. Describa la diferencia entre las gráficas para estos valores de q. En cada caso determine el costo mínimo. Describa cómo cambia el mínimo al variar los valores de q.

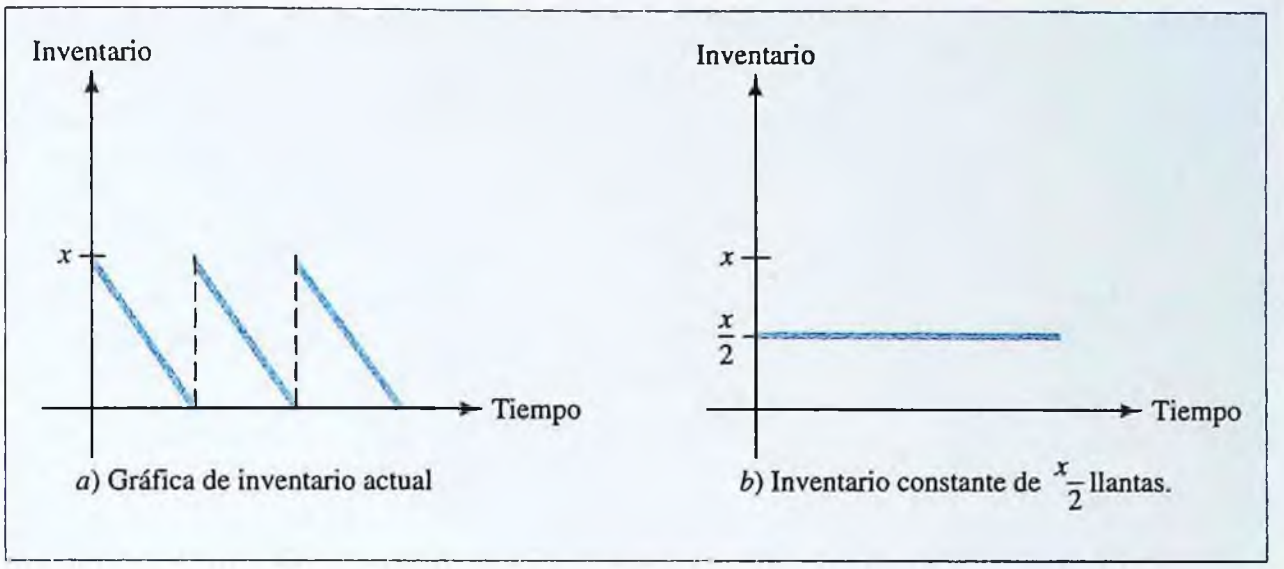


FIGURA 3.53 Gráficas de inventario.

El número promedio de llantas almacenadas durante el año es $x/2$, y el costo total anual de almacenamiento es igual que si se almacenaran $x/2$ llantas durante todo el año (véase la figura 3.53*b*). (Esta afirmación, aunque razonable, no es realmente obvia, y usted tiene todo el derecho de no estar convencido. En el capítulo 5, se analizará cómo probar este hecho matemático utilizando el cálculo integral.) Se sigue que

$$\text{Costo de almacenamiento} = \begin{matrix}(\text{número promedio de llantas almacenadas}) \\ (\text{costo de almacenamiento por llanta})\end{matrix}$$

$$= \frac{x}{2}(0.96) = 0.48x$$

Reuniendo todo, el costo total es

$$C(x) = \underbrace{0.48x}_{\substack{\text{costo de} \\ \text{almacena-} \\ \text{miento}}} + \underbrace{\frac{120\,000}{x}}_{\substack{\text{costo} \\ \text{de los} \\ \text{pedidos}}} + \underbrace{34\,500}_{\substack{\text{costo} \\ \text{de} \\ \text{compra}}}$$

y el objetivo es encontrar el mínimo absoluto de $C(x)$ en el intervalo

$$0 < x \leq 6\,000$$

La derivada de $C(x)$ es

$$C'(x) = 0.48 - \frac{120\,000}{x^2}$$

que es igual a cero cuando

$$x^2 = \frac{120\,000}{0.48} = 250\,000 \qquad \text{o} \qquad x = \pm 500$$

Como $x = 500$ es el único número crítico en el intervalo significativo $0 < x \leq 6\,000$, se puede aplicar el criterio de la segunda derivada para extremos absolutos. La segunda derivada de la función costo es

$$C''(x) = \frac{240\,000}{x^3}$$

www.FreeLibros.com

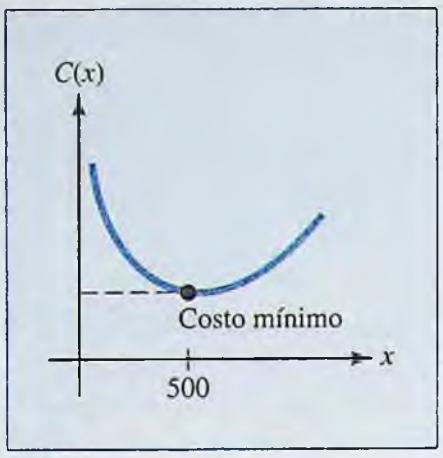


FIGURA 3.54 Costo total

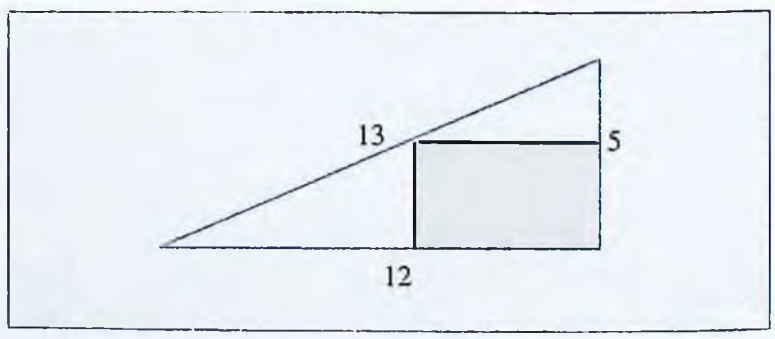
$$C(x) = 0.48x + \frac{120\,000}{x} + 34\,500.$$

que es positiva cuando $x > 0$. Por tanto, el mínimo absoluto del costo total $C(x)$ en el intervalo $0 < x \leq 6\,000$ se alcanza cuando $x = 500$; es decir, cuando el fabricante pide las llantas en lotes de 500. Como referencia, en la figura 3.54 se muestra la gráfica de la función costo total.

NOTA Como en el ejemplo 3.5.7 la derivada del precio de compra, \$34 500 (que es constante), fue cero, esta componente del costo total no tuvo importancia en el problema de optimización. En general, los economistas distinguen entre **costos fijos** (tales como el precio total de compra) y **costos variables** (tales como el almacenamiento y los costos de los pedidos). Para minimizar el costo total, es suficiente minimizar la suma de todos las componentes variables del costo. ▫

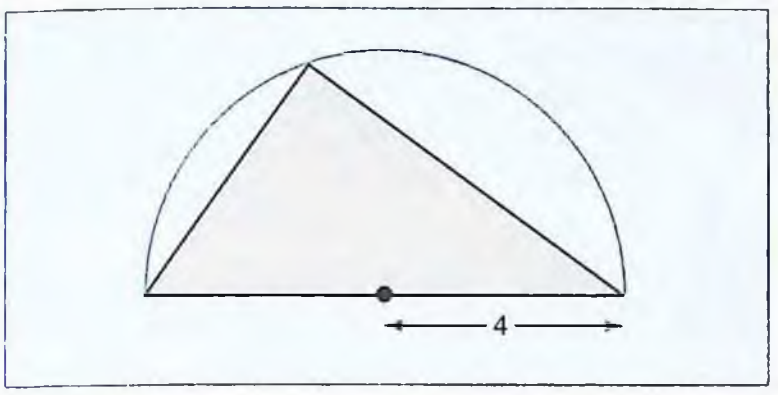
PROBLEMAS | 3.5

1. ¿Qué número excede a su cuadrado en la máxima cantidad? [*Sugerencia*: Encuentre el número x que maximiza $f(x) = x - x^2$.]
2. ¿Qué número excede a su raíz cuadrada en la máxima cantidad?
3. Encuentre dos números positivos cuya suma es 50 y su producto es el mayor posible.
4. Encuentre dos números positivos, x y y, cuya suma sea 30, y tales que xy^2 sea lo mayor posible.
5. VENTAS AL MENUDEO Una tienda vende un popular juego de computadora al precio de \$40 por unidad y, a este precio, los jugadores han comprado 50 unidades por mes. El propietario de la tienda desea incrementar el precio del juego y estima que por cada aumento de \$1 en el precio, se venderán 3 unidades menos cada mes. Si cada unidad cuesta a la tienda \$25, ¿a qué precio deberá venderse el juego para maximizar la utilidad?
6. VENTAS AL MENUDEO Una librería puede comprar cierto libro al editor a un costo de \$3. La librería ofrece el libro a un precio de \$15 por ejemplar, y a este precio ha vendido 200 ejemplares por mes. La librería planea bajar su precio para estimular las ventas y estima que por cada reducción de \$1 en el precio, se venderán 20 libros más cada mes. ¿A qué precio deberá vender el libro la librería para generar la máxima utilidad posible?
7. PRODUCCIÓN AGRÍCOLA Un productor de cítricos de la Florida estima que si se plantan 60 naranjos, la producción promedio por árbol será de 400 naranjas. La producción promedio disminuirá en 4 naranjas por árbol para cada naranjo adicional plantado en la misma unidad de área. ¿Cuántos árboles deberá plantar el agricultor para maximizar la producción total?
8. COSECHA Los agricultores pueden obtener \$2 por arroba de papa el 1 de julio, y después el precio cae en 2 centavos por arroba al día. El 1 de julio un agricultor tiene 80 arrobas de papas en el campo y estima que la cosecha se incrementará a razón de 1 arroba por día. ¿Cuándo se deberá cosechar la papa para maximizar la producción?
9. CERCADO El departamento de recreación de la ciudad planea construir un campo de juego rectangular con un área de 3 600 metros cuadrados y rodearlo con una cerca. ¿Cómo puede cercarse utilizando la mínima cantidad de cerca?
10. CERCADO Hay 320 yardas de cerca disponible para cercar un campo rectangular. ¿Cómo debe utilizarse la cerca para que el área cercada sea lo más grande posible?
11. Demuestre que, de todos los rectángulos con un perímetro dado, el cuadrado tiene la mayor área.
12. Demuestre que, de todos los rectángulos con un área dada, el cuadrado tiene el menor perímetro.
13. Un rectángulo está inscrito en un triángulo rectángulo, como se muestra en la siguiente figura. Si el triángulo tiene lados de longitud 5, 12 y 13, ¿cuáles son las dimensiones del rectángulo inscrito de mayor área?



www.FreeLibros.com

14. Se coloca un triángulo con su hipotenusa sobre el diámetro de un círculo, como se muestra en la siguiente figura. Si el círculo tiene un radio 4, ¿cuáles son las dimensiones del triángulo de área máxima?



15. COSTO DE CONSTRUCCIÓN Se le pide a un carpintero construir una caja abierta con base cuadrada. Los lados de la caja costarán $3 por metro cuadrado, y la base costará $4 por metro cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de máximo volumen que se puede construir con $48?

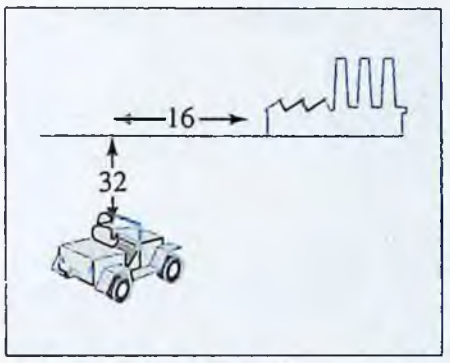
16. COSTO DE CONSTRUCCIÓN Una caja cuadrada cerrada, debe tener un volumen de 250 metros cúbicos. El material para la parte superior e inferior de la caja cuesta $2 por metro cuadrado, y el material para los lados cuesta $1 por metro cuadrado. ¿Se puede construir la caja con menos de $300?

17. DISTANCIA ENTRE OBJETOS MÓVILES Un camión que viaja hacia el Oeste a una velocidad constante de 30 millas por hora se encuentra a 300 millas al Este de un automóvil que viaja hacia el Norte a una velocidad constante de 60 millas por hora. . ¿En qué momento estarán más cerca el automóvil y el camión? [*Sugerencia*: Se simplificará el cálculo si se minimiza el *cuadrado* de la distancia entre el automóvil y el camión en lugar de la distancia. ¿Puede explicar por qué se justifica la simplificación?]

18. COSTO DE INSTALACIÓN Se va a tender un cable desde una planta de generación eléctrica, ubicada a un lado de un río de 1 200 metros de ancho, hasta una fábrica situada en la otra orilla, 1 500 metros río abajo. El costo de tender el cable por debajo del agua es $25 por metro, mientras que el costo de tenderlo por tierra es $20 por metro. ¿Cuál es la ruta más económica para tender el cable?

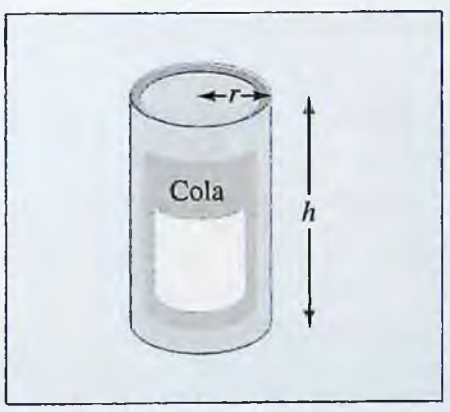
19. COSTO DE INSTALACIÓN Encuentre la ruta más económica en el problema 18 si la planta de generación eléctrica está a 2 000 metros de la fábrica.

20. HISTORIA DE ESPÍAS Es mediodía, el espía está de regreso del espacio (véase el problema 20 en la sección 2.2), conduce un jeep por el desierto aredel pequeño principado de Alta Loma y se encuentra a 32 kilómetros del punto más cercano a una carretera recta pavimentada. A 16 kilómetros carretera abajo se halla una planta de generación eléctrica abandonada donde un grupo de espías rivales mantiene secuestrado a su jefe, cuyo nombre en clave es "N". Si el espía no llega con un rescate a las 12:50 p.m., los chicos malos amenazan hacerle algo a N. El jeep puede recorrer 48 km/hr en arena y 80 km/hr en camino pavimentado. ¿Puede el espía llegar a tiempo, o éste es el fin de N? [*Sugerencia:* El objetivo es minimizar el tiempo, que es la distancia dividida entre la velocidad.]



PROBLEMA 20

21. EMPAQUE Utilice el hecho de que 12 onzas de líquido equivalen aproximadamente a 6.89π pulgadas cúbicas para encontrar las dimensiones del envase de refresco de 12 onzas que se puede construir utilizando la mínima cantidad de metal. Compare estas dimensiones con las de un refresco de lata que está en su refrigerador. ¿Cómo explica la diferencia?



PROBLEMA 21

22. EMPAQUE Una lata cilíndrica debe contener 4π pulgadas cúbicas de jugo de naranja congelado. El costo por pulgada cuadrada para fabricar las partes superior e inferior en metal es el doble del costo de una pulgada cuadrada para fabricar la parte lateral en cartón. ¿Cuáles son las dimensiones de la lata menos costosa?

www.FreeLibros.com

23. EMPAQUE ¿Cuál es el volumen máximo posible de una lata cilíndrica sin tapa que se puede fabricar con 27π pulgadas cuadradas de metal?

24. EMPAQUE Se va a fabricar una lata cilíndrica (con tapa) utilizando una cantidad fija de metal. Utilice el cálculo para deducir una relación simple entre el radio y la altura de la lata de máximo volumen.

25. COSTO DE CONSTRUCCIÓN Se va a fabricar un contenedor cilíndrico sin tapa para almacenar un volumen fijo de líquido. El costo del material utilizado para la base es 3 centavos por pulgada cuadrada, y el de la parte lateral es 2 centavos por pulgada cuadrada. Utilice el cálculo para deducir una relación simple entre el radio y la altura del contenedor menos costoso.

26. DISEÑO DE UN PÓSTER Un impresor recibe un pedido para producir un póster rectangular de 25 centímetros cuadrados de impresión, rodeados por márgenes de dos centímetros en cada lado y 4 centímetros arriba y abajo. ¿Cuáles son las dimensiones de la pieza de papel más pequeña que se puede utilizar para fabricar el póster? [*Sugerencia*: Una selección errónea de las variables complicará los cálculos innecesariamente.]

27. COSTO DE PRODUCCIÓN Una empresa de plásticos ha recibido un pedido del departamento de recreación de la ciudad para fabricar 8 000 tablas de plástico para su programa de natación en verano. La empresa cuenta con 10 máquinas, cada una puede producir 30 tablas por hora. El costo de poner en marcha las máquinas para fabricar las tablas es de $20 por máquina. Una vez que las máquinas echan a andar, la operación es completamente automatizada y puede ser supervisada por un empleado de producción que gana $15 la hora.

a) ¿Cuántas máquinas se deben utilizar para minimizar el costo de producción?

b) ¿Cuánto ganará el supervisor durante un turno de producción si se utiliza el número óptimo de máquinas?

c) ¿Cuánto costará poner en marcha el número óptimo de máquinas?

28. INVENTARIO Una empresa del sector electrónico utiliza 600 cajas de transistores cada año. Cada caja cuesta $1 000. El costo de almacenamiento de cada caja por un año es 90 centavos, y el costo de cada pedido es $30. ¿Cuántas cajas debe pedir la empresa cada vez para mantener el costo total en un mínimo? (Suponga que los transistores se utilizan a una razón constante durante el año y que cada pedido llega justo cuando se acaba el anterior.)

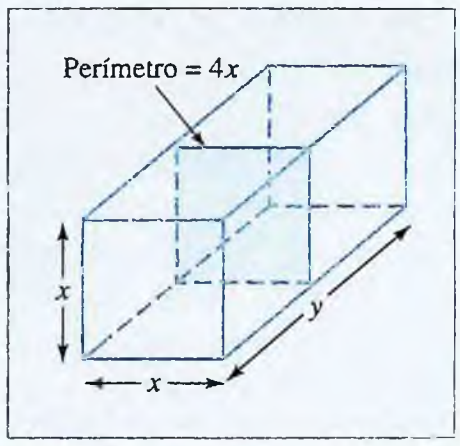
29. INVENTARIO Un almacén espera vender 800 frascos de perfume este año. El perfume cuesta $20 por frasco, el costo de envío es $10 por pedido y el costo de almacenar el perfume es 40 centavos por frasco por año. El perfume se consume a una razón constante en el año y cada envío llega justo antes de que se acabe el anterior.

a) ¿Cuántos frascos debe pedir el almacén en cada envío para minimizar el costo?

b) ¿Con qué frecuencia debe pedir los perfumes el almacén?

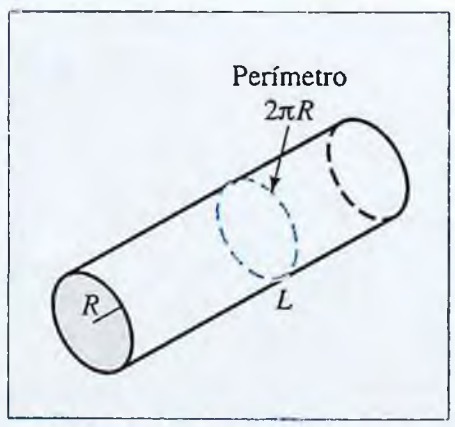
30. CONSTRUCCIÓN Se va a fabricar una caja sin tapa a partir de una pieza de cartón de 18 por 18 pulgadas, eliminando un pequeño cuadrado de cada esquina y doblando las alas para formar los lados. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede fabricarse de esta forma?

31. REGLAMENTOS POSTALES De acuerdo con los reglamentos postales, el perímetro más la longitud de los paquetes enviados por correo de cuarta clase no puede exceder de 108 pulgadas. ¿Cuál es el volumen máximo posible de un paquete rectangular con dos lados cuadrados que puede enviarse por este tipo de correo?



PROBLEMA 31

32. REGLAMENTOS POSTALES Remítase al problema 31. ¿Cuál es el máximo volumen de un paquete cilíndrico que puede enviarse por correo de cuarta clase?



PROBLEMA 32

www.FreeLibros.com

33. COSTO MÍNIMO Un fabricante determina que al producir x unidades al día (para $0 < x < 100$), tiene tres tipos de costos:

a. Un costo fijo de \$1 200 al día en salarios.

b. Un costo de producción de \$1.20 por día por cada unidad producida.

c. Un costo por pedido de $100/x^2$ dólares por día.

Exprese el costo total como una función de x y determine el nivel de producción correspondiente al costo total mínimo.

34. COSTO DE PRODUCCIÓN En cierta fábrica, cada máquina puede producir 50 unidades por hora. El costo de puesta en marcha es \$80 por máquina y el costo de operación es \$5 por hora. ¿Cuántas máquinas deben utilizarse para producir 8 000 unidades al menor costo posible? (Recuerde que la respuesta debe ser un número entero.)

35. VENTAS AL POR MENOR Un minorista ha comprado varias cajas de cierto vino importado. Al principio, a medida que el vino se añeja, su valor aumenta , pero con el tiempo el vino pierde calidad y su valor se reduce. Suponga que dentro de x años el valor de una caja cambiará a una tasa de $53 - 10x$ dólares por año. Suponga además que los costos de almacenamiento permanecerán fijos a \$3 por caja al año. ¿Cuándo debería vender el vino el minorista para obtener la máxima utilidad posible?

36. COSTO DE TRANSPORTE Para velocidades entre 40 y 65 millas por hora, un camión recorre $480/x$ millas por galón cuando se conduce a una velocidad constante de x millas por hora. El combustible diesel cuesta \$1.12 por galón, y se paga al conductor \$12 la hora. ¿Cuál es la velocidad constante más económica entre 40 y 65 millas por hora a la cual se puede conducir el camión?

37. COSTO ÓPTIMO DE PUESTA EN MARCHA Suponga que, en cierta fábrica, el costo de puesta en marcha es directamente proporcional al número N de máquinas utilizadas y el costo de operación es inversamente proporcional a N. Demuestre que cuando el costo total es mínimo, el costo de puesta en marcha es igual al costo de operación.

38. RECICLAJE Para recolectar dinero, un club de servicios ha estado juntando botellas usadas que planea vender a una compañía local de vidrios para reciclarlas. Como el proyecto comenzó hace 80 días, el club ha recolectado 24 000 libras de vidrio que la compañía de vidrio comprará a 1 centavo la libra. Sin embargo, debido a que las botellas se acumulan más rápido de lo que pueden reciclarse, la compañía planea reducir en 1 centavo cada día el precio que pagará por 100 libras de vidrio usado. Suponga que el club puede continuar recolectando botellas al mismo ritmo y que los costos de transporte impiden que la compañía realice más de un viaje. ¿Cuál es el momento más ventajoso para que el club concluya su proyecto y entregue las botellas?

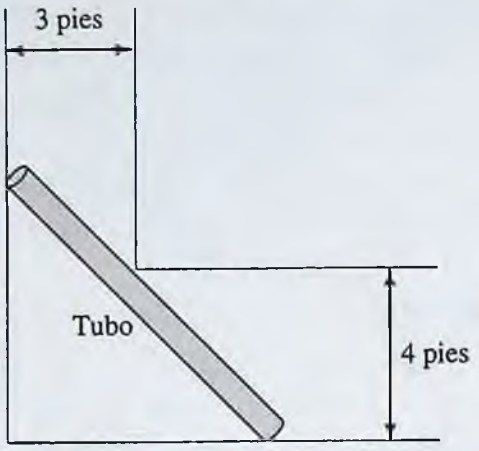
39. COSTO DE INSTALACIÓN La compañía que instala el cable del ejemplo 3.5.5 ha contratado a Frank Kornercutter como consultor para el verano. Frank, recordando un problema decálculo de primer año, afirma que independientemente de la distancia a la que este ubicada la fábrica río abajo (más allá de 1 200 metros), lo más económico es tender el cable hasta la orilla opuesta a 1 200 metros río abajo de la planta de generación eléctrica. El supervisor, asombrado por la ingenuidad de Frank dice: "Cualquier tonto puede comprender que si la fábrica está más distante, el cable debería alcanzar la orilla opuesta más lejos río abajo. ¡Es sólo sentido común!" Claro que Frank no es un tonto corriente, pero ¿tiene razón o no? ¿Por qué?

40. COSTO DE TRANSPORTE Se alquila un camión para transportar productos de una fábrica a una bodega. El salario del conductor se ha fijado por horas y es inversamente proporcional a la velocidad a la cual conduce el camión. La cantidad de gasolina utilizada es directamente proporcional a la velocidad a la cual se conduce el camión, y el precio de la gasolina permanece constante durante el viaje. Demuestre que el costo total es mínimo para la velocidad en que el salario del conductor es igual al costo de la gasolina utilizada.

41. PLANEACIÓN URBANA Dos plantas industriales, A y B, se ubican a 18 millas una de otra, y cada día emiten 80 ppm (partes por millón) y 720 ppm de partículas de contaminantes, respectivamente. La planta A está rodeada por un área restringida de 1 milla de radio, mientras que el área restringida alrededor de la planta B tiene un radio de 2 millas. La concentración de partículas contaminantes que llega a cualquier otro punto Q desde cada planta disminuye como el recíproco de la distancia entre una planta y Q. ¿Dónde se debe ubicar una casa entre las dos plantas para minimizar la concentración total de partículas contaminantes que llegan desde ambas plantas?

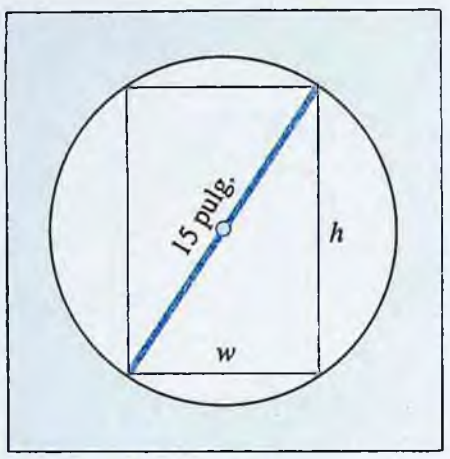
42. CONSTRUCCIÓN Como parte de un proyecto de construcción, es necesario pasar un tubo por una esquina, tal como se muestra en la siguiente figura. ¿Cuál es la longitud del tubo más largo que se puede pasar para colocar horizontalmente?

www.FreeLibros.com



PROBLEMA 42

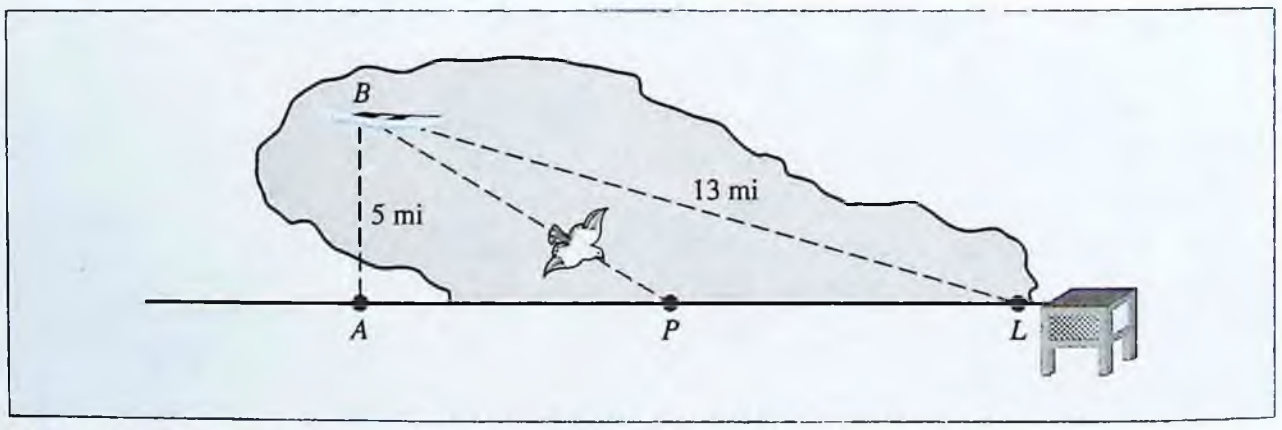
43. CONSTRUCCIÓN La resistencia de una viga rectangular es proporcional al producto de su ancho w por el cubo de su altura h. Encuentre las dimensiones de la viga más resistente que puede cortarse de un tronco de madera de 15 pulgadas de diámetro. (Observe la siguiente figura.)



PROBLEMA 43

44. PLANEACIÓN URBANA En el problema 41 suponga que la concentración de partículas contaminantes que llegan al punto Q desde cada planta disminuye como el recíproco del *cuadrado* de la distancia entre esa planta y Q. Con esta modificación, ¿dónde debe ubicarse una casa para minimizar la concentración total de partículas contaminantes que llegan desde ambas plantas?

45. COMPORTAMIENTO DE LOS PÁJAROS Las palomas mensajeras muy rara vez vuelan sobre grandes extensiones de agua, a menos que se vean forzadas a hacerlo; esto puede ser debido a que requieren más energía para mantener cierta altura en vuelo en el aire pesado sobre agua fría.[10] Suponga que se suelta una paloma desde un bote B que está a 5 millas del punto A en la costa y a 13 millas de su palomar L, como se muestra en la siguiente figura. Suponiendo que la paloma requiere el doble de energía cuando vuela sobre agua que cuando lo hace sobre tierra, ¿qué trayectoria debe seguir la paloma para minimizar la energía total gastada en volar desde el bote hasta su palomar? Suponga que la costa es recta y describa su trayectoria como una recta desde B a un punto P de la costa seguida de una recta del punto P al L.



PROBLEMA 45

46. CONSTRUCCIÓN La resistencia de una viga rectangular es proporcional al producto de su ancho por el cuadrado de su altura. Encuentre las dimensiones de la viga más resistente que puede cortarse de un tronco de madera de 15 pulgadas de diámetro.

47. COSTO DE PRODUCCIÓN Una empresa recibe un pedido de q unidades de cierto artículo. Cada una de las máquinas de la empresa puede producir n unidades por hora. El costo de poner en marcha cada máquina es s dólares y el costo de operación es p dólares por hora.

a) Deduzca una fórmula que permita encontrar el número de máquinas que deben utilizarse para mantener el costo total tan bajo como sea posible.

b) Demuestre que, cuando el costo total es mínimo, el costo de poner en marcha las máquinas es igual al costo de operación de las máquinas.

48. INVENTARIO El modelo de inventario analizado en el ejemplo 3.5.7 no es el único modelo posible. Suponga que una compañía debe suministrar N unidades por periodo a un ritmo uniforme, que el costo de almacenamiento por unidad es D_1 dólares por periodo y que el costo de poner en marcha las máquinas es D_2 dólares. Si la producción se realiza

[10] E. Batschelet, *Introduction to Mathematics of Life Sciences*, 3a. edición, Nueva York, Springer-Verlag, 1979, páginas 276-277.

www.FreeLibros.com

a un ritmo uniforme de m unidades por periodo (sin artículos en inventario al final de cada periodo), se puede demostrar que el costo total de almacenamiento es

$$C_1 = \frac{D_1 x}{2}\left(1 - \frac{N}{m}\right)$$

donde x es el número de artículos producidos en cada turno.

a) Demuestre que el costo promedio total por periodo es

$$C = \frac{D_1 x}{2}\left(1 - \frac{N}{m}\right) + \frac{D_2 N}{x}$$

b) Encuentre una expresión para el número de artículos que deben ser producidos en cada turno para minimizar el costo promedio total por periodo.

c) La cantidad óptima encontrada en el problema de inventario del ejemplo 3.5.7 algunas veces se denomina **cantidad económica del pedido (CEO)**, mientras que la cantidad óptima encontrada en el inciso *b*) de este problema se denomina **cantidad económica de producción (CEP)**. La administración moderna de inventarios va más allá de las sencillas condiciones de los modelos CEO y CEP, pero los elementos de estos modelos todavía son muy importantes. Por ejemplo, el patrón de inventario justo a tiempo descrito en el ejemplo 3.5.7 se ajusta a la filosofía de administración de producción de los japoneses. Lea un artículo sobre los métodos de producción japoneses y escriba un párrafo del por qué los japoneses consideran no deseable el uso de espacio para almacenamiento de materiales.[11]

49. EFECTO DEL GRAVAMEN SOBRE UN MONOPOLIO Un **monopolista** es un fabricante que puede manipular el precio de un artículo y, generalmente, lo hace para tener la máxima utilidad. Cuando el Gobierno fija impuestos a la producción, éstos se vuelven un costo adicional y el monopolista se ve obligado a decidir cuánto impuesto absorber y cuánto pasarle al consumidor.

Suponga que cierto monopolista estima que cuando se producen x unidades, el costo total será $C(x) = \frac{7}{8}x^2 + 5x + 100$ dólares y el precio del artículo en el mercado será $p(x) = 15 - \frac{3}{8}x$ dólares la unidad. Además, suponga que el Gobierno establece un impuesto de t dólares a cada unidad producida.

a) Demuestre que la utilidad se maximiza cuando $x = \frac{2}{5}(10 - t)$.

b) Suponga que el gobierno asume que el monopolista siempre actuará de tal forma que pueda maximizar la utilidad total. ¿Qué valor de t debería escogerse para garantizar la máxima recaudación tributaria total?

c) Si el gobierno elige la tasa tributaria óptima calculada en el inciso *b*), ¿cuánto absorberá el monopolista y cuánto se trasladará al consumidor?

d) Lea un artículo sobre impuestos y escriba un párrafo sobre cómo éste afecta el gasto del consumidor.[12]

50. PRODUCTIVIDAD PROMEDIO La productividad Q en cierta fábrica es una función del número L de horas-trabajador utilizadas. Emplee el cálculo para demostrar que cuando la producción promedio por hora-trabajador es máxima, es igual a la producción marginal por hora-trabajador. [*Sugerencia*: La producción marginal por hora-trabajador es la derivada de la producción Q con respecto al trabajo L.] Puede suponer sin demostración que el punto crítico de la función de producción promedio es en realidad el máximo absoluto esperado.

[11] Usted podría empezar su investigación con el texto de Phikip E. Hicks, *Industrial Engineering and Management: A New Perspective*, McGraw-Hill, Inc. Nueva York, 1994, páginas 144-170.

[12] Usted podría empezar su investigación consultando las siguientes referencias: Robert Eisner, *The Misunderstood Economics: What Counts and How to Count It*, Harvard Business School Press, Boston, MA, 1994, páginas 196-199; y Robert H. Frank, *Microeconomics and Behavior*, 2a. ed., McGraw-Hill, Inc., Nueva York, 1994, páginas 656-657.

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Términos importantes, símbolos y fórmulas

f es creciente $f'(x) > 0$ (185)

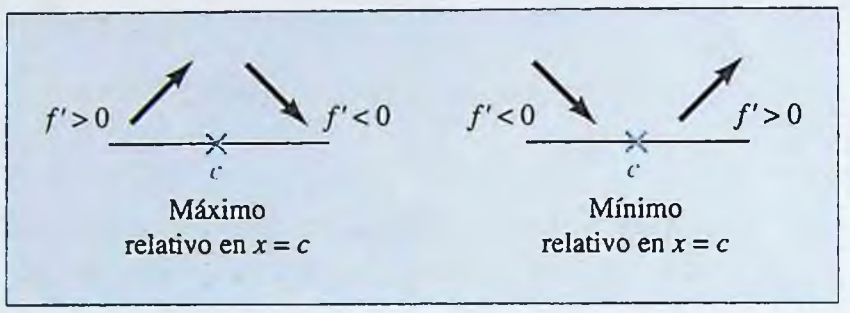
f es decreciente $f'(x) < 0$ (185)

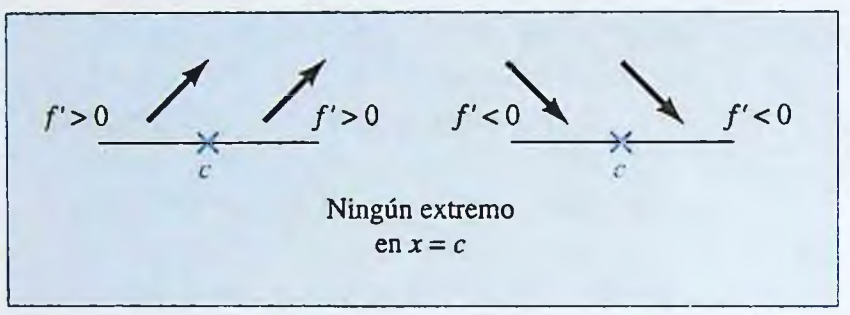
Punto crítico: $(c, f(c))$, donde $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe (188)

Máximos y mínimos relativos (188)

Criterio de la primera derivada para extremos relativos: (189)

Si $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe, entonces





Punto de rendimientos decrecientes (200)

Concavidad: (200)

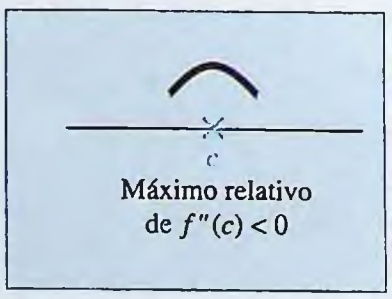
hacia arriba si $f'(x)$ es creciente; es decir $f'(x) > 0$

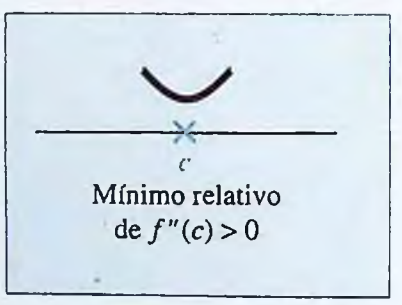
hacia abajo si $f'(x)$ es decreciente; es decir $f'(x) < 0$

Punto de inflexión: punto de la gráfica donde la concavidad cambia (203)

Criterio de la segunda derivada para extremos relativos: (209)

Si $f'(c) = 0$, entonces





Asíntota vertical (216)

Asíntota horizontal (218)

Máximos y mínimos absolutos (231)

Propiedad de valor extremo: (231)

Los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado $a \le x \le b$ se alcanzan en puntos críticos en $a < x < b$ o en puntos extremos del intervalo (a o b).

Criterio de la segunda derivada para extremos absolutos: (236)

Si $f(x)$ tiene sólo un punto crítico $(c, f(c))$, en un intervalo, este punto es un máximo absoluto si $f''(c) < 0$ y un mínimo absoluto si $f''(c) > 0$.

La utilidad $P(q) = R(q) - C(q)$ se maximiza cuando el ingreso marginal es igual al costo marginal; $R'(q) = C'(q)$. (238)

El costo promedio $A(q) = \dfrac{C(q)}{q}$ se minimiza cuando el costo promedio es igual al costo marginal;

$A(q) = C'(q)$. (239)

Elasticidad de la demanda: $q = D(p)$:

$$E(p) = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} \quad (240)$$

Niveles de elasticidad de la demanda: (241)

inelástica si $|E(p)| < 1$

elástica si $|E(p)| > 1$

de elasticidad unitaria si $|E(p)| = 1$

Modelos de inventario (258)

www.FreeLibros.com

Revisión del capítulo 3

1. Encuentre los intervalos de crecimiento y decrecimiento para cada una de estas funciones y determine si cada número crítico corresponde a un máximo relativo, a un mínimo relativo o a ninguno de los dos.

a) $f(x) = -x^4 + 4x^3 + 5$

b) $f(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 5$

c) $g(t) = \dfrac{t}{t^2 + 9}$

d) $g(x) = \dfrac{4 - x}{x^2 + 9}$

2. Determine dónde la gráfica de cada una de estas funciones es cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo. Encuentre las coordenadas x (o t) de cada punto de inflexión.

a) $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 2x - 5$

b) $f(x) = 3x^5 + 20x^4 - 50x^3$

c) $f(t) = \dfrac{t^2}{t - 1}$

d) $g(t) = \dfrac{3t^2 + 5}{t^2 + 3}$

3. Determine todas las asíntotas verticales y horizontales para la gráfica de cada una de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 3}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{2x^2 + x - 3}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

4. Trace la gráfica de cada una de las siguientes funciones. Asegúrese de mostrar todas las características claves tales como intersecciones, asíntotas, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión, picos y tangentes verticales.

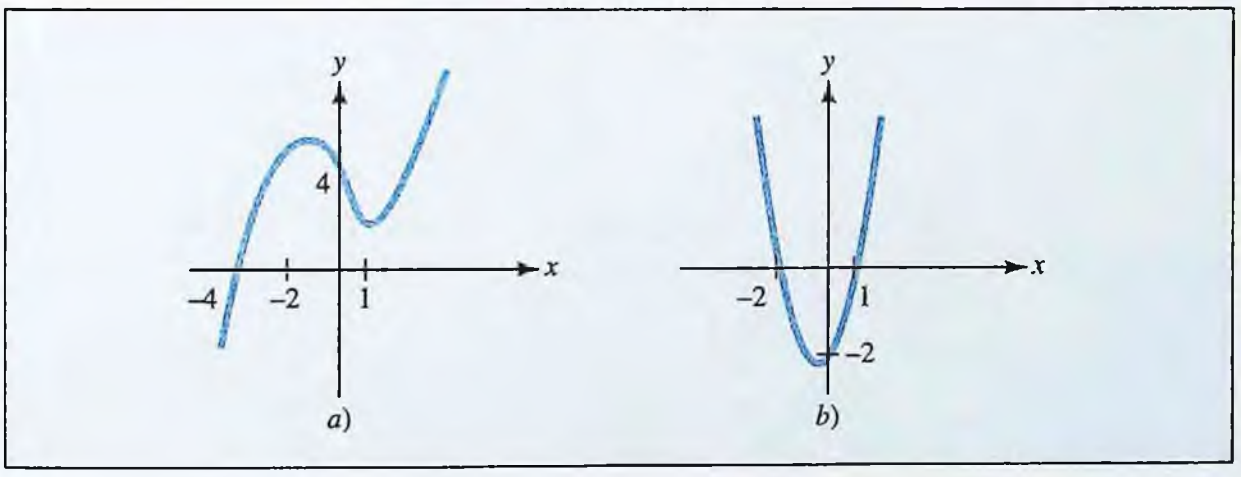
a) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$

b) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{1 - 2x}{(x - 1)^2}$

5. De las dos curvas que se muestran a continuación, una es la gráfica de una función $f(x)$ y la otra es la gráfica de su derivada $f'(x)$. Determine cuál gráfica es la derivada y explique por qué.



6. Trace la gráfica de una función $f(x)$ con las propiedades indicadas:

a) $f'(x) > 0$ para $x < 0$ y para $0 < x < 2$

b) $f'(x) < 0$ para $x > 2$

c) $f'(0) = f'(2) = 0$

d) $f''(x) < 0$ para $x < 0$ y para $x > 1$

e) $f''(x) > 0$ para $0 < x < 1$

f) $f(-1) = f(4) = 0; f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 3$

7. EFICIENCIA DE UN TRABAJADOR Un empleado postal llega al trabajo a las 6 a.m. y t horas después ha clasificado aproximadamente $f(t) = -t^3 + 7t^2 + 200t$ cartas. ¿En qué momento desarrolla el empleado su máxima eficiencia durante el periodo de las 6 a.m. a las 10 a.m.?

8. MAXIMIZANDO LA UTILIDAD Un fabricante puede producir reproductores de CD a un costo de $20 la pieza. Se estima que si los

www.FreeLibros.com

reproductores se venden a x dólares cada uno, entonces los consumidores compraran $120 - x$ de ellos al mes. ¿Qué precio unitario debe fijar el fabricante para maximizar su utilidad?

9. CONCENTRACIÓN DE UN MEDICAMENTO La concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo de un paciente t horas después de que se inyectó está dada por

$$C(t) = \frac{0.05t}{t^2 + 27}$$

miligramos por centímetro cúbico.

a) Trace la gráfica de la función de concentración.

b) ¿En qué momento decrece la concentración más rápidamente?

c) ¿Qué le sucede a la concentración a largo plazo (cuando $t \to +\infty$)?

10. POBLACIÓN DE BACTERIAS Se estima que una colonia de bacterias tiene una población de

$$P(t) = \frac{15t^2 + 10}{t^3 + 6} \text{ millón}$$

t horas después de la introducción de una toxina.

a) ¿Cuál es la población en el instante en que se introduce la toxina?

b) ¿Cuándo ocurre la máxima población?

c) Trace la gráfica de la curva de población. ¿Qué sucede a la población a largo plazo (cuando $t \to +\infty$)?

Problemas de repaso

En los problemas 1 a 10 determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los intervalos de diferente concavidad para la función dada. Después trace la gráfica de la función. Asegúrese de mostrar todas las características claves tales como intersecciones, asíntotas, máximos y mínimos relativos, puntos de inflexión, picos y tangentes verticales.

1. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5$

2. $f(x) = x^2 - 6x + 1$

3. $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - 12x + 17$

4. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

5. $f(t) = 3t^5 - 20t^3$

6. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$

7. $g(t) = \dfrac{t^2}{t + 1}$

8. $G(x) = (2x - 1)^2(x - 3)^3$

9. $F(x) = 2x + \dfrac{8}{x} + 2$

10. $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x}$

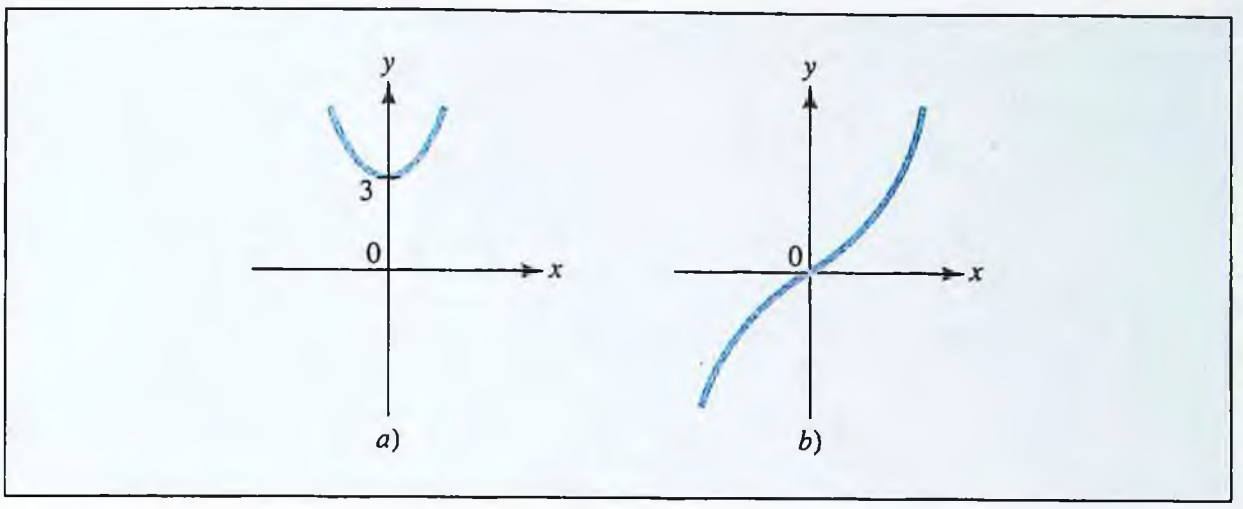
En los problemas 11 y 12 se da la derivada $f'(x)$ de una función. Utilice esta información para clasificar cada número crítico de $f(x)$ como un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguna de las dos cosas.

11. $f'(x) = x^3(2x - 3)^2(x + 1)^5(x - 7)$

12. $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2(x^2 + 1)}$

www.FreeLibros.com

13. De las dos curvas que se muestran a continuación, una es la gráfica de una función $f(x)$ y la otra es la gráfica de su derivada $f'(x)$. Determine cuál gráfica es la derivada y explique por qué.



En los problemas 14 a 16 trace la gráfica de una función f que tenga todas las propiedades indicadas.

14. *a)* $f'(x) > 0$ cuando $x < -2$ y cuando $-2 < x < 3$
b) $f'(x) < 0$ cuando $x > 3$
c) $f'(-2) = 0$ y $f'(3) = 0$

15. *a)* $f'(x) > 0$ cuando $x < 0$ y cuando $x > 5$
b) $f'(x) < 0$ cuando $0 < x < 5$
c) $f''(x) > 0$ cuando $-6 < x < -3$ y cuando $x > 2$
d) $f''(x) < 0$ cuando $x < -6$ y cuando $-3 < x < 2$

16. *a)* $f'(x) > 0$ cuando $x < 1$
b) $f'(x) < 0$ cuando $x > 1$
c) $f''(x) > 0$ cuando $x < 1$ y cuando $x > 1$
d) $f'(1)$ es indefinida.

En los problemas 17 a 20 encuentre todos los números críticos de la función dada f(x) y use el criterio de la segunda derivada para determinar cuáles puntos críticos son máximos relativos o mínimos relativos(si los hay).

17. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5$

18. $f(x) = x(2x - 3)^2$

19. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$

20. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{(x + 3)}$

En los problemas 21 a 24 encuentre los valores máximo absoluto y mínimo absoluto (si los hay) de la función dada en el intervalo indicado.

21. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 5; -3 \leq x \leq 3$

22. $f(t) = -3t^4 + 8t^3 - 10; 0 \leq t \leq 3$

23. $g(s) = \dfrac{s^2}{s + 1}; -\dfrac{1}{2} \leq s \leq 1$

24. $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x} + 2; x > 0$

25. La primera derivada de cierta función es $f'(x) = x(x - 1)^2$.
a) ¿En qué intervalos es f creciente? ¿En cuáles es decreciente?
b) ¿En qué intervalos la gráfica de f es cóncava hacia arriba? ¿En cuáles es cóncava hacia abajo?
c) Encuentre las coordenadas x de los extremos relativos y puntos de inflexión de f.
d) Trace una posible gráfica de $f(x)$.

26. DISEÑO ÓPTIMO Un granjero desea cercar un pastizal rectangular con 320 pies de cerca. ¿Qué dimensiones dan el área máxima si:
a) se van a cercar los cuatro lados del pastizal?
b) se cercan 3 lados del pastizal y el cuarto lado está limitado por una pared?

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

27. UTILIDAD Un fabricante puede producir radios a un costo de \$5 la pieza y estima que si éstos se vendieran a x dólares la pieza, los consumidores comprarían $20 - x$ radios al día. ¿A qué precio se deben vender los radios para maximizar la utilidad?

28. CONTROL DEL TRÁFICO Se estima que entre el mediodía y las 7:00 p.m., la velocidad del tráfico en una carretera que pasa por la salida del centro de la ciudad es aproximadamente $S(t) = t^3 - 9t^2 + 15t + 45$ millas por hora, donde t es el número de horas después del mediodía. ¿En qué momento entre el mediodía y las 7:00 p.m. va más rápido el tráfico, y en qué instante entre el mediodía y las 7:00 p.m. va más lento?

29. PROPAGACIÓN DE UN RUMOR La tasa a la cual se difunde un rumor por una comunidad es conjuntamente proporcional al número de personas que ha escuchado el rumor y al número que no lo ha escuchado. Demuestre que el rumor se propaga más rápidamente cuando la mitad de las personas lo ha escuchado.

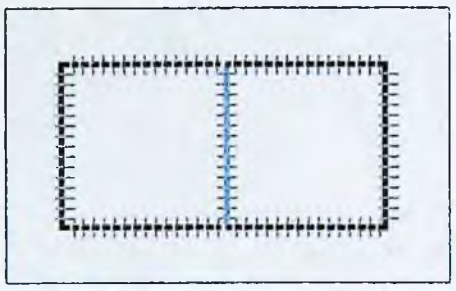
30. COSTO DE CONSTRUCCIÓN Se debe construir una caja rectangular de un material que cuesta \$2/pulg^2 para los lados y la base, y \$3/pulg^2 para la tapa. Si la caja debe tener un volumen de 1 215 pulg^3 y la longitud de la base debe ser el doble de su ancho, ¿qué dimensiones de la caja minimizan su costo de fabricación? ¿Cuál es el costo mínimo?

31. COSTO DE CONSTRUCCIÓN Se debe construir un contenedor cilíndrico, sin tapa, con una cantidad fija de dinero. El costo del material utilizado en la parte inferior es 3 centavos por pulgada cuadrada, y el costo del material utilizado en la parte lateral es 2 centavos por pulgada cuadrada. Utilice el cálculo para obtener una relación simple entre el radio y la altura del contenedor de máximo volumen.

32. UTILIDAD Un fabricante vende lámparas a \$6 la pieza, a este precio, los consumidores compran 3 000 lámparas al mes. El fabricante desea subir el precio y estima que por cada aumento de \$1 en el precio, se venderán 1 000 lámparas menos cada mes. El fabricante puede producir lámparas a un precio de \$4 cada una. ¿A qué precio debe vender las lámparas el fabricante para generar la máxima utilidad posible?

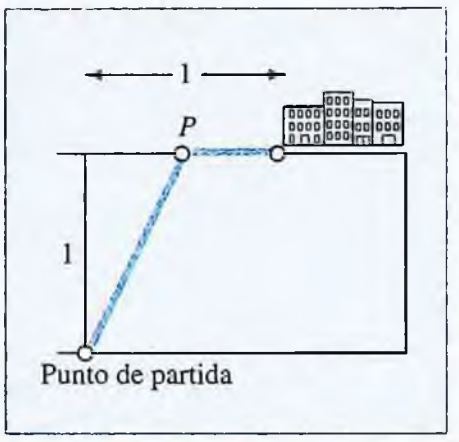
33. UTILIDAD Una tienda que vende postales de beisbol puede conseguir las del novato Mel Schlabotnik a un costo de \$5 cada postal. La tienda las ofrece a \$10 cada una, y a este precio se venden 25 postales al mes. La tienda planea bajar el precio para estimular las ventas y estima que por cada 25 centavos que se reduzca el precio, se venderán 5 postales más cada mes. ¿A qué precio deben venderse las postales para maximizar la utilidad total mensual?

34. CONSTRUCCIÓN Se desea utilizar 300 metros de cerca para delimitar dos lotes rectangulares adyacentes como se muestra en la figura. ¿Cómo debe hacerse el trabajo para que el área total de los dos lotes sea la máxima posible?



PROBLEMA 34

35. MINIMIZACIÓN DEL TIEMPO DE VIAJE Una persona está parada a la orilla de un río de 1 milla de ancho y quiere llegar a un pueblo que está en la orilla opuesta, a una milla río arriba. La persona planea remar en línea recta hasta algún punto P en la orilla opuesta y después caminar la distancia restante a lo largo de la orilla. ¿Hasta qué punto P debe remar para llegar al pueblo en el tiempo más corto posible si puede remar a 4 millas por hora y caminar a 5 millas por hora?



PROBLEMA 35

36. ELASTICIDAD DE LA DEMANDA Suponga que la ecuación de demanda de cierto artículo es $q = 60 - 0.1p$ (para $0 \leq p \leq 600$).

a) Exprese la elasticidad de la demanda como una función de p.

b) Calcule la elasticidad de la demanda cuando el precio es $p = 200$. Interprete su respuesta.

c) ¿A qué precio la elasticidad de la demanda es igual a -1?

www.FreeLibros.com

37. ELASTICIDAD DE LA DEMANDA Suponga que la ecuación de demanda de cierto artículo es $q = 200 - 2p^2$ (para $0 \le p \le 10$).

a) Exprese la elasticidad de la demanda como una función de p.

b) Calcule la elasticidad de la demanda cuando el precio es $p = 6$. Interprete su respuesta.

c) ¿A qué precio la elasticidad de la demanda es igual a -1?

38. CONSTRUCCIÓN DE CASAS Un urbanista estima que si se construyen 60 casas de lujo en cierta área, la utilidad promedio será de $47 500 por casa. Por cada casa adicional que se construya en el área, la utilidad promedio se reducirá en $500 por casa. ¿Cuántas casas debe construir el urbanista para maximizar la utilidad total? (Recuerde que la respuesta debe ser un entero.)

39. INVENTARIO Una empresa recibió un pedido para fabricar 400 000 medallas conmemorativas del bicentenario de la compra de Louisiana. La empresa tiene 20 máquinas, cada una de las cuales puede producir 200 medallas por hora. El costo de puesta en marcha de las máquinas para producir las medallas es $80 por máquina y el costo total de operación es $5.76 por hora. ¿Cuántas máquinas deben utilizarse para minimizar el costo de producir las 400 000 medallas?

40. EFICIENCIA DEL TRABAJADOR Un estudio de eficiencia del turno de la mañana de cierta fábrica indica que un trabajador promedio que llega a su trabajo a las 8:00 p.m. habrá ensamblado $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 15x$ radios transistores x horas más tarde. Además, el estudio indica que después de un descanso de 15 minutos el trabajador puede ensamblar $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 23x$ radios en x horas. Determine el momento entre las 8:00 y el mediodía en que debería programarse el descanso de 15 minutos, con el fin de que para la hora del almuerzo, a las 12:15 p.m, el trabajador haya ensamblado el máximo número de radios. [*Sugerencia*: si el descanso comienza x horas después de las 8:00 a.m., quedarán $4 - x$ horas después del descanso.]

41. ANÁLISIS DE COSTOS Se estima que el costo de construir un edificio para oficinas de n pisos de altura es $C(n) = 2n^2 + 500n + 600$ miles de dólares. ¿Cuántos pisos debe tener un edificio para minimizar el costo promedio por piso? (Recuerde que su respuesta debe ser un número entero.)

42. ELASTICIDAD E INGRESO Suponga que la demanda de cierto artículo es $q = 500 - 2p$ unidades cuando el precio es p dólares por unidad, para $0 \le p \le 250$.

a) Determine dónde la demanda es elástica, inelástica y de elasticidad unitaria con respecto al precio.

b) Utilice los resultados del inciso (a) para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función de ingreso, así como el precio al cual el ingreso es máximo.

c) Encuentre explícitamente la función de ingreso total y utilice su primera derivada para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como el precio al cual el ingreso es máximo.

43. DEMANDA DE BOLETOS Una compañía de cruceros estima que cuando el precio de cada camarote de lujo en cierto crucero se fija en p miles de dólares, entonces q boletos para dichos camarotes serán demandados por los viajeros, donde $q = 300 - 0.7p^2$.

a) Encuentre la elasticidad de demanda para los boletos de los camarotes.

b) Cuando el precio es $8 000 ($p = 8$) por camarote, ¿debe el crucero aumentar o bajar el precio con la finalidad de incrementar su ingreso total?

44. Encuentre las constantes A, B y C de manera que la función $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + C$ tenga un extremo relativo en (2, 11) y un punto de inflexión en (1, 5). Trace la gráfica de f.

45. ARQUITECTURA Una ventana en forma de triángulo equilátero se levanta sobre un rectángulo de vidrio transparente que transmite dos veces más luz que el triángulo hecho de vidrio de color. Si la ventana tiene un perímetro de 20 pies, encuentre las dimensiones de la ventana que admitirán la máxima cantidad de luz.

46. ANÁLISIS MARGINAL Un fabricante estima que si se producen x unidades de cierto artículo, el costo total será $C(x)$ dólares donde

$$C(x) = x^3 - 24x^2 + 350x + 338$$

a) ¿A qué nivel de producción se minimiza el costo marginal $C'(x)$?

b) ¿A qué nivel de producción se minimiza el costo promedio $A(x) = \frac{C(x)}{x}$?

47. CONTROL DE PRODUCCIÓN Un fabricante de juguetes produce una muñeca barata (Floppsy) y una muñeca costosa (Moppsy) en unidades de x cientos y de y cientos, respectivamente. Suponga que es posible producir las muñecas de manera que

RESUMEN DEL CAPÍTULO

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

$y = \dfrac{82 - 10x}{10 - x}$ para $0 \le x \le 8$ y que la compañía recibe por la venta de cada muñeca Moppsy el *doble* de lo que recibe por la venta de cada muñeca Floppsy. Encuentre el nivel de producción (tanto de x como de y) para el cual se maximiza el ingreso total por la venta de estas muñecas. Suponga que la compañía vende todas las muñecas que produce.

48. COSTO DE CONSTRUCCIÓN El petróleo extraído de una plataforma de perforación ubicada a 3 millas de la costa se bombea hasta un lugar situado a la orilla de la costa a 8 millas del Este de la plataforma. El costo de construir una tubería en el océano desde la plataforma hasta la orilla es 1.5 veces más caro que el de construirla por tierra. ¿Cómo debe tenderse la tubería para minimizar el costo?

49. INVENTARIO Mediante las franquicias de sus estaciones de servicio, una compañía petrolera regala 16 000 mapas de carreteras por año. El costo de poner en marcha una imprenta para imprimir los mapas es \$100 por cada turno de producción. Además, los costos de producción son 6 centavos por mapa y los costos de almacenamiento son de 20 centavos por mapa al año. Los mapas se distribuyen a una razón constante durante el año y se imprimen en lotes iguales de manera que cada lote llega justo cuando se acaba el anterior. ¿Cuántos mapas debe imprimir la compañía petrolera en cada lote para minimizar el costo?

50. BIOLOGÍA MARINA Cuando un pez nada corriente arriba a una velocidad v contra una corriente constante v_w, la energía gastada en viajar a un punto corriente arriba está dada por una función de la forma

$$E(v) = \frac{Cv^k}{v - v_w}$$

donde $C > 0$ y $k > 2$ es un número que depende de la especie de pez en cuestión.[13]

a) Demuestre que $E(v)$ tiene exactamente un número crítico. ¿Corresponde a un máximo relativo o a un mínimo relativo?

b) Observe que el número crítico en el inciso (a) depende de k. Sea $F(k)$ el número crítico. Trace la gráfica de $F(k)$. ¿Qué puede decir acerca de $F(k)$ si k es muy grande?

51. INVENTARIO Una empresa manufacturera recibe materias primas en envíos iguales que llegan a intervalos regulares durante el año. El costo de almacenar las materias primas es directamente proporcional al tamaño de cada pedido, mientras que el costo total anual de las órdenes es inversamente proporcional al tamaño de los pedidos. Demuestre que el costo total es el más bajo cuando el costo total de almacenamiento, el costo total de las órdenes son iguales.

52. FISICOQUÍMICA En fisicoquímica está demostrado que la presión P de un gas está relacionada con el volumen V y la temperatura T a través de la *ecuación de Van Der Waals*:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = nRT$$

donde a, b, n y R son constantes. La *temperatura crítica* T_c del gas es la máxima temperatura a la cual la fase líquida y la gaseosa pueden existir como fases separadas.

a) Cuando $T = T_c$, la presión P está dada como una función $P(V)$ sólo del volumen. Trace la gráfica de $P(V)$.

b) El volumen crítico V_c es el volumen para el cual $P'(V_c) = 0$ y $P''(V_c) = 0$. Demuestre que $V_c = 3b$.

c) Encuentre la presión crítica $P_c = P(V_c)$ y después T_c en términos de a, b, n y R.

53. CRISTALOGRAFÍA Un problema fundamental en cristalografía es la determinación de la **fracción de empaque** de una red cristalina, que es la fracción ocupada por los átomos en la red, suponiendo que los átomos son esferas sólidas. Cuando la red contiene exactamente dos clases diferentes de átomos, se puede demostrar que la fracción de empaque está dada por la fórmula[14]

$$f(x) = \frac{K(1 + c^2x^3)}{(1 + x)^3}$$

donde $x = \dfrac{r}{R}$ es el cociente de los radios, r y R de las dos clases de átomos en la red, y c y K son constantes positivas.

a) La función $f(x)$ tiene exactamente un número crítico. Encuentre ese número crítico y utilice el criterio de la segunda derivada para clasificarlo como un máximo relativo o un mínimo relativo.

b) Los números c y K y el dominio de $f(x)$ dependen de las estructura celular en la red. Para la sal común granulada $c = 1$, $K = \dfrac{2\pi}{3}$, y el dominio

[13] E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 2a. ed., Nueva York: Springer-Verlag, 1976, página 280.

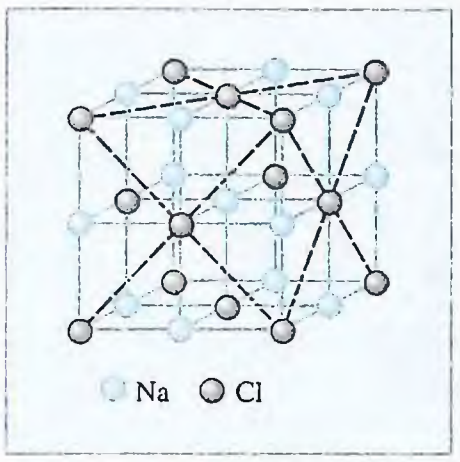
[14] John C. Lewis and Peter P. Gillis, "Packing Factors in Diatomic Crystals", *American Journal of Physics*, Vol. 61, No. 5 (1993), páginas 434-438.

www.FreeLibros.com

es el intervalo $(\sqrt{2} - 1) \le x \le 1$. Encuentre los valores más grandes y más pequeños de $f(x)$.

c) Repita el inciso *b)* para la β-cristobalita, pero ahora $c = \sqrt{2}$, $K = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{16}$, y el dominio es $0 \le x \le 1$.

d) Lea el artículo en el que se basa este problema, y escriba un párrafo acerca de cómo se calculan y se utilizan los factores de empaque en cristalografía.



PROBLEMA 53

54. CRIMEN URBANO Un estudio[15] acerca del crimen urbano en Detroit publicado en 1977 indicó que el promedio de delitos a propiedades, N_1, y a personas (tales como violaciones o asesinatos), N_2, estaban relacionados con el precio de venta p de la heroína (dólares por gramo) mediante las ecuaciones

$$N_1 = 3{,}351p^{0.287} \quad \text{y} \quad N_2 = 207.8p^{0.349}$$

Por simplicidad, suponga que no hay traslape entre las dos clases de delitos.

a) Encuentre la elasticidad de N_1 con respecto a p. ¿En qué porcentaje aproximado los delitos a propiedades N_1 aumentarán si el precio de la heroína sube en 2%? ¿En cuánto si sube en 5%?

b) Conteste las preguntas del inciso anterior para delitos a persona N_2.

c) Sea $N = N_1 + N_2$ el total de delitos y suponga que el precio de la heroína es \$75 por gramo. Encuentre la elasticidad de N con respecto a P y utilícela para calcular el porcentaje de aumento del total de delitos que se espera si el precio de la heroína aumenta en un 5 por ciento.

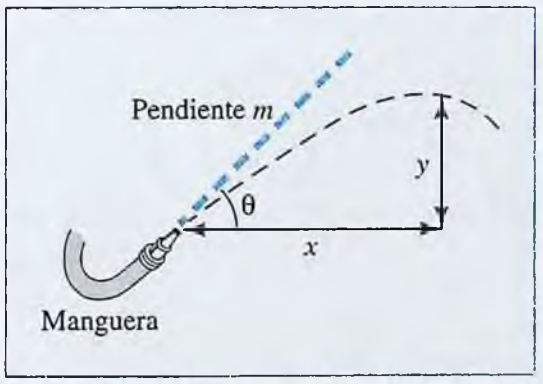
d) ¿Para qué precio p de la heroína un aumento de 17% en el precio provocará un aumento aproximado de 5% en el total de delitos?

e) Lea el artículo de Yves Nievergelt con el intrigante título "Price Elasticity of Demand: Gambling, Heroin, Marijuana, Whiskey, Prostitution, and Fish" [Elasticidad de la demanda respecto al precio de la demanda: apuestas, heroína, whisky, prostitución y peces], *UMAP Modules 1987: Tools for Teaching*, Consortium for Mathemátics and Its Applications, Inc., Arlington, MA, 1998, páginas 153-181. Luego escriba un párrafo explicando lo que piensa sobre este tipo de análisis socioeconómico.

55. BOMBEROS Si se desprecia la resistencia del aire, se puede demostrar que la corriente de agua emitida por una manguera de bomberos alcanzará una altura de

$$y = -16(1 + m^2)\left(\frac{x}{v}\right)^2 + mx$$

pies por arriba de un punto ubicado a x pies de la manguera, donde m es la pendiente de la boquilla de la manguera y v es la velocidad de la corriente de agua cuando sale de la boquilla. Suponga que v es constante.



PROBLEMA 55

a) Suponga que m es también constante. ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por la corriente de agua? ¿Qué tan lejos llegará la corriente desde la boquilla (es decir, calcule x cuando $y = 0$)?

b) Si m puede variar, encuentre la pendiente que le permite al bombero dirigir la corriente hacia el fuego desde la mayor distancia.

c) Suponga que el bombero está en $x = x_0$ pies de la base de un edificio. Si m se puede variar, ¿cuál es el punto más alto sobre un edificio al que el bombero puede llegar con el agua desde la boquilla?

[15] Las fórmulas dadas en este problema aparecen en la página 170 del modulo UMAP citado en el inciso (e). Ellas fueron originalmente presentadas por L. P. Silverman y N. L. Spruill en el artículo "Urban Crime and Price of Heroin", *Journal of Urban Economics*, Vol. 4, No. 1, páginas 80-103.

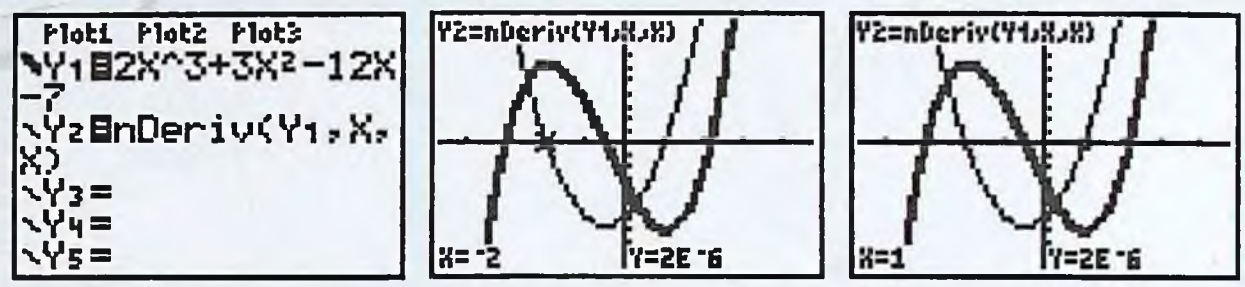
www.FreeLibros.com

¡EXPLORE! ACTUALIZACIÓN

A las soluciones completas de todos los recuadros ¡EXPLORE! del texto se puede acceder desde el sitio web del libro, www.mhhe.com/hoffmann.

Solución al ejercicio de la sección ¡EXPLORE! de la página 186

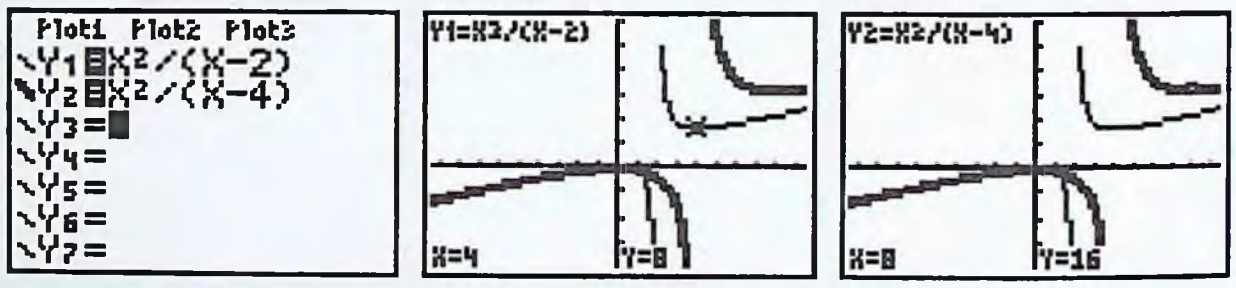
Introduzca la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ en Y1, utilizando un estilo de graficación en negritas, e introduzca la derivada numérica $f'(x)$ en Y2. Utilizando una pantalla modificada $[-4.7, 4.7]1$ por $[-20, 20]2$, se obtienen las gráficas que se muestran más abajo. Usando la instrucción trazadora de su calculadora graficadora puede ubicar dónde la derivada $f'(x)$ intersecta al eje x (el valor de y que aparece en notación científica $2E{-}6 = 0.000002$ se puede considerar despreciable).



Observe que la gráfica de $f(x)$, en negritas, es decreciente entre $x = -2$ y $x = 1$, el mismo intervalo en el cual $f'(x)$ es negativa. Advierta que la gráfica de $f'(x)$ está por abajo del eje x en este intervalo. Donde $f(x)$ es creciente, $f'(x)$ es positiva, específicamente, para $x < -2$ y $x > 1$. Se ve que donde la derivada es cero, $x = -2$ y 1, la gráfica de $f(x)$ tiene giros que indican los puntos máximos o mínimos.

Solución al ejercicio de la sección ¡EXPLORE! de la página 187

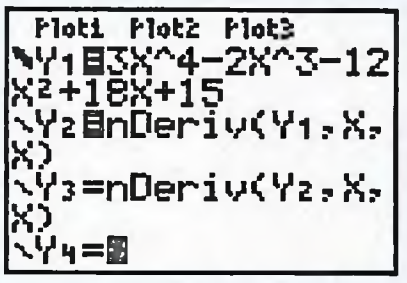
Introduzca $f(x) = x^2/(x - 2)$ en Y1, y $g(x) = x^2/(x - 4)$ en Y2 con un estilo de graficación en negritas. Utilice la pantalla de graficación $[-9.4, 9.4]1$ por $[-20, 30]5$ para obtener las gráficas que se muestran a continuación. ¿Cuál es la diferencia entre ellas? El máximo relativo (en la rama izquierda de la gráfica, antes de la asíntota) está en el origen de coordenadas para ambas gráficas. Pero el mínimo relativo (en la rama derecha de la gráfica) parece cambiar de $x = 4$ a $x = 8$. Observe que en ambas gráficas el máximo relativo es de hecho más pequeño que cualquier punto de la rama derecha de la gráfica respectiva. Los intervalos sobre los cuales $g(x)$ decrece son $[0, 4)$ y $(4, 8]$.

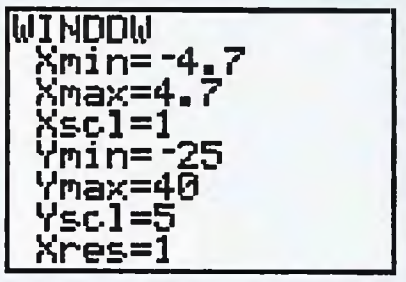


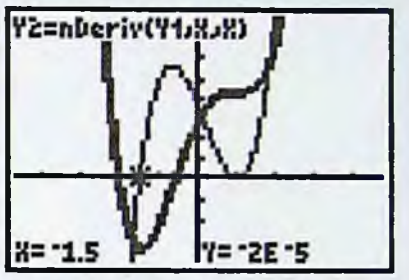
www.FreeLibros.com

Solución al ejercicio de la sección ¡Explore! de la página 206

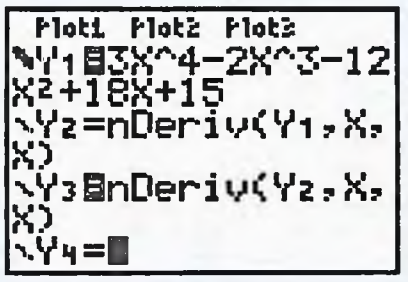
Introduzca $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 12x + 18x + 15$ en Y1 de su editor de ecuaciones utilizando un estilo de graficación en negritas, y sean Y2 y Y3 la primera y segunda derivadas de Y1, respectivamente, como aquí se muestra. Ahora, no seleccione Y3 y sólo considere las gráficas de Y1 y Y2. Utilice la pantalla modificada que se muestra a continuacióLos valores críticos de $f(x)$ se ubican en los ceros de $f'(x)$, es decir, $x = -1.5$ y 1, el último es una raíz doble.

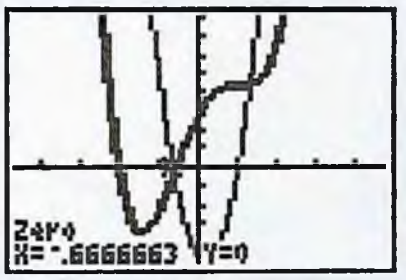


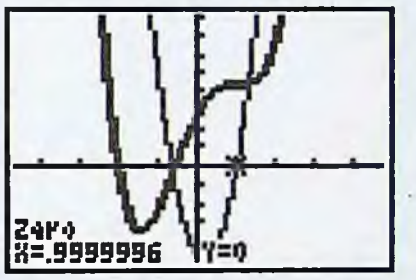




Ahora seleccione (encienda) Y3 y quite Y2 de la selección (apague), como se muestra a continuación. La gráfica de Y3, que es la segunda derivada de $f(x)$, indica que tiene dos puntos de inflexión: en $x = 2/3$ y $x = 1$. Con la ayuda de la instrucción para calcular raíces de su calculadora graficadora se puede verificar que esas son las raíces de $f''(x)$, y que coinciden con los puntos en los que $f(x)$ cambia su concavidad.

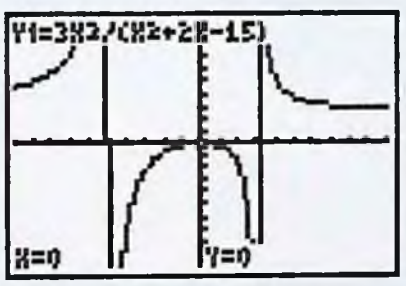


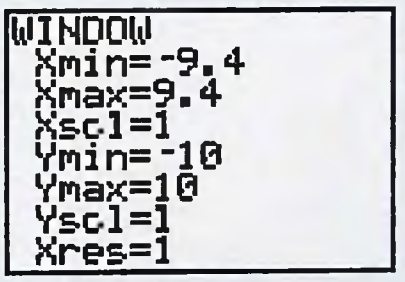


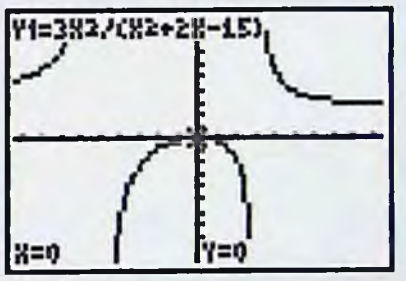


Solución al ejercicio de la sección ¡Explore! de la página 222

Introduzca $f(x) = 3x^2/(x^2 + 2x - 15)$ en Y1 de su editor de ecuaciones. En la pantalla[−10, 10]1 por [−10, 10]1, la gráfica de la izquierda muestra rectas verticales en $x = -5$ y $x = 3$, que parecen ser asíntotas verticales. Sin embargo, estas rectas son, de hecho, intentos de la calculadora para conectar puntos a través de los valores asintóticos. La gráfica de la derecha utiliza una pantalla modificada, que se muestra en la pantalla del centro. Ahí no se ven rectas correspondientes a asíntotas.



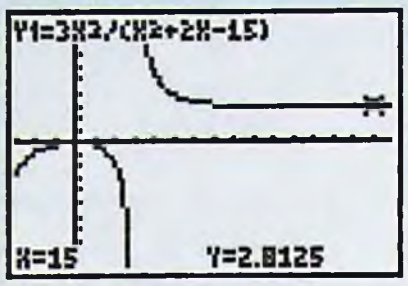


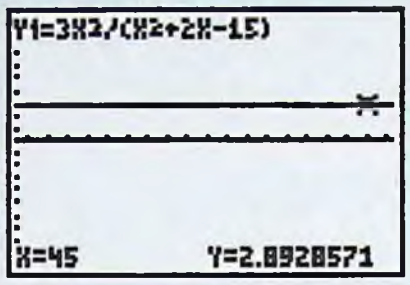


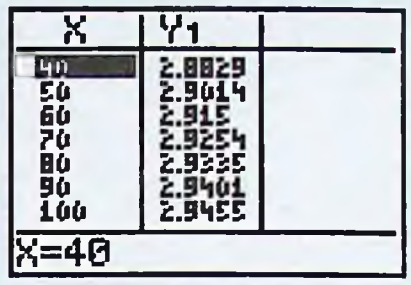
A medida que la gráfica se traza para mayores valores de x, $f(x)$ se ve más abajo, pero parece aproximarse al valor 3, lo que demuestra gráficamente que $y = 3$ es una asíntota horizontal. ¿Cree usted que haya un mínimo relativo en el lado derecho de la gráfica de

www.FreeLibros.com

$f(x)$? ¿Qué tan lejos es necesario ir en el eje x para obtener un valor de y por arriba de 2.9? La tabla en el extremo derecho le puede ayudar.







www.FreeLibros.com

REFLEXIONE ACERCA DE...



MODELACIÓN DE UNA EPIDEMIA: MUERTES DEBIDAS AL SIDA EN ESTADOS UNIDOS

Los modelos matemáticos se usan ampliamente para estudiar enfermedades infecciosas. En particular, durante los últimos 20 años se han desarrollado diferentes modelos matemáticos para el número de muertes por sida ocurridas al año. En este ensayo se describen algunos de los modelos más simples, y se analiza su exactitud. Sin embargo, antes de hacerlo, se proporcionarán algunos antecedentes.

De 1980 hasta 1995 el número de personas que murieron de sida en los Estados Unidos aumentó rápidamente de cerca de cero a más de 51 000 personas. A mediados de los años noventa parecía que el número de esas muertes podría continuar aumentando cada año. Sin embargo, con la llegada de nuevos tratamientos y medicamentos, el número de muertes anuales por sida en Estados Unidos ha disminuido uniformemente, llegando a menos de 16 000 muertes reportadas en el 2001. Se ha dicho que la tendencia futura del número total de muertes anuales por sida en Estados Unidos no es clara. El virus que causa el sida ha desarrollado resistencia a algunos medicamentos que habían sido efectivos en su tratamiento; además, existen indicios que muestran que muchas personas susceptibles no están tomando las precauciones adecuadas para prevenir la propagación de la enfermedad. ¿Conducirán estos factores a un aumento de las muertes relacionadas con el sida, o muchos de los medicamentos que actualmente se están desarrollando mantendrán la actual tendencia a disminuir?

Año	Muertes por sida en EUA
1989	27 408
1990	31 120
1991	36 175
1992	40 587
1993	45 850
1994	50 842
1995	51 670
1996	38 296
1997	22 245
1998	18 823
1999	18 249
2000	16 672
2001	15 603

En la tabla se muestra el número total de muertes por sida en los Estados Unidos cada año, desde 1989 a 2001. (FUENTE: Centers for Disease Control & Prevention, National Center of HIV, STD y TB prevention.)

El objetivo de modelar el número de muertes por sida al año en Estados Unidos es encontrar una función relativamente simple, $f(t)$, que proporcione una aproximación cercana del número de muertes por sida en los Estados Unidos, en el año t después de

www.FreeLibros.com

REFLEXIONE ACERCA DE...

1989. Una de las aproximaciones más simples para construir tales funciones es utilizar una *regresión polinomial*, que es una técnica que produce el mejor ajuste con polinomios de grado específico y que son buenas aproximaciones de los datos observados. Cuando se utiliza regresión polinomial, primero se requiere especificar el grado del polinomio que se quiere usar para aproximar el número muertes por sida al año en Estados Unidos. Entre más alto sea el grado, mejor será la aproximación, pero la función será más complicada. Suponga que se ha decidido utilizar un polinomio de grado 3, es decir $f(t)$ tiene la forma general $f(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$. Los coeficientes a, b, c, y d de la curva cúbica de mejor ajuste buscada son determinados de manera que la suma de los cuadrados de las distancias verticales entre los datos de la tabla y los puntos correspondientes del polinomio cúbico, $y = f(t)$, sea la menor posible. Los métodos de cálculo para llevar a cabo este procedimiento de optimización se analizan en la sección 7.4, de este libro. Sin embargo, en la práctica, las regresiones polinomiales son casi siempre determinadas utilizando una computadora o calculadora graficadora. En la introducción en el uso de la calculadora (en el prefacio de este libro, páginas xix-xxviii) se muestra una descripción detallada de cómo utilizar la calculadora para encontrar polinomios por regresión.

Es importante comprender que no existen razones biológicas para que un polinomio proporcione una buena aproximación al determinar el número de muertes por sida en Estados Unidos durante un año. Sin embargo, se comienza con tales modelos porque son fáciles de construir. Pueden construirse modelos más sofisticados, incluyendo algunos que están basados en razonamiento biológico, utilizando funciones exponenciales, las cuales se estudian en el capítulo 4.

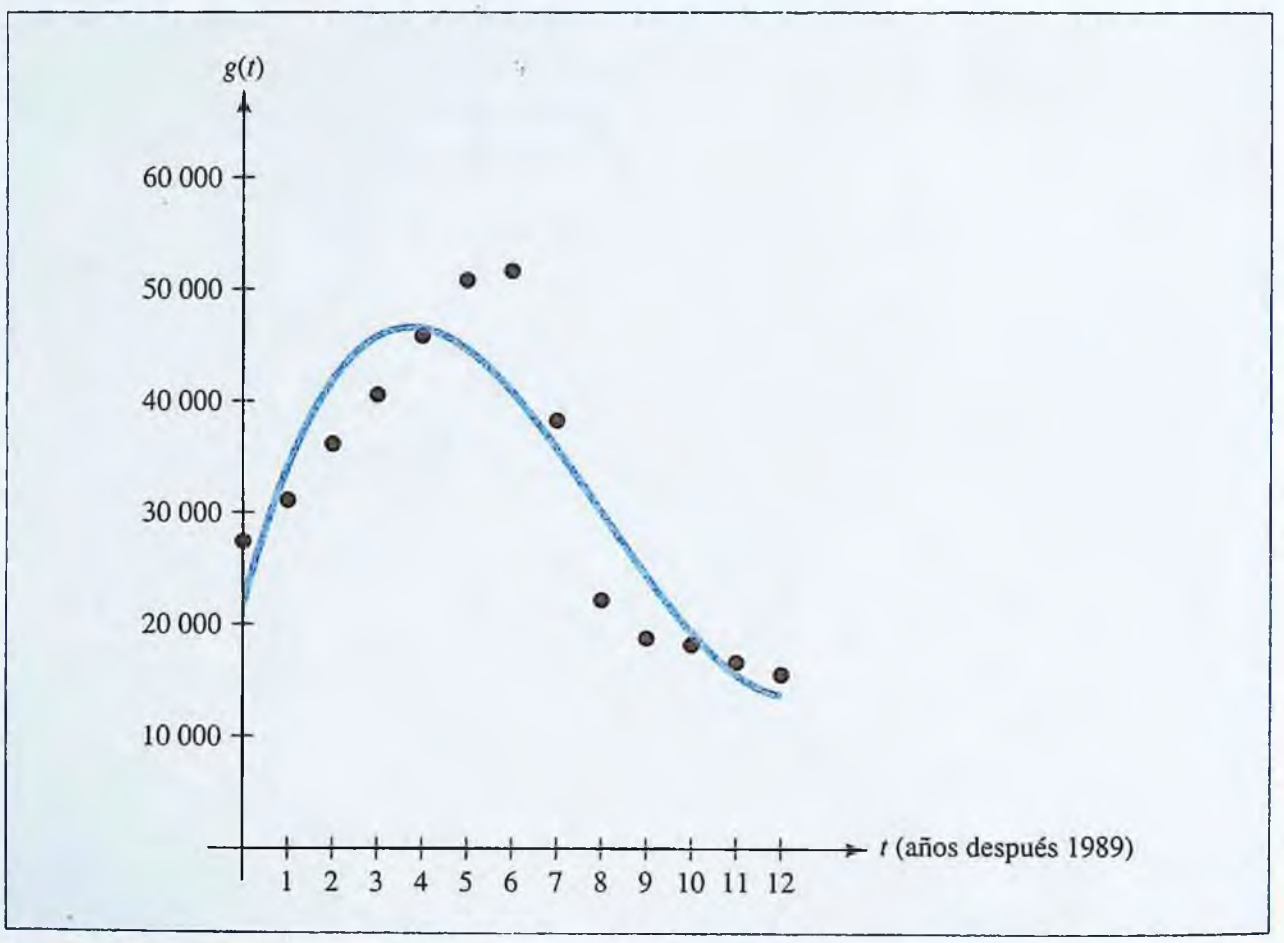


FIGURA 1 Curva cúbica de mejor ajuste.

Vamos a analizar tanto el polinomio de grado tres (cúbico) como el de grado cuatro que se obtienen con la regresión polinomial, utilizando los 13 puntos de la tabla (t_j, d_j), donde d_j es el número de muertes por sida en los Estados Unidos que ocurrieron en

www.FreeLibros.com

el año j, después de 1989. (Los datos corresponden a $t_j = 0, 1, \ldots, 12$.) Los cálculos muestran que la aproximación cúbica de mejor ajuste a los datos es

$$g(t) = 107.0023t^3 - 2\,565.0889t^2 + 14\,682.6031t + 21\,892.5055$$

Este polinomio cúbico se grafica junto con los puntos de los datos en la figura 1. Cálculos similares muestran que la aproximación de mejor ajuste de cuarto grado para los datos es

$$h(t) = 29.6957t^4 - 605.6941t^3 + 2\,801.3456t^2 + 1\,599.5330t + 26\,932.2873$$

que se grafica en la figura 2, junto con los puntos de los datos. Estas gráficas de mejor ajuste se pueden utilizar para analizar datos y hacer predicciones. Algunos ejemplos de este tipo de análisis se muestran en la siguientes preguntas.

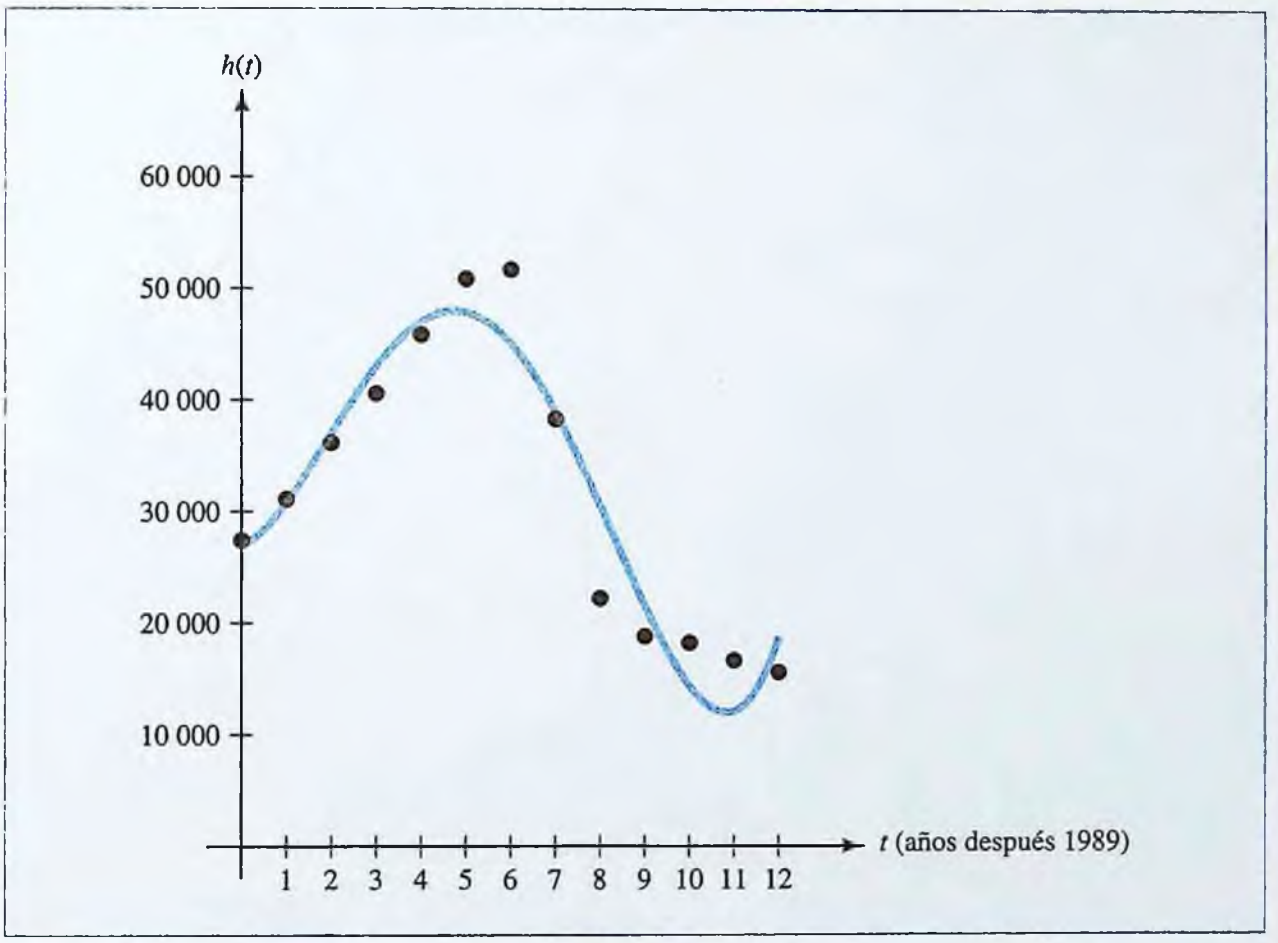


FIGURA 2 Curva de cuarto grado de mejor ajuste.

Preguntas

1. ¿Para qué periodo el polinomio cúbico de mejor ajuste aproxima mejor el número de muertes por sida en los Estados Unidos? ¿Para qué periodo el ajuste esel peor? Conteste las mismas preguntas para el polinomio de cuarto grado de mejor ajuste $h(t)$.
2. Halle los números críticos del polinomio cúbico de mejor ajuste $g(t)$ para el intervalo dado $0 \leq t \leq 12$. ¿Cuáles son los números máximo y mínimo de muertes causadas por el sida en Estados Unidos que puede predecir el modelo, para el periodo 1989-2001? Responda a las mismas preguntas para el polinomio de cuarto grado de mejor ajuste $h(t)$. Haga sus comentarios acerca de estas predicciones.

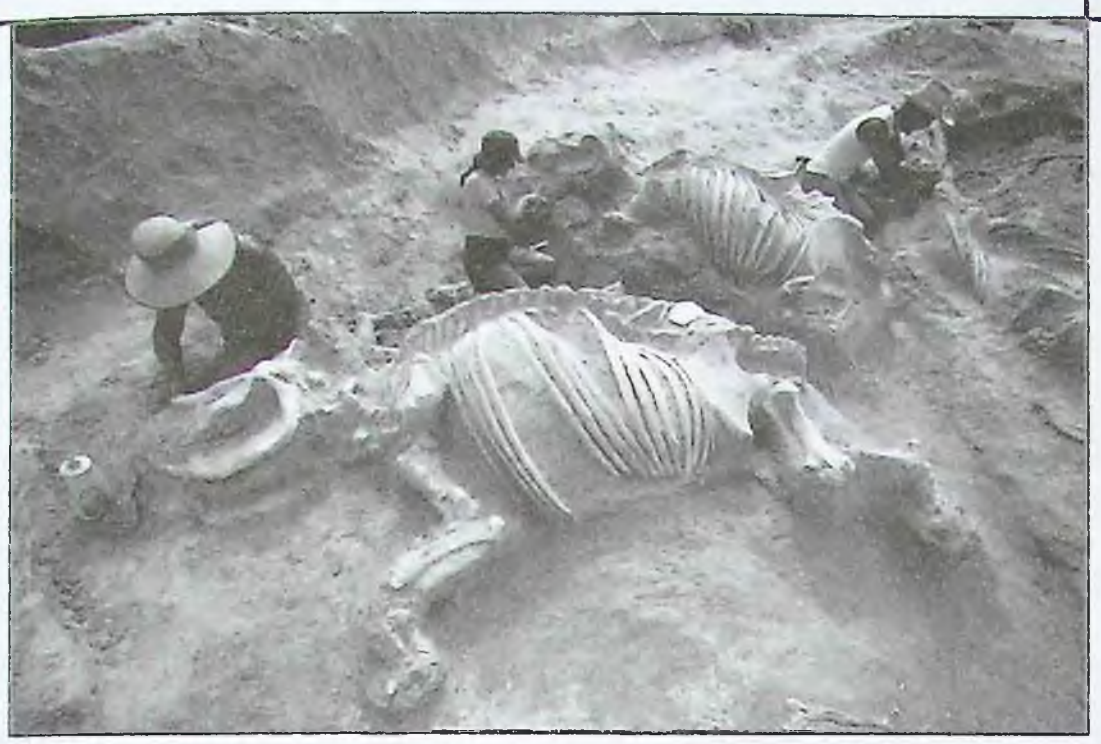
www.FreeLibros.com

REFLEXIONE ACERCA DE...

3. Estime el número de muertes por sida en Estados Unidos en 2002 que proyectan la aproximación cúbica de mejor ajuste $g(t)$ y la aproximación de cuarto grado de mejor ajuste $h(t)$. Si puede encontrar datos actuales, determine cuál produce la mejor predicción. ¿Qué predicen estos dos modelos acerca del número de muertes por sida en Estados Unidos en los años posteriores a 2002?
4. ¿Por qué una ecuación lineal, tal como la que se obtiene por regresión lineal, no da una buena aproximación para determinar el número de muertes por sida en los Estados Unidos de 1989 hasta 2001?
5. Utilice su calculadora graficadora para generar un polinomio cuadrático (de grado dos) de mejor ajuste, $Q(t)$, para los estos datos. Utilizando su $Q(t)$, responda a las preguntas 2 y 3. Comente acerca de qué tan bien ajusta su polinomio estos datos.
6. ¿Podría algún día encontrar un polinomio que concuerde exactamente con el número de muertes de sida en los Estados Unidos para cada año desde 1989 hasta el 2001? Si existe tal polinomio, ¿qué tan grande debe ser su grado para estar seguros de que lo hemos encontrado?

www.FreeLibros.com

CAPÍTULO 4



La datación por carbono y otras técnicas basadas en el decaimiento exponencial de sustancias radiactivas se emplean para determinar la edad de fósiles.

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

1 Funciones exponenciales
2 Funciones logarítmicas
3 Derivación de funciones logarítmicas y exponenciales
4 Modelos exponenciales adicionales
Resumen del capítulo
Términos importantes, símbolos y fórmulas
Revisión del capítulo 4
Problemas de repaso
¡Explore! Actualización
Reflexione acerca de...

www.FreeLibros.com

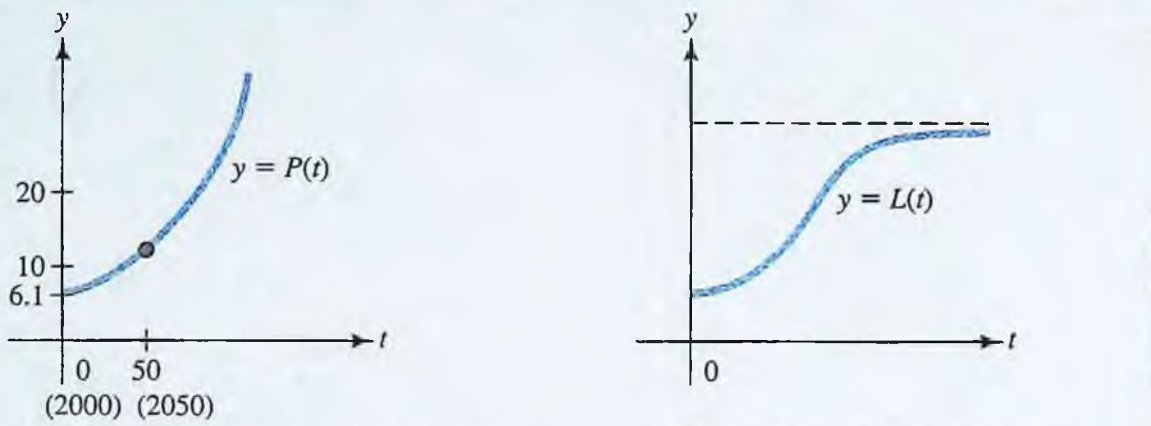
SECCIÓN 4.1 | Funciones exponenciales

Se dice que una población $Q(t)$ crece **exponencialmente** si cuando se mide a intervalos de tiempo igualmente espaciados, al final de cada intervalo la población es igual a la población al final del intervalo anterior, multiplicada por una constante fija. Por ejemplo, en el 2000, de acuerdo con las Naciones Unidas, la población mundial fue de 6 100 millones de personas y crecía a una tasa anual de aproximadamente 1.4%. Si este patrón continuara, entonces cada año la población sería 1.014 veces la población del año anterior. Así, si $P(t)$ es la población mundial (en miles de millones) t años después del año base 2000, la población crecería como sigue:



$$
\begin{array}{ll}
2000 & P(0) = 6.1 \\
2001 & P(1) = 6.1(1.014) = 6.185 \\
2002 & P(2) = 6.185(1.014) = [6.1(1.014)](1.014) = 6.1(1.014)^2 = 6.272 \\
2003 & P(3) = 6.272(1.014) = [6.1(1.014)^2](1.014) = 6.1(1.014)^3 = 6.360 \\
\vdots & \vdots \\
2000 + t & P(t) = 6.1(1.014)^t
\end{array}
$$

La gráfica de $P(t)$ se muestra en la figura 4.1*a*. Observe que de acuerdo con este modelo, la población mundial crece gradualmente primero pero se duplica después de aproximadamente 50 años (a 12 220 millones en el año 2050).



a) Gráfica de la función de crecimiento exponencial $P(t) = 6.1(1.014)^t$

b) Curva log stica de crecimiento demogr fico

FIGURA 4.1 Dos modelos de crecimiento demográfico.

Los modelos exponenciales de población se llaman frecuentemente *modelos de Malthus*, en honor a Thomas Malthus (1766-1834), un economista británico que predijo que si la población crece exponencialmente mientras que el abastecimiento de alimentos crece a una tasa constante, (linealmente), entonces se generará una hambruna masiva. Por fortuna, la población mundial no continúa creciendo exponencialmente como predijo el modelo de Malthus, y los modelos que toman en cuenta varias restricciones sobre la tasa de crecimiento en realidad proporcionan predicciones más precisas. La curva de la población que resulta de uno de esos modelos, el denominado modelo *logístico*, se muestra en la figura 4.1*b*. Observe cómo la curva logística de crecimiento primero se eleva rápidamente, como una curva exponencial, pero luego eventualmente gira y se aplana a medida que los factores ambientales actúan para frenar la tasa de crecimiento. Las curvas logísticas serán estudiadas en la sección 4.4 (ejemplo 4.4.5) y se retomarán en el capítulo 6 como parte de un estudio más detallado de los modelos de población.

Una función de la forma general $f(x) = b^x$, donde b es un número positivo, se denomina **función exponencial**. Estas funciones se pueden utilizar para describir el creci-

www.FreeLibros.com

miento exponencial y el crecimiento logístico, además de gran variedad de otras importantes magnitudes. Por ejemplo, las funciones exponenciales se utilizan en demografía para predecir el tamaño de la población; en finanzas, para calcular el valor de las inversiones; en arqueología, para datar objetos antiguos; en psicología, para estudiar patrones de aprendizaje; y en la industria, para estimar la confiabilidad de los productos.

En esta sección se exploran las propiedades de las funciones exponenciales y se introducen algunos modelos básicos, donde estas funciones tienen un papel importante. En secciones siguientes se estudian aplicaciones adicionales, tales como el modelo logístico.

Repaso de notación exponencial y de sus propiedades

El trabajo con las funciones exponenciales requiere del conocimiento de la notación exponencial y de las leyes algebraicas de los exponentes. En el "Repaso de álgebra". del apéndice A se pueden encontrar ejemplos resueltos y problemas con esta notación. A continuación se presenta un breve resumen de los detalles más importantes que se necesitarán.

Definición de b^n para valores racionales de n (y $b > 0$) ■ Potencias enteras: Si n es un entero positivo,

$$b^n = \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n \text{ factores}}$$

Potencias fraccionarias: Si n y m son enteros positivos,

$$b^{n/m} = (\sqrt[m]{b})^n = \sqrt[m]{b^n}$$

donde $\sqrt[m]{b}$ denota la raíz m-ésima.

Potencias negativas: $b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}$

Potencia cero: $b^0 = 1$

Por ejemplo,

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 \qquad 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$$

$$4^{1/2} = \sqrt{4} = 2 \qquad 4^{3/2} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{-3/2} = \frac{1}{4^{3/2}} = \frac{1}{8} \qquad 27^{-2/3} = \frac{1}{(\sqrt[3]{27})^2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

¡EXPLORE!

Grafique $y = (-1)^x$ usando la pantalla decimal [−4.7, 4.7]1 por [−1, 7]1. ¿Por qué aparece la gráfica con puntos? Luego introduzca en b los valores decimales, $b = 0.5$, 0.25, y 0.1, y grafique $y = b^x$ para cada caso. Explique el comportamiento de estas gráficas.

Se sabe lo que se quiere decir por b^r para cualquier número racional r, pero si se trata de graficar $y = b^x$ habrá un "agujero" en la gráfica para cada valor de x que no sea racional, tal como $x = \sqrt{2}$. Sin embargo, utilizando métodos más allá del alcance de este libro, se puede demostrar que como hay "tantos" números racionales, sólo puede haber una curva continua que pase por todos los puntos (r, b^r) para los que r es racional. En otras palabras, allí existe una única función continua $f(x)$ definida para todos los números reales x, que es igual a b^r cuando $x = r$ es racional. Esta función se define como $f(x) = b^x$.

Funciones exponenciales ■ Si b es un número positivo diferente de 1 ($b > 0$, $b \neq 1$), existe una función única denominada *función exponencial*, con base b, definida por

$$f(x) = b^x \qquad \text{para cualquier número real } x$$

www.FreeLibros.com

Para tener una idea de la apariencia de la gráfica de una función exponencial, considere el ejemplo 4.1.1.

EJEMPLO | 4.1.1

Trace las gráficas de $y = 2^x$ y $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Solución

Comience construyendo una tabla de valores para $y = 2^x$ y $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$:

x	−15	−10	−1	0	1	3	5	10	15
$y = 2^x$	0.00003	0.001	0.5	1	2	8	32	1,024	32,768
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	32,768	1,024	2	1	0.5	0.125	0.313	0.001	0.00003

El patrón de los valores de esta tabla sugiere que las funciones $y = 2^x$ y $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ tienen las siguientes características:

La función $y = 2^x$	**La función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$**
siempre incrementándose	siempre disminuyendo
$\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0$	$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$
$\lim_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$

Utilizando esta información, trace las gráficas que se muestran en la figura 4.2. Observe que cada una de las gráficas tiene (0, 1) como su intersección con el eje y, el eje x como una asíntota horizontal y parecen ser cóncavas hacia arriba para toda x. Las gráficas también parecen ser reflejos una de la otra en el eje y. En el problema 62 se le pedirá verificar estas características.

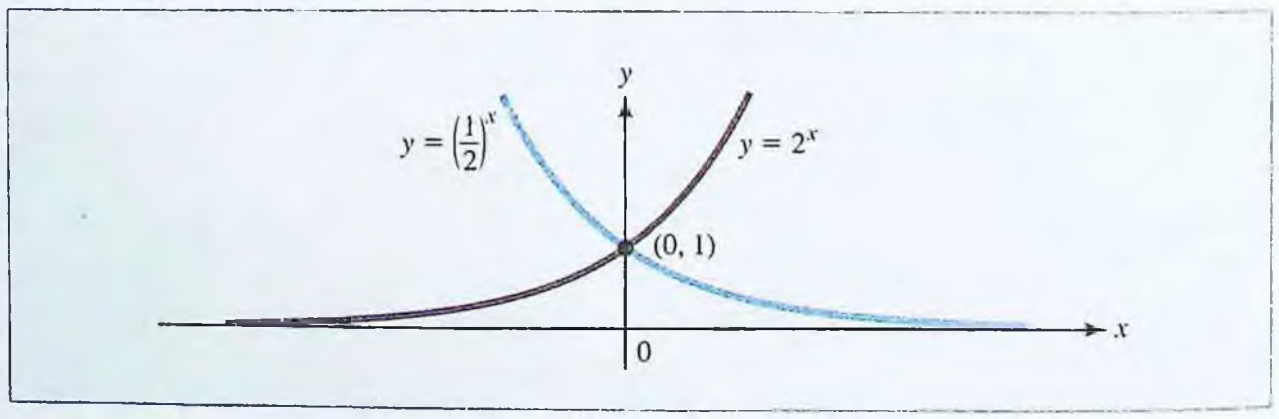


FIGURA 4.2 Gráficas de $y = 2^x$ y $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

¡EXPLORE!

Grafique $y = b^x$ para $b = 1, 2, 3$, y 4, utilizando la pantalla $[-4.7, 4.7]1$ por $[-1, 7]1$. Explique lo que observa. Imagine, y luego verifique, por dónde pasa la gráfica de $y = 4^x$ en relación con la gráfica de $y = 2^x$ y a la de $y = 6^x$. ¿Por dónde pasa $y = e^x$ suponiendo que e es un valor entre 2 y 3?

www.FreeLibros.com

En la figura 4.3 se muestran las gráficas de varios miembros de la familia de funciones exponenciales $y = b^x$. Observe que las gráficas de $y = 2^x$ y $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ que se muestran en la figura 4.2 son típicas de las gráficas de $y = b^x$ para $b > 1$ y $0 < b < 1$, respectivamente.

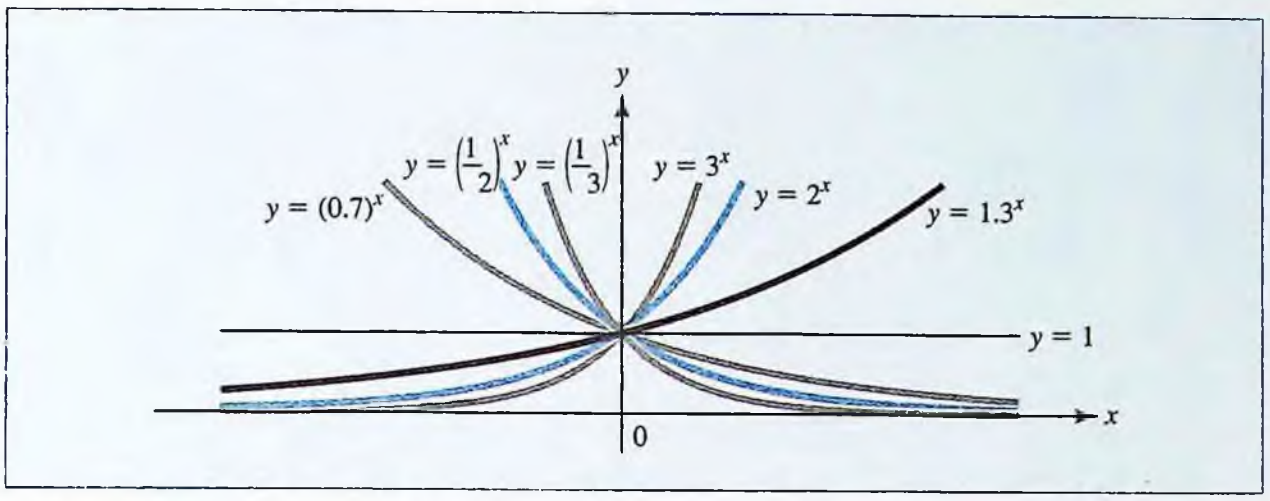


FIGURA 4.3 Gráficas de la forma exponencial $y = b^x$.

NOTA Con frecuencia los estudiantes confunden la función *potencia* $p(x) = x^b$ con la función *exponencial* $f(x) = b^x$. Recuerde que en x^b la variable x es la base y el exponente b es constante; mientras que en b^x, la base b es constante y la variable x es el exponente. Las gráficas de $y = x^2$ y $y = 2^x$ se muestran en la figura 4.4. Note que después del punto donde se cortan, (4, 16), la curva exponencial $y = 2^x$ crece mucho más rápidamente que la curva de potencia $y = x^2$. Por ejemplo, cuando $x = 10$, el valor de y en la curva de la potencia es $y = 10^2 = 100$, en tanto que el valor correspondiente y en la curva exponencial es $y = 2^{10} = 1\,024$. ▫

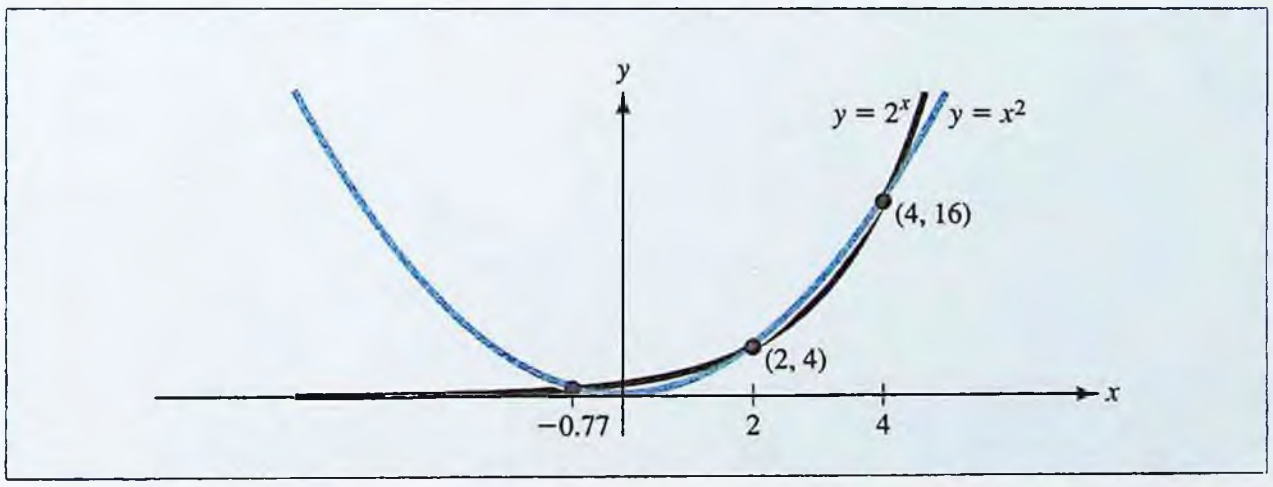


FIGURA 4.4 Comparación de la curva de potencia $y = x^2$ con la curva exponencial $y = 2^x$.

En general, las funciones exponenciales obedecen estas reglas.

Propiedades básicas de funciones exponenciales ▫ Para bases a, b ($a > 0$, $b > 0$) y cualesquiera números reales x, y, se tiene

Regla de la igualdad: $b^x = b^y$ si y sólo si $x = y$

Regla del producto: $b^x b^y = b^{x+y}$

Regla del cociente: $\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$

(continúa)

www.FreeLibros.com

Regla de la potencia: $(b^x)^y = b^{xy}$

Regla de la multiplicación: $(ab)^x = a^x b^x$

Regla de la división: $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

EJEMPLO | 4.1.2

Evalúe cada una de estas expresiones exponenciales:

a) $(3)^2(3)^3$ **b)** $(2^3)^2$ **c)** $(5^{1/3})(2^{1/3})$

d) $\frac{2^3}{2^5}$ **e)** $\left(\frac{4}{7}\right)^3$

Solución

a) $(3)^2(3)^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$

b) $(2^3)^2 = 2^{(3)(2)} = 2^6 = 64$

c) $(5^{1/3})(2^{1/3}) = [(5)(2)]^{1/3} = 10^{1/3} = \sqrt[3]{10}$

d) $\frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

e) $\left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{4^3}{7^3} = \frac{64}{343}$

EJEMPLO | 4.1.3

Si $f(x) = 5^{x^2+2x}$, encuentre todos los valores de x tales que $f(x) = 125$.

Solución

La ecuación $f(x) = 125 = 5^3$ se satisface si y sólo si

$$\begin{aligned} 5^{x^2+2x} &= 5^3 \\ x^2 + 2x &= 3 \qquad \textit{como } b^x = b^y \textit{ sólo cuando } x = y \\ x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ (x-1)(x+3) &= 0 \qquad \textit{factorizando} \\ x &= 1,\ x = -3 \end{aligned}$$

Así, $f(x) = 125$ si y sólo si $x = 1$, o $x = -3$.

Base exponencial natural *e*

En álgebra, es práctica común utilizar la base $b = 10$ o , en algunos casos, $b = 2$; pero en cálculo, resulta más conveniente usar un número denotado por e y definido por el límite

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

"¡Un momento!", diría usted, "ese límite tiene que ser 1, puesto que $1 + \frac{1}{n}$, en efecto, tiende a 1 cuando n crece sin límite, y $1^n = 1$ para cualquier n." Pero no es así. El proceso del límite no funciona de esa forma, como se puede observar en la tabla siguiente:

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Introduzca $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ en Y1 del editor de funciones y examine su gráfica. Trace la gráfica a la derecha para valores grandes de x. ¿A qué número se aproxima y cuándo x se hace cada vez mayor? Intente utilizar la instrucción de construcción de tabla de la calculadora graficadora, primero fijando el valor inicial y el cambio incremental a 10, luego sucesivamente a 1 000 y 100 000. Estime el límite con cinco lugares decimales. Ahora haga lo mismo cuando x tiende a $-\infty$ y observe este límite.

n	10	100	1 000	10 000	100 000
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	2.59374	2.70481	2.71692	2.71815	2.71827

El número e es uno de los números más importantes de las matemáticas, y su valor se ha calculado con gran precisión. Con cinco lugares decimales, su valor es

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\ldots$$

Para calcular e^N para un número particular N, se empleará una tabla de valores exponenciales o, más probablemente, la tecla "e^X" en su calculadora. Por ejemplo, para determinar $e^{1.217}$ se presiona la tecla e^X, luego se ingresa el número 1.217 para obtener $e^{1.217} \approx 3.37704$.

Interés compuesto continuamente

El número e se denomina "base exponencial natural", pero parecerá cualquier cosa menos "natural". Para ilustrar cómo aparece dicho número en situaciones prácticas, éste se empleará para describir un ejemplo de finanzas conocido como interés compuesto continuamente.

Primero, vamos a repasar las ideas básicas para el interés compuesto. Suponga que se invierte una suma de dinero y el interés se capitaliza una sola vez. Si P es la inversión original (el *capital*) y r es la tasa de interés (expresada en forma decimal), entonces el saldo B después de sumar el interés será

$$B = P + Pr = P(1 + r) \quad \text{dólares}$$

Es decir, para calcular el saldo al final de un periodo de interés, se multiplica el saldo al inicio del periodo por la expresión $1 + r$.

En la mayoría de los bancos, el interés se capitaliza más de una vez al año. El interés que se suma a la cuenta durante un periodo ganará interés durante los periodos siguientes. Si la tasa anual de interés es r y el interés se capitaliza k veces por año, entonces el año se divide en k periodos iguales de capitalización y la tasa de interés en cada periodo es $\frac{r}{k}$. De aquí, el saldo al final del primer periodo es

$$P_1 = \underbrace{P}_{\text{capital}} + \underbrace{P\left(\frac{r}{k}\right)}_{\text{interés}} = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)$$

Al final del segundo periodo, el saldo es

$$P_2 = P_1 + P_1\left(\frac{r}{k}\right) = P_1\left(1 + \frac{r}{k}\right)$$
$$= \left[P\left(1 + \frac{r}{k}\right)\right]\left(1 + \frac{r}{k}\right) = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^2$$

y, en general, el saldo al final del m-ésimo periodo es

$$P_m = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^m$$

www.FreeLibros.com

Como hay k periodos en un año, el saldo después de 1 año es

$$P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^k$$

Al final de t años, el interés se ha capitalizado kt veces y el saldo está dado por la función

$$B(t) = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$$

Para resumir:

Interés compuesto ▪ Si se invierten P dólares a una tasa de interés anual r (expresada en forma decimal) y el interés se capitaliza k veces por año, el saldo $B(t)$ después de t años será

$$B(t) = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} \text{ dólares}$$

¡EXPLORE!

Suponga que tiene $1 000 para invertir. ¿Cuál es la mejor inversión: 5% compuesto mensualmente durante 10 años o 6% compuesto trimestralmente durante 10 años? Escriba la expresión 1 000(1 + R/K)^(K*T) en la pantalla principal y evalúe después de introducir valores adecuados de R, K, y T.

A medida que crece la frecuencia a la cual se capitaliza el interés, también crece el saldo correspondiente $B(t)$. De aquí, un banco que capitaliza el interés frecuentemente, puede atraer más clientes que uno que ofrece la misma tasa de interés pero que capitaliza el interés con menos frecuencia. Pero, ¿qué le pasa al saldo al final de t años cuando la frecuencia de capitalización se incremente sin límite? Más específicamente, ¿cuál será el saldo al cabo de t años si el interés no se capitaliza trimestral ni mensual ni diariamente, sino continuamente? En términos matemáticos, esto es equivalente a preguntar qué le pasa a la expresión $P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$ cuando k crece sin límite. La respuesta contiene el número e. A continuación se presenta la explicación.

Para simplificar el cálculo, sea $n = \frac{k}{r}$. Entonces, $k = nr$ y por tanto

$$P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} = P\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nrt} = P\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{rt}$$

Como n crece sin límite cuando k también crece sin límite, y como $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se aproxima a e cuando n crece sin límite, entonces se deduce que el saldo después de t años es

$$B(t) = \lim_{k \to +\infty} P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} = P\left[\lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{rt} = Pe^{rt}$$

Para resumir:

Interés compuesto continuamente ▪ Si se invierten P dólares a una tasa de interés anual r (expresada en forma decimal) y el interés se capitaliza continuamente, el saldo $B(t)$ al cabo de t años será

$$B(t) = Pe^{rt} \text{ dólares}$$

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Escriba las expresiones

```
P*(1 + R/T)^(K*T)
```

y

```
P*e^(R*T)
```

en la pantalla principal y compárelas para los valores de P, R, T y K del ejemplo 4.1.4. Repita el procedimiento utilizando los mismos valores para P, R, y K pero con $T = 15$ años.

EJEMPLO | 4.1.4

Suponga que se invierten \$1 000 a una tasa de interés anual de 6%. Calcule el saldo después de 10 años si el interés se capitaliza

a) Trimestralmente **b)** Mensualmente

c) Diariamente **d)** Continuamente

Solución

a) Para calcular el saldo después de 10 años, si el interés se capitaliza trimestralmente, emplee la fórmula $B(t) = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$, con $t = 10$, $P = 1\,000$, $r = 0.06$ y $k = 4$:

$$B(10) = 1\,000\left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^{40} \simeq \$1\,814.02$$

b) Esta vez tome $t = 10$, $P = 1\,000$, $r = 0.06$ y $k = 12$ para obtener

$$B(10) = 1\,000\left(1 + \frac{0.06}{12}\right)^{120} \simeq \$1\,819.40$$

c) Tome $t = 10$, $P = 1\,000$, $r = 0.06$ y $k = 365$ para obtener

$$B(10) = 1\,000\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{3.650} \simeq \$1\,822.03$$

d) Para el interés compuesto continuamente utilice la fórmula $B(t) = Pe^{rt}$, con $t = 10$, $P = 1\,000$ y $r = 0.06$:

$$B(10) = 1\,000e^{0.6} \approx \$1\,822.12$$

Este valor, \$1 822.12, es el límite superior para el saldo posible. No importa cuán seguido se capitalice el interés, \$1 000 invertidos a una tasa anual de 6% no puede crecer a más de \$1 822.12 en 10 años.

Valor presente

La cantidad $B(t)$ que se ha denominado el "saldo al final de t años cuando se invierten P dólares" algunas veces se conoce como *valor futuro* de P dólares en t años. Invirtiendo las cosas, el **valor presente** de B dólares pagaderos en t años es la cantidad P que se debe invertir hoy (como capital) para obtener un saldo $B(t)$ al final del periodo de t años.

Para deducir una fórmula para el valor presente, sólo se necesita despejar P de la fórmula correspondiente del valor futuro. En particular, si la inversión se capitaliza k veces por año a una tasa anual r, entonces

$$B = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$$

y el valor presente de B dólares en t años se obtiene multiplicando ambos miembros de la ecuación por $\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kt}$:

$$P = B\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kt}$$

De la misma forma, si la capitalización es continua, entonces

$$B = Pe^{rt}$$

www.FreeLibros.com

y el valor presente está dado por

$$P = Be^{-rt}$$

Resumiendo:

Valor presente ▪ El valor presente de B dólares en t años, invertido a una tasa anual r capitalizada k veces por año, está dado por

$$P = B\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kt}$$

Si el interés se capitaliza continuamente con la misma tasa, el valor presente en t años está dado por

$$P = Be^{-rt}$$

¡EXPLORE!

Encuentre el valor presente de manera que el saldo dentro de 25 años sea \$40 000, si la tasa de interés anual de 6% se capitaliza continuamente. Para hacer esto, introduzca la ecuación F − P*e^(R*T) = 0 en el editor de ecuaciones de su calculadora graficadora (utilizando la opción **SOLVER**), con F = 40 000, R 0= .06 y T = 25. Luego despeje P.

EJEMPLO | 4.1.5

Sue está por ingresar a la universidad. Cuando se gradúe dentro de 4 años, desea hacer un viaje a Europa que calcula le costará \$5 000. ¿Cuánto deberá invertir ahora a 7% para tener suficiente dinero para el viaje, si el interés se capitaliza?

a) Trimestralmente ***b)*** Continuamente

Solución

El valor futuro requerido es F = \$5 000 en $t = 4$ años con $r = 0.07$.

a) Si la capitalización es trimestral, entonces $k = 4$ y el valor presente es

$$P = 5\ 000\left(1 + \frac{0.07}{4}\right)^{-4(4)} = \$3\ 788.08$$

b) Para la capitalización continua el valor presente es

$$P = 5\ 000e^{-0.07(4)} = \$3\ 778.92$$

Así, Sue tendría que invertir aproximadamente \$9 más si el interés se capitalizara trimestralmente que si se capitalizara continuamente.

Crecimiento y decrecimiento exponencial

La cantidad $Q(t)$, que se comporta según una ley de la forma $Q(t) = Q_0e^{kt}$, con $k > 0$, se dice que experimenta un **crecimiento exponencial.** Asimismo, si $Q(t) = Q_0e^{-kt}$ para $k > 0$, entonces la cantidad Q experimenta un **decrecimiento exponencial.** Muchas magnitudes importantes en los negocios y la economía, así como en las ciencias físicas, sociales y biológicas, se pueden modelar en términos de crecimiento o decrecimiento exponencial. Por ejemplo, si el interés se capitaliza continuamente, el valor futuro $B(t) = Pe^{rt}$ crece exponencialmente, y en ausencia de restricciones, una población crece exponencialmente. Las sustancias radiactivas decrecen (decaen) exponencialmente, tal como lo hace el valor presente de una inversión, la cantidad de medicamento en el torrente sanguíneo de una persona, y las ventas de ciertos productos, una vez que se descontinúa su publicidad.

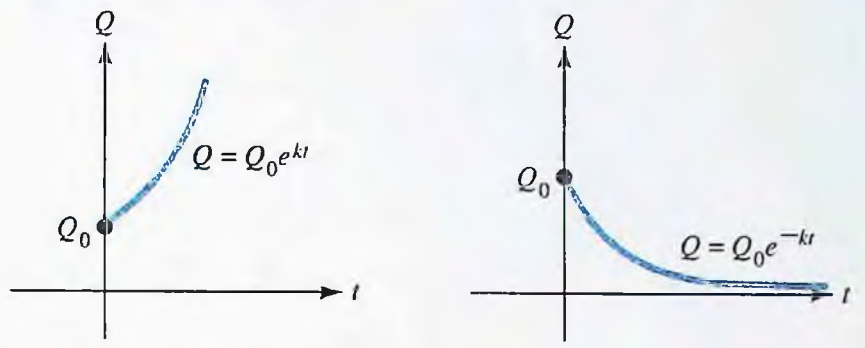
En la figura 4.5 se muestran las gráficas típicas de crecimiento y decrecimiento exponencial. Se acostumbra representar estas gráficas sólo para el tiempo no negativo ($t \geq 0$). Observe que en ambos casos, cuando $t = 0$

$$Q(0) = Q_0e^0 = Q_0$$

por lo que la gráfica "comienza" en Q_0.

www.FreeLibros.com

Crecimiento y decrecimiento exponencial ■ Una cantidad $Q(t)$ *crece exponencialmente* si $Q(t) = Q_0e^{kt}$ para $k > 0$ y *decrece exponencialmente* si $Q(t) = Q_0e^{-kt}$ para $k > 0$.



a) Crecimiento exponencial

b) Decaimiento exponencial

FIGURA 4.5 Variación exponencial.

EJEMPLO | 4.1.6

La concentración de medicamento en el torrente sanguíneo de un paciente, t horas después de una inyección está dada por

$$C(t) = 3.97e^{-0.9t}$$

miligramos por mililitro (mg/ml). ¿Cuál es la razón de cambio promedio de la concentración del medicamento durante la segunda hora?

Solución

Durante la segunda hora (es decir, de $t = 1$ a $t = 2$), la concentración cambia en $C(2) - C(1)$, por lo que la razón de cambio promedio durante este periodo está dada por

$$\begin{aligned} A &= \frac{C(2) - C(1)}{2 - 1} \\ &= \frac{3.97e^{-0.9(2)} - 3.97e^{-0.9(1)}}{1} = 3.97(e^{-1.8} - e^{-0.9}) \\ &= 3.97(0.1653 - 0.4066) \\ &= -0.9580 \end{aligned}$$

Así, la concentración del medicamento disminuye a una razón promedio de aproximadamente 0.96 mg/ml por hora, durante la segunda hora después de la inyección.

¡EXPLORE!

Remítase al ejemplo 4.1.7. En la instrucción de resolver ecuaciones de su calculadora graficadora ingrese la ecuación 0 = Q − 2 000e^(K*T). Donde $Q = 6\,000$ y $T = 20$, encuentre el valor de K. Luego cambie T a 60 y determine el valor correspondiente de Q.

EJEMPLO | 4.1.7

Los biólogos han determinado que cuando se dispone de suficiente espacio y nutrientes, el número de bacterias en un cultivo crece exponencialmente. Suponga que inicialmente hay 2 000 bacterias en cierto cultivo y que 20 minutos después hay 6 000. ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 1 hora?

www.FreeLibros.com

Solución

Sea $Q(t)$ el número de bacterias presentes después de t minutos. Como el número de bacterias crece exponencialmente y puesto que inicialmente había 2 000 bacterias, se sabe que Q es una función de la forma

$$Q(t) = 2\,000e^{kt}$$

Como después de 20 minutos hay 6,000 bacterias, se deduce que

$$6\,000 = 2\,000e^{20k} \qquad \text{o} \qquad e^{20k} = 3$$

Para encontrar el número de bacterias presentes al final de 1 hora (60 minutos), calcule $Q(60)$ utilizando la ley de las potencias para exponentes como sigue:

$$Q(60) = 2\,000e^{60k} = 2\,000(e^{20k})^3 = 2\,000(3)^3 = 54\,000$$

Es decir, al final de 1 hora habrá 54 000 bacterias.

NOTA En el ejemplo 4.1.7, se empleó la condición dada $e^{20k} = 3$ para resolver la ecuación exponencial $2\,000e^{60k} = 54\,000$. Sin embargo, en general, para despejar k en una ecuación de este tipo se usarán los **logaritmos**, que se estudiarán en la sección 4.2. ■

PROBLEMAS | 4.1

En los problemas 1 y 2 utilice su calculadora para encontrar la potencia indicada de e. (Redondee su respuestas hasta 3 lugares decimales.)

1. $e^2, e^{-2}, e^{0.05}, e^{-0.05}, e^0, e, \sqrt{e}$ y $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

2. $e^3, e^{-1}, e^{0.01}, e^{-0.1}, e^2, e^{-1/2}, e^{1/3}$ y $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$

3. Trace las curvas $y = 3^x$ y $y = 4^x$ en el mismo sistema de coordenadas.

4. Trace las curvas $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ y $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ en el mismo sistema de coordenadas.

En los problemas 5 a 12 evalúe las expresiones dadas.

5. *a)* $27^{2/3}$

b) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{3/2}$

6. *a)* $(-128)^{3/7}$

b) $\left(\dfrac{27}{64}\right)^{2/3}\left(\dfrac{64}{25}\right)^{3/2}$

7. *a)* $8^{2/3} + 16^{3/4}$

b) $\left(\dfrac{27 + 36}{121}\right)^{3/2}$

8. *a)* $(2^3 - 3^2)^{11/7}$

b) $(27^{2/3} + 8^{4/3})^{-3/2}$

9. *a)* $(3^3)(3^{-2})$

b) $(4^{2/3})(2^{2/3})$

10. *a)* $\dfrac{5^2}{5^3}$

b) $\left(\dfrac{\pi^2}{\sqrt{\pi}}\right)^{4/3}$

11. *a)* $(3^2)^{5/2}$

b) $(e^2e^{3/2})^{4/3}$

12. *a)* $\dfrac{(3^{1.2})(3^{2.7})}{3^{4.1}}$

b) $\left(\dfrac{16}{81}\right)^{1/4}\left(\dfrac{125}{8}\right)^{-2/3}$

www.FreeLibros.com

En los problemas 13 a 18 utilice las propiedades de los exponentes para simplificar las expresiones dadas.

13. *a*) $(27x^6)^{2/3}$

b) $(8x^2y^3)^{1/3}$

14. *a*) $(x^{1/3})^{3/2}$

b) $(x^{2/3})^{-3/4}$

15. *a*) $\dfrac{(x+y)^0}{(x^2y^3)^{1/6}}$

b) $(x^{1.1}y^2)(x^2+y^3)^0$

16. *a*) $(-2x^{-3})(3x^{2/3})$

b) $(x^{-2/3})(x^{3/4})$

17. *a*) $(t^{5/6})^{-6/5}$

b) $(t^{-3/2})^{-2/3}$

18. *a*) $(x^2y^{-3}z)^3$

b) $\left(\dfrac{x^3y^{-2}}{z^4}\right)^{1/6}$

En los problemas 19 a 26 encuentre todos los números reales x *que satisfacen la ecuación dada.*

19. $4^{2x-1} = 16$

20. $3^x2^{2x} = 144$

21. $2^{3-x} = 4^x$

22. $4^x\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x} = 8$

23. $(2.14)^{x-1} = (2.14)^{1-x}$

24. $(3.2)^{2x-3} = (3.2)^{2-x}$

En los problemas 25 y 26 determine los valores de las constantes C y b de manera que la curva $y = Cb^x$ *contenga los puntos indicados.*

25. (2, 12) y (3, 24)

26. (2, 3) y (3, 9)

27. INTERÉS COMPUESTO Suponga que se invierten $1 000 a una tasa de interés anual de 7%. Calcule el saldo al cabo de 10 años si el interés se capitaliza:

a) Anualmente
b) Trimestralmente
c) Mensualmente
d) Continuamente

28. INTERÉS COMPUESTO Suponga que se invierten $5 000 a una tasa de interés anual de 10%. Calcule el saldo después de 10 años si el interés se capitaliza:

a) Anualmente
b) Semestralmente
c) Diariamente (utilizando 365 días por año)
d) Continuamente

29. VALOR PRESENTE ¿Cuánto dinero se deberá invertir hoy a 7% capitalizado trimestralmente, de manera que dentro de 5 años se tengan $5 000?

30. VALOR PRESENTE ¿Cuánto dinero se deberá invertir hoy a una tasa de interés anual de 7% capitalizada continuamente de manera que dentro de 20 años se tengan $20 000?

31. VALOR PRESENTE ¿Cuánto dinero se deberá invertir en este momento a 7% para obtener $9 000 dentro de 5 años, si el interés se capitaliza:

a) Trimestralmente?
b) Continuamente?

32. VALOR PRESENTE ¿Cuál es el valor presente de $10 000 en un periodo de 5 años, si el interés se capitaliza continuamente a una tasa anual de 7%? ¿Cuál es el valor presente de $20 000 en las mismas condiciones?

33. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN Se ha proyectado que dentro de t años, la población de cierto país será $P(t) = 50e^{0.02t}$ millones.

a) ¿Cuál es la población actual?
b) ¿Cuál será la población dentro de 30 años?

34. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN Se estima que la población de cierto país crece exponencialmente. Si la población era de 60 millones en 1997 y de 90 millones en 2002, ¿cuál será la población en 2012?

35. Encuentre $f(2)$ si $f(x) = e^{kx}$ y $f(1) = 20$.

36. Determine $f(9)$ si $f(x) = e^{kx}$ y $f(3) = 2$.

37. Encuentre $f(8)$ si $f(x) = A2^{kx}$, $f(0) = 20$ y $f(2) = 40$.

38. INTERÉS COMPUESTO Se invierte una suma de dinero a una tasa de interés fija, y el interés se capitaliza continuamente. Después de 10 años, el dinero se duplica. ¿Cuál será el saldo después de 20 años, comparado con la inversión inicial?

www.FreeLibros.com

39. INTERÉS COMPUESTO Se invierte una suma de dinero a cierta tasa de interés fijo, y el interés se capitaliza trimestralmente. Al cabo de 15 años, el dinero se ha duplicado. ¿Cuál será el saldo después de 30 años, comparado con la inversión inicial?

40. CRECIMIENTO DEL PIB El Producto Interno Bruto (PIB) de cierto país fue de $500 mil millones al inicio del 2000 y crece a una tasa de 2.7% por año.

a) Exprese el PIB de este país como una función del número t de años después de 2000.

b) Según la predicción de esta fórmula, ¿cuál será el PIB de este país al inicio del año 2010?

41. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN El tamaño de una población de bacterias, $P(t)$, crece a una tasa de 3.1% por día. Si la población inicial es de 10 000, ¿cuál es la población después de 10 días?

42. INVERSIÓN EN BIENES Y RAÍCES En 1626, Peter Minuit cambió a una tribu americana baratijas por un valor de $24 dólares, por tierra en la isla de Manhattan . Suponga que en 1990 la misma tierra tenía un valor de $25.2 miles de millones. Si los vendedores en esta transacción hubieran invertido sus $24 a un interés anual de 7% capitalizado continuamente durante todo el periodo de 364 años, ¿quién hubiera hecho el mejor negocio? ¿En cuánto mejor?

43. CRECIMIENTO DE BACTERIAS Los siguientes datos fueron recolectados por un investigador durante los primeros 10 minutos de un experimento diseñado para estudiar el crecimiento de bacterias:

Número de minutos	0	10
Número de bacterias	5 000	8 000

Suponiendo que el número de bacterias crece exponencialmente, ¿cuántas bacterias habrá después de 30 minutos?

44. VENTAS AL MENUDEO El número total de hamburguesas vendidas por una cadena nacional de comida rápida está creciendo exponencialmente. Si en 1995 vendieron 4 mil millones y 12 mil millones para el 2000, ¿cuántas vendieron en 2005?

45. VENTAS Una vez que termine la publicidad inicial sobre la venta de un libro nuevo, las ventas de la edición de pasta dura tienden a decrecer exponencialmente. En el momento que se detuvo la publicidad, cierto libro tenía ventas de 25 000 ejemplares por mes. Un mes después, las ventas del libro habían bajado a 10 000 ejemplares por mes. ¿Cuáles serán las ventas al final del mes siguiente?

46. INTERÉS COMPUESTO Un banco paga 5% de interés capitalizado trimestralmente, y una institución de ahorro paga 4.9% de interés capitalizado continuamente. En un periodo de 1 año, ¿qué cuenta paga más interés? ¿Cuál paga más en un periodo de 5 años?

47. DENSIDAD DE POBLACIÓN La densidad de población a x millas del centro de cierta ciudad es $D(x) = 12e^{-0.07x}$ miles de personas por milla cuadrada.

a) ¿Cuál es la densidad de población por milla cuadrada en el centro de la ciudad?

b) ¿Cuál es la densidad de población a 10 millas del centro de la ciudad?

48. DECAIMIENTO RADIACTIVO La cantidad que queda de una muestra de cierta sustancia radiactiva después de t años está dada por una función de la forma $Q(t) = Q_0e^{-0.0001t}$. Al final de 5 000 años, quedan 200 gramos de la sustancia. ¿Cuántos gramos había inicialmente?

49. DECAIMIENTO RADIACTIVO Una sustancia radiactiva decae exponencialmente. Si inicialmente había 500 gramos de la sustancia y 50 años después hay 400 gramos, ¿cuantos gramos habrá al cabo de 200 años?

50. APRENDIZAJE De acuerdo con el modelo de Ebbinghaus, la fracción $F(t)$ del contenido de este curso que usted recordará t meses después del examen final, se puede estimar mediante la fórmula

$$F(t) = B + (1 - B)e^{-kt}$$

donde B es la fracción del contenido que usted nunca olvidará, y k es una constante que depende de la calidad de su memoria. Suponga que se le practica un examen y se determina que $B = 0.3$ y $k = 0.2$. ¿Qué fracción del contenido recordará un mes después del final de las clases? ¿Qué fracción recordará después de un año?

51. CONFIABILIDAD DE UN PRODUCTO Un estudio estadístico indica que la fracción de tostadoras eléctricas fabricadas por cierta compañía que aún están en operación después de t años de uso es aproximadamente $f(t) = e^{-0.2t}$.

a) ¿Qué fracción de las tostadoras se espera que funcionará al menos durante 3 años?

b) ¿Qué fracción de las tostadoras se espera que falle antes de un año de uso?

c) ¿Qué fracción de las tostadoras se espera que falle durante el tercer año de uso?

www.FreeLibros.com

52. ENTRENAMIENTO EN LOS NEGOCIOS Una compañía organiza un programa de entrenamiento donde se determina que, después de t semanas, la persona típica entrenada produce

$$P(t) = 50(1 - e^{-0.15t}) \text{ unidades}$$

mientras que un trabajador nuevo típico, sin entrenamiento especial, produce

$$W(t) = \sqrt{150t} \text{ unidades}$$

a) ¿Cuántas unidades produce la persona entrenada promedio durante la tercera semana del periodo de entrenamiento?

b) Explique cómo se puede utilizar la función $F(t) = P(t) - W(t)$ para evaluar la efectividad del programa de entrenamiento. ¿Es efectivo el programa si sólo dura cinco semanas? ¿Es efectivo si al menos dura siete semanas? Explique su razonamiento.

53. VIDA DE UNA PLANTA ACUÁTICA La vida de las plantas en un lago o en el mar sólo existe a una profundidad máxima de 10 metros, principalmente debido a que la intensidad de la luz solar disminuye exponencialmente con la profundidad. En particular la **ley de Bouguer-Lambert** especifica que un haz de luz que atraviesa un cuerpo de agua con una intensidad I_0 tendrá una intensidad I a una profundidad de x metros, donde $I = I_0e^{-kx}$ con $k > 0$. La constante k, denominada **coeficiente de absorción**, depende de la longitud de onda de la luz y de la densidad del agua. Suponga que un haz de luz sólo tiene 10% de la intensidad que tiene en la superficie, a una profundidad de 3 metros. ¿Qué tan intenso es el haz a una profundidad de 1 metro? (Exprese su respuesta en términos de I_0.)

54. TASA DE INTERÉS EFECTIVA Cuando un banco ofrece interés a una tasa anual r (expresada en forma decimal) y capitaliza más de una vez al año, el interés total ganado durante el año es mayor que $100r\%$ del saldo al inicio de ese año. El porcentaje real que crece el saldo durante un año se denomina **tasa de interés efectiva,** mientras que la tasa anunciada, r, se denomina **tasa de interés nominal.** En otras palabras, la tasa de interés efectiva es la tasa simple que es equivalente a la tasa de interés nominal compuesto.

a) Si el interés se capitaliza k veces al año, demuestre que la tasa efectiva es $(1 + i)^k - 1$, donde $i = \frac{r}{k}$.

b) Si el interés se capitaliza continuamente, demuestre que la tasa efectiva es $e^r - 1$.

En los problemas 55 y 56, se necesitarán las fórmulas para la tasa de interés efectiva obtenida en el problema 54.

55. TASA DE INTERÉS EFECTIVA Si un banco ofrece interés a una tasa nominal de 6%, ¿cuán mayor es la tasa efectiva si el interés se capitaliza continuamente que si se capitalizara trimestralmente?

56. TASA DE INTERÉS EFECTIVA ¿Qué inversión tiene la mayor tasa efectiva: 8.2% capitalizada trimestralmente, o 8.1% capitalizada continuamente?

57. LINGÜÍSTICA La **glotocronología** es la metodología empleada por los lingüistas para determinar cuántos años han transcurrido desde que dos lenguas modernas se "ramificaron" a partir de un ancestro común. Los experimentos sugieren que si N palabras son de uso común en un tiempo base $t = 0$, entonces el número $N(t)$ de ellas aún en uso, con esencialmente el mismo significado, t miles de años después, está dado por la denominada **ecuación fundamental de la glotocronología**[1]

$$N(t) = N_0e^{-0.217t}$$

a) De un conjunto de 500 palabras básicas en latín clásico en 200 a.C., ¿cuántas esperaría que aún estén en uso en italiano moderno en el 2010?

b) La investigación de C. W. Feng y M. Swadesh indica que de un conjunto de 210 palabras comúnmente empleadas en chino clásico en 950 d.C., 167 aún estaban en uso en mandarín moderno en 1950. ¿Es éste el mismo número que predice la ecuación fundamental de la glotocronología? ¿Cómo explica la diferencia?

c) Lea un artículo sobre glotocronología y escriba un párrafo sobre su metodología. Puede iniciar su investigación leyendo el artículo citado en este problema.

[1] *Fuente:* Anthony LoBello y Maurice D. Weir, "Glottochronology: An Application of Calculus to Linguistics", *UMAP Modules 1982: Tools for Teaching*, Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., Lexington, MA, 1983.

www.FreeLibros.com

Amortización de una deuda ■ Si un préstamo de A dólares se amortiza en n años a una tasa de interés anual r (expresada en forma decimal) capitalizada mensualmente, los pagos mensuales están dados por

$$M = \frac{Ai}{1 - (1 + i)^{-12n}}$$

donde $i = \frac{r}{12}$ es la tasa de interés mensual. Use esta misma fórmula en los problemas 58 a 61.

58. PAGOS DE FINANCIAMIENTO Determine el pago mensual de un automóvil nuevo que cuesta \$15 675, si se da un enganche de \$4 000 y el automóvil se financia en un periodo de 5 años, a una tasa anual de 6% capitalizada mensualmente.

59. PAGOS HIPOTECARIOS Se pide un crédito de \$150 000 para una vivienda, a un interés anual de 9%, capitalizado mensualmente, durante 30 años, ¿cuál es el pago mensual de la hipoteca sobre este préstamo?

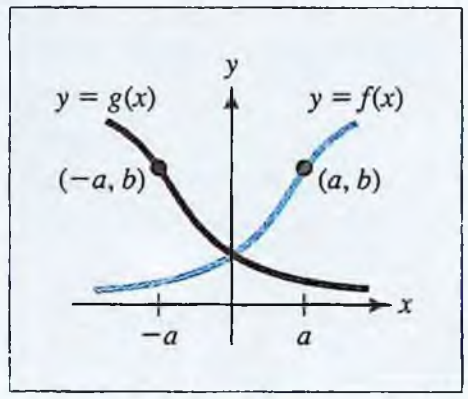
60. PAGOS HIPOTECARIOS Suponga que una familia determina que puede hacer pagos hipotecarios mensuales no mayores a \$1 200. ¿Cuál es la cantidad mayor que puede pedir prestada, suponiendo que el acreedor desea que sea amortizada durante 30 años a un interés anual de 8% capitalizado mensualmente?

61. VALOR REAL DE UN PRÉSTAMO Usted vende su automóvil por \$6 000. Un comprador potencial dice: "le pagaré \$1 000 ahora por el automóvil y pagaré el resto a 12% de interés con pagos mensuales durante 3 años. Veamos..., 12% de los \$5 000 es \$600 y \$5 600 dividido entre 36 meses es \$155.56, pero le pagaré \$160 por mes por el manejo del préstamo. ¿Es un buen trato?

a) Si este trato le parece justo, yo tengo algo muy interesante que usted debería considerar como su próxima compra. Si no, explique por qué el trato es engañoso y calcule un pago mensual justo (suponiendo que aún planea amortizar la deuda de \$5 000 durante 3 años).

b) Lea un artículo sobre el valor real de un préstamo e invente algunos ejemplos de tratos creíbles, aunque turbios, como la transacción propuesta por el automóvil usado en este problema.

62. Dos gráficas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ son una el reflejo de la otra respecto al eje y: si (a, b) es un punto en una de las gráficas entonces $(-a, b)$ es un punto en la otra, como se indica en la figura adjunta. Use este criterio para demostrar que las gráficas de $y = b^x$ y $y = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ para $b > 0, b \neq 1$ son reflejos una de otra en el eje y.



PROBLEMA 62

63. Complete la tabla siguiente para $f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^x$.

x	−2.2	−1.5	0	1.5	2.3
$f(x)$					

64. Programe una computadora o utilice una calculadora para evaluar $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para $n = 1\,000, 2\,000, \ldots, 50\,000$.

65. Programe una computadora o use una calculadora para evaluar $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ para $n = -1\,000, -2\,000, \ldots, -50\,000$.

Con base en estos cálculos, ¿qué conjeturas puede hacer acerca del comportamiento de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ cuando n *disminuye* sin límite?

66. Programe una computadora o use una calculadora para estimar $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n}$.

67. Programe una computadora o utilice una calculadora para estimar $\lim_{n \to +\infty} \left(2 - \frac{5}{2n}\right)^{n/3}$.

www.FreeLibros.com

SECCIÓN 4.2 Funciones logarítmicas

Suponga que se invierten \$1 000 a 8% capitalizado continuamente y se desea saber cuánto tiempo debe transcurrir para que la inversión duplique su valor a \$2 000. De acuerdo con la fórmula deducida en la sección 1, el valor de la cuenta después de t años será $1\,000e^{0.08t}$, por lo que para encontrar el tiempo de duplicación de la cuenta, se debe despejar t en la ecuación

$$1\,000e^{0.08t} = 2\,000$$

o bien, dividiendo ambos lados entre 1 000.

$$e^{0.08t} = 2$$

En el ejemplo 4.2.10 se responderá la pregunta acerca del tiempo de duplicación. Resolver una ecuación exponencial cómo esta requiere del uso de *logaritmos*, que invierten el proceso exponencial. Los logaritmos tienen una importante función en una gran variedad de aplicaciones, tales como la medición de la capacidad de un canal de transmisión y, en la famosa escala de Richter, para medir la intensidad de un terremoto. En esta sección, se estudiarán las propiedades básicas de las funciones logarítmicas y algunas de sus aplicaciones. Comenzamos con una definición.

Funciones logarítmicas ■ Si x es un número positivo, entonces el **logaritmo** de x de base b ($b > 0$, $b \neq 1$), denotada $\log_b x$, es el número y tal que $b^y = x$; es decir,

$$y = \log_b x \quad \text{si y sólo si} \quad b^y = x \quad \text{para } x > 0$$

EJEMPLO | 4.2.1

Evalúe

a) $\log_{10} 1\,000$ **b)** $\log_2 32$ **c)** $\log_5\left(\frac{1}{125}\right)$

Solución

a) $\log_{10} 1\,000 = 3$ como $10^3 = 1\,000$.

b) $\log_2 32 = 5$ como $2^5 = 32$.

c) $\log_5 \frac{1}{125} = -3$ como $5^{-3} = \frac{1}{125}$

EJEMPLO | 4.2.2

Despeje x en cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $\log_4 x = \frac{1}{2}$ **b)** $\log_{64} 16 = x$ **c)** $\log_x 27 = 3$

Solución

a) Por definición, $\log_4 x = \frac{1}{2}$ es equivalente a $x = 4^{1/2} = 2$.

www.FreeLibros.com

b) $\log_{64} 16 = x$ significa

$$16 = 64^x$$
$$2^4 = (2^6)^x = 2^{6x}$$
$$4 = 6x \qquad b^m = b^n \text{ implica } m = n$$
$$x = \frac{2}{3}$$

c) $\log_x 27 = 3$ significa

$$x^3 = 27$$
$$x = (27)^{1/3} = 3$$

Propiedades de los logaritmos

Con frecuencia, los cálculos que implican logaritmos se pueden simplificar utilizando estas reglas.

Propiedades de los logaritmos ■ Sea b ($b > 0$, $b \neq 1$) cualquier base logarítmica. Entonces,

$$\log_b 1 = 0 \quad \text{y} \quad \log_b b = 1$$

y si u y v son cualesquiera números positivos, se tiene

Regla de la igualdad	$\log_b u = \log_b v$ si y sólo si $u = v$
Regla del producto	$\log_b (uv) = \log_b u + \log_b v$
Regla de la potencia	$\log_b u^r = r \log_b u$ para cualquier número real r
Regla del cociente	$\log_b \left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$

Todas estas reglas logarítmicas se derivan de reglas exponenciales correspondientes. Por ejemplo,

$$\log_b 1 = 0 \quad \text{como} \quad b^0 = 1$$
$$\log_b b = 1 \quad \text{como} \quad b^1 = b$$

Para demostrar la regla de la igualdad, sea

$$m = \log_b u \quad \text{y} \quad n = \log_b v$$

de manera que, por definición,

$$b^m = u \quad \text{y} \quad b^n = v$$

Por tanto, si

$$\log_b u = \log_b v$$

entonces

$$m = n$$

de manera que

$$b^m = b^n \qquad \textit{regla de la igualdad para los exponentes}$$

www.FreeLibros.com

o, de forma equivalente,

$$u = v$$

como se estableció en la regla de la igualdad para logaritmos. De manera similar, para demostrar la regla del producto para logaritmos, observe que

$$\begin{aligned}
\log_b u + \log_b v &= m + n \\
&= \log_b (b^{m+n}) && \textit{por la definición de logaritmo} \\
&= \log_b (b^m b^n) && \textit{por la regla del producto para los exponentes} \\
&= \log_b (uv) && \textit{como } b^m = u \textit{ y } b^n = v
\end{aligned}$$

Las demostraciones de la regla de la potencia y de la regla del cociente se dejan como ejercicios (véase el problema 66).

EJEMPLO | 4.2.3

Utilice reglas de los logaritmos para reescribir cada una de las siguientes expresiones en términos de $\log_5 2$ y $\log_5 3$.

a) $\log_5 \left(\frac{5}{3}\right)$ **b)** $\log_5 8$ **c)** $\log_5 36$

Solución

a) $\log_5 \left(\frac{5}{3}\right) = \log_5 5 - \log_5 3$ *regla del cociente*

$= 1 - \log_5 3$ *porque* $\log_5 5 = 1$

b) $\log_5 8 = \log_5 2^3 = 3 \log_5 2$ *regla de la potencia*

c) $\log_5 36 = \log_5 (2^2 3^2)$

$= \log_5 2^2 + \log_5 3^2$ *regla del producto*

$= 2 \log_5 2 + 2 \log_5 3$ *regla de la potencia*

EJEMPLO | 4.2.4

Emplee las reglas de los logaritmos para expandir las siguientes expresiones.

a) $\log_3 (x^3 y^{-4})$ **b)** $\log_2 \left(\frac{y^5}{x^2}\right)$ **c)** $\log_7 (x^3 \sqrt{1 - y^2})$

Solución

a) $\log_3 (x^3 y^{-4}) = \log_3 x^3 + \log_3 y^{-4}$ *regla del producto*

$= 3 \log_3 x + (-4) \log_3 y$ *regla de la potencia*

$= 3 \log_3 x - 4 \log_3 y$

b) $\log_2 \left(\frac{y^5}{x^2}\right) = \log_2 y^5 - \log_2 x^2$ *regla del cociente*

$= 5 \log_2 y - 2 \log_2 x$ *regla de la potencia*

www.FreeLibros.com

c) $\log_7 (x^3\sqrt{1-y^2}) = \log_7 [x^3(1-y^2)^{1/2}]$

$= \log_7 x^3 + \log_7 (1-y^2)^{1/2}$ *regla del producto*

$= 3\log_7 x + \frac{1}{2}\log_7 (1-y^2)$ *regla de la potencia*

$= 3\log_7 x + \frac{1}{2}\log_7 [(1-y)(1+y)]$ *factorizando* $1-y^2$

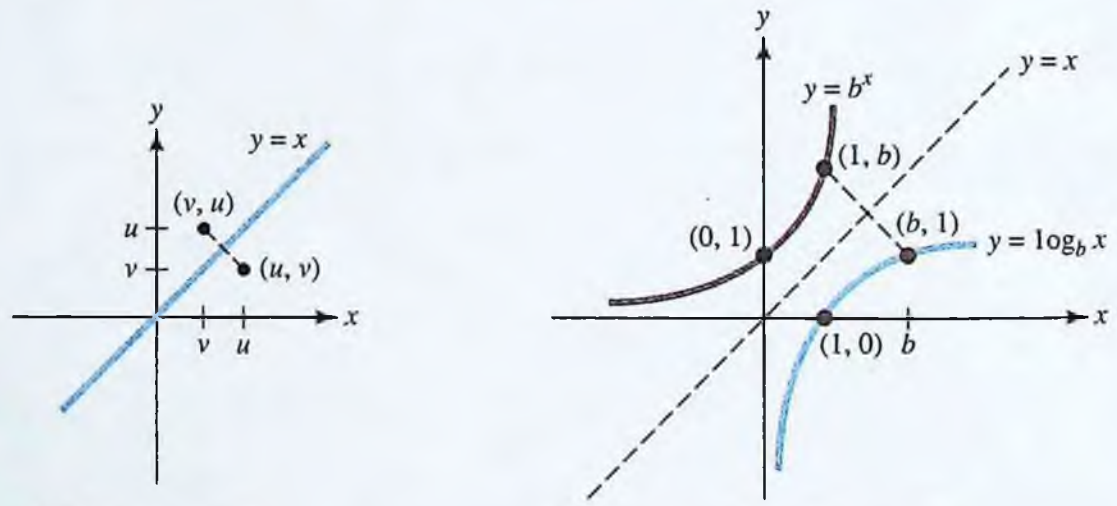
$= 3\log_7 x + \frac{1}{2}[\log_7 (1-y) + \log_7 (1+y)]$ *regla del producto*

$= 3\log_7 x + \frac{1}{2}\log_7 (1-y) + \frac{1}{2}\log_7 (1+y)$

Gráficas de las funciones logarítmicas

Existe una forma fácil para obtener la gráfica de la función logarítmica $y = \log_b x$ a partir de la gráfica de la función exponencial $y = b^x$. La idea es que, como $y = \log_b x$ es equivalente a $x = b^y$, entonces la gráfica de $y = \log_b x$ es igual a la gráfica de $y = b^x$ con los papeles de x y y invertidos. Es decir, si (u, v) es un punto en la curva $y = \log_b x$, entonces $v = \log_b u$, o de forma equivalente, $u = b^v$, lo que significa que (v, u) está en la gráfica de $y = b^x$. Pero, como se ilustra en la figura 4.6*a*, los puntos (u, v) y (v, u) son uno la imagen del otro respecto a un espejo colocado en la recta $y = x$ (véase el problema 67). Así, la gráfica de $y = \log_b x$ se puede obtener simplemente *reflejando* la gráfica de $y = b^x$ en la recta $y = x$, como se muestra en la figura 4.6*b* para el caso donde $b > 1$. Resumiendo:

Relación entre las gráficas de $y = \log_b x$ y $y = b^x$ ■ Las gráficas de $y = \log_b x$ y $y = b^x$ son la imagen de la otra respecto a un espejo colocado en la recta $y = x$. Por tanto, la gráfica de $y = \log_b x$ se puede obtener reflejando la gráfica de $y = b^x$ en la recta $y = x$.



a) El punto (v, u) es la imagen de (u, v) en el espejo colocado en la recta $y = x$.

b) Las gráficas de $y = \log_b x$ y $y = b^x$ son una el reflejo de la otra en la recta $y = x$.

FIGURA 4.6 La gráfica de $y = \log_b x$ para $b > 1$ se obtiene reflejando la gráfica de $y = b^x$ respecto a la recta $y = x$.

www.FreeLibros.com

En la figura 4.6*b* se muestra esta característica de la función logarítmica $y = \log_b x$, para $b > 1$, así como su gráfica:

1. La función $y = \log_b x$ siempre crece y su gráfica siempre es cóncava hacia abajo para $x > 0$.
2. La gráfica de $y = \log_b x$ tiene (1, 0) como su única intersección con el eje x, y el eje y como una asíntota vertical.
3. La función $y = \log_b x$ crece sin límite cuando x crece indefinidamente y disminuye sin límite cuando x se aproxima a 0 por la derecha; es decir,

$$\lim_{x \to +\infty} \log_b x = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 0^+} \log b\, x = -\infty$$

¿En qué se diferencia (si lo hace) la función $y = \log_b x$ y su gráfica, para el caso en que $0 < b < 1$? En el problema 68 se le pide que responda a esta pregunta.

El logaritmo natural

En el cálculo, la base logarítmica e es la más frecuentemente usada. El logaritmo $\log_e x$ recibe el nombre de **logaritmo natural** de x y se denota por $\ln x$ (se lee como "ele ene de x"); es decir, para $x > 0$

$$y = \ln x \qquad \text{si y sólo si} \qquad e^y = x$$

Para evaluar $\ln a$ para un número particular $a > 0$, se emplea la tecla **LN** en su calculadora. Por ejemplo, para encontrar ln (2.714), se presionaría la tecla **LN**, luego se ingresa el número 2.714 para obtener

$$\ln (2.714) = 0.9984 \text{ (hasta cuatro lugares decimales)}$$

A continuación, se presenta un ejemplo que ilustra el cálculo de logaritmos naturales.

EJEMPLO | 4.2.5

Encuentre

a) $\ln e$ **b)** $\ln 1$ **c)** $\ln \sqrt{e}$ **d)** $\ln 2$

Solución

a) De acuerdo con la definición, $\ln e$ es el único número c tal que $e = e^c$. Es evidente que este número es $c = 1$. De aquí, $\ln e = 1$.

b) $\ln 1$ es el número único c tal que $1 = e^c$. Como $e^0 = 1$, se deduce que $\ln 1 = 0$.

c) $\ln \sqrt{e} = \ln e^{1/2}$ es el número único c tal que $e^{1/2} = e^c$; es decir, $c = \frac{1}{2}$. De aquí, $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$.

d) $\ln 2$ es el número único c tal que $2 = e^c$. El valor de este número no es obvio, y tendrá que utilizar su calculadora para encontrar que $\ln 2 \approx 0.69315$.

Como el logaritmo natural $y = \ln x$ es la función logarítmica que se usa con más frecuencia en el cálculo, es útil tener la siguiente lista de sus propiedades.

www.FreeLibros.com

Propiedades del logaritmo natural $y = \ln x$ ▪ Para números positivos u y v:

Regla de la igualdad	$\ln u = \ln v$ si y sólo si $u = v$
Regla del producto	$\ln(uv) = \ln u + \ln v$
Regla de la potencia	$\ln u^r = r \ln u$ donde r es un número real
Regla del cociente	$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln u - \ln v$
Valores especiales	$\ln 1 = 0$ y $\ln e = 1$

¡EXPLORE!

Introduzca $y = e^x$ en Y1, con un estilo de graficación en negritas, y $y = x$ en Y2. Como $y = \ln x$ es equivalente a $e^y = x$, se puede graficar $y = \ln x$, como la relación inversa de $e^x = y$, utilizando una pantalla decimal. Ponga una marca de verificación en la opción 8: **DrawInv** de la tecla **DRAW** (**2nd PRGM**) y escriba **DrawInv Y1** en la pantalla principal.

La gráfica de $y = \ln x$ se obtiene reflejando la gráfica de $y = e^x$ en la recta $y = x$, como se muestra en la figura 4.7.

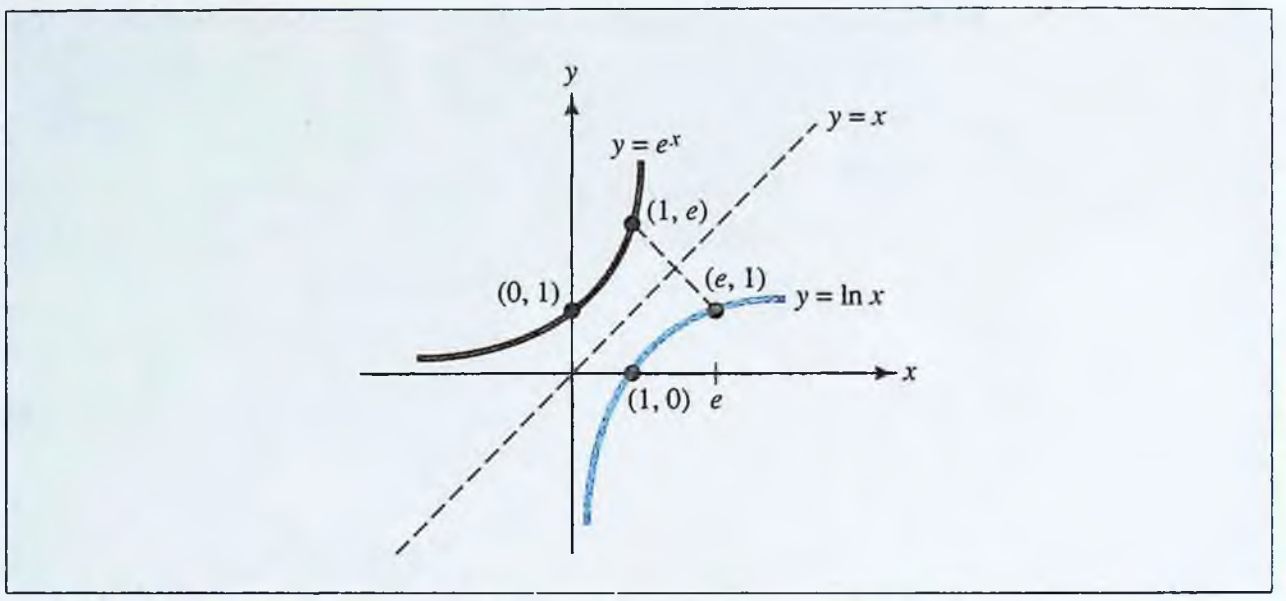


FIGURA 4.7 Gráfica de $y = \ln x$.

EJEMPLO | 4.2.6

a) Encuentre $\ln\sqrt{ab}$ si $\ln a = 3$ y $\ln b = 7$.

b) Demuestre que $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$.

c) Determine x si $2^x = e^3$.

Solución

a) $\ln\sqrt{ab} = \ln(ab)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln ab = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \frac{1}{2}(3 + 7) = 5$

b) $\ln\frac{1}{x} = \ln 1 - \ln x = 0 - \ln x = -\ln x$

c) Tome el logaritmo natural de cada lado de la ecuación $2^x = e^3$ y despeje x para obtener

$$x \ln 2 = 3 \quad \text{o} \quad x = \frac{3}{\ln 2} \approx 4.33$$

www.FreeLibros.com

Relación entre e^x y $\ln x$

En el ejemplo 4.2.7 se establecen dos identidades importantes que muestran cómo las funciones logarítmicas y exponenciales tienen cierto efecto "neutralizador" entre sí.

EJEMPLO | 4.2.7

Simplifique las siguientes expresiones:

a) $e^{\ln x}$ (para $x > 0$) **b)** $\ln e^x$

Solución

a) De acuerdo con la definición, $\ln x$ es el único número b para el cual $x = e^b$. De aquí, $e^{\ln x} = e^b = x$.

b) De forma similar, $\ln e^x$ es el único número b para el cual $e^x = e^b$. Es obvio que este número b es x. De aquí, $\ln e^x = x$.

Las dos identidades deducidas en el ejemplo 4.2.7 muestran que las funciones compuestas e^x y $e^{\ln x}$ dejan invariante la variable x. En general, dos funciones f y g para las cuales $f(g(x)) = x$ y $g(f(x))$ se dice que son **inversas** entre sí. Así, la función exponencial $y = e^x$ y la función logarítmica $y = \ln x$ son inversas.

Relación inversa entre e^x y $\ln x$

$$e^{\ln x} = x \quad \text{para } x > 0 \qquad \text{y} \qquad \ln e^x = x \quad \text{para toda } x$$

En el ejemplo 4.2.8 se ilustra cómo se puede utilizar la relación inversa entre e^x y $\ln x$ para resolver ecuaciones.

EJEMPLO | 4.2.8

Despeje x de cada una de las ecuaciones siguientes:

a) $3 = e^{20x}$ **b)** $2 \ln x = 1$

Solución

a) Aplique el logaritmo natural a cada lado de la ecuación para obtener

$$\ln 3 = \ln e^{20x} \qquad \text{o bien} \qquad \ln 3 = 20x$$

Despeje x, utilizando una calculadora para calcular $\ln 3$:

$$x = \frac{\ln 3}{20} \approx \frac{1.0986}{20} \approx 0.0549$$

b) Primero aísle $\ln x$ en el miembro izquierdo de la ecuación dividiendo ambos lados entre 2:

$$\ln x = \frac{1}{2}$$

Luego, aplique la función exponencial en ambos lados de la ecuación para obtener

$$e^{\ln x} = e^{1/2} \qquad \text{o} \qquad x = e^{1/2} = \sqrt{e} \approx 1.6487$$

¡EXPLORE!

Resuelva la ecuación

$$3 - e^x = \ln(x^2 + 1)$$

colocando el lado izquierdo de la ecuación en Y1 y el derecho en Y2. Use la pantalla (**ZOOM** 6) para encontrar los valores x de los puntos de intersección.

¡EXPLORE!

Introduzca la ecuación $y = 10^x$ en Y1 y grafique utilizando un estilo de graficación en negritas. Luego coloque $y = x$ en Y2, $y = \ln x$ en Y3, y $y = \log x$ en Y4. ¿Qué se puede concluir a partir de esta serie de gráficas?

Ya se ha visto cómo utilizar la tecla **LN** para calcular logaritmos naturales, y casi todas las calculadoras tienen una tecla **LOG** para calcular logaritmos con base 10, pero

www.FreeLibros.com

¿que hacer para calcular logaritmos con bases distintas a e o 10? Para ser específicos, suponga que se desea calcular el número logarítmico $c = \log_b a$. Se tiene

$$\begin{aligned} c &= \log_b a \\ b^c &= a && \textit{definición de logaritmo} \\ \ln b^c &= \ln a \\ c \ln b &= \ln a && \textit{regla de la potencia} \\ c &= \frac{\ln a}{\ln b} \end{aligned}$$

Así, el logaritmo $\log_b a$ se puede encontrar calculando el cociente de dos logaritmos naturales, $\ln a$ y $\ln b$. Resumiendo:

Fórmula de conversión para logaritmos ■ Si a y b son números positivos con $b \neq 1$, entonces

$$\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$$

¡EXPLORE!

Introduzca $f(x) = B^x$ en Y1 y $g(x) = \log_B x$ en Y2 como $\ln(x)/\ln(B)$. Experimente con valores diferentes de $B > 1$, utilizando la tecla **STO▶** para determinar para qué valores de B se interceptan, tocan en un punto, o están separadas estas dos funciones, como se muestra en la figura 4.6*b*.

EJEMPLO | 4.2.9

Encuentre $\log_5 3.172$.

Solución

Utilizando la fórmula de conversión, se halla

$$\log_5 3.172 = \frac{\ln 3.172}{\ln 5} \approx \frac{1.1544}{1.6094} \approx 0.7172$$

Tiempo de duplicación

En el párrafo introductorio al inicio de esta sección, se preguntó cuánto tardaría una inversión en duplicar su valor. Esta pregunta se responde en el ejemplo 4.2.10.

EJEMPLO | 4.2.10

Si se invierten \$1 000 a un interés anual de 8% capitalizado continuamente, ¿cuánto tiempo tomará para que se duplique la inversión? ¿Cambiará el tiempo de duplicación si el capital fuera diferente a \$1 000?

Solución

Con un capital de \$1 000, el saldo después de t años es $B(t) = 1\,000e^{0.08t}$, por tanto la inversión se duplica cuando $B(t) = \$2\,000$; es decir, cuando

$$2\,000 = 1\,000e^{0.08t}$$

Dividiendo entre 1 000 y tomando el logaritmo natural en cada miembro de la ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} 2 &= e^{0.08t} \\ 2 &= e^{0.08t} \end{aligned}$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.08} \approx 8.66 \text{ años}$$

www.FreeLibros.com

Si el capital hubiera sido P_0 dólares en vez de \$1 000, el tiempo de duplicación satisfaría

$$2P_0 = P_0e^{0.08t}$$
$$2 = e^{0.08t}$$

que es exactamente la misma ecuación que se tenía con $P_0 = \$1\,000$, por lo que una vez más, el tiempo de duplicación es 8.66 años.

¡EXPLORE!

Use la instrucción para resolver ecuaciones de su calculadora graficadora con la ecuación F – P*e^(R*T) = 0 para determinar cuánto tiempo tomará duplicar \$2 500 a 8.5%, capitalizado continuamente.

La situación que se ilustra en el ejemplo 4.2.10 se aplica a cualquier cantidad $Q(t) = Q_0e^{kt}$ que crece exponencialmente con el tiempo t. En particular, como en el tiempo $t = 0$, se tiene $Q(0) = Q_0e^0 = Q_0$, la cantidad se duplica cuando

$$2Q_0 = Q_0e^{kt}$$
$$2 = e^{kt}$$
$$\ln 2 = kt$$
$$t = \frac{\ln 2}{k}$$

Resumiendo:

Tiempo de duplicación ■ Una cantidad $Q(t) = Q_0e^{kt}$ $(k > 0)$ que experimenta un crecimiento exponencial, se duplica cuando $t = d$, donde

$$d = \frac{\ln 2}{k}$$

Vida media

Se ha determinado experimentalmente que la mayoría de las sustancias radiactivas decaen exponencialmente, de manera que la parte de una muestra de tamaño inicial Q_0 que está presente después de t años está dada por una función de la forma $Q(t) = Q_0e^{-kt}$. La constante positiva k mide la tasa de decaimiento, pero esta tasa generalmente se da especificando el tiempo $t = h$ requerido para que se desintegre la mitad de la muestra dada. Este tiempo se denomina **vida media** de la sustancia radiactiva. En el ejemplo 4.2.11 se muestra cómo se relaciona la vida media con k.

EJEMPLO | 4.2.11

Demuestre que una sustancia radiactiva que decae de acuerdo con la fórmula $Q(t) = Q_0e^{-kt}$ tiene una vida media $h = \frac{\ln 2}{k}$.

Solución

El objetivo es encontrar el valor de t para el cual $Q(h) = \frac{1}{2}Q_0$; es decir,

$$\frac{1}{2}Q_0 = Q_0e^{-kh}$$

Divida entre Q_0 y aplique el logaritmo natural en cada miembro para obtener

$$\ln\frac{1}{2} = -kh$$

www.FreeLibros.com

Así, la vida media es

$$h = \frac{\ln \frac{1}{2}}{-k}$$

$$= \frac{-\ln 2}{-k} = \frac{\ln 2}{k} \qquad \text{como } \ln \frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2$$

según se requería.

Datación por carbono

En 1960, W. F. Libby ganó un Premio Nobel por su descubrimiento del método de **datación por carbono**, una técnica para determinar la edad de ciertos fósiles y objetos arqueológicos. A continuación se presenta un resumen de la técnica.[2]

El bióxido de carbono en el aire contiene el isótopo radiactivo ^{14}C ("carbono 14") así como también el isótopo estable ^{12}C ("carbono 12"). Las plantas vivas absorben bióxido de carbono del aire, lo que significa que la relación de ^{14}C a ^{12}C en una planta viva (o en un animal herbívoro) es igual a la del aire. Cuando una planta o un animal muere, cesa la absorción de bióxido de carbono. El ^{12}C ya presente en la planta o animal permanece igual que en el momento de la muerte, mientras que el ^{14}C decae, y el cociente de ^{14}C a ^{12}C decrece exponencialmente. Es razonable suponer que la razón R_0 de ^{14}C entre ^{12}C en la atmósfera es la misma ahora que como era en el pasado, de manera que la razón de ^{14}C entre ^{12}C en una muestra (por ejemplo, en un fósil o un artículo) está dada por una función de la forma $R(t) = R_0 e^{-kt}$. La vida media de ^{14}C es 5 730 años. Comparando $R(t)$ con R_0, los arqueólogos pueden estimar la edad de las muestras. En el ejemplo 4.2.12 se ilustra el procedimiento de datación.

EJEMPLO | 4.2.12

Un arqueólogo descubre un fósil en el que la relación de ^{14}C a ^{12}C es $\frac{1}{5}$ de la razón encontrada en la atmósfera. Aproximadamente, ¿qué edad tiene el fósil?

Solución

La edad del fósil es el valor de t para el cual $R(t) = \frac{1}{5}R_0$; es decir, para el cual

$$\frac{1}{5}R_0 = R_0 e^{-kt}$$

Dividiendo entre R_0 y tomando logaritmos, se encuentra que

$$\frac{1}{5} = e^{-kt}$$

$$\ln \frac{1}{5} = -kt \text{y}$$

---

[2] Por ejemplo, vea Raymond J. Cannon, "Exponential Growth and Decay", *UMAP Modules 1977: Tools for Teaching*, Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., Lexington, MA, 1978. Procedimientos de datación más avanzados son discutidos en Paul J. Campbell, "How Old Is the Earth?" *UMAP Modules 1992: Tools for Teaching*, Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., Lexington, MA, 1993.

www.FreeLibros.com

y

$$t = \frac{-\ln \frac{1}{5}}{k} = \frac{\ln 5}{k}$$

En el ejemplo 4.2.11 se determinó que la vida media h satisface $h = \frac{\ln 2}{k}$, y como ^{14}C tiene una vida media $h = 5\,730$ años, se tiene que

$$k = \frac{\ln 2}{h} = \frac{\ln 2}{5\,730} \approx 0.000121$$

Por tanto, la edad del fósil es

$$t = \frac{\ln 5}{k} = \frac{\ln 5}{0.000121} \approx 13\,300$$

Es decir, el fósil tiene aproximadamente 13 300 años.

Ajuste exponencial de una curva

En el último ejemplo se analiza cómo utilizar logaritmos para encontrar una función exponencial que satisfaga ciertas condiciones específicas.

EJEMPLO | 4.2.13

La densidad de población a x millas del centro de una ciudad está dada por una función de la forma $Q(x) = Ae^{-kx}$. Encuentre esta función si se sabe que la densidad de población en el centro de la ciudad es de 15 000 personas por milla cuadrada y la densidad a 10 millas del centro es de 9 000 personas por milla cuadrada.

Solución

Por simplicidad, exprese la densidad en unidades de 1 000 personas por milla cuadrada. El hecho que $Q(0) = 15$ le indica que $A = 15$. El hecho que $Q(10) = 9$ significa que

$$9 = 15e^{-10k} \quad \text{o bien} \quad \frac{3}{5} = e^{-10k}$$

Aplicando logaritmo en ambos miembros de esta ecuación, se obtiene

$$\ln \frac{3}{5} = -10k \quad \text{o bien} \quad k = -\frac{\ln 3/5}{10} \approx 0.051$$

De aquí, la función exponencial para la densidad de población es $Q(x) = 15e^{-0.051x}$.

¡EXPLORE!

Véase el ejemplo 4.2.13. Ponga 0 = Q − A*e^(−K*X) en el editor de ecuaciones de su calculadora graficadora. Encuentre la distancia desde el centro de la ciudad si Q = 13 500 personas por milla cuadrada. Recuerde del ejemplo que la densidad en el centro es de 15 000 y la densidad a 10 millas del centro de la ciudad es de 9 000 personas por milla cuadrada.

www.FreeLibros.com

PROBLEMAS | 4.2

En los problemas 1 y 2 use su calculadora para encontrar los logaritmos naturales indicados.

1. Encuentre ln 1, ln 2, ln e, ln 5, ln $\frac{1}{5}$, y ln e^2. ¿Qué pasa si intenta encontrar ln 0 o bien ln(-2)? ¿Por qué?

2. Determine ln 7, ln $\frac{1}{3}$, ln e^{-3}, ln $\frac{1}{e^{2.1}}$, y ln$\sqrt[5]{e}$. ¿Qué pasa si trata de encontrar ln(-7) o ln$(-e)$?

En los problemas 3 a 8 evalúe la expresión dada utilizando las propiedades de los logaritmos.

3. $\ln e^3$

4. $\ln \sqrt{e}$

5. $e^{\ln 5}$

6. $e^{2 \ln 3}$

7. $e^{3 \ln 2 - 2 \ln 5}$

8. $\ln \dfrac{e^3\sqrt{e}}{e^{1/3}}$

En los problemas 9 a 12 utilice las reglas de los logaritmos para rescribir cada una de las expresiones en términos de $\log_3 2$ *y* $\log_3 5$.

9. $\log_3 270$

10. $\log_3 (2.5)$

11. $\log_3 100$

12. $\log_3 \left(\dfrac{64}{125}\right)$

En los problemas 13 a 20 utilice las reglas de los logaritmos para simplificar cada una de las expresiones.

13. $\log_2 (x^4y^3)$

14. $\log_3 (x^5y^{-2})$

15. $\ln \sqrt[3]{x^2 - x}$

16. $\ln(x^2\sqrt{4 - x^2})$

17. $\ln\left[\dfrac{x^2(3 - x)^{2/3}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}\right]$

18. $\ln\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right]$

19. $\ln(x^3e^{-x^2})$

20. $\ln\left[\dfrac{\sqrt[4]{x}}{x^3\sqrt{1 - x^2}}\right]$

En los problemas 21 a 32 resuelva la ecuación dada para x.

21. $2 = e^{0.06x}$

22. $\frac{1}{2}Q_0 = Q_0e^{-1.2x}$

23. $3 = 2 + 5e^{-4x}$

24. $-2 \ln x = b$

25. $-\ln x = \dfrac{t}{50} + C$

26. $5 = 3 \ln x - \frac{1}{2} \ln x$

27. $\ln x = \frac{1}{3}(\ln 16 + 2 \ln 2)$

28. $\ln x = 2(\ln 3 - \ln 5)$

29. $3^x = e^2$

30. $a^k = e^{kx}$

31. $\dfrac{25e^{0.1x}}{e^{0.1x} + 3} = 10$

32. $\dfrac{5}{1 + 2e^{-x}} = 3$

33. Si $\log_2 x = 5$, ¿cuál es el valor de ln x?

34. Si $\log_{10} x = -3$, ¿cuál es el valor de ln x?

35. Si $\log_5 (2x) = 7$, ¿cuál es el valor de ln x?

36. Si $\log_3 (x - 5) = 2$, ¿cuál es el valor de ln x?

37. Encuentre ln $\dfrac{1}{\sqrt{ab^3}}$ si ln $a = 2$ y ln $b = 3$.

38. Determine $\frac{1}{a} \ln\left(\dfrac{\sqrt{b}}{c}\right)^a$ si ln $b = 6$ y ln $c = -2$.

www.FreeLibros.com

39. INTERÉS COMPUESTO ¿Cuán rápido se duplica el dinero si se invierte a una tasa de interés anual de 6%, capitalizado continuamente?

40. INTERÉS COMPUESTO ¿ Cuán rápido se duplica una suma de dinero si se invierte a una tasa de interés anual de 7% capitalizado continuamente?

41. INTERÉS COMPUESTO El dinero depositado en cierto banco se duplica cada 13 años. El banco capitaliza el interés continuamente. ¿Qué tasa de interés anual ofrece el banco?

42. DECAIMIENTO RADIACTIVO La cantidad de cierta sustancia radioactiva presente después de t años está dada por una función de la forma $Q(t) = Q_0e^{-0.003t}$. Encuentre la vida media de la sustancia.

43. DECAIMIENTO RADIACTIVO El radio decae exponencialmente. Su vida media es 1 690 años. ¿Cuánto tarda una muestra de 50 gramos de radio en reducirse a 5 gramos?

44. PUBLICIDAD El editor en una casa editorial importante estima que si se distribuyen x miles de ejemplares de cortesía a maestros, las ventas de un libro nuevo durante el primer año serán aproximadamente $f(x) = 20 - 12e^{-0.03x}$ miles de ejemplares. De acuerdo con esta estimación, aproximadamente ¿cuántos ejemplares deberá enviar el editor para generar ventas de 12 000 ejemplares en el primer año?

45. CRECIMIENTO DE BACTERIAS Un estudiante de medicina que estudia el crecimiento de bacterias en cierto cultivo ha recolectado los siguientes datos:

Número de minutos	0	20
Número de bacterias	6 000	9 000

Utilice estos datos para encontrar una función exponencial de la forma $Q(t) = Q_0e^{kt}$ que exprese el número de bacterias en el cultivo como una función del tiempo. ¿Cuántas bacterias hay después de 1 hora?

46. PRODUCTO INTERNO BRUTO Un economista ha recolectado los siguientes datos sobre el producto interno bruto (PIB) de cierto país:

Año	1990	2000
PIB (en mil millones)	100	180

emplee estos datos para pronosticar el PIB en el 2010 si el PIB crece:

a) Linealmente

b) Exponencialmente

47. EFICIENCIA DE UN TRABAJADOR Un experto en eficiencia contratado por una firma de manufactura ha recolectado los siguientes datos que relacionan la producción de los trabajadores con la experiencia:

Experiencia t (meses)	0	6
Producción Q (unidades por hora)	300	410

Suponga que la producción, Q, está relacionada con la experiencia, t, por una función de la forma $Q(t) = 500 - Ae^{-kt}$. Encuentre la función de esta forma que se ajuste a los datos. ¿Qué producción se espera de un trabajador con 1 año de experiencia?

48. ARQUEOLOGÍA Un arqueólogo descubrió un fósil donde la razón de ^{14}C entre ^{12}C es $\frac{1}{3}$ de la razón encontrada en la atmósfera. Aproximadamente ¿qué edad tiene el fósil?

49. ARQUEOLOGÍA Pruebas de un objeto descubierto en el sitio Debert en Nueva Escocia demuestran que 28% del ^{14}C original aún está presente. Aproximadamente, ¿qué edad tiene el objeto?

50. ARQUEOLOGÍA Las Escrituras del Mar Muerto fueron escritas en pergamino aproximadamente en el 100 a.C. ¿Qué porcentaje del ^{14}C original de los pergaminos había cuando fueron descubiertos los rollos en 1947?

51. FALSIFICACIÓN EN ARTE Se determina que una pintura falsa, supuestamente pintada por Rembrandt en 1640, tiene 99.7% de su ^{14}C original. Realmente, ¿cuándo fue pintada? ¿Qué porcentaje de ^{14}C original debería estar presente si fuera legítima?

52. ARQUEOLOGÍA En 1389, Pierre d'Arcis, el obispo de Troya, escribió un memorando al Papa, acusando a un colega de pasar "cierta tela, ingeniosamente pintada" como el sudario de Jesucristo. A pesar de tan temprano testimonio de falsificación, la imagen sobre la tela es tan convincente que mucha gente la considera como una reliquia sagrada. Conocida como el Manto de Turín, la tela se sometió a datación por carbono en 1988. Si la tela fuera auténtica, hubiera tenido aproximadamente 1 960 años en aquel momento .

a) Si en realidad el Manto tuviera 1 960 años, ¿qué porcentaje de ^{14}C estaría presente?

b) Los científicos determinaron que estaba presente el 92.3% del ^{14}C original del Sudario. Con base sólo en esta información, ¿cuál era la edad probable del Sudario en 1988?

www.FreeLibros.com

53. ENFRIAMIENTO El café instantáneo se hace agregando agua hirviendo (212°F) a una mezcla de café. Si la temperatura del aire es 70°F, la ley de enfriamiento de Newton indica que después de t minutos, la temperatura del café estará dada por una función de la forma $f(t) = 70 - Ae^{-kt}$. Después de enfriarse durante 2 minutos, el café aún está 15°F demasiado caliente para beberse, pero 2 minutos más tarde está al punto. ¿Cuál es esta temperatura "ideal" para tomarlo?

54. DEMOGRAFÍA La población mundial crece a una tasa de aproximadamente 2% por año. Si se supone que el crecimiento de la población es exponencial, entonces la población dentro de t años estará dada por una función de la forma $P(t) = P_0e^{0.02t}$, donde P_0 es la población actual. (Esta fórmula se deduce en el capítulo 6.) Suponiendo que este modelo de crecimiento de la población es correcto, ¿cuánto tiempo tomará para que se duplique la población mundial?

55. RADIOLOGÍA El yodo radiactivo ^{133}I tiene una vida media de 20.9 horas. Si se inyecta en el torrente sanguíneo, el yodo se acumula en la glándula tiroides.

a) Después de 24 horas, un técnico médico explora la glándula tiroides de un paciente para determinar si la función de la tiroides es normal. Si la tiroides ha absorbido todo el yodo, ¿qué porcentaje de la cantidad original se deberá detectar?

b) Un paciente regresa a la clínica 25 horas después de haber recibido una inyección de ^{133}I. El médico analiza la glándula tiroides del paciente y detecta la presencia de 41.3% del yodo original. ¿Cuánto ^{133}I del original permanece en el resto del cuerpo del paciente?

56. NIVELES ACÚSTICOS Un **decibel**, nombrado en honor de Alexander Graham Bell, es el menor incremento de la intensidad del sonido detectable por el oído humano. En física, se ha demostrado que cuando ocurren dos sonidos de intensidad I_1 y I_2 (watts/cm^3), la diferencia de intensidad es D decibeles, donde

$$D = 10 \log_{10}\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$$

Cuando el sonido se clasifica en relación con el umbral de audición del oído humano ($I_0 = 10^{-12}$), el nivel de conversación normal es aproximadamente 60 decibeles, en tanto que un concierto de rock puede ser 50 veces más ruidoso (110 decibeles).

a) ¿Cuánto más intenso es un concierto de rock que una conversación normal?

b) El umbral de dolor se alcanza a un nivel sonoro que es aproximadamente 10 veces más intenso que un concierto de rock. ¿Cuál es el nivel del umbral de dolor en decibeles?

57. HISTORIA DE ESPÍAS Después de rescatar a su superior en el problema 20 de la sección 3.5, el espía regresa a casa, sólo para saber que su mejor amigo, Sigmund ("Siggy") Leiter, fue asesinado. La policía dice que el cuerpo de Siggy fue descubierto a la 1:00 p.m. el martes, metido en un congelador donde la temperatura era de 10°F. Él también dijo que la temperatura del cuerpo al momento del descubrimiento era de 40°F, y recuerda que t horas después de la muerte un cuerpo tiene una temperatura

$$T = T_a + (98.6 - T_a)(0.97)^t$$

donde T_a es la temperatura del aire adyacente al cuerpo. El espía sabe que el hecho oscuro fue perpetuado por Ernst Stavro Blohardt o André Scélérat. Si Blohardt estaba en prisión hasta el medio día del miércoles y Scélérat estaba en Las Vegas desde el medio día hasta el viernes, ¿quién "congeló" a Siggy, y cuándo?

58. CURVA DE APRENDIZAJE En un experimento diseñado para probar la memoria a corto plazo,[3] L. R. Peterson y M. J. Peterson determinaron que la probabilidad $p(t)$ de que un sujeto recuerde un patrón de números y letras t segundos después de recibir el patrón es

$$p(t) = 0.89[0.01 + 0.99(0.85)^t]$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el sujeto pueda recordar el patrón de inmediato ($t = 0$)?

b) ¿Cuánto tiempo transcurre antes que $p(t)$ baje a 0.5?

c) Trace la gráfica de $p(t)$.

59. SISMOLOGÍA En la escala de Richter, la magnitud R de un terremoto de intensidad I está dada por $R = \dfrac{\ln I}{\ln 10}$.

a) Encuentre la intensidad del terremoto de San Francisco de 1906, que midió $R = 8.3$ en la escala de Ritchter.

b) ¿Cuánto más intenso fue el terremoto de San Francisco de 1906 que el terremoto devastador de 1995 en Kobe, Japón, que midió $R = 7.1$?

60. ENTOMOLOGÍA Se ha determinado que el volumen de la yema de un huevo de mosca doméstica se encoge de acuerdo con la fórmula $V(t) = 5e^{-1.3t}$ mm^3 (milímetros cúbicos), donde t

[3] L. R. Peterson y M. J. Peterson, "Short-Term Retention of Individual Verbal Items", *Journal of Experimental Psychology*, Vol. 58 (1959), pp. 193-198.

www.FreeLibros.com

es el número de días desde el instante en que el huevo es producido. El huevo incuba 4 días.

a) ¿Cuál es el volumen de la yema cuando el huevo se rompe?

b) Trace la gráfica del volumen de la yema en el periodo $0 \le t \le 4$.

c) Encuentre la vida media del volumen de la yema; es decir, el tiempo que transcurre para que el volumen de la yema se reduzca a la mitad de su tamaño original.

61. ALOMETRÍA Suponga que durante los primeros 6 años de la vida de un alce, la altura de su lomo, $H(t)$, y la longitud de punta a punta de sus astas $A(t)$ crecen con el tiempo t (años) de acuerdo con las fórmulas $H(t) = 125e^{0.08t}$ y $A(t) = 50e^{0.16t}$, donde H y A ambas están medidas en centímetros (cm).

a) En la misma gráfica, trace $y = H(t)$ y $y = A(t)$ para el periodo $0 \le t \le 6$.

b) Exprese la longitud de las astas A como una función de la altura H. [*Sugerencia:* primero tome logaritmos en ambos lados de la ecuación $H = 125e^{0.08t}$ para expresar el tiempo t en términos de H y luego sustitúyalo en la fórmula para $A(t)$.]

62. PRESIÓN DEL AIRE La presión del aire $f(s)$ a una altura de s metros sobre el nivel del mar está dada por

$$f(s) = e^{-0.000125s} \text{ atmósferas}$$

a) Si la presión atmosférica fuera de un avión es de 0.25 atmósferas, ¿cuál es la altura del aeroplano?

b) Una alpinista decide utilizar una máscara de oxígeno una vez que haya alcanzado una altitud de 7 000 metros. ¿Cuál es la presión atmosférica a esta altura?

63. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN Con base en la estimación de que en la Tierra hay 10 mil millones de acres de tierra cultivable, y que cada acre puede producir suficiente alimento para alimentar a 4 personas, algunos demógrafos creen que la Tierra no puede sustentar una población mayor de 40 mil millones de personas. En 1960 la población de la Tierra era aproximadamente de 3 mil millones y en 1975 de 4 mil millones. Si la población de la Tierra creciera exponencialmente, ¿cuándo llegaría al límite teórico de 40 mil millones?

64. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN De acuerdo con un modelo logístico basado en la suposición de que la Tierra no puede sustentar más de 40 mil millones de personas, la población mundial (en mil millones) t años después de 1960 está dada por una función de la forma $P(t) = \dfrac{40}{1 + Ce^{-kt}}$, donde C y k son constantes positivas. Encuentre la función de esta forma que sea consistente con el hecho de que la población mundial era aproximadamente 3 mil millones en 1960 y 4 mil millones en 1975. ¿Qué predice su modelo para la población en el año 2000? Verifique la precisión del modelo consultando un almanaque.

65. SISMOLOGÍA La fórmula de la magnitud para la escala de Richter es

$$R = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

donde E es la energía liberada por el terremoto (en joules), y $E_0 = 10^{4.4}$ joules es la energía liberada por un terremoto pequeño de referencia empleado como un estándar de medición.

a) El terremoto de 1906 de San Francisco liberó aproximadamente 5.96×10^{16} joules de energía. ¿Cuál fue su magnitud en la escala de Richter?

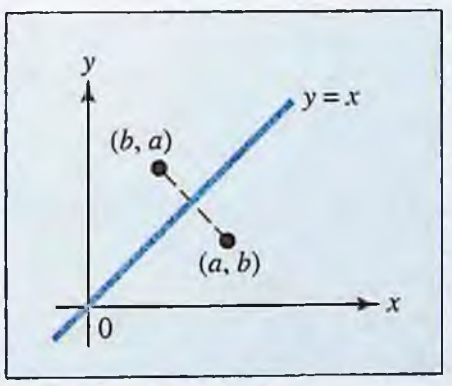
b) ¿Cuánta energía liberó el terremoto de India en 1993, en el cual se midió 6.4 en la escala de Richter?

66. En cada caso, utilice una de las leyes de los exponentes para demostrar la ley de los logaritmos indicada.

a) La regla del cociente: $\ln \dfrac{u}{v} = \ln u - \ln v$

b) La regla de la potencia: $\ln u^r = r \ln u$

67. Demuestre que el reflejo del punto (a, b) en la recta $y = x$ es (b, a). [*Sugerencia:* demuestre que la recta que une (a, b) y (b, a) es perpendicular a $y = x$ y que la distancia de (a, b) a $y = x$ es la misma que la distancia de $y = x$ a (b, a).]



PROBLEMA 67

68. Trace la gráfica de $y = \log_b x$ para $0 < b < 1$ reflejando la gráfica de $y = b^x$ en la recta $y = x$. Luego responda estas preguntas:

a) ¿Es creciente o decreciente la gráfica de $y = \log_b$ para $x > 0$?

b) ¿Es cóncava hacia arriba o hacia abajo la gráfica para $x > 0$?

www.FreeLibros.com

c) ¿Cuáles son las intersecciones de la gráfica con los ejes de coordenadas? ¿Tiene la gráfica alguna asíntota horizontal o vertical?

d) ¿Qué se puede decir acerca de

$$\lim_{x\to+\infty} \log_b x \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} \log_b x$$

69. Demuestre que si y es una función exponencial de x, de manera que $y = Cx^k$ donde C y k son constantes, entonces ln y es una función lineal de ln x. [*Sugerencia:* aplique el logaritmo en ambos miembros de la ecuación $y = Cx^k$.]

70. Emplee la instrucción de graficación para trazar $y = 10^x$, $y = x$, y $y = \log_{10} x$ en los mismos ejes coordenados (utilice [−5, 5]1 por [−5, 5]1. ¿Cómo se relacionan las gráficas?

En los problemas 71 a 74 despeje x.

71. $x = \ln(3.42 \times 10^{-8.1})$

72. $3\,500e^{0.31x} = \dfrac{e^{-3.5x}}{1 + 257e^{-1.1x}}$

73. $e^{0.113x} + 4.72 = 7.031 - x$

74. $\ln(x + 3) - \ln x = 5 \ln(x^2 - 4)$

75. Sean a y b cualesquiera números positivos diferentes a 1.

a) Demuestre que $(\log_a b)(\log_b a) = 1$.

b) Demuestre que $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ para cualquier número $x > 0$.

SECCIÓN 4.3 | Derivación de funciones logarítmicas y exponenciales

Las funciones exponenciales y logarítmicas tienen derivadas simples. En esta sección se obtendrán fórmulas de esas derivadas y se utilizarán para analizar algunos problemas prácticos. Se comienza con la fórmula de la derivada de ln x.

Derivada de ln x

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad \text{para } x - 0$$

La deducción de esta fórmula aparece al final de esta sección, después de usarla en varios ejemplos.

¡EXPLORE!

Grafique $y = \ln x$ empleando una pantalla decimal, [−.7, 8.7]1 por [−3.1, 3.1]1. Elija un valor de x y trace la línea tangente a la curva en esta x. Observe qué tan próxima es la pendiente de la recta tangente a $1/x$. Repita para varios valores adicionales de x.

EJEMPLO | 4.3.1

Derive la función $f(x) = x \ln x$.

Solución

Combine la regla del producto con la fórmula de la derivada de ln x para obtener

$$f'(x) = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x = 1 + \ln x$$

Se pueden simplificar derivadas de expresiones complicadas utilizando las reglas de los logaritmos. En el ejemplo 4.3.2 se utiliza la regla de la potencia para logaritmos antes de derivar.

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 4.3.2

Derive $f(x) = \dfrac{\ln \sqrt[3]{x^2}}{x^4}$.

Solución

Primero, como $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$, la regla de la potencia para logaritmos nos permite escribir

$$f(x) = \frac{\ln \sqrt[3]{x^2}}{x^4} = \frac{\ln x^{2/3}}{x^4} = \frac{\frac{2}{3}\ln x}{x^4}$$

Luego, por medio de la regla del cociente, se calcula

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3}\left[\frac{x^4(\ln x)' - (x^4)'\ln x}{(x^4)^2}\right] \\ &= \frac{2}{3}\left[\frac{x^4\left(\frac{1}{x}\right) - 4x^3 \ln x}{x^8}\right] \\ &= \frac{2}{3}\left[\frac{1 - 4\ln x}{x^5}\right] \end{aligned}$$

EJEMPLO | 4.3.3

Derive $g(t) = (t + \ln t)^{3/2}$.

Solución

La función tiene la forma $g(t) = u^{3/2}$, donde $u = t + \ln t$, y aplicando la regla general de la potencia, obtenemos

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{d}{dt}(u^{3/2}) = \frac{3}{2}u^{1/2}\frac{du}{dt} \\ &= \frac{3}{2}(t + \ln t)^{1/2}\frac{d}{dt}(t + \ln t) \\ &= \frac{3}{2}(t + \ln t)^{1/2}\left(1 + \frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

Si $f(x) = \ln u(x)$, donde $u(x)$ es una función derivable de x, entonces la regla de la cadena produce la siguiente fórmula para $f'(x)$.

Regla de la cadena para funciones logarítmicas ■ Si $u(x)$ es una función derivable de x, entonces

$$\frac{d}{dx}[\ln u(x)] = \frac{1}{u(x)}\frac{du}{dx}$$

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 4.3.4

Derive la función $f(x) = \ln(2x^3 + 1)$.

Solución

Aquí, se tiene $f(x) = \ln u$, donde $u(x) = 2x^3 + 1$. Así,

$$f'(x) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{2x^3 + 1}\frac{d}{dx}(2x^3 + 1)$$
$$= \frac{2(3x^2)}{2x^3 + 1} = \frac{6x^2}{2x^3 + 1}$$

EJEMPLO | 4.3.5

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x - \ln \sqrt{x}$ en el punto donde $x = 1$.

Solución

Cuando $x = 1$, se tiene

$$y = f(1) = 1 - \ln(\sqrt{1}) = 1 - 0 = 1$$

por tanto, el punto de tangencia es (1, 1). Para determinar la pendiente de la recta tangente en este punto, se escribe

$$f(x) = x - \ln \sqrt{x} = x - \frac{1}{2}\ln x$$

y se calcula la derivada

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{2x}$$

Así, la pendiente es

$$f'(1) = 1 - \frac{1}{2(1)} = \frac{1}{2}$$

y la ecuación para la recta tangente es

$$\frac{y - 1}{x - 1} = \frac{1}{2}$$

o, de forma equivalente,

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

EJEMPLO | 4.3.6

Un fabricante determina que se venderán x unidades de cierto artículo de lujo cuando el precio sea $p(x) = 112 - x \ln x^3$ cientos de dólares por unidad.

a) Encuentre las funciones de ingreso y de ingreso marginal.

b) Utilice el análisis marginal para estimar el ingreso obtenido al producir la quinta unidad. ¿Cuál es el ingreso real por producir la quinta unidad?

Solución

a) El ingreso es

$$R(x) = xp(x) = x(112 - x \ln x^3) = 112x - x^2(3 \ln x)$$

www.FreeLibros.com

cientos de dólares, y el ingreso marginal es

$$R'(x) = 112 - 3[x^2\left(\frac{1}{x}\right) + (2x)\ln x] = 112 - 3x - 6x\ln x$$

b) El ingreso obtenido al producir la quinta unidad se estima mediante el ingreso marginal evaluado en $x = 4$; es decir, como

$$R'(4) = 112 - 3(4) - 6(4)\ln(4) \approx 66.73$$

cientos de dólares ($6 673) por unidad adicional. El ingreso real obtenido al producir la quinta unidad es

$$\begin{aligned} R(5) - R(4) &= [112(5) - 3(5)^2 \ln 5] - [112(4) - 3(4)^2 \ln 4] \\ &= 439.29 - 381.46 = 57.83 \end{aligned}$$

cientos de dólares ($5 783).

Funciones exponenciales

Para encontrar la fórmula de la derivada de e^x, se derivan ambos miembros de la ecuación

$$\ln e^x = x$$

con respecto a x, empleando la regla de la cadena para logaritmos al derivar $\ln e^x$. Se obtiene

$$\frac{\frac{d}{dx}(e^x)}{e^x} = 1 \qquad \text{o} \qquad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

¡EXPLORE!

Grafique $y = e^x$ utilizando la pantalla decimal, [−0.7, 8.7]1 por [−.1, 6.1]1. Trace la curva para cualquier valor de x y determine el valor de la derivada en este punto. Observe qué tan próximo es el valor de la derivada al de la coordenada y de la gráfica. Repita esto para varios valores de x.

Derivada de la función exponencial

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \qquad \text{para cualquier número real } x$$

El hecho de que e^x es su propia derivada significa que en cada punto $P(c, e^c)$ sobre la curva $y = e^x$, la pendiente es igual a e^c, que es la coordenada y de P (véase la figura 4.8). Ésta es una de las razones más importantes en el cálculo para utilizar e como la base de la función exponencial.

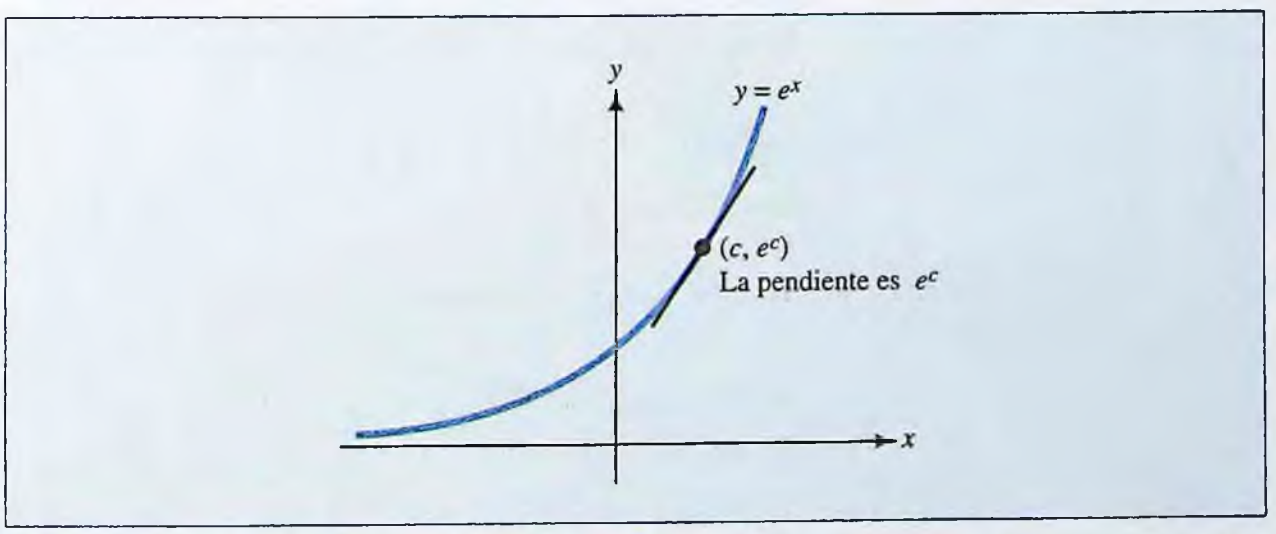


FIGURA 4.8 En cada punto $P(c, e^c)$ de la gráfica de $y = e^x$, la pendiente es igual a e^c.

www.FreeLibros.com

Empleando la regla de la cadena junto con la fórmula de la derivada

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

se obtiene esta fórmula general para la derivada de las funciones exponenciales .

Regla de la cadena para funciones exponenciales ■ Si $u(x)$ es una función derivable de x, entonces

$$\frac{d}{dx}(e^{u(x)}) = e^{u(x)}\frac{du}{dx}$$

EJEMPLO | 4.3.7

Derive la función $f(x) = e^{x^2+1}$.

Solución

Utilizando la regla de la cadena con $u = x^2 + 1$, se tiene

$$f'(x) = e^{x^2+1}\left[\frac{d}{dx}(x^2 + 1)\right] = 2xe^{x^2+1}$$

EJEMPLO | 4.3.8

Derive la función

$$f(x) = \frac{e^{-3x}}{x^2 + 1}$$

Solución

Empleando la regla de la cadena junto con la regla del cociente, se obtiene

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)(-3e^{-3x}) - (2x)e^{-3x}}{(x^2 + 1)^2}$$
$$= e^{-3x}\left[\frac{-3(x^2 + 1) - 2x}{(x^2 + 1)^2}\right] = e^{-3x}\left[\frac{-3x^2 - 2x - 3}{(x^2 + 1)^2}\right]$$

EJEMPLO | 4.3.9

Encuentre los valores mayor y menor de la función $f(x) = xe^{2x}$ en el intervalo $-1 \le x \le 1$.

Solución

Por la regla del producto

$$f'(x) = x\frac{d}{dx}(e^{2x}) + e^{2x}\frac{d}{dx}(x) = x(2e^{2x}) + e^{2x}(1) = (2x + 1)e^{2x}$$

así $f'(x) = 0$ cuando

$$(2x + 1)e^{2x} = 0$$
$$2x + 1 = 0 \qquad \text{como } e^{2x} > 0 \text{ para toda } x$$
$$x = -1/2$$

www.FreeLibros.com

Evaluando $f(x)$ en el número crítico $x = -1/2$ y en los puntos extremos del intervalo $x = -1$ y $x = 1$, se determina que

$$f(-1) = (-1)e^{-2} \approx -0.136$$
$$f(-1/2) = (-1/2)e^{-1} \approx -0.184 \quad \textit{mínimo}$$
$$f(1) = (1)e^{2} \approx 7.389 \quad \textit{máximo}$$

Así, $f(x)$ tiene su mayor valor 7.389 en $x = 1$ y su menor valor -0.184 en $x = -1/2$.

Crecimiento y decaimiento exponencial

Recuerde (de la sección 4.1) que una cantidad $Q(x) = Q_0e^{kx}$ se dice que **crece exponencialmente** si $k > 0$ y **decae exponencialmente** si $k < 0$. En ambos casos, observe que

$$Q'(x) = Q_0(e^{kx})(k) = k(Q_0e^{kx}) = kQ(x)$$

y que la razón de cambio porcentual de Q está dada por

$$\frac{100Q'(x)}{Q(x)} = \frac{100(kQ)}{Q} = 100k$$

Resumiendo:

Crecimiento y decaimiento exponencial ■ Si $Q(x) = Q_0e^{kx}$, entonces $Q'(x) = kQ(x)$ y $Q(x)$ cambia a la razón porcentual $100k$.

NOTA Observe que esto es congruente con lo que ya se estudió acerca del interés compuesto; a saber, si el interés se capitaliza continuamente, el saldo después de t años es $B(t) = Pe^{rt}$, donde r es la tasa de interés expresada en forma decimal. ■

EJEMPLO | 4.3.10

Un demógrafo que estudia cierta comunidad utiliza un modelo exponencial $P(t) = P_0e^{kt}$ para la población, donde t es el número de años después de 1990. Si la población es de 100 000 en 1990 y 145 000 en 2003, ¿a qué tasa porcentual anual crece la población?

Solución

Por simplicidad, mida la población $P(t)$ en miles de individuos. Como la población es de 100 000 cuando $t = 0$ (1990) y de 145 000 cuando $t = 13$ (2003), se tiene

$$P_0 = P(0) = 100$$

y

$$P(13) = 100e^{k(13)} = 145$$
$$e^{k(13)} = \frac{145}{100} = 1.45$$
$$\ln(e^{k(13)}) = \ln(1.45) \quad \textit{aplicando logaritmos en ambos miembros}$$
$$k(13) = 0.3716 \quad \textit{usando } \ln(e^x) = x$$
$$k = \frac{0.3716}{13} = 0.0286$$

Así, la población crece a una tasa anual de $100k = 2.86\%$.

www.FreeLibros.com

En el ejemplo 4.3.11 se emplea el análisis marginal para examinar la demanda exponencial para cierto artículo y para determinar el precio al cual se maximiza el ingreso obtenido al satisfacer la demanda.

EJEMPLO | 4.3.11

Un fabricante determina que tendrá una demanda (venta) de $D(p) = 5\,000e^{-0.02p}$ unidades de cierto artículo, cuando el precio sea p dólares por unidad.

a) Encuentre la elasticidad de la demanda para este artículo. ¿Para qué valores de p la demanda es elástica, inelástica y de elasticidad unitaria?

b) Si el precio de \$40 se incrementa en 3%, ¿cuál es el efecto esperado en la demanda?

c) Determine el ingreso $R(p)$ obtenido por vender $q = D(p)$ unidades a p dólares por unidad. ¿Para qué valor de p se maximiza el ingreso?

Solución

a) De acuerdo con la fórmula deducida en la sección 3.4, la elasticidad de la demanda está dada por

$$E(p) = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}$$

$$= \left(\frac{p}{5\,000e^{-0.02p}}\right)[5\,000e^{-0.02p}(-0.02)]$$

$$= \frac{p[5\,000(-0.02)e^{-0.02p}]}{5\,000e^{-0.02p}} = -0.02p$$

Se encuentra que

$$|E(p)| = |-0.02p| = 0.02p$$

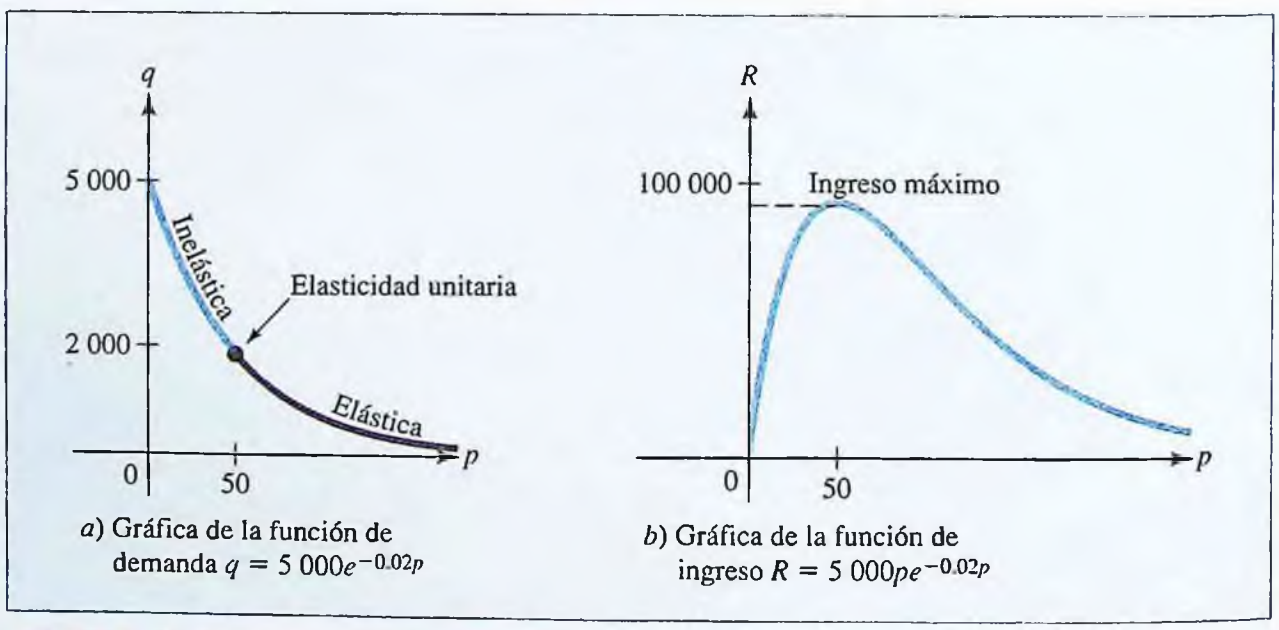
por tanto

la **demanda es de elasticidad unitaria** cuando $|E(p)| = 0.02p = 1$; es decir, cuando $p = 50$

la **demanda es elástica** cuando $|E(p)| = 0.02p > 1$; o $p > 50$

la **demanda es inelástica** cuando $|E(p)| = 0.02p < 1$; o $p < 50$

La figura 4.9*a* muestra la gráfica de la función de demanda, donde se muestran los niveles de elasticidad.



a) Gráfica de la función de demanda $q = 5\,000e^{-0.02p}$

b) Gráfica de la función de ingreso $R = 5\,000pe^{-0.02p}$

FIGURA 4.9 Curvas de demanda e ingreso para el artículo del ejemplo 4.3.11.

www.FreeLibros.com

b) Cuando $p = 40$, la demanda es

$$q(40) = 5\ 000e^{-0.02(40)} \approx 2\ 247 \text{ unidades}$$

y la elasticidad de demanda es

$$E(p) = -0.02(40) = -0.8$$

Así, un incremento de 1% en el precio de $p = \$40$ provocará un decremento en la cantidad demandada de aproximadamente 0.8%. En consecuencia, un incremento de 3% en el precio, de \$40 a \$41.20, resulta en una disminución de la demanda de aproximadamente 2.247[3(0.008)] = 54 unidades, de 2 247 a 2 193 unidades.

c) La función del ingreso es

$$R(p) = pq = 5\ 000pe^{-0.02p}$$

para $p \geq 0$ (sólo los precios no negativos tienen significado económico), con la derivada

$$\begin{aligned} R'(p) &= 5\ 000\ (-0.02pe^{-0.02p} + e^{-0.02p}) \\ &= 5\ 000\ (1 - 0.02p)e^{-0.02p} \end{aligned}$$

Como $e^{-0.02p}$ siempre es positiva. $R'(p) = 0$ si y sólo si

$$1 - 0.02p = 0 \qquad \text{o} \qquad p = \frac{1}{0.02} = 50$$

Para verificar que $p = 50$ en realidad proporciona el máximo absoluto, observe que

$$R''(p) = 5\ 000\ (0.0004p - 0.04)e^{-0.02p}$$

por tanto

$$R''(50) = 5\ 000[0.0004\ (50) - 0.04]e^{-0.02(50)} \approx -37 < 0$$

Así, la prueba de la segunda derivada indica que, en efecto, el máximo absoluto de $R(p)$ se alcanza cuando $p = 50$ (véase la figura 4.9*b*).

¡EXPLORE!

Con base en el ejemplo 4.3.11, introduzca la función $y = Axe^{-Bx}$ en Y1 del editor de ecuaciones. Para diferentes valores de *A* y *B* encuentre la ubicación del máximo de *y* en términos de *A* y *B*. Por ejemplo, fije $A = 1$ y luego varíe el valor de *B* (digamos, 1, 0.5, y 0.1) para ver dónde se alcanza el máximo valor funcional de la función. Luego fije *B* a 0.1 y deje que *A* varíe (digamos, 1, 10, 100). Haga una conjetura acerca de la ubicación del máximo valor *y* en este caso.

Derivación logarítmica

Algunas veces se puede simplificar el trabajo del cálculo de la derivada de una función si primero se toma su logaritmo. Ésta técnica, denominada **derivación logarítmica**, se ilustra en el ejemplo 4.3.12.

EJEMPLO | 4.3.12

Derive la función $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4}$.

Solución

Usted podría resolver este problema utilizando las reglas del cociente y de la cadena, pero el cálculo resultante sería un tanto tedioso. (¡Inténtelo!).

Un método más eficiente es aplicar logaritmo en ambos miembros de la expresión de *f*:

$$\ln f(x) = \ln\left[\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4}\right] = \ln \sqrt[3]{(x+1)} - \ln (1-3x)^4$$

$$= \frac{1}{3}\ln (x+1) - 4\ln (1-3x)$$

www.FreeLibros.com

(Observe que aplicando el logaritmo se elimina el cociente, la raíz cúbica, y la cuarta potencia.)

Ahora, utilizando la regla de la cadena en el logaritmo al derivar ambos lados de esta ecuación se obtiene

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)} - 4\left(\frac{-3}{1-3x}\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{12}{1-3x}$$

de manera que

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{12}{1-3x}\right]$$

$$= \left[\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(1-3x)^4}\right]\left[\frac{1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{12}{1-3x}\right]$$

En ocasiones es necesario derivar una función exponencial $y = b^x$, o una función logarítmica $y = \log_b x$, con base $b \neq e$. En el ejemplo 4.3.13 se muestra cómo se puede utilizar la derivación logarítmica para resolver estos casos. En el problema 78 se pide encontrar fórmulas generales para esas derivadas.

EJEMPLO | 4.3.13

Derive cada una de estas funciones:

a) $y = 2^x$

b) $y = \log_3 x$

Solución

a) Para derivar $y = 2^x$, emplee la derivada logarítmica como sigue:

$$y = 2^x$$

$$\ln y = x(\ln 2) \quad \textit{aplique logaritmo natural en ambos lados}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln 2 \quad \textit{derive ambos lados}$$

$$\frac{dy}{dx} = (\ln 2)\, y \quad \textit{multiplique ambos lados por } y$$

$$\frac{dy}{dx} = (\ln 2)\, 2^x \quad \textit{sustituya } y = 2^x$$

b) En este caso, encuentre

$$y = \log_3 x$$

$$3^y = x \quad \textit{por la definición de logaritmo}$$

$$y \ln 3 = \ln x \quad \textit{aplicando logaritmo natural en ambos miembros}$$

$$(\ln 3)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad \textit{derive ambos miembros}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(\ln 3)} \quad \textit{divida entre } \ln 3$$

www.FreeLibros.com

Si $Q(x)$ es una función derivable de x, observe que

$$\frac{d}{dx}(\ln Q) = \frac{Q'(x)}{Q(x)}$$

donde la razón a la derecha es la razón de cambio relativa de $Q(x)$. Es decir, *la razón de cambio relativa de una cantidad $Q(x)$ se puede calcular encontrando la derivada de* ln Q. Esta clase especial de derivación logarítmica se puede utilizar para simplificar los cálculos de varias razones de crecimiento, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO | 4.3.14

Un país exporta tres bienes, trigo W, acero S y petróleo O. Suponga que en determinado momento, $t = t_0$, el ingreso (en miles de millones de dólares) derivado de cada uno de estos bienes es

$$W(t_0) = 4 \qquad S(t_0) = 7 \qquad O(t_0) = 10$$

y que S crece a 8%, O crece a 15%, en tanto que W disminuye a 3%. ¿A qué razón relativa crece el ingreso total de las exportaciones en este momento?

Solución

Sea $R = W + S + O$. En el tiempo $t = t_0$, se sabe que

$$R(t_0) = W(t_0) + S(t_0) + O(t_0) = 4 + 7 + 10 = 21$$

y

$$\frac{W'(t_0)}{W(t_0)} = -0.03 \qquad \frac{S'(t_0)}{S(t_0)} = 0.08 \qquad \frac{O'(t_0)}{O(t_0)} = 0.15$$

de manera que

$$W'(t_0) = -0.03W(t_0) \qquad S'(t_0) = 0.08S(t_0) \qquad O'(t_0) = 0.15\ O(t_0)$$

Así, en $t = t_0$, la razón de crecimiento relativa de R es

$$\begin{aligned}
\frac{R'(t_0)}{R(t_0)} = \frac{d(\ln R)}{dt} &= \frac{d}{dt}[\ln(W + S + O)]\Big|_{t=t_0} \\
&= \frac{[W'(t_0) + S'(t_0) + O'(t_0)]}{[W(t_0) + S(t_0) + O(t_0)]} \\
&= \frac{-0.03W(t_0) + 0.08S(t_0) + 0.15\ O(t_0)}{W(t_0) + S(t_0) + O(t_0)} \\
&= \frac{-0.03W(t_0) + 0.08S(t_0) + 0.15\ O(t_0)}{R(t_0)} \\
&= \frac{-0.03W(t_0)}{R(t_0)} + \frac{0.08S(t_0)}{R(t_0)} + \frac{0.15\ O(t_0)}{R(t_0)} \\
&= \frac{-0.03(4)}{21} + \frac{0.08(7)}{21} + \frac{0.15(10)}{21} \\
&\approx 0.0924
\end{aligned}$$

Es decir, en el momento $t = t_0$, el ingreso total obtenido de los tres bienes exportados crece a una razón de 9.24%.

www.FreeLibros.com

Demostración de $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

La demostración de $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$ se basa en el hecho de que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se aproxima a e cuando n crece (o decrece) sin límite. Para obtener la fórmula para la derivada de $f(x) = \ln x$, se forma el cociente incremental y se reescribe utilizando las propiedades de los logaritmos como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \quad \text{para } x \text{ fijo} > 0\\ &= \frac{1}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\\ &= \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{1/h}\\ &= \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h}\end{aligned}$$

Para encontrar la derivada de $\ln x$, se hace tender h a cero en expresión simplificada del cociente incremental. Esto será más fácil de hacer si primero se denota $n = \frac{x}{h}$. Entonces,

$$\frac{h}{x} = \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \frac{1}{h} = \frac{n}{x}$$

y, por tanto,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n/x} = \ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{1/x}$$

Cuando h tiende a cero, $n = \frac{x}{h}$ crece o decrece sin límite, dependiendo del signo de h. Como

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

se deduce que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\ln x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\\ &= \lim_{n\to\infty}\ln\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{1/x}\\ &= \ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{1/x}\\ &= \ln e^{1/x} = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

tal y como se quería demostrar.

PROBLEMAS | 4.3

En los problemas 1 a 34 derive la función dada.

1. $f(x) = e^{5x}$

2. $f(x) = 3e^{4x+1}$

www.FreeLibros.com

3. $f(x) = xe^x$

4. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

5. $f(x) = 30 + 10e^{-0.05x}$

6. $f(x) = e^{x^2+2x-1}$

7. $f(x) = (x^2 + 3x + 5)e^{6x}$

8. $f(x) = xe^{-x^2}$

9. $f(x) = (1 - 3e^x)^2$

10. $f(x) = \sqrt{1 + e^x}$

11. $f(x) = e^{\sqrt{3x}}$

12. $f(x) = e^{1/x}$

13. $f(x) = \ln x^3$

14. $f(x) = \ln 2x$

15. $f(x) = x^2 \ln x$

16. $f(x) = x \ln \sqrt{x}$

17. $f(x) = \sqrt[3]{e^{2x}}$

18. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

19. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)$

20. $f(x) = e^x \ln x$

21. $f(x) = e^{-2x} + x^3$

22. $f(t) = t^2 \ln \sqrt[3]{t}$

23. $g(s) = (e^s + s + 1)(2e^{-s} + s)$

24. $F(x) = \ln(2x^3 - 5x + 1)$

25. $h(t) = \dfrac{e^t + t}{\ln t}$

26. $g(u) = \ln(u^2 - 1)^3$

27. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

28. $h(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2}$

29. $f(t) = \sqrt{\ln t + t}$

30. $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

31. $f(x) = \ln(e^{-x} + x)$

32. $f(s) = e^{s+\ln s}$

33. $g(u) = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})$

34. $L(x) = \ln\left[\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 2x + 1}\right]$

En los problemas 35 a 38 encuentre los valores mayor y menor de la función dada en el intervalo cerrado y acotado indicado.

35. $f(x) = \dfrac{\ln(x + 1)}{x + 1}$ para $0 \le x \le 2$

36. $F(x) = e^{x^2-2x}$ para $0 \le x \le 2$

37. $g(t) = t^{3/2}e^{-2t}$ para $0 \le t \le 1$

38. $h(s) = 2s \ln s - s^2$ para $0.5 \le s \le 2$

En los problemas 39 a 44 determine una ecuación para la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto indicado.

39. $f(x) = xe^{-x}$; donde $x = 0$

40. $f(x) = (x + 1)e^{-2x}$; donde $x = 0$

41. $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2}$; donde $x = 1$

42. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$; donde $x = 1$

43. $f(x) = x^2 \ln \sqrt{x}$; donde $x = 1$

44. $f(x) = x - \ln x$; donde $x = e$

En los problemas 45 a 48 encuentre la segunda derivada de la función dada.

45. $f(x) = e^{2x} + 2e^{-x}$

46. $f(x) = \ln(2x) + x^2$

47. $f(t) = t^2 \ln t$

48. $g(t) = t^2e^{-t}$

En los problemas 49 a 56 utilice derivación logarítmica para encontrar la derivada $f'(x)$.

49. $f(x) = (2x + 3)^2(x - 5x^2)^{1/2}$

50. $f(x) = x^2e^{-x}(3x + 5)^3$

www.FreeLibros.com

51. $f(x) = \dfrac{(x+2)^5}{\sqrt[6]{3x-5}}$

52. $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{2x+1}{1-3x}}$

53. $f(x) = (x+1)^3(6-x)^2\sqrt[3]{2x+1}$

54. $f(x) = \dfrac{e^{-3x}\sqrt{2x-5}}{(6-5x)^4}$

55. $f(x) = 5^{x^2}$

56. $f(x) = \log_2(\sqrt{x})$

ANÁLISIS MARGINAL *En los problemas 57 y 58 la demanda $q = D(p)$ de un cierto bien está dada en términos del precio p al cual se pueden vender todas las q unidades. En cada caso:*

a) Encuentre la elasticidad de la demanda y determine los valores de p para los cuales la demanda es elástica, inelástica y de elasticidad unitaria.

b) Si el precio de $15 crece en 2%, ¿cuál es el efecto aproximado en la demanda?

c) Determine el ingreso $R(p)$ que se obtiene vendiendo q unidades a p dólares por unidad. ¿Para qué valor de p se maximiza el ingreso?

57. $D(p) = 3\,000e^{-0.04p}$

58. $D(p) = 10\,000e^{-0.025p}$

ANÁLISIS MARGINAL *En los problemas 59 y 60 se indica el costo $C(x)$ de producir x unidades de cierto bien . En cada caso:*

a) Encuentre el costo marginal $C'(x)$.

b) Determine el nivel de producción x para el cual el costo marginal es igual al costo promedio.

$$A(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

59. $C(x) = e^{0.2x}$

60. $C(x) = 9x + 5xe^{-2x}$

61. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN Se ha proyectado que dentro de t años, la población de cierto país será $P(t) = 50e^{0.02t}$ millones.

a) ¿A qué razón cambiará la población con respecto al tiempo dentro de 10 años?

b) ¿A qué razón porcentual cambiará la población con respecto al tiempo dentro de t años? ¿Depende esta razón porcentual de t o es constante?

62. INTERÉS COMPUESTO Se deposita dinero en un banco que ofrece interés a una tasa anual de 6% capitalizada continuamente. Encuentre la razón de cambio porcentual del saldo con respecto al tiempo.

63. DEPRECIACIÓN Cierta máquina industrial se deprecia de tal manera que su valor después de t años es $Q(t) = 20\,000e^{-0.4t}$ dólares.

a) ¿A qué razón cambia el valor de la máquina con respecto al tiempo después de 5 años?

b) ¿A qué razón porcentual cambia el valor de la máquina con respecto al tiempo después de t años? ¿Depende esta razón porcentual de t o es una constante?

64. ENFRIAMIENTO Una bebida fría se toma de un refrigerador en un día cálido de verano y se coloca en un cuarto cuya temperatura es 30° Celsius. De acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, la temperatura de la bebida t minutos más tarde está dada por una función de la forma $f(t) = 30 - Ae^{-kt}$. Demuestre que la razón de cambio de la temperatura de la bebida con respecto al tiempo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuarto y la de la bebida.

65. ANÁLISIS MARGINAL El editor de matemáticas en una importante casa editorial estima que si se distribuyen x miles de ejemplares de cortesía a profesores, las ventas del primer año de cierto libro nuevo serán $f(x) = 20 - 15e^{-0.2x}$ miles de ejemplares. Actualmente, el editor está planeando distribuir 10 000 ejemplares de cortesía.

a) Utilice el análisis marginal para estimar el incremento en las ventas del primer año que resultará si se distribuyen 1 000 ejemplares de cortesía adicionales.

b) Calcule el incremento real en las ventas del primer año que resultará de la distribución de los 1 000 ejemplares de cortesía adicionales. ¿Es buena la estimación en el inciso *a*)?

66. ECOLOGÍA En un modelo desarrollado por John Helms,[4] la evaporación del agua $E(T)$ para un pino ponderosa está dada por

$$E(T) = 4.6e^{17.3T/(T+237)}$$

donde T (grados Celsius) es la temperatura del aire circundante.



a) ¿Cuál es la tasa de evaporación cuando $T = 30°C$?

b) ¿Cuál es la razón porcentual de evaporación? ¿A qué temperatura disminuye por debajo de 0.5 la razón de evaporación porcentual?

[4] John A. Helms, "Environmental Control of Net Photosynthesis in Naturally Growing Pinus Ponderosa Nets", *Ecology* (invierno, 1972), p. 92.

www.FreeLibros.com

67. APRENDIZAJE De acuerdo con el modelo de Ebbinghaus (recuerde el problema 50, sección 4.1) la fracción $F(t)$ del contenido de este curso que usted recordará, t meses después del examen final, se puede estimar mediante la fórmula $F(t) = B + (1 - B)e^{-kt}$, donde B es la fracción del material que nunca olvidará y k es una constante que depende de la calidad de su memoria.

a) Encuentre $F'(t)$ y explique qué representa esta derivada.

b) Demuestre que $F'(t)$ es proporcional a $F - B$ e interprete este resultado. [*Sugerencia:* ¿qué representa $F - B$ en términos de lo que usted recuerda?]

c) Trace la gráfica de $F(t)$ para el caso donde $B = 0.3$ y $k = 0.2$.

68. CONTROL DE ABUSO DE ALCOHOL Suponga que el porcentaje de alcohol en la sangre t horas después de su consumo está dado por

$$C(t) = 0.12te^{-t/2}$$

a) ¿A qué razón cambia el nivel de alcohol en la sangre en el tiempo t?

b) ¿Cuánto tiempo transcurre antes de que comience a declinar el nivel de alcohol en la sangre?

c) Suponga que el límite permitido de alcohol en la sangre es 0.04%. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir antes de que el alcohol en la sangre alcance este nivel? ¿A qué razón disminuye el nivel de alcohol en la sangre cuando alcanza el límite permitido?

69. GASTO DEL CONSUMIDOR La demanda de cierto bien es $D(p) = 3\,000e^{-0.01p}$ unidades por mes cuando el precio de mercado es p dólares por unidad.

a) ¿A qué razón cambia el gasto del consumidor $E(p) = pD(p)$ respecto al precio p?

b) ¿A qué precio deja de incrementarse y comienza a disminuir el gasto del consumidor?

c) ¿A qué precio comienza a incrementarse la *razón* del gasto del consumidor? Interprete este resultado.

70. APRENDIZAJE En un experimento para probar el aprendizaje de memoria, un sujeto se confronta con una serie de tareas y se determina que t minutos después de iniciar el experimento, el número de tares completadas con éxito es

$$R(t) = \frac{15(1 - e^{-0.01t})}{1 + 1.5e^{-0.01t}}$$

a) ¿Para qué valores de t crece la función del aprendizaje $R(t)$? ¿Para qué valores disminuye?

b) ¿Cuándo crece la razón de cambio de la función de aprendizaje $R(t)$? ¿Cuándo disminuye? Interprete sus resultados.

71. ESPECIES EN PELIGRO DE EXTINCIÓN Una agencia internacional determina que el número de individuos de una especie en peligro de extinción que permanece en su estado natural t años después de instituir un programa de protección, se puede modelar por

$$N(t) = \frac{600}{1 + 3e^{-0.02t}}$$

a) ¿A qué razón cambia la población en el momento t? ¿Cuándo crece la razón de cambio de la población? ¿Cuándo disminuye?

b) ¿Cuándo crece la razón de cambio de la población? Interprete sus resultados.

c) ¿Qué le pasa a la población "a largo plazo" (cuando $t \to +\infty$)?

72. ESPECIES EN PELIGRO DE EXTINCIÓN La agencia del problema 71 estudia una segunda especie en peligro de extinción, pero no obtiene recursos para desarrollar un programa de protección. La población de la especie está modelada por

$$N(t) = \frac{30 + 500e^{-0.3t}}{1 + 5e^{-0.3t}}$$

a) ¿A qué razón cambia la población en el momento t? ¿Cuándo crece la población? ¿Cuándo disminuye?

b) ¿Cuándo crece la razón de cambio de la población? ¿Cuándo disminuye? Interprete sus resultados.

c) ¿Qué le pasa a la población "a largo plazo" (cuando $t \to +\infty$)?

73. CRECIMIENTO DE PLANTAS Dos plantas crecen de tal forma que t días después de plantarlas, tienen una altura $P_1(t)$ y $P_2(t)$ centímetros, respectivamente, donde

$$P_1(t) = \frac{21}{1 + 25e^{-0.3t}} \quad \text{y} \quad P_2(t) = \frac{20}{1 + 17e^{-0.6t}}$$

a) ¿A qué razón crece la primera planta en el momento $t = 10$ días? ¿Aumenta o disminuye la razón de crecimiento de la segunda planta en este momento?

b) ¿En qué momento tienen la misma altura las dos plantas? ¿Cuál es su altura? ¿Qué planta crece más rápido cuando ambas tienen la misma altura?

74. CRECIMIENTO PER CÁPITA El ingreso nacional $I(t)$ de cierto país crece en 2.3% por año, en tanto que la población $P(t)$ del país disminuye a la razón anual de 1.75%. El ingreso per cápita C está definido por $C(t) = \dfrac{I(t)}{P(t)}$.

a) Encuentre la derivada de $\ln C(t)$.

www.FreeLibros.com

b) Utilice el resultado del inciso *a*) para determinar la razón de crecimiento porcentual del ingreso per cápita.

75. CRECIMIENTO DEL INGRESO Un país exporta componentes electrónicos, E, y textiles, T. Suponga que en cierto momento $t = t_0$, el ingreso (en mil millones de dólares) derivado de cada uno de estos bienes es

$$E(t_0) = 11 \quad \text{y} \quad T(t_0) = 8$$

y que E crece a 9%, en tanto que T disminuye a 2%. ¿A qué razón relativa cambia el ingreso total de las exportaciones $R = E + T$ en este momento?

76. Una cantidad crece de manera que $Q(t) = Q_0 \dfrac{e^{kt}}{t}$. Encuentre la razón de cambio porcentual de Q respecto a t.

77. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN Se ha proyectado que dentro de x años la población de cierto pueblo será aproximadamente $P(x) = 5\,000\sqrt{x^2 + 4x + 19}$. ¿A qué razón porcentual cambiará la población con respecto al tiempo dentro de 3 años?

78. DERIVADAS DE b^x Y $\log_b x$ PARA BASE $b \neq e$ Sea b un número positivo diferente a 1 ($b > 0, b \neq 1$).

a) Demuestre que

$$\frac{d}{dx}(b^x) = (\ln b)b^x$$

b) Demuestre que

$$\frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{1}{(\ln b)}\frac{1}{x}$$

En los problemas 79 a 82 utilice las fórmulas del problema 78 para deducir la función dada.

79. $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$

80. $f(x) = x^2 3^{x^2}$

81. $f(x) = x \log_{10} x$

82. $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{\sqrt{x}}$

83. Emplee una instrucción de derivación numérica para encontrar $f'(c)$, donde $c = 0.65$ y

$$f(x) = \ln\left[\frac{\sqrt[3]{x+1}}{(1+3x)^4}\right]$$

luego utilice una instrucción de graficación para trazar la gráfica de $f(x)$ y para dibujar la recta tangente en el punto donde $x = c$.

84. Repita el problema 83 con la función

$$f(x) = (3.7x^2 - 2x + 1)e^{-3x+2}$$

y $c = -2.17$.

SECCIÓN 4.4 Modelos exponenciales adicionales

A principios de este capítulo se analizaron temas aplicados como capitalización continua, crecimiento y decrecimiento exponencial y datación por carbono. En esta sección, se introducen varios modelos adicionales sobre una variedad de áreas tales como negocios y economía, biología, sicología, demografía y sociología. Se comienza con dos ejemplos que ilustran situaciones particulares que se originan cuando se trazan gráficas exponenciales y logarítmicas.

Trazado de curvas

Al igual que cuando se grafican funciones polinomiales o racionales, la clave para graficar una función $f(x)$ que contiene e^x o $\ln x$ es usar la derivada $f'(x)$ para encontrar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y luego la segunda derivada $f'(x)$ para determinar la concavidad.

¡EXPLORE!

Remítase al ejemplo 4.4.1. Grafique $f(x)$ en un estilo regular junto con $f'(x)$ en negritas, utilizando la pantalla decimal [0, 4.7]1 por [−3.1, 3.1]1. Ubique el punto mínimo exacto de la gráfica, ya sea utilizando la instrucción de cálculo de la calculadora graficadora aplicada a $f(x)$, o la instrucción de encontrar la raíz, aplicandola a $f'(x)$.

EJEMPLO | 4.4.1

Trace la gráfica de $f(x) = x^2 - 8 \ln x$.

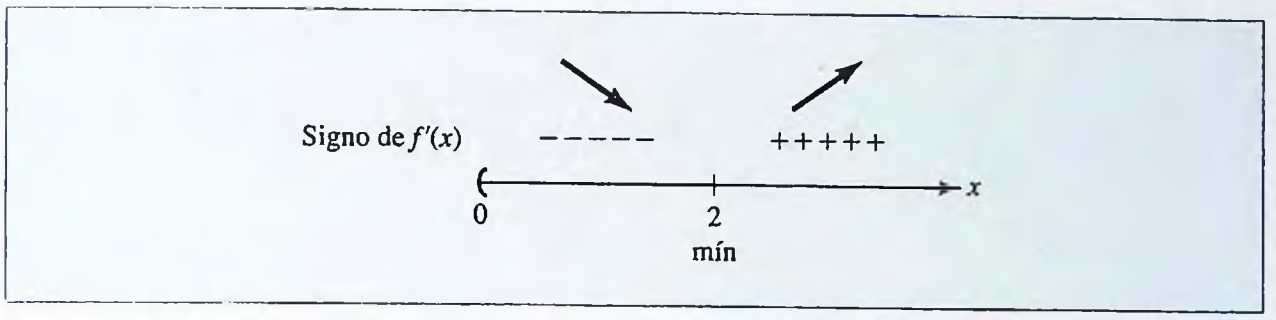
Solución

La función $f(x)$ está definida sólo para $x > 0$. Su derivada es

$$f'(x) = 2x - \frac{8}{x} = \frac{2x^2 - 8}{x}$$

www.FreeLibros.com

y $f'(x) = 0$ si y sólo si $2x^2 = 8$ o $x = 2$ (como $x > 2$). Probando el signo de $f'(x)$ para $0 < x < 2$ y para $x > 0$, se obtienen los intervalos de crecimiento y decrecimiento que se muestran en la figura.



Note que el patrón de las flechas indica que hay un mínimo relativo en $x = 2$, y como $f(2) = 2^2 - 8 \ln 2 \approx -1.5$, el punto mínimo es $(2, -1.5)$.

La segunda derivada

$$f''(x) = 2 + \frac{8}{x^2}$$

satisface $f''(x) > 0$ para toda $x > 0$, por tanto la gráfica de $f(x)$ siempre es cóncava hacia arriba y no hay puntos de inflexión.

Verificando las asíntotas, se encuentra

$$\lim_{x \to 0^+} (x^2 - 8 \ln x) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 8 \ln x) = +\infty$$

por tanto, el eje y ($x = 0$) es una asíntota vertical, pero no hay asíntota horizontal. Las intersecciones con el eje x se determinan utilizando la calculadora para resolver la ecuación

$$x^2 - 8 \ln x = 0$$

$$x \approx 1.2 \qquad \text{y} \qquad x \approx 2.9$$

Resumiendo, la gráfica cae (hacia abajo desde la asíntota vertical) hasta el mínimo en $(2, -1.5)$, después de lo cual se eleva indefinidamente, al tiempo que mantiene una forma cóncava hacia arriba. Mientras desciende, tiene su intersección con el eje x en $(1.2, 0)$, y cuando va hacia arriba, en $(2.9, 0)$. La gráfica se muestra en la figura 4.10.

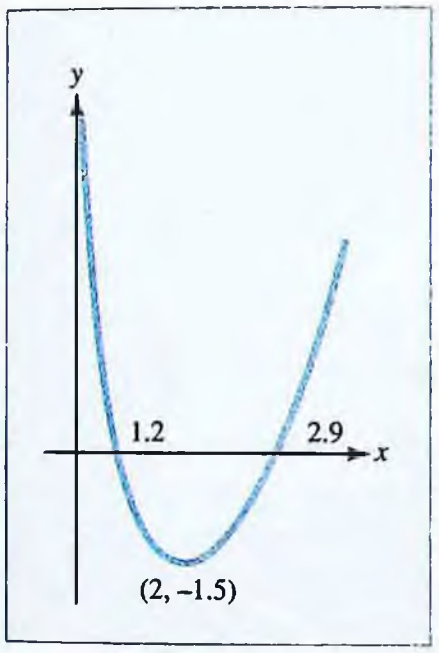


FIGURA 4.10 Gráfica de $f(x) = x^2 - 8 \ln x$.

¡EXPLORE!

Remítase al ejemplo 4.4.2. Grafique $f(x)$ en estilo regular junto con $f''(x)$ en negritas, utilizando la pantalla decimal $[-4.7, 4.7]1$ por $[-0.5, 0.5]1$. Encuentre las intersecciones de $f''(x)$ con el eje x y explique por qué ellas son las abscisas x de los puntos de inflexión de $f(x)$.

EJEMPLO 4.4.2

Determine dónde la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

crece, decrece, y dónde su gráfica es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. Encuentre los extremos relativos, los puntos de inflexión y dibuje la gráfica.

Solución

La primera derivada es

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

www.FreeLibros.com

Como $e^{-x^2/2}$ siempre es positiva, $f'(x)$ es cero si y sólo si $x = 0$. Como $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.4$, el único punto crítico es $(0, 0.4)$. Usando la regla del producto, la segunda derivada es

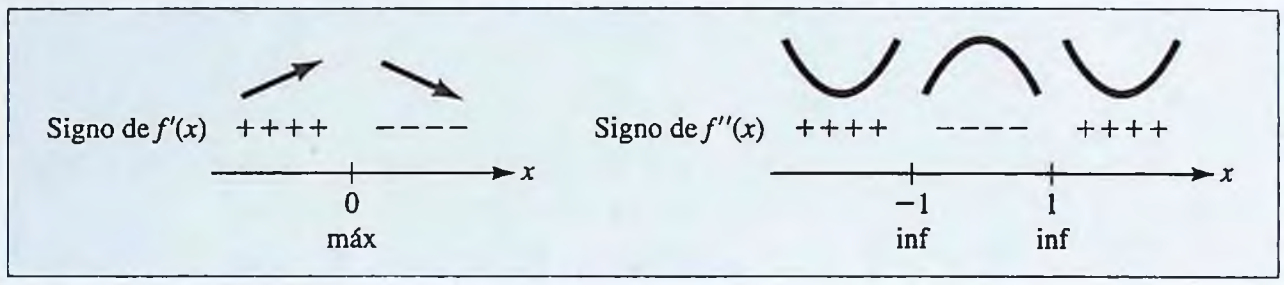
$$f''(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (x^2 - 1) e^{-x^2/2}$$

que es cero si $x = \pm 1$. Como

$$f(1) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.24 \qquad \text{y} \qquad f(-1) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.24$$

los puntos de inflexión potenciales son $(1, 0.24)$ y $(-1, 0.24)$.

Grafique los puntos críticos y luego verifique los signos de la primera y segunda derivada en cada uno de los intervalos definidos por las abscisas, x, de estos puntos:



El patrón de las flechas indica que hay un máximo relativo en $(0, 0.4)$, y como la concavidad cambia en $x = -1$ (de arriba abajo) y en $x = 1$ (de abajo arriba), ambos puntos $(-1, 0.24)$ y $(1, 0.24)$ son puntos de inflexión.

Complete la gráfica como se muestra en la figura 4.11, conectando los puntos clave con una curva de forma apropiada en cada intervalo. Observe que la gráfica no tiene intersecciones con el eje x ya que $e^{-x^2/2}$ siempre es positiva, y que la gráfica se aproxima al eje x como una asíntota horizontal porque $e^{-x^2/2}$ se aproxima a cero cuando $|x|$ crece sin límite.

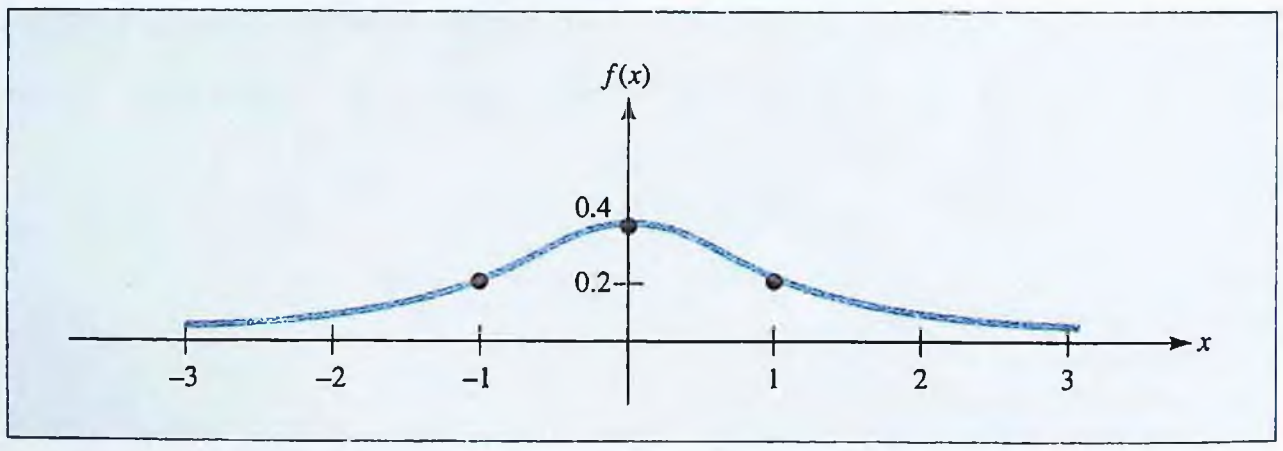


FIGURA 4.11 Función de densidad normal estándar: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

www.FreeLibros.com

NOTA La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ cuya gráfica se trazó en el ejemplo 4.4.2 es conocida como la **función de densidad de probabilidad normal estándar** y tiene un papel vital en probabilidad y estadística. La famosa "forma de campana" de la gráfica la emplean médicos y científicos sociales para describir las distribuciones de los puntajes del CI (coeficiente intelectual), las mediciones de grandes poblaciones de organismos vivos, la velocidad de una molécula en un gas, y muchos otros fenómenos importantes. ■

Optimización del tiempo de espera

Suponga que usted posee un bien cuyo valor crece con el tiempo. Entre más tiempo conserve el bien, mayor será su valor, pero quizá llegue un momento cuando sea mejor vender el bien y reinvertir el producto de la venta. Los economistas determinan el tiempo óptimo para vender maximizando el valor presente del bien en relación con la tasa de interés prevaleciente, capitalizada continuamente. La aplicación de este criterio se ilustra en el ejemplo 4.4.3.

¡EXPLORE!

Introduzca la función $P(x) = 20\,000*e\text{^}(\sqrt{x} - 0.07x)$ del ejemplo 4.4.3 en Y1 del editor de ecuaciones de su calculadora graficadora. Encuentre una pantalla apropiada a fin de ver la gráfica y determine su valor máximo.

EJEMPLO | 4.4.3

Suponga que usted posee una parcela de tierra cuyo precio en el mercado dentro de t años será $V(t) = 20\,000e^{\sqrt{t}}$ dólares. Si la tasa de interés prevaleciente permanece constante a 7% capitalizada continuamente, ¿cuándo será mayor el valor presente del precio de la parcela en el mercado?

Solución

En t años, el precio de la parcela en el mercado será $V(t) = 20\,000e^{\sqrt{t}}$. El valor presente de este precio es

$$P(t) = V(t)e^{-0.07t} = 20\,000e^{\sqrt{t}}e^{-0.07t} = 20\,000e^{\sqrt{t}-0.07t}$$

El objetivo es maximizar $P(t)$ para $t \geq 0$. La derivada de P es

$$P'(t) = 20\,000e^{\sqrt{t}-0.07t}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - 0.07\right)$$

Así, $P'(t)$ no está definida cuando $t = 0$ y $P'(t) = 0$ cuando

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} - 0.07 = 0 \qquad \text{o} \qquad t = \left[\frac{1}{2(0.07)}\right]^2 \approx 51.02$$

Como $P'(t)$ es positiva si $0 < t < 51.02$ y negativa si $t > 51.02$, se deduce que la gráfica de P crece para $0 < t < 51.02$ y decrece para $t > 51.02$, como se muestra en la figura 4.12. Así, el valor presente es máximo aproximadamente dentro de 51 años.

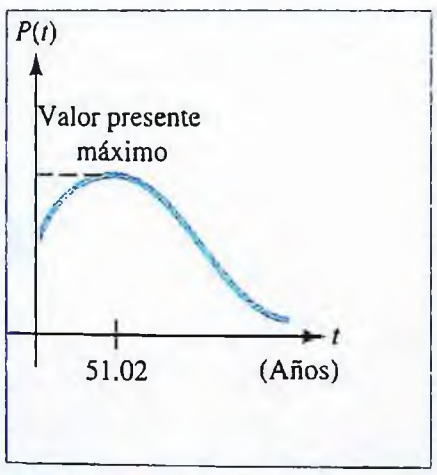


FIGURA 4.12 Valor presente $P(t) = 20\,000e^{\sqrt{t}-0.07t}$.

NOTA El criterio de optimización empleado en el ejemplo 4.4.3 no es la única manera para determinar el tiempo óptimo de espera. Por ejemplo, usted puede decidir vender el bien cuando la tasa porcentual de crecimiento del valor del bien sea igual a la tasa de interés prevaleciente (7% en el ejemplo). ¿Cuál criterio parece más razonable? En realidad no importa, ¡ya que los dos criterios producen exactamente el mismo resultado! Una prueba de esta equivalencia se resume en el problema 52. ■

Curvas de aprendizaje

La gráfica de una función de la forma $Q(t) = B - Ae^{-kt}$, donde A, B y k son constantes positivas, algunas veces se denomina **curva de aprendizaje**. El nombre se originó cuando los psicólogos descubrieron que, con frecuencia, para $t \geq 0$ las funciones de esta forma modelan de una manera realista la relación entre la eficiencia con la cual un individuo realiza una tarea y el tiempo de entrenamiento o experiencia que ha tenido el "aprendiz."

www.FreeLibros.com

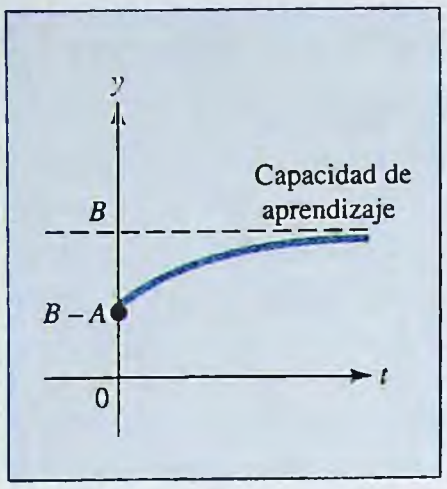


FIGURA 4.13 Curva de aprendizaje $y = B - Ae^{-kt}$.

Para trazar la gráfica de $Q(t) = B - Ae^{-kt}$ para $t \geq 0$, nótese que

$$Q'(t) = -Ae^{-kt}(-k) = Ake^{-kt}$$

y

$$Q''(t) = Ake^{-kt}(-k) = -Ak^2e^{-kt}$$

Como A y k son positivas, se deduce que $Q'(t) > 0$ y $Q''(t) < 0$ para toda t, por tanto la gráfica de $Q(t)$ siempre es creciente y siempre es cóncava hacia abajo. Además, la intersección con el eje vertical (eje Q) es $Q(0) = B - A$, y $Q = B$ es una asíntota horizontal porque

$$\lim_{t \to +\infty} Q(t) = \lim_{t \to +\infty} (B - Ae^{-kt}) = B - 0 = B$$

En la figura 4.13 se muestra una gráfica con estas características. El comportamiento de la curva de aprendizaje cuando $t \to +\infty$ refleja el hecho de que "a largo plazo," un individuo se aproxima a su "capacidad" de aprendizaje, y el tiempo de entrenamiento adicional sólo resultará en una mejora marginal en la eficiencia del desempeño.

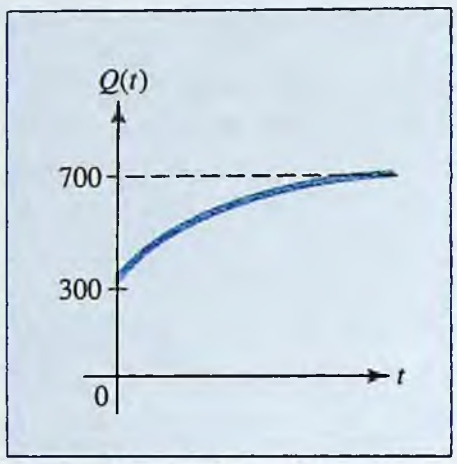


FIGURA 4.14 Eficiencia del trabajador $Q(t) = 700 - 400e^{-0.05t}$.

EJEMPLO | 4.4.4

El ritmo al cual un empleado postal puede clasificar el correo es una función de la experiencia del empleado. Suponga que el administrador de correos de una ciudad grande estima que después de t meses en el trabajo, un empleado promedio puede clasificar $Q(t) = 700 - 400e^{-0.5t}$ cartas por hora.

a) ¿Cuántas cartas por hora puede clasificar un empleado nuevo?

b) ¿Cuántas cartas por hora puede clasificar un empleado con 6 meses de experiencia?

c) Aproximadamente ¿cuántas cartas puede clasificar por hora un empleado promedio?

Solución

a) El número de cartas por hora que puede clasificar un empleado nuevo es

$$Q(0) = 700 - 400e^0 = 300$$

b) Después de 6 meses, el empleado promedio puede clasificar

$$Q(6) = 700 - 400e^{-0.5(6)} = 700 - 400e^{-3} \approx 680 \quad \text{cartas por hora}$$

c) Cuando t crece sin límite, $Q(t)$ se aproxima a 700. De aquí que el empleado promedio finalmente será capaz de clasificar aproximadamente 700 cartas por hora. En la figura 4.14 se bosqueja la gráfica de la función $Q(t)$.

Curvas logísticas

La gráfica de una función de la forma $Q(t) = \dfrac{B}{1 + Ae^{-Bkt}}$, donde A, B y k son constantes positivas, se denomina **curva logística**. En la figura 4.15 se muestra una curva logística típica. Note que primero sube abruptamente como una curva exponencial, luego gira y se aplana, aproximándose a una asíntota horizontal, muy similar a una curva de aprendizaje. La recta asintótica representa un "nivel de saturación" para la cantidad representada por la curva logística y se denomina **capacidad máxima** de la cantidad. Por ejemplo, en modelos de población, la capacidad máxima representa el número máximo de individuos que puede soportar el medio ambiente, en tanto que en un modelo logístico para la propagación de una epidemia, la capacidad máxima es el número total de individuos susceptibles a la enfermedad, digamos, aquellos que no están vacunados o, en el peor de los casos, toda la comunidad.

www.FreeLibros.com

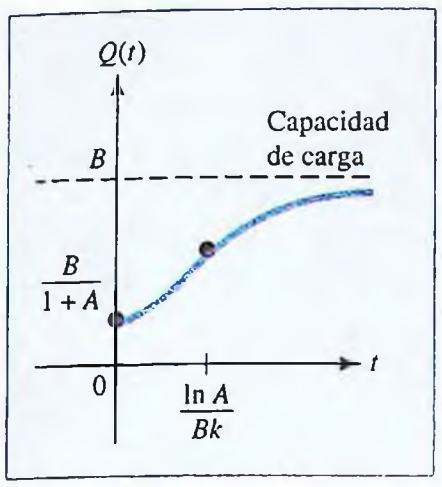


FIGURA 4.15 Curva logística $Q(t)=\dfrac{B}{1+Ae^{-Bkt}}$.

Para trazar la gráfica de $Q(t) = \dfrac{B}{1 + Ae^{-Bkt}}$ para $t \geq 0$, observe que

$$Q'(t) = \frac{AB^2ke^{-Bkt}}{(1 + Ae^{-Bkt})^2}$$

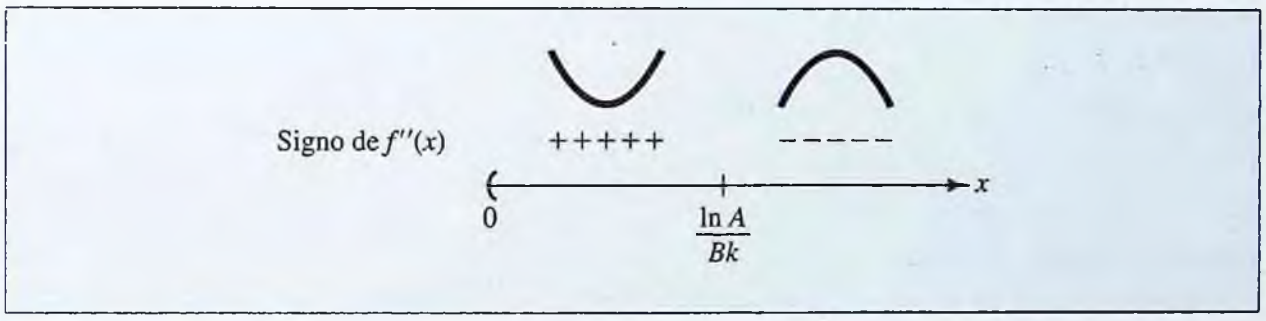
y

$$Q''(t) = \frac{AB^3k^2e^{-Bkt}(-1 + Ae^{-Bkt})}{(1 + Ae^{-Bkt})^3}$$

Verifique estas fórmulas, y también verifique el hecho de que $Q'(t) > 0$ para toda t, lo que significa que la gráfica de $Q(t)$ siempre es creciente. La ecuación $Q''(t) = 0$ tiene exactamente una solución; que es, cuando

$$\begin{aligned} -1 + Ae^{-Bkt} &= 0 \\ e^{-Bkt} &= \frac{1}{A} \\ -Bkt &= \ln\left(\frac{1}{A}\right) = -\ln A \\ t &= \frac{\ln A}{Bk} \end{aligned}$$

Como se muestra en el siguiente diagrama, hay un punto de inflexión en $t = \dfrac{\ln A}{Bk}$ porque allí cambia la concavidad (de arriba hacia abajo).



La intersección de la curva logística con el eje vertical es

$$Q(0) = \frac{B}{1 + Ae^0} = \frac{B}{1 + A}$$

Como $Q(t)$ está definida para toda $t \geq 0$, la curva logística no tiene asíntotas verticales, pero $y = B$ es una asíntota horizontal ya que

$$\lim_{t \to +\infty} Q(t) = \lim_{t \to +\infty} \frac{B}{1 + Ae^{-Bkt}} = \frac{B}{1 + A(0)} = B$$

Resumiendo, como se muestra en la figura 4.15, la curva logística comienza en $Q(0) = \dfrac{B}{1 + A}$, sube abruptamente (cóncava hacia arriba) hasta que llega al punto de inflexión en $t = \dfrac{\ln A}{Bk}$, luego se aplana y continúa subiendo (cóncava hacia abajo) hacia la asíntota horizontal $y = B$. Así, B es la capacidad máxima de la magnitud $Q(t)$ representada por la curva logística, y el punto de inflexión en $t = \dfrac{\ln A}{Bk}$ se puede interpretar como un punto de *disminución del crecimiento*.

www.FreeLibros.com

A menudo las curvas logísticas proporcionan buenos modelos de crecimiento de la población, cuando los factores del medio, tales como espacio para vivir restringido, abastecimiento inadecuado de alimento, o contaminación urbana, imponen un límite superior en el tamaño posible de la población. Las curvas logísticas también se emplean para describir la diseminación de información privilegiada o rumores en una comunidad, donde la restricción es el número de individuos susceptible a recibir tal información. A continuación se presenta un ejemplo en donde la curva logística se emplea para describir la propagación de una enfermedad contagiosa.

¡EXPLORE!

Grafique la función del ejemplo 4.4.5 utilizando la pantalla [0, 10]1 por [0, 25]5. Trace esta función para valores grandes de x. ¿Qué observa? Determine una forma gráfica para encontrar cuándo 90% de la población ha contraído la enfermedad.

EJEMPLO | 4.4.5

Los registros de salud pública indican que t semanas después de un brote de cierta forma de influenza, aproximadamente $Q(t) = \dfrac{20}{1 + 19e^{-1.2t}}$ miles de personas se habían contagiado con la enfermedad.

a) ¿Cuántas personas tenían la enfermedad cuando ésta comenzó? ¿Cuántas personas la tenían 2 semanas después?

b) ¿En qué momento comenzó a descender la tasa de infección?

c) Si la tendencia continúa, aproximadamente ¿cuántas personas contraerán la enfermedad en algún momento?

Solución

a) Como $Q(0) = \dfrac{20}{1 + 19} = 1$, se deduce que 1 000 personas tenían inicialmente la enfermedad. Cuando $t = 2$,

$$Q(2) = \frac{20}{1 + 19e^{-1.2(2)}} \approx 7.343$$

por tanto, 7 343 habían contraído la enfermedad a las dos semanas.

b) La tasa de infección comienza a descender en el punto de inflexión en la gráfica de $Q(t)$. Comparando la fórmula dada con la fórmula logística $Q(t) = \dfrac{B}{1 + Ae^{-Bkt}}$, se encuentra que $B = 20$, $A = 19$ y $Bk = 1.2$. Así, el punto de inflexión ocurre cuando

$$t = \frac{\ln A}{Bk} = \frac{\ln 19}{1.2} \approx 2.454$$

por tanto, la epidemia comienza a desvanecerse 2.5 semanas después de iniciar.

c) Como $Q(t)$ se aproxima a 20 cuando t crece sin límite, se deduce que aproximadamente 20 000 personas contraerán la enfermedad en algún momento. Como referencia, la gráfica se bosqueja en la figura 4.16.

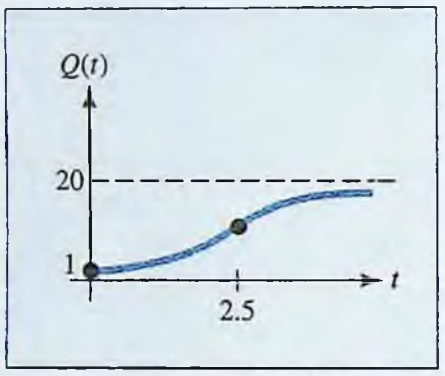


FIGURA 4.16 Propagación de una epidemia

$$Q(t) = \frac{20}{1 + 19e^{-1.2t}}$$

Edad óptima para la reproducción

Un organismo como el salmón del Pacífico o el bambú que se aparea sólo una vez durante su vida se dice que es *semélparo*. Los biólogos miden la tasa de reproducción per cápita de esos organismos mediante la función[5]

$$R(x) = \frac{\ln [p(x)f(x)]}{x}$$

[5]Adaptada de *Calculus for Biology and Medicine*, por Claudia Neuhauser, Prentice-Hall, 2000, p. 199 (problema 22).

www.FreeLibros.com

donde $p(x)$ es la probabilidad que un organismo individual sobreviva a la edad x y $f(x)$ es el número de nacimientos de hembras para un individuo reproduciéndose a la edad x. Entre mayor sea el valor de $R(x)$, mayor será el número de nacimientos que se produzca. De aquí, la edad a la cual $R(x)$ se maximiza se considera como la edad óptima para la reproducción.

EJEMPLO | 4.4.6

Suponga que para un organismo semélparo particular, la probabilidad que un individuo sobreviva a la edad x (años) está dada por $p(x) = e^{-0.15x}$ y que el número de nacimientos de hembras a la edad x es $f(x) = 3x^{0.85}$. ¿Cuál es la edad óptima para la reproducción?

Solución

La función de la tasa de incremento per cápita para este modelo es

$$R(x) = \frac{\ln[e^{-0.15x}(3x^{0.85})]}{x}$$

$$= x^{-1}(\ln e^{-0.15x} + \ln 3 + \ln x^{0.85}) \quad \textit{regla del producto para logaritmos}$$

$$= x^{-1}(-0.15x + \ln 3 + 0.85 \ln x) \quad \textit{regla de la potencia para logaritmos}$$

$$= -0.15 + (\ln 3 + 0.85 \ln x)x^{-1}$$

Derivando $R(x)$ por medio de la regla del producto, se tiene que

$$R'(x) = 0 + (\ln 3 + 0.85 \ln x)(-x^{-2}) + [0.85\left(\frac{1}{x}\right)]x^{-1}$$

$$= \frac{-\ln 3 - 0.85 \ln x + 0.85}{x^2}$$

Por tanto, $R'(x) = 0$ cuando

$$-\ln 3 - 0.85 \ln x + 0.85 = 0$$

$$\ln x = \frac{0.85 - \ln 3}{0.85} \approx -0.2925$$

$$x = e^{-0.2925} \approx 0.7464$$

Para demostrar que este número crítico corresponde a un máximo, aplicamos la prueba de la segunda derivada. Se tiene que

$$R''(x) = \frac{1.7 \ln x + 2 \ln 3 - 2.55}{x^3}$$

(efectúelo con detalle), y como

$$R''(0.7464) \approx -2.0440 < 0$$

se deduce que el valor mayor de $R(x)$ ocurre cuando $x \approx 0.7464$. Así, la edad óptima para que se reproduzca un organismo individual es 0.7464 años (aproximadamente 9 meses).

www.FreeLibros.com

PROBLEMAS | 4.4

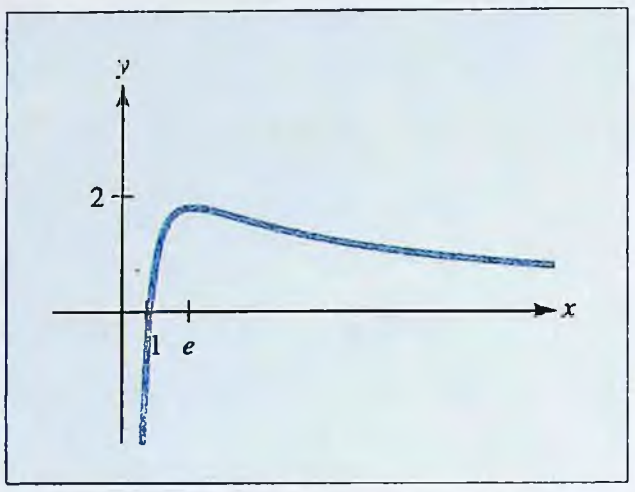
Cada una de las curvas que se muestran en los problemas 1 a 4 es la gráfica de una de las seis funciones listadas a continuación. En cada caso, una con una línea la curva dada con la función adecuada.

$$f_1(x) = 2 - e^{-2x} \qquad f_2(x) = x \ln x^5$$

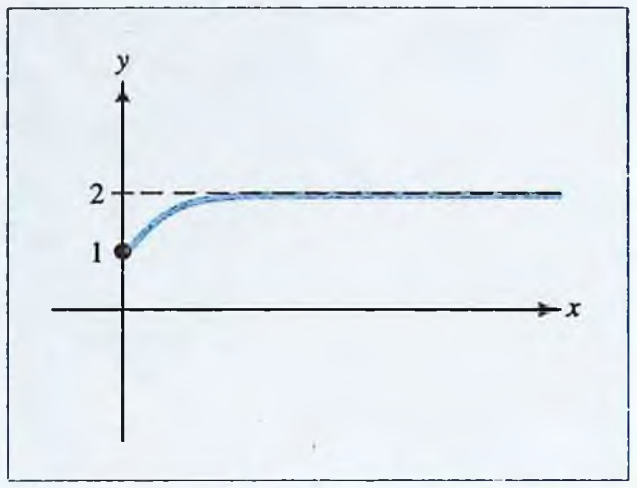
$$f_3(x) = \frac{2}{1 - e^{-x}} \qquad f_4(x) = \frac{2}{1 + e^{-x}}$$

$$f_5(x) = \frac{\ln x^5}{x} \qquad f_6(x) = (x - 1)e^{-2x}$$

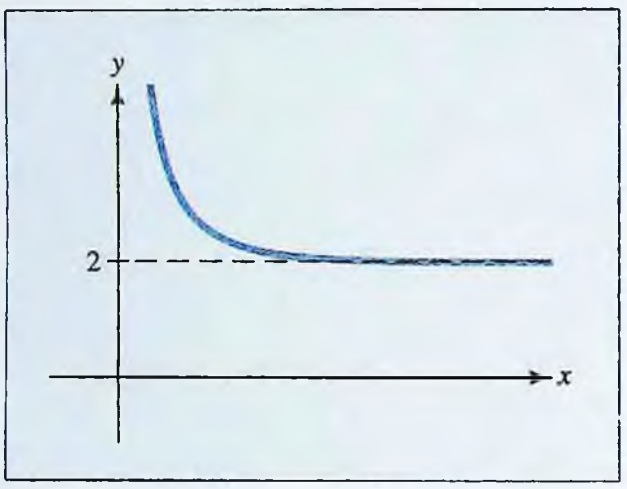
1.



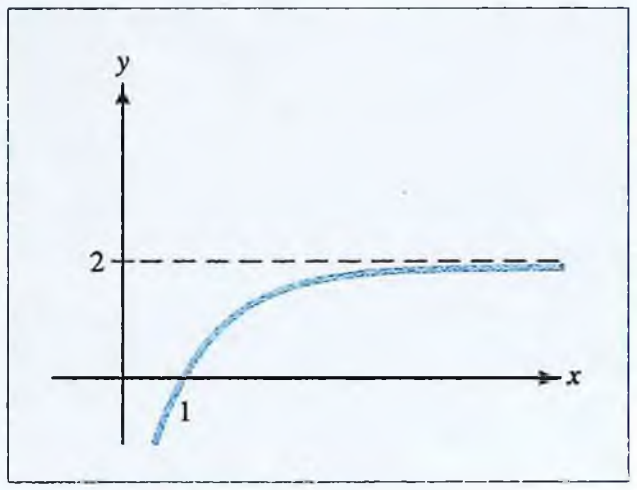
2.



3.



4.



En los problemas 5 a 20 determine dónde la función dada es creciente y decreciente, y dónde su gráfica es cóncava hacia arriba y hacia abajo. Trace la gráfica de la función. Muestre tantas características clave como sea posible (cimas y valles, puntos de inflexión, asíntotas verticales y horizontales, intersecciones, picos, tangentes verticales).

5. $f(t) = 2 + e^t$

6. $g(x) = 3 + e^{-x}$

7. $g(x) = 2 - 3e^x$

8. $f(t) = 3 - 2e^t$

9. $f(x) = \dfrac{2}{1 + 3e^{-2x}}$

10. $h(t) = \dfrac{2}{1 + 3e^{2t}}$

11. $f(x) = xe^x$

12. $f(x) = xe^{-x}$

13. $f(x) = xe^{2-x}$

14. $f(x) = e^{-x^2}$

15. $f(x) = x^2e^{-x}$

16. $f(x) = e^x + e^{-x}$

17. $f(x) = \dfrac{6}{1 + e^{-x}}$

18. $f(x) = x - \ln x$ (para $x > 0$)

19. $f(x) = (\ln x)^2$ (para $x > 0$)

20. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ (para $x > 0$)

www.FreeLibros.com

21. CONFIABILIDAD DEL PRODUCTO Un fabricante de juguetes ha encontrado que la fracción de sus buques petroleros de juguete, operados con baterías, que se hunde en menos que t días es aproximadamente $f(t) = 1 - e^{-0.03t}$.

a) Trace esta función de confiabilidad. ¿Qué le pasa a la gráfica cuando t crece sin límite?

b) ¿Qué fracción de los buques se puede esperar que flote durante al menos 10 días?

c) ¿Qué fracción de los buques se puede esperar que se hunda entre el día 15 y el 20?

22. DEPRECIACIÓN Cuando cierta máquina industrial tiene t años, su valor de reventa es $V(t) = 4\,800e^{-t/5} + 400$ dólares.

a) Trace la gráfica de $V(t)$. ¿Qué le sucede al valor de la máquina cuando t crece sin límite?

b) ¿Cuánto vale la máquina nueva?

c) ¿Cuánto vale la máquina después de 10 años?

23. ENFRIAMIENTO Una bebida caliente se lleva al exterior en un día frío de invierno cuando la temperatura del aire es −5°C. De acuerdo con un principio de física denominado ley de enfriamiento de Newton, la temperatura T (en grados Celsius) de la bebida, t minutos después de ser llevada al exterior, está dada por una función de la forma

$$T(t) = -5 + Ae^{-kt}$$

donde A y k son constantes. Suponga que la temperatura de la bebida es 80°C cuando se lleva al exterior y 20 minutos después, es 25°C.

a) Use esta información para determinar A y k.

b) Trace la gráfica de la función de la temperatura $T(t)$. ¿Qué le pasa a la temperatura cuando t crece indefinidamente ($t \to +\infty$)?

c) ¿Cuál será la temperatura después de 30 minutos?

d) ¿Cuándo alcanzará la temperatura los 0°C?

24. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN Se ha estimado que dentro de t años, la población de cierto país será $P(t) = \dfrac{20}{2 + 3e^{-0.06t}}$ millones.

a) Trace la gráfica de $P(t)$.

b) ¿Cuál es la población actual?

c) ¿Cuál será la población dentro de 50 años?

d) ¿Qué le pasará a la población a largo plazo?

25. PROPAGACIÓN DE UNA EPIDEMIA Los registros de salud pública indican que t semanas después del brote de cierta forma de influenza, aproximadamente $f(t) = \dfrac{2}{1 + 3e^{-0.8t}}$ miles de personas habían contraído la enfermedad.

a) Trace la gráfica de $f(t)$.

b) ¿Cuántas personas tenían la enfermedad inicialmente?

c) ¿Cuántas habían contraído la enfermedad al cabo de tres semanas?

d) Si la tendencia continúa, aproximadamente ¿cuántas personas en total contraerán la enfermedad?

26. RECUERDOS DE MEMORIA Los psicólogos consideran que cuando se le pide a una persona recordar un conjunto de hechos, el número de hechos recordados después de t minutos está dado por una función de la forma $Q(t) = A(1 - e^{-kt})$, donde k es una constante positiva y A es el número total de hechos importantes en la memoria de la persona.

a) Trace la gráfica de $Q(t)$.

b) ¿Qué le ocurre a la gráfica cuando t crece sin límite? Explique este comportamiento en términos prácticos.

27. EFICIENCIA La producción diaria de un trabajador que ha estado en el trabajo durante t semanas está dada por una función de la forma $Q(t) = 40 - Ae^{-kt}$. Inicialmente el trabajador podía producir 20 unidades al día, y después de 1 semana puede producir 30 unidades al día. ¿Cuántas unidades producirá el trabajador por día después de tres semanas?

28. PUBLICIDAD Cuando los profesores seleccionan libros para sus cursos, normalmente eligen entre los ejemplares que tienen en sus libreros. Por esta razón, la mayoría de los editores envían ejemplares de cortesía de libros nuevos a los profesores que enseñan cursos relacionados. El editor de matemáticas en una casa editorial importante estima que si se distribuyen x miles de ejemplares de cortesía, las ventas del primer año de cierto libro de matemáticas nuevo serán aproximadamente $f(x) = 20 - 15e^{-0.2x}$ miles de ejemplares.

a) Trace esta función de ventas.

b) ¿Cuántos libros puede esperar vender el editor en el primer año si no se envían ejemplares de cortesía?

c) ¿Cuántas libros puede esperar vender el editor en el primer año si se envían 10 000 ejemplares de cortesía?

d) Si la estimación del editor es correcta, ¿cuál es la proyección más optimista para las ventas de primer año del libro?

29. ANÁLISIS MARGINAL El editor de economía en una casa editorial importante estima que si se distribuyen a profesores x miles de ejemplares de cortesía, las ventas del primer año de cierto libro nuevo serán $f(x) = 15 - 20e^{-0.3x}$ miles de ejemplares. Actualmente, el editor está planeando distribuir 9 000 ejemplares de cortesía.

www.FreeLibros.com

a) Use el análisis marginal para estimar el incremento en las ventas del primer año que resultarán si se distribuyen 1 000 ejemplares de cortesía adicionales.

b) Calcule el incremento real en las ventas del primer año que resultará de la distribución de los 1 000 ejemplares de cortesía adicionales. ¿Es buena la estimación en el inciso *a*)?

30. ANÁLISIS MARGINAL En un negocio se estima que cuando se emplean x miles de personas, su utilidad será $P(x)$ millones de dólares, donde

$$P(x) = 10 + \ln\left(\frac{x}{25}\right) - 12x^2$$

para $x > 0$. ¿Qué nivel de empleo maximiza la utilidad? ¿Cuál es la utilidad máxima?

31. APRENDIZAJE EN LA NIÑEZ Un psicólogo mide la capacidad para aprender y recordar de un niño mediante la función

$$L(t) = \frac{\ln(t+1)}{t+1}$$

donde t es la edad del niño en años, para $0 \le t \le 5$. Responda las preguntas acerca de este modelo.

a) ¿A qué edad tiene el niño la mayor capacidad de aprendizaje?

b) ¿A qué edad crece más rápidamente la capacidad de aprendizaje del niño?

32. CLASIFICACIÓN AERÓBICA La clasificación aeróbica de una persona de x años está modelada por la función

$$A(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x} \quad \text{para } x \ge 10$$

a) ¿A qué edad es mayor la clasificación aeróbica de una persona?

b) ¿A qué edad disminuye más rápidamente la clasificación aeróbica de una persona?

33. ESPECULACIÓN EN ACCIONES En un artículo clásico sobre la teoría de conflictos,[7] L. F. Richardson afirmó que la proporción p de una población a favor de la guerra u otra acción ofensiva en un momento t satisface

$$p(t) = \frac{Ce^{kt}}{1 + Ce^{kt}}$$

donde k y C son constantes positivas. La venta diaria especulativa de acciones en el mercado de valores se puede considerar como una "acción ofensiva". Suponga que inicialmente, 1/200 del volumen diario total del mercado se atribuye a la venta diaria y que cuatro semanas más tarde, la proporción es 1/100. ¿Cuándo crecerá más rápidamente la proporción? ¿Cuál será la proporción en ese momento?

34. POBLACIÓN MUNDIAL De acuerdo con cierto modelo logístico, la población mundial (en mil millones) t años después de 1960 será aproximadamente

$$P(t) = \frac{40}{1 + 12e^{-0.08t}}$$

a) Si este modelo es correcto, ¿a qué razón se estaba incrementado la población mundial con respecto al tiempo en el año 2000? ¿A qué razón *porcentual* se estaba incrementando la población en ese momento?

b) ¿Cuándo estará creciendo más rápidamente la población?

c) Trace la gráfica de $P(t)$. ¿Qué característica ocurre en la gráfica en el tiempo determinado en el inciso *b*)? ¿Qué le pasa a $P(t)$ "a largo plazo"?

d) ¿Considera que es razonable ese modelo de población? ¿Por qué sí o por qué no?

35. ANÁLISIS MARGINAL Un fabricante puede producir VCR a un costo de \$125 por pieza y estima que si se venden a x dólares por unidad, los consumidores comprarán aproximadamente $1\,000e^{-0.02x}$ cada semana.

a) Exprese la utilidad P como una función de x. Trace la gráfica de $P(x)$.

b) ¿A qué precio deberá el fabricante vender las VCR para maximizar la utilidad?

36. PROPAGACIÓN DE UNA EPIDEMIA Una epidemia se propaga por una comunidad de manera que t semanas después de su brote, el número de personas que han sido infectadas está dado por una función de la forma $f(t) = \dfrac{B}{1 + Ce^{-kt}}$, donde B es el número de residentes en la comunidad que son susceptibles a la enfermedad. Si 1/5 de los residentes susceptibles estaban infectados inicialmente y 1/2 había estado infectado al final de la cuarta semana, ¿qué fracción de los residentes susceptibles se habrá infectado al final de la octava semana?

37. OPTIMIZACIÓN DEL TIEMPO DE ESPERA Suponga que usted posee una parcela cuyo valor dentro de t años será $V(t) = 8\,000e^{\sqrt{t}}$ dólares. Si la tasa de interés prevaleciente permanece constante a 6% anual, capitalizado continuamente, ¿cuándo deberá vender la parcela para maximizar su valor presente?

[6] El trabajo original de Richardson apareció en *Generalized Foreign Politics*, Monograph Supplement 23 of the British Journal of Psychology (1939). Su trabajo también se presenta en el libro *Models of Arms Control and Disarmament* por T. L. Saaty, John Wiley & Sons, 1968.

www.FreeLibros.com

38. OPTIMIZACIÓN DEL TIEMPO DE ESPERA Suponga que su familia posee un libro raro cuyo valor dentro de t años será $V(t) = 200e^{\sqrt{2t}}$ dólares. Si la tasa de interés prevaleciente permanece constante a 6% anual capitalizado continuamente, ¿cuándo será más ventajoso para su familia vender el libro e invertir el producto de la venta?

39. EDAD ÓPTIMA PARA LA REPRODUCCIÓN Suponga que para un organismo semélparo particular la probabilidad que un individuo sobreviva hasta la edad de x años es $p(x) = e^{-0.2x}$ y que el número de nacimientos de hembras para un individuo a la edad x es $f(x) = 5x^{0.9}$. ¿Cuál es la edad ideal para la reproducción de un organismo individual de esta especie? (Remítase al ejemplo 4.4.6.)

40. EDAD ÓPTIMA PARA LA REPRODUCCIÓN Suponga que un cambio ambiental afecta al organismo del problema 39 de tal forma que un individuo sólo tiene la mitad de la probabilidad anterior de sobrevivir a la edad de x años. Si el número de nacimientos de hembras $f(x)$ permanece constante, ¿cómo se afecta la edad ideal para la reproducción por este cambio?

41. RESPUESTA A UN ESTÍMULO De acuerdo con la **ley de Hoorweg**, cuando un nervio se estimula mediante descargas de un condensador eléctrico de capacitancia C, la energía eléctrica requerida para provocar una respuesta mínima (una contracción muscular) está dada por

$$E(C) = C\left(aR + \frac{b}{C}\right)^2$$

donde a, b y R son constantes positivas.

a) ¿Para qué valor de C se minimiza la energía $E(C)$? ¿Cómo sabe si ha encontrado el valor mínimo? (Su respuesta estará en términos de a, b y R.)

b) Otro modelo para E tiene la forma

$$E(C) = mCe^{k/C}$$

donde m y k son constantes. ¿Qué valores deberán tener m y k para que los dos modelos tengan el mismo valor mínimo de C?

42. ADMINISTRACIÓN DE UNA PESCADERÍA El gerente de una pescadería determina que t semanas después de incubar 3 000 peces de una especie particular, el peso promedio de un pez será $w(t) = 0.8te^{-0.05t}$ libras, para $0 \le t \le 20$. Además, la proporción de peces que aún estarán vivos después de t semanas se estima que será

$$p(t) = \frac{10}{10 + t}$$

a) La producción esperada $E(t)$ de la cosecha después de t semanas es el peso total de los peces que aún están vivos. Exprese $E(t)$ en términos de $w(t)$ y $p(t)$.

b) ¿Para qué valor de t es mayor la producción esperada $E(t)$? ¿Cuál es la producción máxima esperada?

c) Trace la curva de producción $y = E(t)$ para $0 \le t \le 20$.

43. ADMINISTRACIÓN DE UNA PESCADERÍA El gerente de una pescadería determina que t días después de liberar 1 000 peces de una especie particular en un estanque, el peso promedio de un pez será $w(t)$ libras y la proporción de peces aún vivos después de t días será $p(t)$, donde

$$w(t) = \frac{10}{1 + 15e^{-0.05t}} \quad \text{y} \quad p(t) = e^{-0.01t}$$

a) La producción esperada $E(t)$ de la cosecha después de t días es el peso total de los peces que aún están vivos. Exprese $E(t)$ en términos de $w(t)$ y $p(t)$.

b) ¿Para qué valor de t es mayor la producción esperada $E(t)$? ¿Cuál es la producción máxima esperada?

c) Trace la curva de la producción $y = E(t)$.

44. OPTIMIZACIÓN DEL TIEMPO DE ESPERA Suponga que usted posee una colección de timbres postales que actualmente vale $1 200 y cuyo valor crece linealmente a una razón de $200 por año. Si la tasa de interés prevaleciente permanece constante a 8% anual capitalizada continuamente, ¿cuándo será más ventajoso para usted vender la colección e invertir el producto de la venta?

45. PROPAGACIÓN DE UN RUMOR Un accidente de tráfico fue presenciado por 10% de los residentes de un pueblo pequeño, y 25% de los residentes habían escuchado acerca del accidente 2 horas más tarde. Suponga que el número $N(t)$ de residentes que habían escuchado acerca del accidente t horas después que ocurrió está dado por una función de la forma

$$N(t) = \frac{B}{1 + Ce^{-kt}}$$

donde B es la población del pueblo y C y k son constantes.

a) Utilice esta información para encontrar C y k.

b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que la mitad de los residentes del pueblo sepan sobre el accidente?

c) ¿Cuándo se propaga más rápidamente la noticia acerca del accidente? [*Sugerencia:* remítase al ejemplo 4.4.5 *b*).]

46. EFECTO DE UNA TOXINA Un investigador médico determina que t horas después de introducir

www.FreeLibros.com

una toxina en una colonia de bacterias, la población será

$$P(t) = 10\,000(7 + 15e^{-0.05t} + te^{-0.05t})$$

a) ¿Cuál es la población en el momento en que se introduce la toxina?

b) ¿Cuándo es máxima la población de bacterias?

c) Eventualmente ¿qué le sucede a la población de bacterias cuando $t \to +\infty$?

47. ORGANIZACIÓN CORPORATIVA Una **curva de Gompertz** es la gráfica de una función de forma general

$$N(t) = CA^{B^t}$$

donde A, B y C son constantes. Tales curvas las utilizan los psicólogos y otros profesionales para describir fenómenos como aprendizaje y crecimiento dentro de una organización.[7]

a) Suponga que el director de personal de una corporación grande conduce un estudio que indica que después de t años, la corporación tendrá

$$N(t) = 500(0.03)^{(0.4)^t}$$

empleados. ¿Cuántos empleados había originalmente (en el momento $t = 0$)? ¿Cuántos habrá después de 5 años? ¿Cuándo habrá 300 empleados? ¿Cuántos empleados habrá "a largo plazo"?

b) Trace la gráfica de $N(t)$. Luego, en la misma gráfica trace la gráfica de la función de Gompertz

$$F(t) = 500(0.03)^{-(0.4)^{-t}}$$

¿Cómo describiría la relación que hay entre las dos gráficas?

48. TEORÍA DEL APRENDIZAJE En un modelo de aprendizaje propuesto por C. L. Hull, la resistencia al hábito H de un individuo está relacionada con el número t de refuerzos mediante la ecuación

$$H(r) = M(1 - e^{-kr})$$

a) Trace la gráfica de $H(r)$. ¿Qué le pasa a $H(r)$ cuando $r \to +\infty$?

b) Demuestre que si el número de refuerzos se duplica de r a $2r$, la resistencia al hábito se multiplica por $1 + e^{-kr}$.

49. CONCENTRACIÓN DE UN MEDICAMENTO Una función de la forma $C(t) = Ate^{-kt}$, donde A y k son constantes positivas, se denomina **función de incremento** y algunas veces se emplea para modelar la concentración del medicamento en el torrente sanguíneo de un paciente t horas después de que se administra el medicamento. Suponga $t \geq 0$.

a) Encuentre $C'(t)$ y determine el intervalo de tiempo donde la concentración del medicamento crece y dónde disminuye. ¿Para qué valor de t se maximiza la concentración? (Sus respuestas estarán en términos de A y k.)

b) Encuentre $C''(t)$ y determine los intervalos de tiempo de diferente concavidad para la gráfica de $C(t)$. Encuentre todos los puntos de inflexión y explique qué le pasa a la razón de cambio de la concentración del medicamento en los momentos que corresponden a los puntos de inflexión.

c) Trace la gráfica de $C(t) = te^{-kt}$ para $k = 0.2$, $k = 0.5$, $k = 1.0$ y $k = 2.0$. Describa cómo cambia la forma de la gráfica cuando k crece.

50. CONCENTRACIÓN DE UN MEDICAMENTO Se supone que la concentración de cierto medicamento en el torrente sanguíneo de un paciente t horas después que éste se administra oralmente, está dada por la función de incremento $C(t) = Ate^{-kt}$, donde C está medida en microgramos de medicamento por mililitro de sangre. Dispositivos de monitoreo indican que una concentración máxima de 5 ocurre 20 minutos después que se administra el medicamento.

a) Use esta información para encontrar A y k.

b) ¿Cuál es la concentración del medicamento en la sangre del paciente después de 1 hora?

c) ¿En qué momento después de que ocurre la concentración máxima ésta será la mitad de la máxima?

d) Si usted duplica el tiempo en el inciso *c*), ¿será de un 1/4 de la máxima la concentración del medicamento resultante? Explique.

51. CRECIMIENTO BUROCRÁTICO La **ley de Parkinson**[8] establece que en cualquier departamento administrativo sin participación activa en la guerra, el personal crecerá aproximadamente 6% por año, sin importar la necesidad.

a) Parkinson aplicó esta ley al tamaño de la British Colonial Office. Él observó que el personal de la Colonial Office era de 1 139 miembros en 1947. ¿Cuántos miembros del personal predijo la ley para el año 1954? (El número real era 1 661.)

b) Con base en la ley de Parkinson, ¿cuánto tomará al personal duplicar su tamaño?

c) Lea acerca de la ley de Parkinson y escriba un párrafo acerca de si usted la considera real o no

[7] Un análisis de los modelos de las curvas de Gompertz y otros modelos de crecimiento diferencial pueden ser encontrados en un artículo de Roger V. Jean titulado "Differential Growth, Huxley's Allometric Formula, and Sigmoid Growth", *UMAP Modules 1983: Tools for Teaching*, Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., Lexington, MA, 1984.

[8] C. N. Parkinson, *Parkinson's Law*, Houghton-Mifflin, Boston, MA, 1957.

www.FreeLibros.com

en el mundo actual. Quizá desee iniciar su investigación con el libro citado en este problema.

52. OPTIMIZACIÓN DE TIEMPO DE ESPERA Sea $V(t)$ el valor de un bien dentro de t años y suponga que la tasa de interés anual prevaleciente permanece fija en r (expresada como decimal), capitalizada continuamente.

a) Demuestre que el valor presente del bien $P(t) = V(t)e^{-rt}$ tiene un número crítico donde $V'(t) = V(t)r$. (Empleando argumentos económicos, se puede demostrar que el número crítico corresponde a un máximo.)

b) Explique por qué el valor presente de $V(t)$ corresponde a un valor de t donde la tasa porcentual de cambio (expresada en forma decimal) es igual a r.

53. INVESTIGACIÓN DEL CÁNCER En el problema 60, ejercicio 2.3, se proporcionó una función para modelar la producción de glóbulos. Esos modelos son útiles en el estudio de leucemia y otras enfermedades denominadas **enfermedades dinámicas** en las cuales ciertos sistemas fisiológicos comienzan a comportarse erráticamente. Un modelo alternativo[9] para la producción de células de la sangre, desarrollado por A. Lasota, usa la función exponencial de producción

$$p(x) = Ax^s e^{-sx/r}$$

donde A, s y r son constantes positivas y x es el número presente de granulocitos (un tipo de glóbulos blancos).

a) Encuentre el nivel de células de la sangre, x, que maximiza la función de producción $p(x)$. ¿Cómo sabe si el nivel óptimo es un máximo?

b) Si $s > 1$, demuestre que la gráfica de $p(x)$ tiene dos puntos de inflexión. Trace la gráfica. Proporcione una interpretación física de los puntos de inflexión.

c) Trace la gráfica de $p(x)$ para el caso donde $0 \le s \le 1$. ¿Qué es diferente en este caso?

d) Lea un artículo sobre métodos matemáticos en el estudio de enfermedades dinámicas y escriba un párrafo sobre tales métodos. Un buen lugar para empezar es el artículo citado en este problema.

54. TASAS DE MORTALIDAD Un actuario mide la probabilidad que una persona en cierta población muera a la edad x por medio de la fórmula

$$P(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$$

donde λ es una constante tal que $0 < \lambda < e$.

a) Encuentre el valor máximo de $P(x)$ en términos de λ.

b) Trace la gráfica de $P(x)$.

c) Lea un artículo acerca de fórmulas actuariales de esta clase. Escriba un párrafo sobre qué se representa por el número λ.

55. PROPAGACIÓN DE UNA EPIDEMIA Una epidemia se propaga por toda una comunidad de manera que t semanas después de su brote, el número de residentes infectados está dado por una función de la forma $f(t) = \dfrac{A}{1 + Ce^{-kt}}$, donde A es el número total de residentes susceptibles. Demuestre que la epidemia se propaga más rápidamente cuando la mitad de los residentes susceptibles ha sido infectada.

56. Use la instrucción de graficación de su calculadora para trazar la gráfica de $f(x) = x(e^{-x} + e^{-2x})$. Utilice **ZOOM** y **TRACE** para encontrar el mayor valor de $f(x)$. ¿Qué le pasa a $f(x)$ cuando $x \to +\infty$?

57. INVESTIGACIÓN DE MERCADO Una compañía trata de utilizar la publicidad en televisión para presentar un producto nuevo a tantas personas como sea posible en un área metropolitana grande con 2 millones de posibles televidentes. Se ha determinado que un modelo para el número de gente N (en millones) enterada del producto después de t días es

$$N = 2(1 - e^{-0.037t})$$

Emplee una instrucción de graficación para trazar esta función. ¿Qué pasa cuando $t \to +\infty$? [*Sugerencia:* fije el intervalo en su pantalla a [0, 200]10 por [0, 3]1.]

58. OPTIMIZACIÓN DEL TIEMPO DE ESPERA Suponga que usted gana una parcela de tierra cuyo valor en el mercado dentro de t años se estima que será de $V(t) = 20\,000te^{\sqrt{0.4t}}$ dólares. Si la tasa de interés prevaleciente permanece constante a 7% capitalizada continuamente, ¿cuándo será más ventajoso vender la tierra? (Utilice una instrucción de graficación y **ZOOM** y **TRACE** para determinar la respuesta requerida).

59. CONCENTRACIÓN DE UN MEDICAMENTO En un artículo clásico,[10] E. Heinz determinó que la concentración $y(t)$ de un medicamento inyectado en el cuerpo de forma intramuscular está dada por

$$y(t) = \frac{c}{b - a}(e^{-at} - e^{-bt}) \quad t \ge 0$$

[9] W. B. Gearhart y M. Martelli, "A Blood Cell Population Model, Dynamical Diseases, and Chaos", *UMAP Modules 1990: Tools for Teaching*, Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., Arlington, MA, 1991.

[10] E. Heinz, "Probleme bei der Diffusión kleiner Substanzmengen innerhalb des menschlichen Körpers", *Biochem*, Vol. 319 (1949), pp. 482-492.

www.FreeLibros.com

donde t es el número de horas después de la inyección y a, b y c son constantes positivas, con $b > a$.

a) ¿Cuándo ocurre la concentración máxima? ¿Qué le sucede a la concentración "a largo plazo"?

b) Trace la gráfica de $y(t)$.

c) Escriba un párrafo sobre la confiabilidad del modelo de Heinz. En particular, ¿es más confiable cuando t es pequeño o grande? Quizá desee iniciar su investigación con el artículo citado en este problema.

60. DISEÑO ESTRUCTURAL Cuando se tiende una cadena, una línea telefónica, o un cable de TV entre postes, la curva que se forma recibe el nombre de **catenaria.** Una curva catenaria típica es

$$y = 0.125(e^{4x} + e^{-4x})$$

a) Trace esta curva catenaria.

b) Las curvas catenarias son importantes en arquitectura. Lea un artículo sobre el Gateway Arch to the West en St. Louis, Missouri, y escriba un párrafo sobre el uso de la forma catenaria en su diseño.[11]

61. CONTABILIDAD La fórmula del **saldo doblemente decreciente** en contabilidad es

$$V(t) = V_0\left(1 - \frac{2}{L}\right)^t$$

donde $V(t)$ es el valor, después de t años, de un artículo que originalmente costó V_0 dólares, y L es una constante denominada la "vida útil" del artículo.

a) Un refrigerador cuesta \$85 dólares y tiene una vida útil de 8 años. ¿Cuál es su valor después de 5 años? ¿Cuál es su tasa anual de depreciación?

b) En general, ¿cuál es la tasa porcentual de cambio de $V(t)$?

62. PROPAGACIÓN DE UNA ENFERMEDAD En el ensayo Reflexione acerca de..., al final del capítulo 3, se examinaron varios modelos asociados con la epidemia del SIDA. Utilizando un programa de análisis de datos, se obtiene la función

$$C(t) = 456 + 1\,234te^{-0.137t}$$

como un modelo para el número de casos de SIDA reportado t años después del año base de 1990.

a) De acuerdo con este modelo, ¿en que año se reportará el mayor número de casos? ¿Cuál será el máximo número de casos reportados?

b) ¿Cuándo será el número de casos reportados igual al número reportado en 1990?

[11] Un buen punto de partida es el artículo de William V. Thayer, "The St. Louis Arch Problem", *UMAP Modules 1983: Tools for Teaching*, Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., Lexington, MA, 1984.

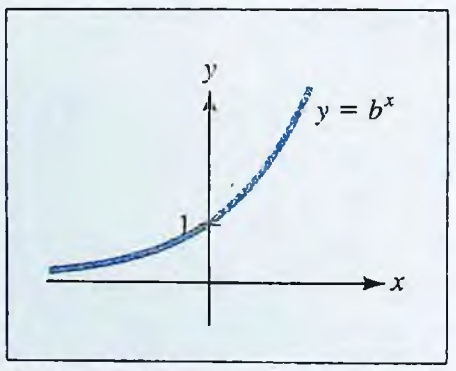
RESUMEN DEL CAPÍTULO

Términos importantes, símbolos y fórmulas

Función exponencial: (282)

$$f(x) = b^x \quad b > 0,\ b \neq 1$$

La gráfica de $y = b^x$ para $b > 1$: (284, 285)



Propiedades de las funciones exponenciales: (285)

$$b^x = b^y \quad \text{si y sólo si } x = y$$
$$b^x b^y = b^{x+y}$$
$$\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$$
$$(b^x)^y = b^{xy}$$
$$b^0 = 1$$

Base exponencial natural: (286)

$$e = \lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\ldots$$

Para el interés compuesto k veces por año, a una tasa anual r, durante t años:

El valor futuro de P dólares es $B = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$ (288)

El valor presente de B dólares es $P = B\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{-kt}$ (290)

Para el interés compuesto continuamente, a una tasa anual r, durante t años:

El valor futuro de P dólares es $B = Pe^{rt}$ (288)

El valor presente de B dólares es $P = Be^{-rt}$ (290)

Función logarítmica: (297)

$$y = \log_b x \quad \text{si y sólo si } b^y = x.$$

Propiedades de los logaritmos: (298)

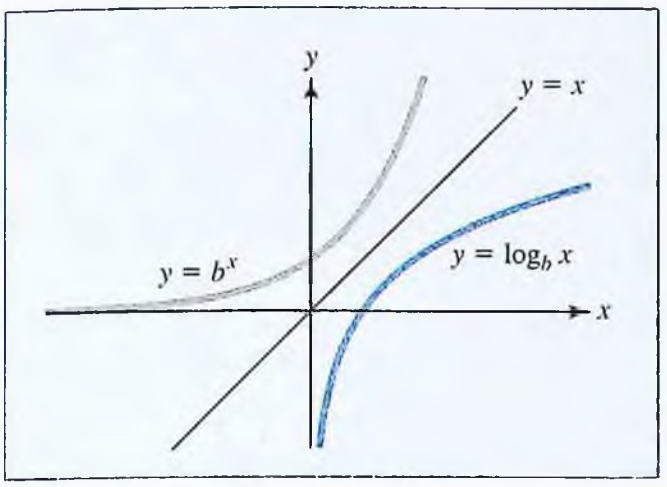
$$\log_b u = \log_b v \quad \text{si y sólo si } u = v$$
$$\log_b uv = \log_b u + \log_b v$$
$$\log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b u - \log_b v$$

www.FreeLibros.com

$\log_b u^r = r \log_b u$

$\log_b 1 = 0$ y $\log_b b = 1$

La gráfica de $y = \log_b x$ para $b > 1$: (300)



El logaritmo natural: (301)

$$y = \ln x \quad \text{si y sólo si } e^y = x$$

Relación inversa: (303)

$$e^{\ln x} = x \quad \text{para } x > 0$$

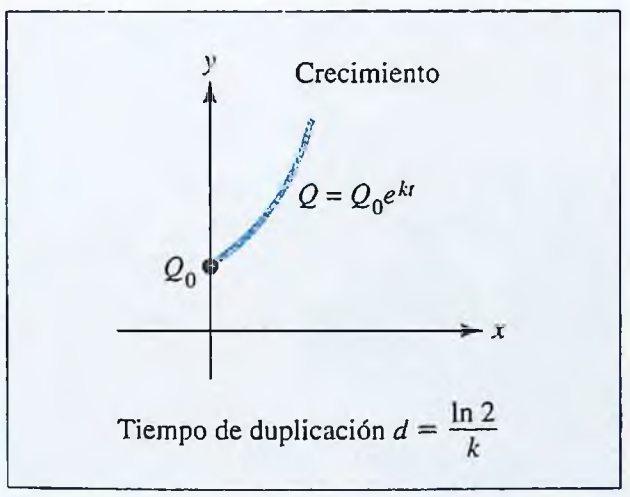
y

$$\ln e^x = x \quad \text{para toda } x$$

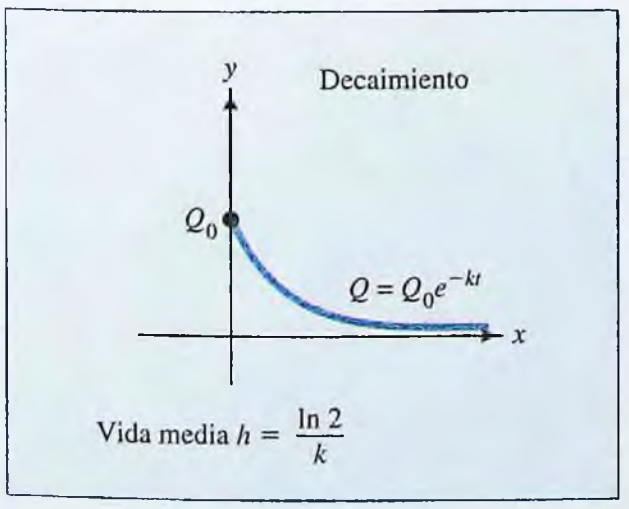
Fórmula de conversión para logaritmos: (304)

$$\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$$

Crecimiento exponencial: (291)



Decaimiento exponencial: (291)



Datación por carbono: (306)

Derivada de la función exponencial: (315, 316)

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}[e^{u(x)}] = e^{u(x)}\frac{du}{dx}$$

Derivada de la función logarítmica: (312, 313)

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}[\ln u(x)] = \frac{1}{u(x)}\frac{du}{dx}$$

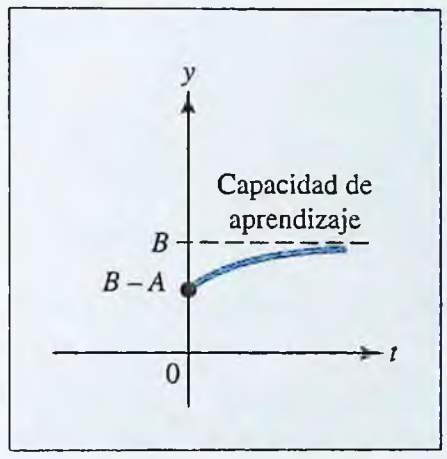
Derivación logarítmica: (319)

Tasa relativa de cambio de $Q(x)$: (321)

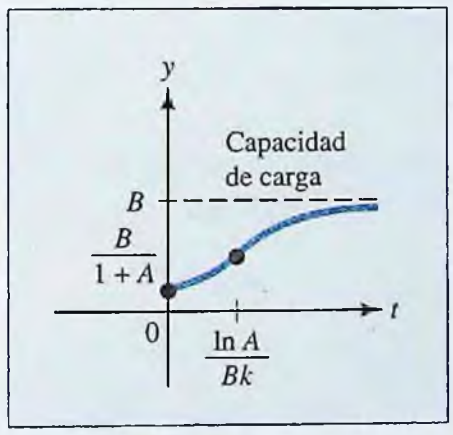
$$\frac{Q'(x)}{Q(x)} = \frac{d}{dx}(\ln Q)$$

Optimización del tiempo de espera: (329)

Curva de aprendizaje $y = B - Ae^{-kt}$ (329)



Curva logística $y = \dfrac{B}{1 + Ae^{-Bkt}}$ (330)



RESUMEN DEL CAPÍTULO

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Revisión del capítulo 4

1. Evalué cada una de estas expresiones:

a) $\dfrac{(3^{-2})(9^2)}{(27)^{2/3}}$

b) $\sqrt[3]{(25)^{1.5}\left(\dfrac{8}{27}\right)}$

c) $\log_2 4 + \log_4 16^{-1}$

d) $\left(\dfrac{8}{27}\right)^{-2/3}\left(\dfrac{16}{81}\right)^{3/2}$

2. Simplifique cada una de estas expresiones:

a) $(9x^4y^2)^{3/2}$

b) $(3x^2y^{4/3})^{-1/2}$

c) $\left(\dfrac{y}{x}\right)^{3/2}\left(\dfrac{x^{2/3}}{y^{1/6}}\right)^2$

d) $\left(\dfrac{x^{0.2}y^{-1.2}}{x^{1.5}y^{0.4}}\right)^5$

3. En cada caso, encuentre la derivada $\dfrac{dy}{dx}$. (En algunos casos, puede ser útil usar derivación logarítmica.)

a) $y = \dfrac{e^x}{x^2 - 3x}$

b) $y = \ln(x^3 + 2x^2 - 3x)$

c) $y = x^3 \ln x$

d) $y = \dfrac{e^{-2x}(2x - 1)^3}{1 - x^2}$

4. En cada caso, determine dónde la función dada crece o decrece, y dónde su gráfica es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. Trace la gráfica mostrando tantas características como sea posible (cimas y valles, puntos de inflexión, asíntotas, intersecciones, picos, tangentes verticales).

a) $y = x^2e^{-x}$

b) $y = \dfrac{\ln\sqrt{x}}{x^2}$

c) $y = \ln(\sqrt{x} - x)^2$

d) $y = \dfrac{4}{1 + e^{-x}}$

5. Encuentre todos los números reales x que satisfacen cada una de estas ecuaciones.

a) $4^{2x-x^2} = \dfrac{1}{64}$

b) $e^{1/x} = 4$

c) $\log_4 x^2 = 2$

d) $\dfrac{25}{1 + 2e^{-0.5t}} = 3$

6. Si usted invierte \$2 000 al 5% capitalizado continuamente, ¿cuánto valdrá su cuenta en 3 años? ¿Cuánto tiempo transcurre para que su cuenta sea \$3 000?

7. ANÁLISIS DE PRECIO Se introduce un producto y t meses después, su precio unitario es $p(t)$ cientos de dólares, donde

$$p = \frac{\ln(t + 1)}{t + 1} + 5$$

a) ¿Para qué valores de t crece el precio? ¿Cuándo disminuye?

b) ¿Cuándo decrece más rápidamente el precio?

c) ¿Qué le pasa al precio a largo plazo (cuando $t \to +\infty$)?

8. MAXIMIZANDO EL INGRESO Se ha determinado que se pueden vender q unidades de un bien cuando el precio es p cientos de dólares por unidad, donde $t \to +\infty$)?

$$q(p) = 1\,000(p + 2)e^{-p}$$

a) Verifique que la función de demanda $q(p)$ disminuye cuando p aumenta, para $p \geq 0$.

b) ¿A qué precio p se maximiza el ingreso $R = pq$? ¿Cuál es el ingreso máximo?

9. DATACIÓN POR CARBONO Se determina que un artículo arqueológico tiene 45% de su ^{14}C original. ¿Qué edad tiene el artículo? (Use 5 730 años como la vida media de ^{14}C.)

10. CRECIMIENTO DE BACTERIAS Se introduce una toxina en una colonia de bacterias, y t horas después, la población está dada por

$$N(t) = 10\,000(8 + t)e^{-0.1t}$$

a) ¿Cuál era la población cuando se introdujo la toxina?

b) ¿Cuándo se maximiza la población? ¿Cuál es la población máxima?

c) ¿Qué le pasa a la población a largo plazo (cuando $t \to +\infty$)?

www.FreeLibros.com

Problemas de repaso

En los problemas 1 a 4 trace la gráfica de la función exponencial o logarítmica dada sin usar el cálculo.

1. $f(x) = 5^x$

2. $f(x) = -2e^{-x}$

3. $f(x) = \ln x^2$

4. $f(x) = \log_3 x$

5. *a)* Encuentre $f(4)$ si $f(x) = Ae^{-kx}$ y $f(0) = 10$, $f(1) = 25$.

b) Determine $f(3)$ si $f(x) = Ae^{kx}$ y $f(1) = 3$, $f(2) = 10$.

c) Encuentre $f(9)$ si $f(x) = 30 + Ae^{-kx}$ y $f(0) = 50, f(3) = 40$.

d) Encuentre $f(10)$ si $f(t) = \dfrac{6}{1 + Ae^{-kt}}$ y $f(0) = 3$, $f(5) = 2$.

6. Evalúe las expresiones siguientes sin utilizar tablas ni calculadora.

a) $\ln e^5$

b) $e^{\ln 2}$

c) $e^{3 \ln 4 - \ln 2}$

d) $\ln 9e^2 + \ln 3e^{-2}$

En los problemas 7 a 13 encuentre todos los números reales x *que satisfacen la ecuación dada.*

7. $8 = 2e^{0.04x}$

8. $5 = 1 + 4e^{-6x}$

9. $4 \ln x = 8$

10. $5^x = e^3$

11. $\log_9 (4x - 1) = 2$

12. $\ln (x - 2) + 3 = \ln (x + 1)$

13. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ [*Sugerencia:* Sea $u = e^x$.]

En los problemas 14 a 29 determine la derivada $\dfrac{dy}{dx}$. *En algunos de estos problemas, puede ser útil usar la derivación implícita o la derivación logarítmica.*

14. $y = 2e^{3x+5}$

15. $y = x^2 e^{-x}$

16. $y = \ln \sqrt{x^2 + 4x + 1}$

17. $y = x \ln x^2$

18. $y = \dfrac{x}{\ln 2x}$

19. $y = \log_3 (x^2)$

20. $y = \dfrac{e^{3x}}{e^{3x} + 2}$

21. $y = \dfrac{e^{-x} + e^x}{1 + e^{-2x}}$

22. $y = (1 + e^{-x})^{4/5}$

23. $y = \ln (e^{-2x} + e^{-x})$

24. $y = \ln\left(\dfrac{e^{3x}}{1 + x}\right)$

25. $y = \dfrac{e^{-x}}{x + \ln x}$

26. $xe^{-y} + ye^{-x} = 3$

27. $ye^{x - x^2} = x + y$

28. $y = \dfrac{e^{-2x}(2 - x^3)^{3/2}}{\sqrt{1 + x^2}}$

29. $y = \dfrac{(x^2 + e^{2x})^3 e^{-2x}}{(1 + x - x^2)^{2/3}}$

En los problemas 30 a 37 determine dónde crece o disminuye la función dada, y dónde su gráfica es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo. Trace la gráfica, mostrando tantas características clave como sea posible (cimas y valles, puntos de inflexión, asíntotas, intersecciones, picos, tangentes verticales).

30. $f(x) = xe^{-2x}$

31. $f(x) = e^x - e^{-x}$

32. $f(x) = \dfrac{4}{1 + e^{-x}}$

33. $f(t) = t + e^{-t}$

34. $g(t) = \dfrac{\ln (t + 1)}{t + 1}$

35. $F(u) = u^2 + 2 \ln (u + 2)$

36. $f(u) = e^{2u} + e^{-u}$

37. $G(x) = \ln (e^{-2x} + e^{-x})$

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

En los problemas 38 a 41 encuentre los valores máximo y mínimo de la función dada en el intervalo cerrado, y acotado que se indica.

38. $f(x) = \dfrac{e^{-x/2}}{x^2}$ para $-5 \le x \le -1$

39. $f(x) = \ln(4x - x^2)$ para $1 \le x \le 3$

40. $g(t) = \dfrac{\ln(\sqrt{t})}{t^2}$ para $1 \le t \le 2$

41. $h(t) = (e^{-t} + e^{t})^5$ para $-1 \le t \le 1$

En los problemas 42 a 45 encuentre una ecuación para la recta tangente a la curva dada en el punto indicado.

42. $y = (x^2 - x)e^{-x}$ donde $x = 0$

43. $y = x \ln x^2$ donde $x = 1$

44. $y = (x + \ln x)^3$ donde $x = 1$

45. $y = x^3 e^{2-x}$ donde $x = 2$

46. CRECIMIENTO EXPONENCIAL El valor de cierta máquina industrial decrece exponencialmente. Si originalmente la máquina valía \$50 000 y a los 5 años \$20 000, ¿cuánto valdrá cuando tenga 10 años?

47. VENTAS POR PUBLICIDAD Se estima que si se gastan x miles de dólares en publicidad, se venderán aproximadamente $Q(x) = 50 - 40e^{-0.1x}$ miles de dólares de cierto bien.

a) Trace la curva de las ventas para $x \ge 0$.

b) ¿Cuántas unidades se venderán si no se gasta dinero en publicidad?

c) ¿Cuántas unidades se venderán si se gastan \$8 000 en publicidad?

d) ¿Cuánto se deberá gastar en publicidad para generar ventas de 35 000 unidades?

e) De acuerdo con este modelo, ¿cuál es la proyección de ventas más optimista?

48. PRODUCCIÓN DE UN TRABAJADOR Un empleador determina que la producción diaria de un obrero en el trabajo, durante t semanas, es $Q(t) = 120 - Ae^{-kt}$ unidades. Inicialmente, el obrero puede producir 30 unidades por día, y después de 8 semanas, puede producir 80 unidades por día. ¿Cuántas unidades puede producir el obrero por día después de 4 días?

49. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN Se ha estimado que dentro de t años la población de cierto país será P millones de habitantes, donde

$$P(t) = \frac{30}{1 + 2e^{-0.05t}}$$

a) Trace la gráfica de $P(t)$.

b) ¿Cuál es la población actual?

c) ¿Cuál será la población en 20 años?

d) ¿Qué le pasa a la población "a largo plazo"?

50. INTERÉS COMPUESTO ¿En qué tiempo \$2 000 crecerán hasta \$5 000 cuando se invierten a una tasa anual de 8%, si el interés se capitaliza:

a) Trimestralmente

b) Continuamente?

51. TASA DE INTERÉS EFECTIVA ¿Cuál inversión tiene la mayor tasa de interés efectiva: 8.25% anual capitalizado trimestralmente o bien 8.20% anual capitalizado continuamente? (Remítase al problema 54, sección 4.1.)

52. INTERÉS COMPUESTO ¿Cuánto se deberá invertir ahora, a una tasa de interés anual de 6.25%, de manera que su saldo dentro de 10 años sea \$2 000, si el interés se capitaliza:

a) Mensualmente

b) Continuamente?

53. VALOR PRESENTE Encuentre el valor presente de \$8 000 pagaderos dentro 10 años si la tasa de interés anual es 6.25% y el interés se capitaliza:

a) Semestralmente

b) Continuamente

54. INTERÉS COMPUESTO Un banco capitaliza continuamente el interés. ¿Qué tasa de interés (nominal) ofrece si \$1 000 crecen a \$2 054.44 en 12 años?

55. INTERÉS COMPUESTO Cierto banco ofrece una tasa de interés de 6% anual capitalizado anualmente. Un banco de la competencia capitaliza ese interés continuamente. ¿Qué tasa de interés (nominal) deberá ofrecer el banco de la competencia para que sean iguales las tasas efectivas de interés de los dos bancos?

56. CRECIMIENTO BACTERIAL El número de bacterias en cierto cultivo crece exponencialmente. Si inicialmente había 5 000 bacterias y 10 minutos

www.FreeLibros.com

después había 8 000, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que se duplique el número de bacterias?

57. **CONTAMINACIÓN DEL AIRE** Un estudio ambiental de cierta comunidad suburbana sugiere que dentro de t años el nivel promedio de monóxido de carbono en el aire será $Q(t) = 4e^{0.03t}$ partes por millón.

a) ¿A qué tasa cambiará el nivel de monóxido de carbono con respecto al tiempo dentro de 2 años?

b) ¿A qué tasa porcentual cambiará el nivel de monóxido de carbono con respecto al tiempo dentro de t años? ¿Depende esta tasa porcentual de cambio de t o es una constante?

58. **INGRESO** Un fabricante puede producir cámaras a un costo de \$40 por pieza y estima que si se venden a p dólares por unidad, los consumidores comprarán aproximadamente $D(p) = 800e^{-0.01p}$ cámaras por semana. ¿A qué precio deberá vender el fabricante las cámaras para maximizar el ingreso?

59. **OPTIMIZACIÓN DEL TIEMPO DE ESPERA** Suponga que posee un bien cuyo valor dentro de t años será $V(t) = 2\,000e^{\sqrt{2t}}$ dólares. Si la tasa de interés prevaleciente permanece constante a 5% anual capitalizado continuamente, ¿cuándo será más ventajoso vender la colección e invertir el producto de la venta?

60. **REGLA DE 70** Con frecuencia los inversionistas están interesados en saber cuánto tiempo transcurre para que se duplique una inversión particular. Una forma simple para hacer esta determinación es la "regla de 70" que indica: el tiempo de duplicación de una inversión con una tasa de interés anual t (expresada como decimal) capitalizado continuamente está dado por $d = \dfrac{70}{r}$.

a) Para la tasa de interés t, utilice la fórmula $B = Pe^{rt}$ para encontrar el tiempo de duplicación para $r = 4, 6, 9, 10$ y 12. En cada caso, compare el valor con el valor obtenido a partir de la regla de 70.

b) Algunas personas prefieren una "regla de 72" y otras emplean una "regla de 69." Pruebe estas alternativas como en el inciso *a*) y escriba un párrafo sobre cuál regla preferiría utilizar.

61. **DECAIMIENTO RADIACTIVO** Una sustancia radiactiva decae exponencialmente con una vida media λ. Suponga que la cantidad de sustancia inicialmente presente (cuando $t = 0$) es Q_0.

a) Demuestre que la cantidad de la sustancia presente después de t años será

$$Q(t) = Q_0 e^{-(\ln 2/\lambda)t}.$$

b) Encuentre un número k de manera que la cantidad en el inciso *a*) se pueda expresar como

$$Q(t) = Q_0(0.5)^{kt}.$$

62. **DEMOGRAFÍA ANIMAL** Un naturalista ha determinado que en una reserva animal la función

$$f(x) = \frac{4e^{-(\ln x)^2}}{\sqrt{\pi}\, x}$$

proporciona una buena medida del número de animales en la reserva que tienen x años. Trace la gráfica de $f(x)$ para $x > 0$ y encuentre la edad más "probable" entre los animales (es decir, la edad para la cual $f(x)$ es mayor).

63. **DATACIÓN POR CARBONO** "Ötzi, el Hombre de Hielo" es el nombre dado a un cadáver neolítico congelado encontrado en un glaciar alpino en 1991. Originalmente se pensó que era de la Era de Bronce por el hacha que portaba. Sin embargo, se demostró que el hacha estaba hecha de cobre y no de bronce. Lea un artículo sobre la Edad de Bronce y determine la menor edad del Hombre de hielo suponiendo que es anterior a la Edad de Bronce. ¿Cuál es el *mayor* porcentaje de ^{14}C que puede permanecer en una muestra tomada de su cuerpo?

64. **LEY DE FICK** La ley de Fick[12] establece que $f(t) = C(1 - e^{-kt})$, donde $f(t)$ es la concentración de soluto dentro de una célula en el momento t, C (constante) es la concentración del soluto que rodea a la célula, y k es una constante positiva. Suponga que para una célula particular, la concentración en el interior de la célula después de 2 horas es 0.8% de la concentración en el exterior de la célula.

a) ¿Qué representa k?

b) ¿Cuál es la razón de cambio porcentual de $f(t)$ en el tiempo t?

c) Escriba un párrafo sobre el papel que tuvo la ley de Fick en la ecología.

[12] La ley de Fick juega un importante papel en ecología. Por ejemplo, véase M. D. LaGrega, P. L. Buckingham y J. C. Evans, *Hazardous Waste Management*, McGraw-Hill, Inc., Nueva Cork, 1994, pp. 95, 464, y especialmente p. 813, donde los autores analizan el transporte de los contaminantes hasta los rellenos sanitarios.

www.FreeLibros.com

65. ENFRIAMIENTO Una niña cae en un lago donde la temperatura del agua es $-3°C$. Su temperatura corporal después de t minutos en el agua es $T(t) = 35e^{-0.32t}$. Ella perderá la conciencia cuando su temperatura corporal llegue a 27°C. ¿Cuánto tiempo tienen los socorristas para salvarla? ¿Qué tan rápido desciende su temperatura corporal cuando llega a 27°C?

66. CIENCIA FORENSE La temperatura T del cadáver de una víctima de homicidio encontrado en un cuarto donde la temperatura del aire es de 20°C está dada por

$$T(t) = 20 + 17e^{-0.07t} \quad °C$$

donde t es el número de horas después de la muerte de la víctima.

a) Grafique la temperatura corporal $T(t)$ para $t \geq 0$. ¿Qué es la asíntota horizontal de esta gráfica y qué representa?

b) ¿Cuál es la temperatura corporal de la victima después de 10 horas? ¿Cuánto tiempo transcurre para que la temperatura corporal llegue a 25°C?

c) Abel Baker es un empleado en la firma de Dewey, Cheatum, y Howe. Él llega temprano al trabajo una mañana y encuentra el cadáver de su jefe, Will Cheatum, que yace en su escritorio. Abel llama a la policía, y a las 8:00 a.m. determinan que la temperatura del cadáver es de 33°C. Como la última anotación hecha en la agenda de la víctima fue: "Despidan a ese idiota de Baker", Abel es considerado el principal sospechoso. En realidad, Abel es lo suficientemente inteligente para haber leído este libro mientras esperaba. Él mira rápidamente al termostato para confirmar que la temperatura del cuarto es 20°C. ¿Para qué tiempo necesitará una coartada a fin de establecer su inocencia?

67. CONCENTRACIÓN DE UN MEDICAMENTO Suponga que t horas después de haber administrado oralmente un antibiótico, su concentración en el torrente sanguíneo del paciente está dada por una función de la forma $C(t) = Ate^{-kt}$, donde A y k son constantes positivas y C se mide en microgramos por mililitro de sangre. Las muestras de sangre se toman periódicamente, y se ha determinado que la concentración máxima del medicamento se alcanza 2 horas después de administrada la droga y es de 10 microgramos por mililitro.

a) Use esta información para determinar A y k.

b) Una nueva dosis será administrada cuando la concentración llegue a 1 microgramo por mililitro. ¿Cuándo ocurre esto?

68. TASA DE REACCIÓN QUÍMICA El efecto de la temperatura en la velocidad de una reacción química está dada por la **ecuación de Arrhenius**

$$k = Ae^{-E_0/RT}$$

donde k es la tasa constante, T (en grados Kelvin) es la temperatura y R es la constante del gas. Las cantidades A y E_0 se determinan una vez que se especifica la reacción. Sean k_1 y k_2 las constantes de la velocidad de reacción asociadas a las temperaturas T_1 y T_2. Encuentre una expresión para $\ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right)$ en términos de E_0, R, T_1 y T_2.

69. REDUCCIÓN DE OZONO Se sabe que los fluorocarbonos tienen el efecto de reducir el ozono en la atmósfera superior. Suponga que se ha determinado que la cantidad de ozono Q en la atmósfera se reduce en 0.15% por año, de manera que después de t años, la cantidad original de ozono Q_0 que está presente es

$$Q = Q_0e^{-0.0015t}$$

a) ¿A qué tasa porcentual disminuye el nivel de ozono en el tiempo t?

b) ¿Cuántos años tomará para que se reduzca 10% del ozono? ¿A qué tasa porcentual disminuye el nivel de ozono en este momento?

70. PROPAGACIÓN DE UNA EPIDEMIA Los registros de salud pública indican que después de t semanas el brote de cierta forma de influenza, aproximadamente

$$Q(t) = \frac{80}{4 + 76e^{-1.2t}}$$

miles de personas han contraído la enfermedad. ¿A qué tasa se estaba propagando la enfermedad al final de la segunda semana? ¿En qué momento se propaga más rápidamente la enfermedad?

71. ACIDEZ (pH) DE UNA SOLUCIÓN En química, la acidez de una solución se mide según el valor de su pH, que está definido como $\text{pH} = -\log_{10}[H_3O^+]$, donde $[H_3O^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno, (moles/litro), de la solución. En promedio, la leche tiene un valor de pH que es tres veces el valor del pH de una lima, la cual a su vez tiene la mitad del valor pH de una naranja. Si el pH promedio de una naranja es 3.2, ¿cuál es la concentración promedio de iones de hidrógeno de una lima?

www.FreeLibros.com

72. DATACIÓN POR CARBONO Una pintura del hombre de Cro-Magnon en la cueva de Lascaux, Francia, tiene cerca de 15 000 años. Aproximadamente ¿qué razón de ^{14}C entre ^{12}C esperaría encontrar en un fósil hallado en la misma cueva donde se encontró la pintura?

73. TASAS DE MORTALIDAD Algunas veces es útil para los actuarios proyectar las tasas de mortalidad dentro de una población dada. Una fórmula empleada para calcular la tasa de mortalidad $D(t)$ para mujeres, en el grupo de edad entre 25 y 29 años, es

$$D(t) = (D_0 - 0.00046)e^{-0.162t} + 0.00046$$

donde t es el número de años después de un año base fijo y D_0 es la tasa de mortalidad cuando $t = 0$.

a) Suponga que la tasa de mortalidad inicial de cierto grupo es 0.008 (8 muertes por cada 1 000 mujeres). ¿Cuál es la tasa de mortalidad de este grupo 10 años después? ¿Cuál es la tasa 25 años después?

b) Trace la gráfica de la función de mortalidad $D(t)$ para el grupo en el inciso *a*) para $0 \le t \le 25$.

74. PRODUCTO INTERNO BRUTO El producto interno bruto (PIB) de cierto país fue de 100 mil millones de dólares en 1990 y 165 mil millones de dólares en 2000. Suponiendo que el PIB crece exponencialmente, ¿cuál será el PIB en 2010?

75. ARQUEOLOGÍA Se ha determinado que "Lucy," el famoso prehumano cuyo esqueleto fue descubierto en África, debe tener aproximadamente 3.8 millones de años.

a) Aproximadamente ¿qué porcentaje de ^{14}C original esperaría encontrar si tratara de aplicar la datación por carbono a Lucy? ¿Por qué sería un problema tratar de "datar" a Lucy?

b) En la práctica, la datación por carbono funciona bien sólo para muestras relativamente "recientes"; aquellas que no tienen más de aproximadamente 50 000 años. Para muestras más antiguas, como Lucy, se han desarrollado variaciones sobre la datación por carbono, tales como datación por potasio-argón y rubidio-estroncio. Lea un artículo sobre métodos de datación alternativos y escriba un párrafo sobre cómo se utilizan.[13]

[13] Un buen punto de partida para su investigación es el artículo de Paul J. Campbell, "How Old Is the Earth?", *UMAP Modules 1992: Tools for Teaching*, Consortium for Mathematics and Its Applications, Arlington, MA, 1993.

76. RADIOLOGÍA El isótopo radiactivo galio-67 (^{67}Ga), utilizado en el diagnóstico de tumores malignos, tiene una vida media de 46.5 horas. Si se comienza con 100 miligramos del isótopo, ¿cuántos miligramos quedarán después de 24 horas? ¿Cuándo quedarán sólo 25 miligramos? Responda estas preguntas utilizando primero una instrucción de graficación para trazar una función exponencial apropiada, y luego utilizando las características **TRACE** y **ZOOM** de su calculadora.

77. Un modelo demográfico desarrollado por la Oficina del Censo de EU emplea la fórmula

$$P(t) = \frac{202.31}{1 + e^{3.938 - 0.314t}}$$

para estimar la población de Estados Unidos (en millones) para cada décimo año a partir del año base 1790. Por ejemplo, $t = 0$ corresponde a 1790, $t = 1$ a 1800, $t = 10$ a 1890, y así sucesivamente. Las cifras excluyen a Alaska y Hawai.

a) Utilice esta fórmula para calcular la población de Estados Unidos para los años, 1790, 1800, 1830, 1860, 1880, 1900, 1920, 1940, 1960, 1980 y 2000.

b) Trace la gráfica de $P(t)$. ¿Cuándo predice este modelo que la población de los Estados Unidos crecerá más rápidamente?

c) Utilice un almanaque o alguna otra fuente para encontrar las cifras actuales de la población para los años listados en el inciso *a*). ¿Parece preciso el modelo de población dado? Escriba un párrafo describiendo algunas razones posibles para las diferencias importantes entre las cifras pronosticadas de la población y las cifras reales del censo.

78. Emplee una instrucción de graficación para trazar $y = 2^{-x}$ y $y = 3^{-x}$, $y = 5^{-x}$, y $y = (0.5)^{-x}$ en el mismo sistema de coordenadas. ¿Cómo se afecta la gráfica por un cambio en la base de la función exponencial? (*Sugerencia:* utilice la pantalla de graficación $[-3, 3]1$ por $[-3, 3]1$.)

79. Use una instrucción de graficación para dibujar las gráficas de $y = \sqrt{3^x}$, $y = \sqrt{3^{-x}}$, y $y = 3^{-x}$ en el mismo sistema de coordenadas. ¿Cómo difieren estas gráficas? (*Sugerencia:* emplee la pantalla de graficación $[-3, 3]1$ por $[-3, 3]1$.)

80. Utilice una instrucción de graficación para dibujar las gráficas de $y = 3^x$ y $y = 4 - \ln \sqrt{x}$ en el mismo sistema de coordenadas. Luego use **TRACE** y **ZOOM** para encontrar todos los puntos de intersección de las dos gráficas.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

www.FreeLibros.com

81. Resuelva esta ecuación con una precisión de tres lugares decimales:

$$\log_5 (x + 5) - \log_2 x = 2 \log_{10} (x^2 + 2x)$$

82. Emplee una instrucción de graficación para dibujar las gráficas de

$$y = \ln (1 + x^2) \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{x}$$

en el mismo sistema de coordenadas. ¿Se interceptan estas gráficas?

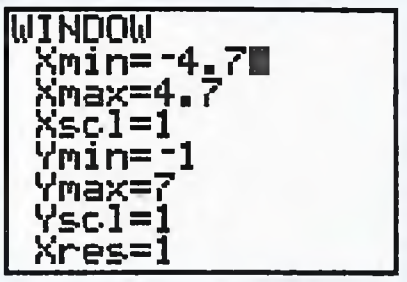
83. Construya una tabla para las cantidades $(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$ y $(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$, con $n = 8, 9, 12, 20, 25, 31, 37, 38, 43, 50, 100$ y $1\,000$. ¿Cuál de las dos cantidades parece mayor? ¿Piensa que esta desigualdad se cumple para todos los números $n \geq 8$?

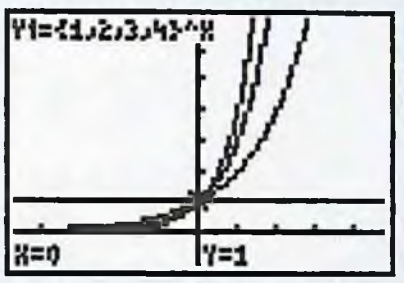
www.FreeLibros.com

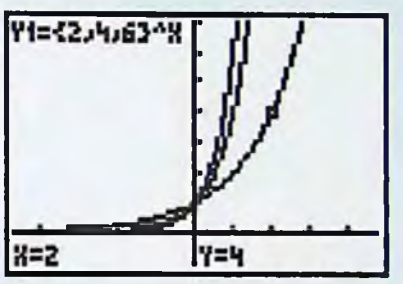
Se puede tener acceso a las soluciones completas para todos los ejercicios ¡EXPLORE! de todo el libro en el sitio web del libro www.mhhe.com/hoffmann.

Solución al ejercicio ¡EXPLORE! de la página 284

Un método para desplegar todas las gráficas deseadas es listar sus bases en forma de función. Primero, escriba Y1 = {1, 2, 3, 4}^X en el editor de ecuaciones de su calculadora graficadora. Observe que para $b > 1$, las funciones crecen exponencialmente, con crecimiento más rápido para bases grandes. También todas las curvas pasan por el punto (0, 1). ¿Por qué? Ahora pruebe Y1 = {2, 4, 6}^X. Note que $y = 4^x$ está entre $y = 2^x$ y $y = 6^x$. De la misma manera la gráfica de $y = e^x$ debe estar entre $y = 2^x$ y $y = 3^x$.

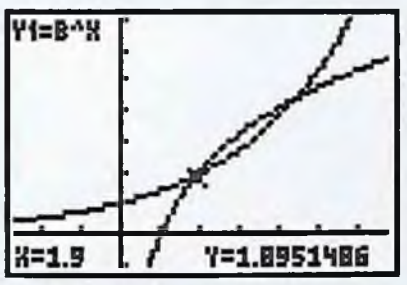


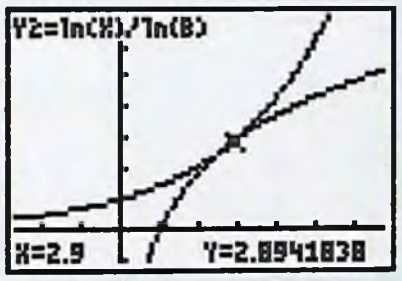


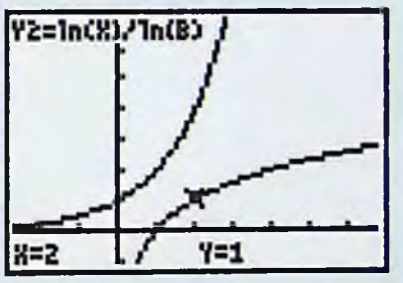


Solución al ejercicio ¡Explore! de la página 304

Introduzca $f(x) = B^x$ en Y1 y $g(x) = \log_B$ en Y2 como ln (x)/ln (B). Experimentando con valores diferentes de B, encontramos: para $B < e^{1/e} = 1.444668$, las dos curvas se interceptan en dos lugares (¿dónde, en términos de B? Para $B = e^{1/e}$ se tocan sólo en un lugar, y para $B > e^{1/e}$, no hay intersección. (Vea Classroom Capsules, "An Overlooked Calculus Question," *The Collage Mathematical Journal*, vol. 33, Núm. 5, Noviembre 2002.)



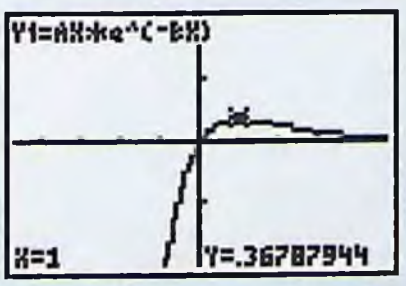


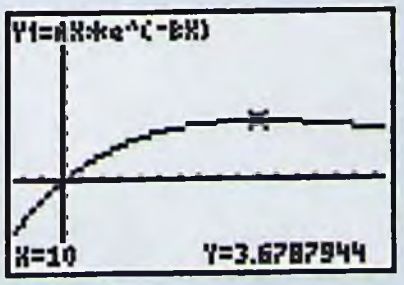


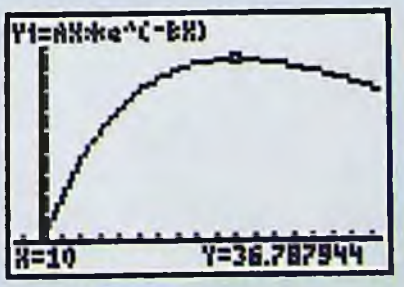
Solución al ejercicio ¡Explore! de la página 319

Siguiendo el ejemplo 4.3.11, introduzca la función $f(x) = Axe^{-Bx}$ en Y1 del editor de ecuaciones. Se intenta encontrar el máximo de $f(x)$ en términos de A y B. Se puede fijar $A = 1$ y variar el valor de B (digamos, 1, 0.5 y 0.01). Luego se puede fijar B en 0.1 y dejar que varíe A (digamos, 1, 10, 100).

Por ejemplo, cuando $A = 1$ y $B = 1$, el valor máximo de y se alcanza en $x = 1$ (vea la figura de la izquierda). Cuando $A = 1$ y $B = 0.1$, se alcanza en $x = 10$ (figura de en medio).





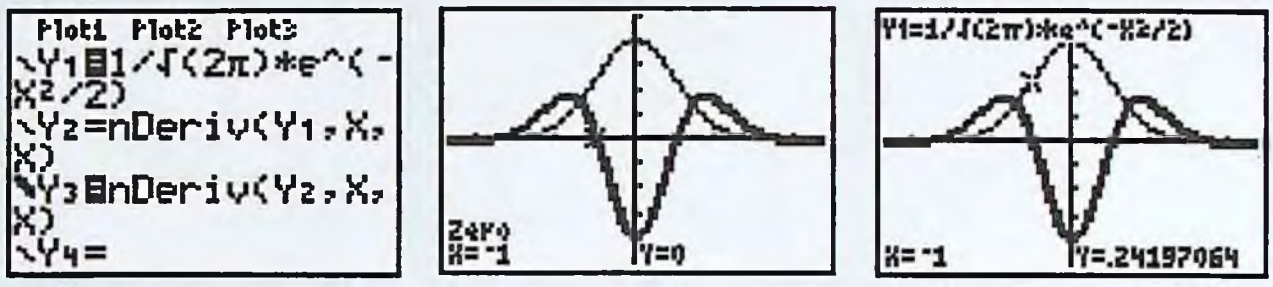


www.FreeLibros.com

Cuando $A = 10$ y $B = 0.1$, este máximo permanece en $x = 10$ (figura de la derecha). En este caso, la coordenada y del máximo crece por el factor A. En general, se puede demostrar que el valor x del punto máximo es justamente $1/B$. El factor A no cambia la ubicación del valor x del máximo, pero sí afecta el valor y como un multiplicador. Para confirmar esto analíticamente, fije la derivada de $y = Axe^{-Bx}$ igual a cero y despeje para la ubicación del punto máximo.

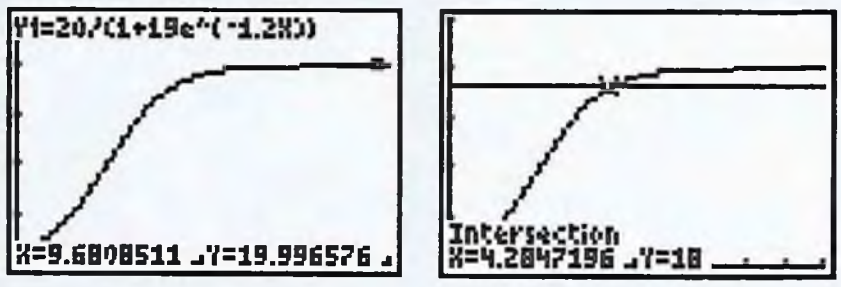
Solución al ejercicio ¡Explore! de la página 327

Siguiendo el ejemplo 4.4.2, introduzca $f(x)$ en Y1 y $f'(x)$ en Y2 (pero no la seleccione), y $f''(x)$ en Y3 en negritas, usando la ventana $[-4.7, 4.7]1$ por $[-0.5, 0.5]1$. Utilizando la instrucción **TRACE** o la de hallar raíces de la calculadora, puede determinar que las dos intersecciones de $f''(x)$ con el eje x se localizan en $x = -1$ y $x = 1$. Como la segunda derivada $f''(x)$ representa la función de la concavidad de $f(x)$, sabemos que en estos valores $f(x)$ cambia la concavidad. En el punto de inflexión $(-1, 0.242)$, $f(x)$ cambia la concavidad de positiva (cóncava hacia arriba) a negativa (cóncava hacia abajo). En $x = 1$, $y = 0.242$, la concavidad cambia de hacia abajo a hacia arriba.



Solución al ejercicio ¡Explore! de la página 332

Siguiendo el ejemplo 4.4.5, introduzca $Q(t) = 20/(1 + 19e^{-1.2t})$ en Y1 y grafique utilizando la pantalla $[0, 10]1$ por $[0, 25]5$. Podemos trazar la función para valores grandes de la variable independiente tiempo. Cuando x se aproxima a 10 (semanas), la función toma un valor cercano a 20 000 personas infectadas ($Y > 19.996$ miles). Fijando $Y2 = 18\,000$ (90% de la población) y, utilizando la instrucción de hallar la intersección de la calculadora, se puede determinar que 90% de la población se habrá infectado después de $x = 4.28$ semanas (aproximadamente 30 días).



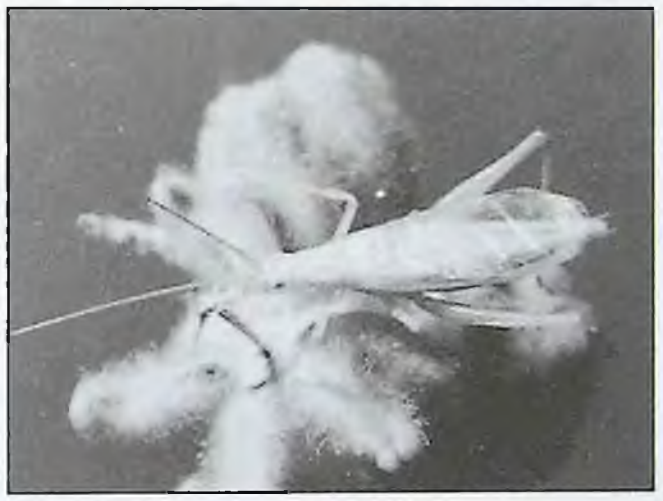
www.FreeLibros.com

REFLEXIONE ACERCA DE...



MODELADO CON LA LEY DE ARRHENIUS[14]

Es una tarde cálida de verano, pero ¿qué tan cálida? ¿Puede determinar la temperatura exterior sin un termómetro? La gente ha empleado desde hace mucho tiempo la tasa a la cual los grillos chirrían para estimar la temperatura. La clase de grillo importa puesto que a nivel mundial hay aproximadamente 1 000 especies distintas de grillos, todos con un comportamiento diferente de chirridos. El grillo del árbol nevado (*oecanthus fultoni*) es una buena especie para estimar la temperatura; y es común en los Estados Unidos y gran parte de Canadá, excepto en Florida, Montana, Hawai y Alaska. Además, sus chirridos son suficientemente lentos para contarlos, los individuos chirrían sincrónicamente, y chirrían a un ritmo que no depende en gran medida de factores que no sean la temperatura. Se puede escuchar al chirrido de este grillo a temperaturas distintas por medio de nuestro sitio específico en la red www.mhhe.com/hoffmann.



Hay varias reglas básicas para estimar la temperatura contando los chirridos de este grillo. Una de las reglas más precisas indica que el número de chirridos en 13 segundos más 40 es una buena estimación de T_F, la temperatura en grados Fahrenheit. Para expresar esta regla como una fórmula, note que si c es el número de chirridos en un minuto, entonces $\frac{13c}{60}$ es el número de chirridos en un intervalo de 13 segundos, por tanto se puede estimar la temperatura T_F utilizando la ecuación

$$T_F = \left(\frac{13}{60}\right)c + 40$$

Invirtiendo las cosas, podemos expresar el número de chirridos por minuto como una función de la temperatura despejando esta ecuación para c en términos de T_F para obtener

$$c = \left(\frac{60}{13}\right)(T_F - 40)$$

[14] Parte de este ensayo es una adaptación de un capítulo del sitio web de General Chemistry, del Dartmouth College, disponible en http://www.dartmouth.edu/~genchem/0102/spring/6winn/cricket.html.

www.FreeLibros.com

REFLEXIONE ACERCA DE...

La figura 4.17 muestra la recta junto con un número de puntos de datos (T_F, c), donde en cada caso, c es el número de chirridos por minuto cuando la temperatura es T_F.

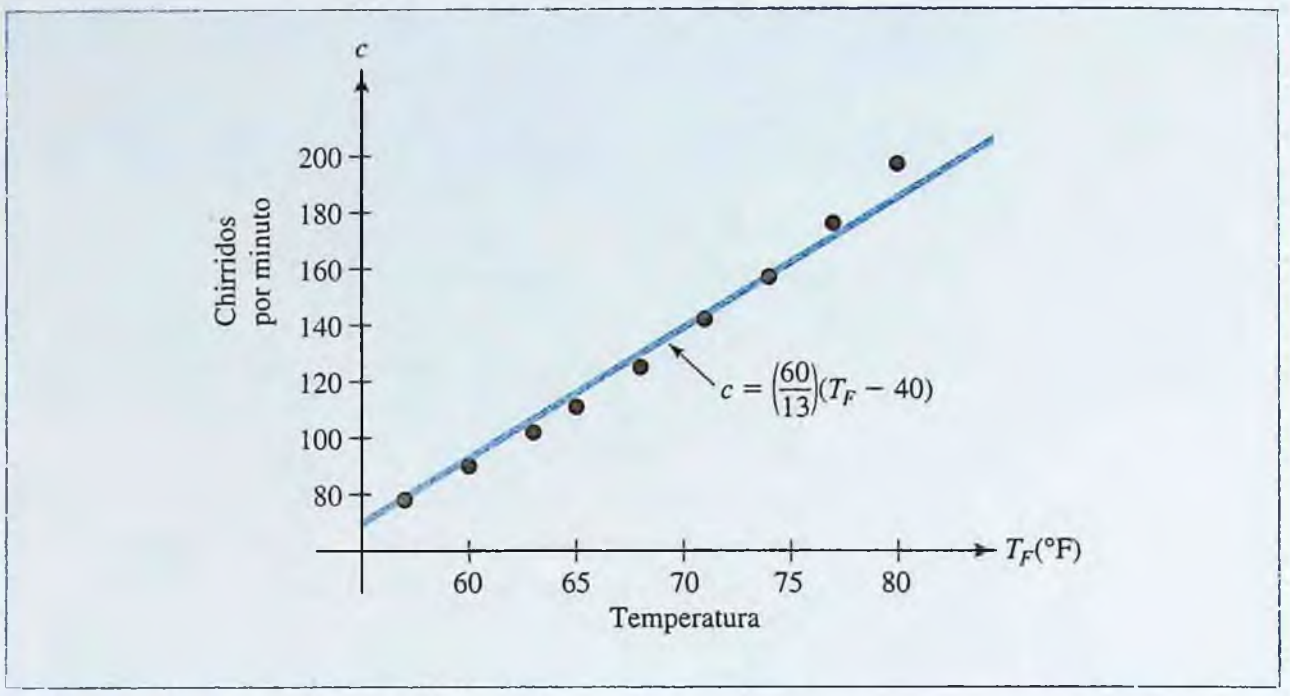


FIGURA 4.17 El número de chirridos por minuto de un grillo, c, es aproximadamente una función lineal de la temperatura

Aunque en la figura 4.17 se indica que la ecuación lineal $c = \left(\frac{60}{13}\right)(T_F - 40)$ ajusta muy bien los datos observados, parece que el número de chirridos se aleja de la línea a temperaturas más elevadas. ¿Podemos encontrar una curva que ajuste los datos aún mejor que la recta? Un posible método para lograr un mejor ajuste es desarrollar un modelo basado en las velocidades de reacción química. Esto es razonable puesto que las velocidades de reacción química crecen con la temperatura, como crecen los procesos que se basan en reacciones químicas, incluyendo muchos fenómenos biológicos, como el chirrido de los grillos. Emplearemos un resultado denominado **ley de Arrhenius**, que establece que la velocidad k de una reacción química está dada por la función

$$k = Ae^{-E_a/RT}$$

donde A es una constante denominada *factor de frecuencia*, E_a es la *energía de activación*, R es la *constante universal de los gases* y T es la *temperatura* en grados Kelvin, que se relaciona con la temperatura en grados Fahrenheit según la fórmula

$$T = \frac{1}{9}(5T_F + 2\ 297)$$

Si consideramos el número de chirridos por minuto del grillo, c, como la velocidad de una reacción química, la función particular que mejor ajusta los datos que se muestran en la figura 4.17 es

$$c = 25.98 \cdot 10^{10} e^{-6{,}290/T}$$

la cual se puede encontrar utilizando las técnicas de regresión (mínimos cuadrados) que se estudian más adelante en el libro, en la sección 7.4. Cuando se dibuja esta curva en una gráfica con los datos de la figura 4.17, obtenemos la gráfica que se muestra en la figura 4.18, la cual sugiere que el modelo basado en la ley de Arrhenius ajusta mejor los datos observadas que el modelo lineal, especialmente para temperaturas más elevadas.

www.FreeLibros.com

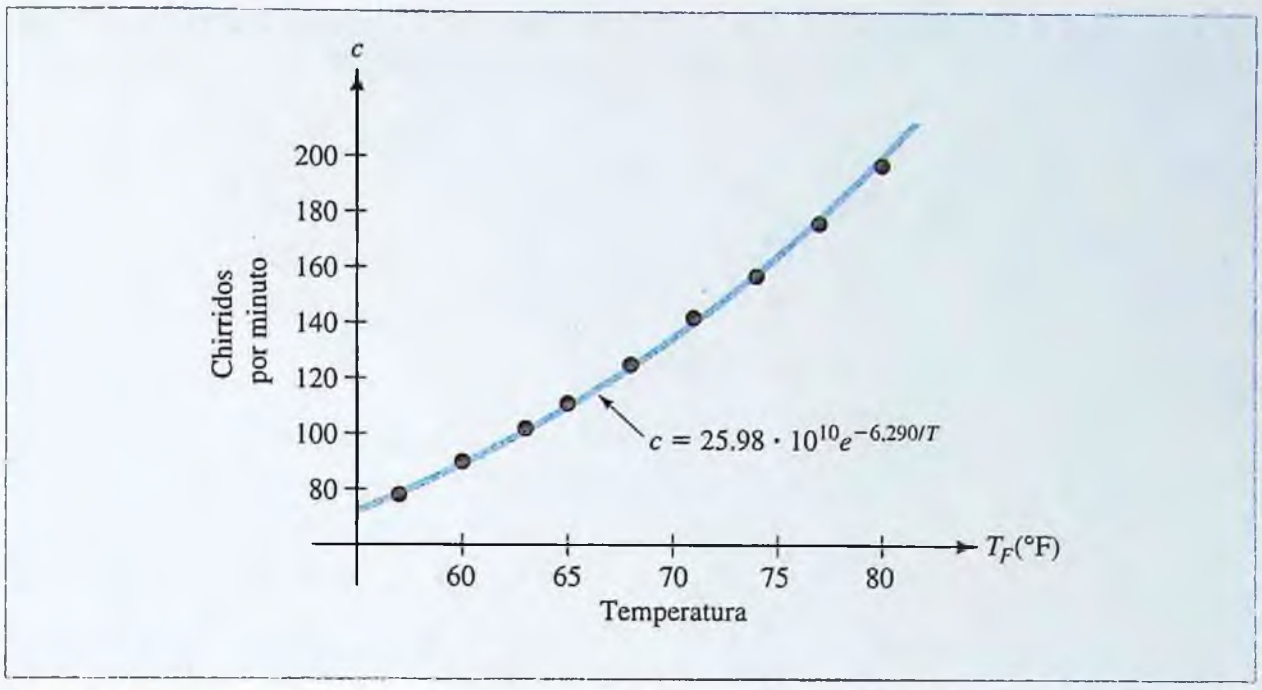


FIGURA 4.18 Los datos de los chirridos del grillo se aproximan mejor mediante una curva exponencial.

Aunque el chirrido de un grillo es más complicado que una reacción química sencilla, hemos visto que el modelo exponencial basado en la ley de Arrhenius proporciona una estimación más precisa de la velocidad del chirrido del grillo como una función de la temperatura, que un modelo lineal. Es posible encontrar modelos que son aún más precisos, pero probablemente tendrían que ser más complicados.

Además del chirrido de un grillo, los fenómenos biológicos que se han modelado exitosamente utilizando la ley de Arrhenius incluyen la velocidad a la cual las hormigas trepan, las velocidades a las cuales destellan las luciérnagas, la velocidad del pulso de las tortugas acuáticas, las frecuencias alfa de ondas cerebrales, y la razón a la cual las personas olvidan información. Un análisis de esas aplicaciones se encuentra en el artículo *Unconventional Applications of the Arrhenius Law*, por Keith J. Laidler. Journal of Chemical Education, Volumen 49, Número 5, mayo 1972, páginas 343-344.

Preguntas

1. Encuentre la temperatura correspondiente a un grillo de árbol nevado chirriando a razón de 100 chirridos por minuto.
   a) Empleando el modelo lineal.
   b) Usando el modelo basado en la ley de Arrhenius.

2. Determine la velocidad de los chirridos de un grillo de árbol nevado cuando la temperatura que se predice es de 75 grados Fahrenheit.
   a) Mediante el modelo lineal.
   b) Por medio del modelo basado en la ley de Arrhenius.

3. Demuestre que el logaritmo de la velocidad de reacción k en la ley de Arrhenius es una función lineal del recíproco de la temperatura T. ¿Cuál es la pendiente de esta recta?

www.FreeLibros.com

REFLEXIONE ACERCA DE...

4. Encuentre la tasa a la cual el número de chirridos de un grillo de árbol nevado cambia cuando la temperatura es de 80 grados Fahrenheit:

   a) Utilizando el modelo lineal.

   b) Empleando el modelo basado en la ley de Arrhenius.

5. Se ha demostrado que la velocidad s a la cual trepan ciertas hormigas, en centímetros por segundo, se puede aproximar por la ecuación

$$s = Ae^{-E_a/RT}$$

   basada en la ley de Arrhenius, con $A = 1.37 \cdot 10^6$ (medida en centímetros por segundo), $E_a = 10.1$ (medida en kilocalorías por mol), y $R = 0.008314$ (medida en kilojoules por mol por grado Kelvin).

   a) ¿Cuál es la velocidad de una hormiga trepando que predice este modelo, cuando la temperatura es de 60 grados Fahrenheit? (Recuerde convertir la temperatura de grados Fahrenheit a grados Kelvin.)

   b) ¿Cuál es la temperatura predicha en grados Fahrenheit por este modelo cuando las hormigas trepan a 10 cm/s?

6. Encuentre la tasa a la que cambia la velocidad de las hormigas cuando la temperatura es de 70 grados Fahrenheit, utilizando el modelo basado en la ley de Arrhenius, determinado en la pregunta 5.

www.FreeLibros.com

CAPÍTULO 5



El cálculo del área bajo la curva, como sucede con el área que cubre el andamiaje bajo la pista de una montaña rusa, es una aplicación de la integración.

INTEGRACIÓN

1 Antiderivación: la integral indefinida
2 Integración por sustitución
3 La integral definida y el teorema fundamental del cálculo
4 Aplicación de la integración definida: área entre curvas y valor promedio
5 Aplicaciones adicionales de negocios y economía
6 Aplicaciones adicionales de las ciencias sociales y de la vida
Resumen del capítulo
Términos, símbolos y fórmulas importantes
Revisión del capítulo 5
Problemas de repaso
¡Explore! Actualización
Reflexione acerca de...

www.FreeLibros.com

SECCIÓN 5.1 | Antiderivación: la integral indefinida

¿Cómo se puede emplear una tasa de inflación conocida para determinar precios futuros? ¿Cuál es la velocidad de un objeto en movimiento rectilíneo con aceleración conocida? ¿Cómo se puede usar la tasa a la cual cambia la población para predecir niveles futuros de población? En todas estas situaciones se conoce la derivada (tasa de cambio) de una magnitud, y se quiere conocer esa magnitud. A continuación se presenta la terminología que se usará en el proceso de obtención de una función a partir de su derivada.

Antiderivación ■ Se dice que una función $F(x)$ es una *antiderivada* de $f(x)$ si

$$F'(x) = f(x)$$

para cada x en el dominio de $f(x)$. El proceso de determinar las antiderivadas recibe el nombre de *antiderivación* o *integración indefinida*.

NOTA Algunas veces se escribe la ecuación

$$F'(x) = f(x)$$

como

$$\frac{dF}{dx} = f(x). \quad \blacksquare$$

Más adelante se estudiarán las técnicas que se pueden usar para determinar antiderivadas. Una vez que se encuentra la supuesta antiderivada de una función, se puede verificar la respuesta derivando esa antiderivada. Se deberá obtener la función original. El siguiente es un ejemplo.

EJEMPLO | 5.1.1

Verifique que $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 5x + 2$ es una antiderivada de $f(x) = x^2 + 5$.

Solución

$F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ si y sólo si $F'(x) = f(x)$. Derivando F se llega a que

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{3}(3x^2) + 5 \\ &= x^2 + 5 = f(x) \end{aligned}$$

como era necesario.

La antiderivada general de una función

Una función tiene más de una antiderivada. Por ejemplo, una antiderivada de la función $f(x) = 3x^2$ es $F(x) = x^3$, puesto que

$$F'(x) = 3x^2 = f(x)$$

pero también lo son $x^3 + 12$ y $x^3 - 5$ y $x^3 + \pi$, puesto que

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 12) = 3x^2, \qquad \frac{d}{dx}(x^3 - 5) = 3x^2, \qquad \frac{d}{dx}(x^3 + \pi) = 3x^2$$

www.FreeLibros.com

En general, si F es una antiderivada de f, entonces también lo es cualquier función de la forma $G(x) = F(x) + C$, para C constante, ya que

$$\begin{aligned} G'(x) &= [F(x) + C]' \\ &= F'(x) + C' && \textit{regla de la derivada de la sumas} \\ &= F'(x) + 0 && \textit{porque la derivada de una constante es } 0 \\ &= f(x) && \textit{ya que } F \textit{ es una antiderivada de } f \end{aligned}$$

Y a la inversa, se puede demostrar que si F y G son antiderivadas de f, entonces $G(x) = F(x) + C$, para alguna constante C (problema 62). Resumiendo

Propiedad fundamental de las antiderivadas ■ Si $F(x)$ es una antiderivada de la función continua $f(x)$, entonces cualquier otra antiderivada $f(x)$ tiene la forma $G(x) = F(x) + C$ para alguna constante C.

REPASO

Justo-a-tiempo

Recuerde que dos líneas son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales.

Existe una interpretación geométrica simple para la propiedad fundamental de las antiderivadas. Si F y G son antiderivadas de f, entonces

$$G'(x) = F'(x) = f(x)$$

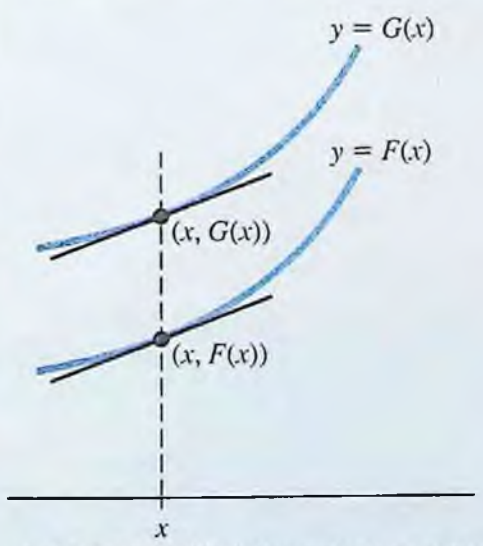
Esto significa que la pendiente $F'(x)$ de la recta tangente a $y = F(x)$ en el punto $(x, F(x))$ es la misma que la pendiente $G'(x)$ de la recta tangente a $y = G(x)$ en $(x, G(x))$. Dado que las pendientes son iguales, se deduce que las rectas tangentes en $(x, F(x))$ y $(x, G(x))$ son paralelas, como se muestra en la figura 5.1*a*). Puesto que esto es válido para toda x, la curva completa $y = G(x)$ debe ser paralela a la curva $y = F(x)$, de manera que

$$y = G(x) = F(x) + C$$

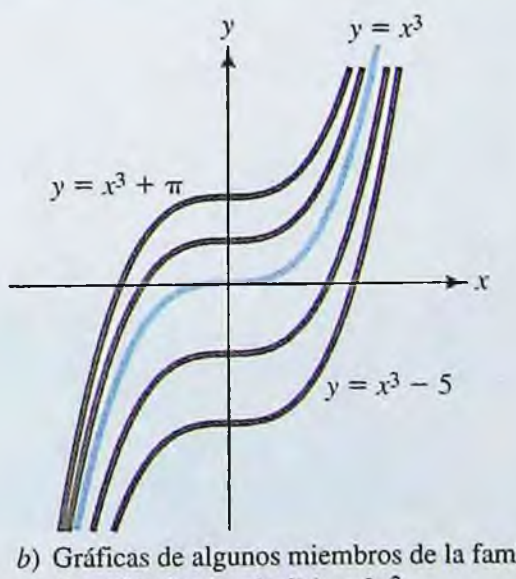
En general, el conjunto de gráficas de todas las antiderivadas de una función dada f, es una familia de curvas paralelas que son traslaciones verticales una de otra. Esto se ilustra en la figura 5.1*b* para la familia de antiderivadas de $f(x) = 3x^2$.

¡EXPLORE!

Introduzca la función $F(x) = x^3$ en Y1 del editor de ecuaciones, en un estilo de graficación en negritas. Genere una familia de transformaciones verticales Y2 = Y1 + L1, donde L1 es una lista de constantes {−4, −2, 2, 4}. Utilice la pantalla [−4.7, 4.7]1 por[−6, 6]1. ¿Qué se puede observar acerca de las pendientes de todas estas curvas para $x = 1$?



a) Si $F'(x) = G'(x)$, las rectas tangentes en $(x, F(x))$ y $(x, G(x))$ son paralelas.



b) Gráficas de algunos miembros de la familia de antiderivadas de $f(x) = 3x^2$

FIGURA 5.1 Las gráficas de las antiderivadas de una función f forman una familia de curvas paralelas.

www.FreeLibros.com

La integral indefinida

Se acaba de ver que si $F(x)$ es una antiderivada de la función continua $f(x)$, entonces todas las antiderivadas pueden ser escritas como $F(x) + C$, donde C es una constante. La familia de todas las antiderivadas de $f(x)$ se representa como

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

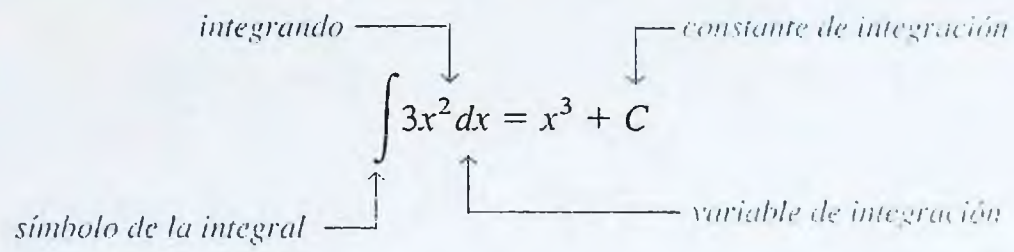
y se denomina **integral indefinida** de $f(x)$. La integral es "indefinida" porque contiene una constante C que puede tomar cualquier valor. En la sección 5.3 se introduce la **integral definida**, la cual tiene un valor numérico específico y es usada para representar muchas magnitudes, como por ejemplo, el área. En la sección 5.3 se muestra la relación entre la integral definida y la integral indefinida, a través de un importante resultado conocido como el **teorema fundamental del cálculo**.

REPASO

Justo-a-tiempo

Recuerde que se analizaron las derivadas en la sección 2.5.

En el contexto de la integral indefinida $\int f(x)dx = F(x) + C$, $\int$ es el **símbolo de la integral**, la función $f(x)$ se denomina **integrando**, C es la **constante de integración**, y dx es una diferencial que indica que x es la **variable de integración**. Esta notación se muestra en el siguiente diagrama para la integral indefinida de $f(x) = 3x^2$:



Para cualquier función derivable F, se tiene

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C$$

¡EXPLORE!

La mayoría de las calculadoras graficadoras permiten la construcción de una antiderivada por medio de su integral numérica **fnInt**(expresión, variable, límite inferior, límite superior), que se encuentra en el menú **MATH**. Escriba en el editor de ecuaciones de su calculadora

Y1 = **fnInt(2X, X, {0, 1, 2}, X)**

y grafique, empleando la pantalla ampliada, [−4.7, 4.7]1 por [−5, 5]1. ¿Qué observa y cuál es la forma general de esta familia de antiderivadas?

ya que, por definición, $F(x)$ es una antiderivada de $F'(x)$. De la misma forma

$$\int \frac{dF}{dx}\,dx = F(x) + C$$

Esta propiedad de las integrales indefinidas es útil en especial en problemas prácticos donde se proporciona una razón de cambio $F'(x)$ y se desea determinar $F(x)$. Posteriormente, en los ejemplos 5.1.4 al 5.1.8, se analizarán problemas de este tipo.

Es útil recordar que si se ha realizado el cálculo de una integral indefinida que conduce al resultado $\int f(x)\,dx = G(x) + C$, entonces se puede verificar el cálculo mediante la derivación de $G(x)$:

Si $G'(x) = f(x)$, entonces la integración $\int f(x)dx = G(x) + C$ es correcta, *pero si $G'(x)$* es distinta a $f(x)$, *se ha cometido un error.*

Esta relación entre derivación y antiderivación permite establecer estas reglas de integración "invirtiendo" las reglas de derivación análogas.

www.FreeLibros.com

Reglas para integrar funciones elementales

Regla de la constante: $\int k\,dx = kx + C$ para k constante

Regla de la potencia: $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ para todo $n \neq -1$

Regla logarítmica: $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ para todo $x \neq 0$

Regla exponencial: $\int e^{kx}\,dx = \dfrac{1}{k}e^{kx} + C$ para la constante $k \neq 0$

Para comprobar la regla de la potencia, es suficiente demostrar que la derivada de $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ es x^n:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}[(n+1)x^n] = x^n$$

Para la regla logarítmica, si $x > 0$, entonces $|x| = x$ y

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Si $x < 0$, entonces $-x > 0$ y $\ln|x| = \ln(-x)$, y de la regla de la cadena se deduce que

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{d}{dx}[\ln(-x)] = \frac{1}{(-x)}(-1) = \frac{1}{x}$$

Entonces, para todo $x \neq 0$,

$$\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x}$$

por tanto

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

En el problema 64 se pide comprobar la regla de la constante y la regla exponencial.

¡EXPLORE!

Grafique $y = F(x)$, donde $F(x) = \ln|x| = \ln(\text{abs}(x))$ en negritas, y $f(x) = 1/x$ en el estilo de graficación regular, empleando una pantalla de graficación decimal. En cualquier punto $x \neq 0$, demuestre que la derivada de $F(x)$ es igual al valor de $f(x)$ en ese punto particular, y confirme así que $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$.

NOTA Observe que la regla del logaritmo "llena el vacío" que queda en la regla de la potencia; es decir, el caso donde $n = -1$. Las dos reglas se pueden combinar de la siguiente forma:

$$\int x^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C & \text{si } n \neq -1 \\ \ln|x| + C & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

EJEMPLO 5.1.2

Determine estas integrales:

a) $\int 3\,dx$ **b)** $\int x^{17}\,dx$ **c)** $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ **d)** $\int e^{-3x}\,dx$

www.FreeLibros.com

Solución

a) Usando la regla de la constante con $k = 3$: $\int 3\,dx = 3x + C$

b) Usando la regla de la potencia con $n = 17$: $\int x^{17}\,dx = \frac{1}{18}x^{18} + C$

c) Usando la regla de la potencia con $n = -\frac{1}{2}$: como $n + 1 = \frac{1}{2}$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-1/2}\,dx = \frac{1}{1/2}x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$$

d) Aplicando la regla exponencial con $k = -3$:

$$\int e^{-3x}\,dx = \frac{1}{-3}e^{-3x} + C$$

En el ejemplo 5.1.2 se ilustra cómo pueden ser integradas ciertas funciones básicas, pero ¿qué hacer con las combinaciones de funciones, como el polinomio $x^5 + 2x^3 + 7$, o una expresión como $5e^{-x} + \sqrt{x}$? A continuación se presentan las reglas algebraicas que permiten manipular estas expresiones de un modo natural.

Reglas algebraicas para la integración indefinida

Regla del factor constante: $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ para k constante

Regla de la suma: $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

Regla de la diferencia: $\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

Para demostrar la regla del factor constante, note que si $\frac{dF}{dx} = f(x)$, entonces

$$\frac{d}{dx}[kF(x)] = k\frac{dF}{dx} = kf(x)$$

lo que significa que

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

Las reglas de la suma y de la diferencia se demuestran de forma similar.

EJEMPLO | 5.1.3

Determine las siguientes integrales:

a) $\int (2x^5 + 8x^3 - 3x^2 + 5)\,dx$

www.FreeLibros.com

b) $\int \left(\dfrac{x^3 + 2x - 7}{x} \right) dx$

c) $\int (3e^{-5t} + \sqrt{t})\, dt$

Solución

a) Usando la regla de la potencia junto con las reglas de la suma, de la diferencia y del factor constante, se obtiene

$$\int (2x^5 + 8x^3 - 3x^2 + 5)\, dx = 2\int x^5\, dx + 8\int x^3\, dx - 3\int x^2\, dx + \int 5\, dx$$

$$= 2\left(\frac{x^6}{6}\right) + 8\left(\frac{x^4}{4}\right) - 3\left(\frac{x^3}{3}\right) + 5x + C$$

$$= \frac{1}{3}x^6 + 2x^4 - x^3 + 5x + C$$

¡EXPLORE!

Refiérase al ejemplo 5.1.4. Introduzca la función $f(x) = 3x^2 + 1$ en Y1, utilizando un estilo de graficación en negritas y la ventana [0, 2.35]0.5 por [−2, 12]1, y coloque en Y2 a la familia de antiderivadas

$$F(x) = x^3 + x + \text{L1}$$

donde L1 es la lista de valores enteros de −5 a 5. ¿Cuál de estas antiderivadas pasa por el punto (2, 6)? Repita este ejercicio para $f(x) = 3x^2 - 2$.

b) En la integración no existe "regla del cociente," pero, al menos en este caso, se puede dividir el denominador entre el numerador y luego integrar empleando el método del inciso *a*):

$$\int \left(\frac{x^3 + 2x - 7}{x} \right) dx = \int \left(x^2 + 2 - \frac{7}{x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + 2x - 7 \ln |x| + C$$

c) $$\int (3e^{-5t} + \sqrt{t})\, dt = \int (3e^{-5t} + t^{1/2})\, dt$$

$$= 3\left(\frac{1}{-5}e^{-5t}\right) + \frac{1}{3/2}t^{3/2} + C = \frac{-3}{5}e^{-5t} + \frac{2}{3}t^{3/2} + C$$

EJEMPLO | 5.1.4

Determine la función $f(x)$ cuya tangente tiene una pendiente de $3x^2 + 1$ para cada valor de x, y cuya gráfica pasa por el punto (2, 6):

Solución

La pendiente de la recta tangente en cada punto $(x, f(x))$ es la derivada $f'(x)$. Por consiguiente

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

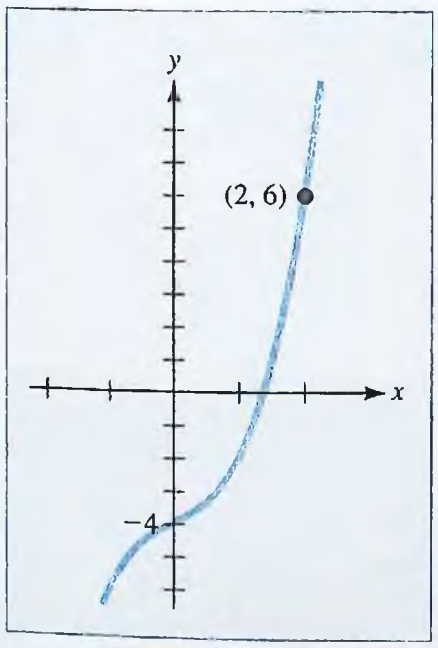
y, por tanto, $f(x)$ es la antiderivada

$$f(x) = \int f'(x)\, dx = \int (3x^2 + 1)\, dx = x^3 + x + C$$

Para determinar C, se toma en cuenta el hecho de que la gráfica de f pasa por (2, 6). Es decir, se sustituye $x = 2$ y $f(2) = 6$ en la ecuación para $f(x)$ y se despeja a C obteniendo

$$6 = (2)^3 + 2 + C \qquad \text{o} \qquad C = -4$$

Entonces, la función buscada es $f(x) = x^3 + x - 4$. La gráfica de esta función se muestra en la figura adjunta.



Gráfica de $y = x^3 + x - 4$.

www.FreeLibros.com

Aplicaciones de los problemas con valor inicial

Una **ecuación diferencial** es una ecuación que contiene diferenciales o derivadas. Estas ecuaciones son de gran importancia en la modelación y aparecen en una amplia gama de aplicaciones. Un **problema con valor inicial** es un problema donde se debe resolver una ecuación diferencial, sujeta a una condición inicial dada. Por decir un caso, en el ejemplo 5.1.4, se le pidió determinar $y = f(x)$, tal que

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \quad \text{sujeta a la condición } y = 6 \text{ cuando } x = 2.$$

Este problema con valor inicial se resolvió hallando la antiderivada

$$y = \int (3x^2 + 1)\, dx = x^3 + x + C$$

y luego, usando la condición inicial, se calculó C. El mismo procedimiento se usa en los ejemplos 5.1.5 al 5.1.8 para resolver diferentes casos prácticos de problemas con valor inicial en negocios, economía, biología y física. Problemas con valor inicial similares aparecen en ejemplos y ejercicios en todo este capítulo. Posteriormente, en la sección 6.2, se estudia una amplia variedad de ecuaciones diferenciales y de problemas con valor inicial.

EJEMPLO | 5.1.5

Un fabricante determina que el costo marginal es $3q^2 - 60q + 400$ dólares por unidad cuando se producen q unidades. El costo total de producción de las primeras 2 unidades es \$900. ¿Cuál es el costo total de producción de las primeras 5 unidades?

Solución

Recuerde que el costo marginal es la derivada de la función del costo total $C(q)$. Entonces,

$$\frac{dC}{dq} = 3q^2 - 60q + 400$$

y, por tanto, $C(q)$ deber ser la antiderivada

$$C(q) = \int \frac{dC}{dq}\, dq = \int (3q^2 - 60q + 400)\, dq = q^3 - 30q^2 + 400q + K$$

para alguna constante K. (La letra K se empleó para denotar la constante a fin de evitar confusión con la función del costo C.)

El valor de K se determina por el hecho de que $C(2) = 900$. En particular,

$$900 = (2)^3 - 30(2)^2 + 400(2) + K \qquad \text{o} \qquad K = 212$$

De aquí, $$C(q) = q^3 - 30q^2 + 400q + 212$$

y el costo de producción de las primeras 5 unidades es

$$C(5) = (5)^3 - 30(5)^2 + 400(5) + 212 = \$1\,587$$

EJEMPLO | 5.1.6

Se ha determinado que la población $P(t)$ de una colonia de bacterias, t horas después de iniciar la observación, tiene una razón de cambio de

$$\frac{dP}{dt} = 200e^{0.1t} + 150e^{-0.03t}$$

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Grafique la función $P(t)$ del ejemplo 5.1.6, utilizando la pantalla [0, 23.5]5 por [15 000, 50 000]5 000. Muestre la población dentro de 9 horas. ¿Cuándo llegará la población a 300 000 habitantes?

Si la población era de 200 000 bacterias cuando inició la observación, ¿cuál será la población 12 horas después?

Solución

La población $P(t)$ se encuentra antiderivando $\frac{dP}{dt}$ como se muestra a continuación:

$$P(t) = \int \frac{dP}{dt}\,dt = \int (200e^{0.1t} + 150e^{-0.03t})\,dt$$

$$= \frac{200e^{0.1t}}{0.1} + \frac{150e^{-0.03t}}{-0.03} + C \qquad \textit{reglas exponencial y de la suma}$$

$$= 2\,000\,e^{0.1t} - 5\,000\,e^{-0.03t} + C$$

Como la población es de 200 000 cuando $t = 0$, se tiene que

$$P(0) = 200\,000 = 2\,000\,e^0 - 5\,000\,e^0 + C$$
$$= -3\,000 + C$$

por tanto, $C = 203\,000$ y

$$P(t) = 2\,000e^{0.1t} - 5\,000e^{-0.03t} + 203\,000$$

Entonces, después de 12 horas, la población es

$$P(12) = 2\,000e^{0.1(12)} - 5\,000e^{-0.03(12)} + 203\,000$$
$$\approx 206\,152$$

EJEMPLO | 5.1.7

Un minorista recibe un cargamento de 10 000 kilogramos de arroz que se consumirán en un periodo de 5 meses a una tasa constante de 2 000 kilogramos por mes. Si los costos de almacenamiento son 1 centavo por kilogramo al mes, ¿cuánto pagará el minorista en costos de almacenamiento durante los próximos 5 meses?

Solución

Sea $S(t)$ el costo total de almacenamiento (en dólares) durante t meses. Como el arroz se consume a una tasa constante de 2 000 kilogramos por mes, el número de kilogramos de arroz almacenados después de t meses es $10\,000 - 2\,000t$. Por tanto, como los costos de almacenamiento son 1 centavo por kilogramo al mes, la tasa de cambio del costo de almacenamiento con respecto al tiempo es

$$\frac{dS}{dt} = \begin{pmatrix}\text{costo mensual}\\ \text{por kilogramo}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{número de}\\ \text{kilogramos}\end{pmatrix} 0.01(10\,000 - 2\,000t)$$

Se deduce que $S(t)$ es una antiderivada de

$$0.01(10\,000 - 2\,000t) = 100 - 20t$$

Es decir,

$$S(t) = \int \frac{dS}{dt}\,dt = \int (100 - 20t)\,dt$$
$$= 100t - 10t^2 + C$$

para alguna constante C. Para determinar C, se usa el hecho de que cuando llega el cargamento (cuando $t = 0$) no hay costo, por lo que

$$0 = 100(0) - 10(0)^2 + C \qquad \text{o} \qquad C = 0$$

www.FreeLibros.com

De aquí, $$S(t) = 100t - 10t^2$$

y el costo total de almacenamiento durante los próximos 5 meses será

$$S(5) = 100(5) - 10(5)^2 = \$250$$

Movimiento rectilíneo

Recordemos de la sección 2.2, que si un objeto que se mueve en línea recta se encuentra en la posición $s(t)$ en el momento t, entonces su velocidad está dada por $v = \dfrac{ds}{dt}$ y su aceleración por $a = \dfrac{dv}{dt}$. Invirtiendo el proceso, si se conoce la aceleración del objeto, entonces su velocidad y posición se pueden determinar mediante la integración. Ahora se da un ejemplo.

¡EXPLORE!

Remítase al ejemplo 5.1.8. Grafique la función de posición $s(t)$ en el editor de ecuaciones de su calculadora como $Y1 = -11x^2 + 66x$, empleando la ventana [0, 9.4]1 por [0, 200]10. Ubique el tiempo en el que se detiene y la posición correspondiente en la gráfica. Resuelva nuevamente el problema de un automóvil que viaja a 60 mph (88 pies/s). En este caso, ¿qué ocurre a los 3 segundos?

EJEMPLO | 5.1.8

Un automóvil viaja en línea recta a 45 millas por hora (66 pies por segundo) en el instante en el que el conductor se ve forzado a aplicar los frenos para evitar un accidente. Si los frenos proporcionan una desaceleración constante de 22 pies/s^2 (pies por segundo, por segundo), ¿qué distancia recorre el automóvil antes de detenerse por completo?

Solución

Sea $s(t)$ la distancia recorrida por el automóvil en t segundos después de aplicar los frenos. Como el automóvil desacelera a 22 pies/s^2, se tiene que $a(t) = -22$; es decir,

$$\frac{dv}{dt} = a(t) = -22$$

Integrando, se encuentra que la velocidad en el momento t está dada por

$$v(t) = \int -22\,dt = -22t + C_1$$

Para calcular C_1, observe que $v = 66$ cuando $t = 0$, de modo que

$$66 = v(0) = -22(0) + C_1$$

y $C_1 = 66$. Por lo que la velocidad en el momento t es $v(t) = -22t + 66$.

A continuación, para encontrar la distancia $s(t)$, se inicia con el hecho de que

$$\frac{ds}{dt} = v(t) = -22t + 66$$

e integrando se tiene que

$$s(t) = \int (-22t + 66)\,dt = -11t^2 + 66t + C_2$$

Como $s(0) = 0$ (¿comprende por qué?), se deduce que $C_2 = 0$ y

$$s(t) = -11t^2 + 66t$$

Finalmente, para encontrar la distancia a la que se detiene el automóvil, éste se detiene cuando $v(t) = 0$, lo cual sucede cuando

$$v(t) = -22t + 66 = 0$$

Resolviendo esta ecuación, se obtiene que el automóvil se detiene después de 3 segundos de desaceleración, y en ese tiempo ha recorrido

$$s(3) = -11(3)^2 + 66(3) = 99 \text{ pies}$$

www.FreeLibros.com

PROBLEMAS | 5.1

En los problemas 1 a 30 determine la integral indicada. Compruebe las respuestas derivando.

1. $\int -3\,dx$
2. $\int dx$
3. $\int x^5\,dx$
4. $\int \sqrt{t}\,dt$
5. $\int \frac{1}{x^2}\,dx$
6. $\int 3e^x\,dx$
7. $\int \frac{2}{\sqrt{t}}\,dt$
8. $\int x^{-0.3}\,dx$
9. $\int u^{-2/5}\,du$
10. $\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx$
11. $\int (3t^2 - \sqrt{5t} + 2)\,dt$
12. $\int (x^{1/3} - 3x^{-2/3} + 6)\,dx$
13. $\int (3\sqrt{y} - 2y^{-3})\,dy$
14. $\int \left(\frac{1}{2y} - \frac{2}{y^2} + \frac{3}{\sqrt{y}}\right) dy$
15. $\int \left(\frac{e^x}{2} + x\sqrt{x}\right) dx$
16. $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{2}\right) dx$
17. $\int u^{1.1}\left(\frac{1}{3u} - 1\right) du$
18. $\int \left(2e^u + \frac{6}{u} + \ln 2\right) du$
19. $\int \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2}\right) dx$
20. $\int \frac{x^2 + 3x - 2}{\sqrt{x}}\,dx$
21. $\int (x^3 - 2x^2)\left(\frac{1}{x} - 5\right) dx$
22. $\int y^3\left(2y + \frac{1}{y}\right) dy$
23. $\int \sqrt{t}(t^2 - 1)\,dt$
24. $\int x(2x + 1)^2\,dx$
25. $\int (e^t + 1)^2\,dt$
26. $\int e^{-0.02t}(e^{-0.13t} + 4)\,dt$
27. $\int \left(\frac{1}{3y} - \frac{5}{\sqrt{y}} + e^{-y/2}\right) dy$
28. $\int \frac{1}{x}(x + 1)^2\,dx$
29. $\int t^{-1/2}(t^2 - t + 2)\,dt$
30. $\int \ln(e^{-x^2})\,dx$

En los problemas 31 a 34 resuelva el problema con valor inicial para $y = f(x)$.

31. $\frac{dy}{dx} = 3x - 2$ donde $y = 2$ cuando $x = -1$
32. $\frac{dy}{dx} = e^{-x}$ donde $y = 3$ cuando $x = 0$
33. $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ donde $y = -1$ cuando $x = 1$
34. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 1}{\sqrt{x}}$ donde $y = 5$ cuando $x = 4$

www.FreeLibros.com

En los problemas 35 a 40 se da la pendiente $f'(x)$ en cada punto (x, y) de una curva $y = f(x)$, junto con un punto particular (a, b) sobre la curva. Utilice esta información para encontrar $f(x)$.

35. $f'(x) = 4x + 1; (1, 2)$

36. $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2; (0, 6)$

37. $f'(x) = x^3 - \frac{2}{x^2} + 2; (1, 3)$

38. $f'(x) = x^{-1/2} + x; (1, 2)$

39. $f'(x) = e^{-x} + x^2; (0, 4)$

40. $f'(x) = \frac{3}{x} - 4; (1, 0)$

41. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN Se ha estimado que dentro de t meses la población de una cierta ciudad cambiará a razón de $4 + 5t^{2/3}$ personas por mes. Si la población actual es de10 000, ¿cuál será la población dentro de 8 meses?

42. INGRESO MARGINAL Un fabricante estima que el ingreso marginal será $R'(q) = 100q^{-1/2}$ dólares por unidad cuando el nivel de producción sea de q unidades. Se ha determinado que el costo marginal correspondiente es de $0.4q$ dólares por unidad. Suponga que el ingreso del fabricante es \$520 cuando el nivel de producción es de 16 unidades. ¿Cuál es el ingreso del fabricante cuando el nivel de producción es de 25 unidades?

43. VARIACIÓN TOTAL DE BIOMASA Una biomasa crece a una razón de $M'(t) = 0.5e^{0.2t}$ g/h. ¿Cuánto cambia la biomasa durante la segunda hora?

44. CRECIMIENTO DE UN ÁRBOL Un ecologista encuentra que cierto tipo de árbol crece de tal forma que su altura $h(t)$ después de t años cambia a una razón de

$$h'(t) = 0.2t^{2/3} + \sqrt{t} \text{ pies/año}$$

Si cuando se plantó el árbol éste tenía una altura de 2 pies, ¿cuál será su altura dentro de 27 años?

45. COSTO MARGINAL Un fabricante estima que el costo marginal por producir q unidades de cierto bien es $C'(q) = 3q^2 - 24q + 48$ dólares por unidad. Si el costo de producción de 10 unidades es de \$5 000, ¿cuál es el costo de producción de 30 unidades?

46. INGRESO MARGINAL El ingreso marginal derivado de la producción de q unidades de cierto artículo es $R'(q) = 4q - 1.2q^2$ dólares por unidad. Si el ingreso derivado de la producción de 20 unidades es de \$30 000, ¿cuál será el ingreso esperado por la producción de 40 unidades?

47. APRENDIZAJE Bob toma una prueba de aprendizaje en la que se registra el tiempo que le toma memorizar aspectos de una lista dada. Sea $M(t)$ el número de aspectos que puede memorizar en t minutos. Su tasa de aprendizaje se determina como

$$M'(t) = 0.4t - 0.005t^2$$

a) ¿Cuántos aspectos puede memorizar Bob durante los primeros 10 minutos?

b) ¿Cuántos aspectos adicionales puede memorizar durante los siguientes 10 minutos (del tiempo $t = 10$ al $t = 20$)?

48. VENTAS Las ventas mensuales en una tienda importante actualmente son \$10 000, pero se espera que dentro de t meses disminuyan a una tasa de

$$S'(t) = -10t^{2/5} \text{ dólares por mes.}$$

La tienda es rentable siempre y cuando el nivel de ventas sea mayor que \$8 000 por mes.

a) Determine una fórmula para las ventas esperadas en t meses.

b) ¿Cuál será el monto de las ventas que se deberá esperar dentro de 2 años?

c) ¿Durante cuántos meses será rentable la tienda?

49. PUBLICIDAD Después de iniciar una campaña publicitaria en un área urbana, un proveedor de discos para satélite estima que el número de suscriptores nuevos crecerá a la tasa dada por

$$N'(t) = 154t^{2/3} + 37 \text{ suscriptores por mes}$$

donde t es el número de meses después de iniciar la campaña. ¿Cuántos suscriptores nuevos se esperan dentro de 8 meses?

50. ESPECIES EN PELIGRO DE EXTINCIÓN Un protector de animales encuentra que la población $P(t)$ de cierta especie en peligro de extinción crece a una tasa dada por $P'(t) = 0.51e^{-0.03t}$, donde t es el número de años después del inicio de los registros.

a) Si actualmente (en el momento $t = 0$) la población es $P_0 = 500$, ¿cuál será la población en 10 años?

b) Lea un artículo sobre especies en peligro de extinción y escriba un párrafo acerca del uso de modelos matemáticos en el estudio de poblaciones de estas especies.[1]

51. DESCONGELAMIENTO Un trozo de carne se saca del refrigerador y se deja en el mostrador para que se descongele. Cuando se sacó del congelador, la temperatura de la carne era de $-4°C$,

[1] Puede iniciar su investigación con el periódico *Ecology*.

www.FreeLibros.com

y t horas más tarde se incrementaba a una tasa de

$$T'(t) = 7e^{-0.35t} \quad °C/h$$

a) Determine una fórmula para la temperatura de la carne después de t horas.
b) ¿Cuál es la temperatura después de 2 horas?
c) Suponga que la carne está descongelada cuando su temperatura llega a 10°C. ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que se descongela la carne?

52. INGRESO MARGINAL Suponga que se determina que el ingreso marginal asociado con la producción de x unidades de un cierto artículo es $R'(x) = 240 - 4x$ dólares por unidad. ¿Cuál es la función de ingreso $R(x)$? Puede suponer que $R(0) = 0$. ¿Qué precio se pagará por cada unidad cuando el nivel de producción sea $x = 5$ unidades?

53. UTILIDAD MARGINAL La utilidad marginal de un cierto bien es $P'(q) = 100 - 2q$ cuando se producen q unidades. Cuando se producen 10 unidades, la utilidad es de $700.
a) Determine la función de utilidad $P(q)$.
b) ¿Qué nivel de producción q da como resultado la utilidad máxima? ¿Cuál es la utilidad máxima?

54. PRODUCCIÓN En cierta fábrica, cuando se invierten K miles de dólares en la planta, la producción Q cambia a una tasa dada por

$$Q'(K) = 200K^{-2/3}$$

unidades por cada mil dólares invertidos. Cuando se invierten $8 000, el nivel de producción es de 5 500 unidades.
a) Determine una fórmula para el nivel de producción Q que se espera cuando se inviertan K miles de dólares.
b) ¿Cuánta unidades se producen cuando se invierten $27 000?
c) ¿Qué inversión de capital K se requerirá para producir 7 000 unidades?

55. PROPENSIÓN MARGINAL AL CONSUMO Suponga que la función de consumo para cierto país es $c(x)$, donde x es el ingreso nacional disponible. Entonces la **propensión marginal al consumo** es $c'(x)$. Suponga que x y c ambas se miden en miles de millones de dólares y

$$c'(x) = 0.9 + 0.3\sqrt{x}$$

Si cuando $x = 0$ el consumo es de 10 mil millones de dólares, determine $c(x)$.

56. HISTORIA DE ESPÍAS Tratando de vengar la muerte de Siggy Leiter (problema 57 del conjunto de ejercicios 4.2), nuestro espía maneja un automóvil deportivo hacia la guarida del enemigo que mató a su amigo. Para permanecer tan discreto como sea posible, viaja a la velocidad permitida de 60 mph (88 pies por segundo) cuando de repente, ve un camello en el camino, a una distancia de 199 pies. A él le toma 0.7 segundos reaccionar a la crisis. Entonces aplica los frenos, y el automóvil desacelera a una tasa constante de 28 pies/s^2 (28 pies por segundo, por segundo). ¿Logra detenerse sin golpear al camello?

57. APRENDIZAJE Sea $f(x)$ el número total de aspectos que un sujeto ha memorizado x minutos después de ver una larga lista de aspectos que debe recordar. Los sicólogos se refieren a la gráfica de $y = f(x)$ como **curva de aprendizaje** y a $f'(x)$ como **tasa de aprendizaje**. El tiempo de **eficiencia pico** es el tiempo cuando se maximiza la tasa de aprendizaje. Suponga que la tasa de aprendizaje es

$$f'(x) = 0.1(10 + 12x - 0.6x^2) \quad \text{para } 0 \le x \le 25$$

a) ¿Cuándo ocurre la eficiencia pico? ¿Cuál es la tasa de aprendizaje a una eficiencia pico?
b) ¿Qué representa $f(x)$?
c) ¿Cuál es el mayor número de aspectos memorizados por el sujeto?

58. TERAPIA CONTRA EL CÁNCER Un nuevo procedimiento médico se aplica a un tumor canceroso que tiene un volumen de 30 cm^3, y t días después se determina que el volumen cambia a la tasa

$$V'(t) = 0.15 - 0.09e^{0.006t} \text{ cm}^3/\text{día}$$

a) Determine una fórmula del volumen del tumor después de t días.
b) ¿Cuál es el volumen luego de 60 días? ¿Cuál es después de 120 días?
c) A fin de que el procedimiento sea exitoso, no deberán transcurrir más de 90 días para que el tumor comience a disminuir. Con base en este criterio, ¿tiene éxito el procedimiento?

59. ANÁLISIS MARGINAL Un fabricante estima que el ingreso marginal es $200q^{-1/2}$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es q unidades. Se ha determinado que el costo marginal correspondiente es de $0.4q$ dólares por unidad. Si la utilidad del fabricante es de $2 000 cuando el nivel de producción es de 25 unidades, ¿cuál es la utilidad cuando el nivel de producción es de 36 unidades?

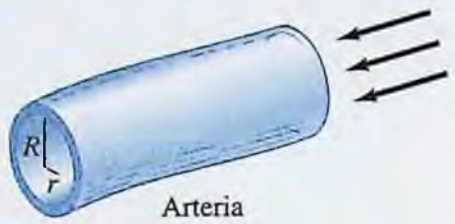
60. ADMINISTRACIÓN DE UNA INSTALACIÓN CORRECCIONAL Las estadísticas reunidas por el departamento local de correccionales indican que dentro x años el número de presos en las prisiones del condado se incrementará a una tasa de $280e^{0.2x}$ por año. Actualmente hay 2 000 presos en las prisiones del condado. ¿Cuántos presos se espera que haya en el condado dentro de 10 años?

www.FreeLibros.com

61. **FLUJO SANGUÍNEO** Una de las leyes de Poiseuille para el flujo sanguíneo en una artería establece que si $v(r)$ es la velocidad del flujo a r cm del eje central de la arteria, entonces la velocidad disminuye a una tasa proporcional a r. Es decir,

$$v'(r) = -ar$$

donde a es una constante positiva.[2] Determine una expresión para $v(r)$. Suponga $v(R) = 0$, donde R es el radio de la arteria.



Arteria

PROBLEMA 61

62. Si $H'(x) = 0$ para todos los números reales x, ¿qué debe ser cierto para la gráfica de $H(x)$? Explique cómo se puede emplear su observación para demostrar que si $G'(x) = F'(x)$ para toda x, entonces $G(x) = F(x) + C$ siendo C una constante.

63. **DISTANCIA Y VELOCIDAD** Un objeto se mueve de manera que su velocidad después de t minutos es $v(t) = 3 + 2t + 6t^2$ metros por minuto. ¿Cuál es la distancia recorrida durante el segundo minuto?

64. *a*) Demuestre la regla de la constante:

$$\int k\,dx = kx + C.$$

b) Demuestre la regla exponencial:

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C.$$

[2] E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 2a. ed., Springer-Verlag, Nueva York, 1976, páginas 101-103.

65. ¿A qué es igual $\int b^x\,dx$ para la base b ($b > 0$, $b \neq 1$)? [*Sugerencia:* Recuerde que $b^x = e^{x \ln b}$].

66. Se estima que dentro x meses, la población de una cierta ciudad cambiará a una tasa de $P'(x) = 2 + 1.5\sqrt{x}$ personas por mes. La población actual es de 5 000.

a) Determine una función $P(x)$ que satisfaga estas condiciones. Use el procedimiento de graficación de su calculadora para trazar dicha función.

b) Emplee **TRACE** y **ZOOM** para determinar el nivel de población dentro de 9 meses. ¿Cuándo la población será de 7 590?

c) Suponga que la población actual fuera de 2 000 (en vez de 5 000). Trace la gráfica de $P(x)$ de acuerdo con esta suposición. Luego trace la gráfica de $P(x)$ suponiendo que la población actual es de 4 000 y 6 000. ¿Cuál es la diferencia entre las gráficas?

67. Un automóvil que viaja a 67 pies/s desacelera a una tasa constante de 23 pies/s^2 cuando se aplican los frenos.

a) Determine la velocidad $v(t)$ del automóvil después de t segundos de ser aplicados los frenos, luego determine la distancia recorrida $s(t)$ desde el punto donde se aplicaron los frenos.

b) Use el procedimiento de graficación de su calculadora para trazar las gráficas de $v(t)$ y $s(t)$ en la misma pantalla (emplee [0, 5]1 por [0, 200]10).

c) Utilice **TRACE** y **ZOOM** para determinar cuándo se detiene por completo el automóvil y qué distancia recorre en ese tiempo. ¿A qué velocidad viaja el automóvil cuando ha recorrido 45 pies?

SECCIÓN 5.2 | Integración por sustitución

La mayoría de las funciones que aparecen en las situaciones prácticas pueden ser derivadas aplicando reglas y fórmulas como las que se estudiaron en el capítulo 2. Sin embargo, la integración es tanto un arte como una ciencia, y muchas integrales que parecen simples en realidad requieren de una técnica especial o de una vista ingeniosa.

Por ejemplo, se puede determinar fácilmente que

$$\int x^7\,dx = \frac{1}{8}x^8 + C$$

aplicando la regla de la potencia, pero suponga que se desea calcular

$$\int (3x + 5)^7\,dx$$

www.FreeLibros.com

REPASO

Justo-a-tiempo

Recuerde que la diferencial de $y = f(x)$ es $dy = f'(x)\,dx$.

Se podría proceder expandiendo el integrando $(3x + 5)^7$ y luego, integrando término a término, pero el procedimiento algebraico implicado en este método es desalentador. En lugar de eso, se hace el cambio de variable

$$u = 3x + 5 \qquad \text{por lo que} \qquad du = 3\,dx \text{ o } dx = \frac{1}{3}\,du$$

Luego, sustituyendo estas magnitudes en la integral dada, se obtiene

$$\int (3x + 5)^7\,dx = \int u^7\left(\frac{1}{3}\,du\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}u^8\right) + C = \frac{1}{24}u^8 + C \quad \textit{regla de la potencia}$$

$$= \frac{1}{24}(3x + 5)^8 + C \quad \textit{porque } u = 3x + 5$$

Este cálculo se puede verificar derivando por la regla de la cadena (sección 2.4):

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{24}(3x + 5)^8\right] = \frac{1}{24}[8(3x + 5)^7(3)] = (3x + 5)^7$$

lo cual demuestra que $\frac{1}{24}(3x + 5)^8$ es en efecto una antiderivada de $(3x + 5)^7$.

El procedimiento de cambio de variable que se acaba de mostrar se denomina **integración por sustitución**, y es equivalente a invertir la regla de la cadena de la derivación. Para ver cómo se aplica esta inversión, considere una integral que se puede escribir como

$$\int f(x)\,dx = \int g(u(x))\,u'(x)\,dx$$

Suponga que G es una antiderivada de g, de manera que $G' = g$. Entonces, según la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx}[G(u(x))] = G'(u(x))\;u'(x)$$

$$= g(u(x))\;u'(x) \quad \textit{como } G' = g$$

Por tanto, integrando ambos miembros de esta ecuación con respecto a x, se tiene que

$$\int f(x)\,dx = \int g(u(x))\,u'(x)\,dx$$

$$= \int \left(\frac{d}{dx}[G(u(x))]\right) dx$$

$$= G(u(x)) + C \quad \textit{puesto que } \int G' = G$$

En otras palabras, una vez que se tiene una antiderivada para $g(u)$, también se tiene una antiderivada para $f(x)$.

Un artificio útil para recordar el procedimiento de sustitución es considerar $u = u(x)$ como un cambio de variable cuya diferencial $du = u'(x)\,dx$ puede ser manipulada

www.FreeLibros.com

de forma algebraica. Entonces

$$\int f(x)\,dx = \int g(u(x))\,u'(x)\,dx$$

$$= \int g(u)\,du \qquad \textit{Sustituyendo } du \textit{ por } u'(x)\,dx$$

$$= G(u) + C \qquad \textit{donde } G \textit{ es una antiderivada de } g$$

$$= G(u(x)) + C \qquad \textit{sustituyendo } u(x) \textit{ por } u$$

Aquí se da un procedimiento paso a paso para la integración por sustitución.

Uso de la integración por sustitución $\int f(x)\,dx$

Paso 1. Se elige una sustitución $u = u(x)$ que "simplifique" el integrando $f(x)$.

Paso 2. Se expresa toda la integral en términos de u y $du = u'(x)\,dx$. Esto significa que *todos* los términos que contienen x y dx deben ser transformados en términos que contienen u y du.

Paso 3. Cuando termina el paso 2, la integral dada deberá tener la forma

$$\int f(x)\,dx = \int g(u)\,du$$

Si es posible, se calcula esta integral transformada encontrando una antiderivada $G(u)$ de $g(u)$.

Paso 4. Se reemplaza u por $u(x)$ en $G(u)$ para obtener una antiderivada $G(u(x))$ de $f(x)$, de manera que

$$\int f(x)\,dx = G(u(x)) + C$$

Un viejo adagio dice: "El primer paso para cocinar un estofado de conejo es atrapar un conejo". De la misma manera, el primer paso en la integración por sustitución es encontrar un cambio de variable adecuado $u = u(x)$, que simplifique el integrando de la integral dada $\int f(x)\,dx$ sin agregar complejidad indeseada cuando dx se reemplaza por $du = u'(x)\,dx$. A continuación se presentan algunas directrices para elegir $u(x)$:

1. Si es posible, trate de elegir a u de manera que $u'(x)$ sea parte del integrando $f(x)$.
2. Trate de elegir u como la parte del integrando que hace integrar directamente a $f(x)$, como la expresión dentro de un radical, el denominador de una fracción, o bien el exponente de una función exponencial.
3. No "sustituya demasiado". Por decir un caso, en el ejemplo de introducción $\int(3x + 5)^7\,dx$, un error común es emplear $u = (3x + 5)^7$. En realidad esto simplifica el integrando, pero entonces $du = 7(3x + 5)^6(3)\,dx$, con lo que se obtiene una integral transformada más complicada que la original.
4. Persevere, si prueba una sustitución que no da como resultado una integral transformada fácil de calcular, intente una sustitución distinta.

En los ejemplos 5.2.1 al 5.2.6 se ilustra cómo se eligen y cómo se emplean las sustituciones en varias clases de integrales.

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 5.2.1

Halle $\int \sqrt{2x + 7}\, dx$.

Solución

Se elige $u = 2x + 7$ y se obtiene

$$du = 2\, dx \qquad \text{o} \qquad dx = \frac{1}{2}\, du$$

Entonces la integral se convierte en

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{2x + 7}\, dx &= \int \sqrt{u}\left(\frac{1}{2}\, du\right) \\
&= \frac{1}{2}\int u^{1/2}\, du && \textit{como } \sqrt{u} = u^{1/2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}u^{3/2} + C && \textit{regla de la potencia} \\
&= \frac{1}{3}(2x + 7)^{3/2} + C && \textit{sustituyendo } 2x + 7 \textit{ para } u
\end{aligned}$$

EJEMPLO | 5.2.2

Halle $\int 8x(4x^2 - 3)^5\, dx$.

Solución

Primero, observe que el integrando $8x(4x^2 - 3)^5$ es un producto en el que uno de los factores, $8x$, es la derivada de la expresión $4x^2 - 3$, que aparece en el otro factor. Esto sugiere que se haga la sustitución

$$u = 4x^2 - 3 \qquad \text{con} \qquad du = 4(2x\, dx) = 8x\, dx$$

para obtener

$$\begin{aligned}
\int 8x(4x^2 - 3)^5\, dx &= \int (4x^2 - 3)^5 (8x\, dx) \\
&= \int u^5\, dx \\
&= \frac{1}{6}u^6 + C && \textit{regla de la potencia} \\
&= \frac{1}{6}(4x^2 - 3)^6 + C && \textit{sustituyendo } 4x^2 - 3 \textit{ por } u
\end{aligned}$$

EJEMPLO | 5.2.3

Halle $\int x^3 e^{x^4+2}\, dx$.

www.FreeLibros.com

Solución

Si el integrando de una integral contiene una función exponencial, con frecuencia es útil sustituir el exponente. En este caso, se elige

$$u = x^4 + 2 \qquad \text{de tal forma que} \qquad du = 4x^3\,dx$$

y

$$\begin{aligned}
\int x^3 e^{x^4+2}\,dx &= \int e^{x^4+2}(x^3\,dx) \\
&= \int e^u\left(\frac{1}{4}\,du\right) && \textit{puesto que } du = 4x^3\,dx \\
&= \frac{1}{4}e^u + C && \textit{regla exponencial} \\
&= \frac{1}{4}e^{x^4+2} + C && \textit{sustituyendo } x^4 + 2 \textit{ por } u
\end{aligned}$$

EJEMPLO | 5.2.4

Halle $\displaystyle\int \frac{x}{x-1}\,dx$.

Solución

Siguiendo nuestra guía, se sustituye el denominador del integrando, como $u = x - 1$ y $du = dx$. Puesto que $u = x - 1$, también se tiene que $x = u + 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{x-1}\,dx &= \int \frac{u+1}{u}\,du \\
&= \int 1 + \frac{1}{u}\,du && \textit{dividiendo} \\
&= u + \ln|u| + C && \textit{reglas de la constante y regla logarítmica} \\
&= x - 1 + \ln|x-1| + C && \textit{sustituyendo } x - 1 \textit{ por } u
\end{aligned}$$

EJEMPLO | 5.2.5

Halle $\displaystyle\int \frac{3x+6}{\sqrt{2x^2+8x+3}}\,dx$.

Solución

Esta vez, nuestra guía sugiere sustituir la cantidad dentro del radical del denominador; es decir,

$$u = 2x^2 + 8x + 3 \qquad du = (4x + 8)\,dx$$

A primera vista, parece que esta sustitución falla, ya que $du = (4x + 8)\,dx$ parece muy diferente al término $(3x + 6)\,dx$ de la integral. Sin embargo, observe que

$$\begin{aligned}
(3x+6)\,dx = 3(x+2)\,dx &= \frac{3}{4}(4)[(x+2)\,dx] \\
&= \frac{3}{4}[(4x+8)\,dx] = \frac{3}{4}\,du
\end{aligned}$$

www.FreeLibros.com

Sustituyendo, se tiene que

$$\int \frac{3x+6}{\sqrt{2x^2+8x+3}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{2x^2+8x+3}}[(3x+6)\,dx]$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(\frac{3}{4}\,du\right) = \frac{3}{4}\int u^{-1/2}\,du$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{u^{1/2}}{1/2}\right) + C = \frac{3}{2}\sqrt{u} + C$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{2x^2+8x+3} + C \qquad \textit{sustituyendo } u = 2x^2+8x+3$$

EJEMPLO | 5.2.6

Halle $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$.

Solución

Como

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

el integrando

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = (\ln x)^2\left(\frac{1}{x}\right)$$

es un producto en el que un factor, $\frac{1}{x}$ es la derivada de la expresión $\ln x$ que aparece en el otro factor. Esto sugiere que se haga $u = \ln x$ con $du = \frac{1}{x}\,dx$. Sustituyendo $u = \ln x$ y $du = \frac{1}{x}\,dx$, se obtiene

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \int (\ln x)^2\left(\frac{1}{x}\,dx\right)$$

$$= \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C$$

$$= \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C \qquad \textit{sustituyendo } \ln x \textit{ para } u$$

Algunas veces "parece" que se puede calcular una integral empleando una sustitución, pero un análisis más detallado revela un método más directo. Considere el ejemplo 5.2.7.

EJEMPLO | 5.2.7

Halle $\int e^{5x+2}\,dx$.

www.FreeLibros.com

Solución

Esta integral se puede transformar usando la sustitución

$$u = 5x + 2 \qquad du = 5\,dx$$

pero en realidad esto no es necesario ya que $e^{5x+2} = e^{5x}e^2$, y e^2 es una constante. Entonces,

$$\begin{aligned}
\int e^{5x+2}\,dx &= \int e^{5x}e^2\,dx \\
&= e^2\int e^{5x}\,dx && \textit{factorizando la constante } e^2 \textit{ fuera de la integral} \\
&= e^2\left[\frac{e^{5x}}{5}\right] + C && \textit{regla exponencial} \\
&= \frac{1}{5}e^{5x+2} + C && \textit{porque } e^2e^{5x} = e^{5x+2}
\end{aligned}$$

En el ejemplo 5.2.7, se usó el álgebra para escribir el integrando en una forma donde no fue necesaria la sustitución. En los ejemplos 5.2.8 y 5.2.9, use el álgebra como primer paso, antes de hacer una sustitución.

EJEMPLO | 5.2.8

Halle $\displaystyle\int \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1}\,dx$.

Solución

No existe un método fácil para esta integral de la forma en que ella aparece (recuerde que no existe una "regla del cociente" para la integración). Sin embargo, suponga que simplemente divide el numerador entre el denominador:

$$\begin{array}{r|l}
 & \quad x + 2 \\
\hline
x + 1 & x^2 + 3x + 5 \\
 & \underline{-x(x + 1)} \\
 & \qquad 2x + 5 \\
 & \qquad \underline{-2(x + 1)} \\
 & \qquad\qquad 3
\end{array}$$

es decir,

$$\frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} = x + 2 + \frac{3}{x + 1}$$

Se puede integrar $x + 2$ directamente usando la regla de la potencia. Para el término $\dfrac{3}{x + 1}$, se hace la sustitución $u = x + 1$; $du = dx$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1}\,dx &= \int x + 2 + \frac{3}{x + 1}\,dx \\
&= \int x\,dx + \int 2\,dx + \int \frac{3}{u}\,du && \begin{array}{l} u = x + 1 \\ du = dx \end{array}
\end{aligned}$$

www.FreeLibros.com

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 \ln |u| + C$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 \ln |x + 1| + C \quad \textit{sustituyendo } x + 1 \textit{ para } u$$

EJEMPLO | 5.2.9

Halle $\int \frac{1}{1 + e^{-x}}\, dx$.

Solución

Se puede sustituir $w = 1 + e^{-x}$. Sin embargo, esto no funcionaría pues, aunque $dw = -e^{-x}\, dx$, no existe un término e^{-x} en el numerador del integrando. En vez de eso, observe que

$$\frac{1}{1 + e^{-x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = \frac{1}{\frac{e^x + 1}{e^x}}$$

$$= \frac{e^x}{e^x + 1}$$

Ahora, si se sustituye $u = e^x + 1$ por $du = e^x\, dx$ en la integral dada, se obtiene

$$\int \frac{1}{1 + e^{-x}}\, dx = \int \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx = \int \frac{1}{e^x + 1}(e^x\, dx)$$

$$= \int \frac{1}{u}\, du$$

$$= \ln |u| + C$$

$$= \ln |e^x + 1| + C \quad \textit{sustituyendo } e^x + 1 \textit{ para } u$$

Cuando falla la sustitución

El método de sustitución no siempre tiene éxito. En el ejemplo 5.2.10 se considera una integral muy similar a la del ejemplo 5.2.3 pero es lo suficiente distinta para que no funcione la sustitución.

REPASO

Justo-a-tiempo

Observe que si $u = x^4 + 2$, entonces $x^4 = u - 2$, por tanto, $x = (u - 2)^{1/4} = \sqrt[4]{u - 2}$

EJEMPLO | 5.2.10

Evalúe $\int x^4 e^{x^4 + 2}\, dx$.

Solución

La sustitución natural es $u = x^4 + 2$, como en el ejemplo 5.2.3. Igual que antes, se calcula $du = 4x^3\, dx$, por tanto $x^3\, dx = \frac{1}{4}\, du$, pero este integrando contiene x^4, no x^3. El factor "extra" x satisface $x = \sqrt[4]{u - 2}$; por tanto, cuando se hace la sustitución, se tiene

$$\int x^4 e^{x^4 + 2}\, dx = \int x e^{x^4 + 2}(x^3\, dx) = \int \sqrt[4]{u - 2}\, e^u\, du$$

¡lo que difícilmente es una integral mejor a la original! Pruebe algunas otras posibles sustituciones (digamos, $u = x^2$ o $u = x^3$) para que se convenza de que nada funciona.

---

www.FreeLibros.com

Una aplicación que usa sustitución

EJEMPLO | 5.2.11

Se estima que el precio p (dólares) de cada unidad de un cierto artículo cambia a una tasa de

$$\frac{dp}{dx} = \frac{-135x}{\sqrt{9 + x^2}}$$

donde x (cientos) de unidades es la demanda del consumidor (el número de unidades compradas a ese precio). Suponga que se demandan 400 unidades ($x = 4$) cuando el precio es de \$30 por unidad.

a) Determine la función de la demanda $p(x)$.

b) ¿A qué precio se demandarán 300 unidades? ¿A qué precio no se demandará ninguna unidad?

c) ¿Cuántas unidades se demandan a un precio de \$20 por unidad?

Solución

a) El precio por unidad demandada $p(x)$ se determina integrando $p'(x)$ con respecto a x. Para efectuar esta integración, se emplea la sustitución

$$u = 9 + x^2, \qquad du = 2x\,dx, \qquad x\,dx = \frac{1}{2}\,du$$

y se obtiene

$$p(x) = \int \frac{-135x}{\sqrt{9 + x^2}}\,dx = \int \frac{-135}{u^{1/2}}\left(\frac{1}{2}\right)du$$

$$= \frac{-135}{2}\int u^{-1/2}\,du$$

$$= \frac{-135}{2}\left(\frac{u^{1/2}}{1/2}\right) + C$$

$$= -135\sqrt{9 + x^2} + C \qquad \textit{sustituyendo } 9 + x^2 \textit{ para } u$$

Como $p = 30$ cuando $x = 4$, se tiene que

$$30 = -135\sqrt{9 + 4^2} + C$$
$$C = 30 + 135\sqrt{25} = 705$$

por tanto

$$p(x) = -135\sqrt{9 + x^2} + 705$$

b) Cuando se demandan 300 unidades, $x = 3$ y el precio correspondiente es

$$p(3) = -135\sqrt{9 + 3^2} + 705 = \$132.24 \text{ por unidad}$$

No se demanda ninguna unidad cuando $x = 0$ y el precio correspondiente es

$$p(0) = -135\sqrt{9 + 0} + 705 = \$300 \text{ por unidad}$$

c) Para determinar el número de unidades demandadas a un precio unitario de \$20, se necesita resolver la ecuación

$$-135\sqrt{9 + x^2} + 705 = 20$$
$$135\sqrt{9 + x^2} = 685$$
$$\sqrt{9 + x^2} = \frac{685}{135}$$

www.FreeLibros.com

$$9 + x^2 \approx 25.75 \qquad \textit{elevando al cuadrado}$$
$$x^2 \approx 16.75 \qquad \textit{ambos miembros}$$
$$x \approx 4.09$$

Es decir, se demandarán aproximadamente 409 unidades cuando el precio sea \$20 por unidad.

PROBLEMAS | 5.2

En los problemas 1 y 2 complete la tabla especificando la sustitución que elegiría para determinar cada una de las cuatro integrales dadas.

1.

Integral	Sustitución u
a) $\int (3x + 4)^{5/2}\,dx$	
b) $\int \frac{4}{3 - x}\,dx$	
c) $\int te^{2-t^2}\,dt$	
d) $\int t(2 + t^2)^3\,dt$	

2.

Integral	Sustitución u
a) $\int \frac{3}{(2x - 5)^4}\,dx$	
b) $\int x^2 e^{-x^3}\,dx$	
c) $\int \frac{e^t}{e^t + 1}\,dt$	
d) $\int \frac{t + 3}{\sqrt[3]{t^2 + 6t + 5}}\,dt$	

En los problemas 3 a 36 halle la integral indicada y verifique las respuestas derivando.

3. $\int (2x + 6)^5\,dx$

4. $\int e^{5x}\,dx$

5. $\int \sqrt{4x - 1}\,dx$

6. $\int \frac{1}{3x + 5}\,dx$

7. $\int e^{1-x}\,dx$

8. $\int [(x - 1)^5 + 3(x - 1)^2 + 5]\,dx$

9. $\int xe^{x^2}\,dx$

10. $\int 2xe^{x^2-1}\,dx$

11. $\int t(t^2 + 1)^5\,dt$

12. $\int 3t\sqrt{t^2 + 8}\,dt$

13. $\int x^2(x^3 + 1)^{3/4}\,dx$

14. $\int x^5 e^{1-x^6}\,dx$

15. $\int \frac{2y^4}{y^5 + 1}\,dy$

16. $\int \frac{y^2}{(y^3 + 5)^2}\,dy$

www.FreeLibros.com

17. $\int (x+1)(x^2+2x+5)^{12}\,dx$

18. $\int (3x^2-1)e^{x^3-x}\,dx$

19. $\int \dfrac{3x^4+12x^3+6}{x^5+5x^4+10x+12}\,dx$

20. $\int \dfrac{10x^3-5x}{\sqrt{x^4-x^2+6}}\,dx$

21. $\int \dfrac{3u-3}{(u^2-2u+6)^2}\,du$

22. $\int \dfrac{6u-3}{4u^2-4u+1}\,du$

23. $\int \dfrac{\ln 5x}{x}\,dx$

24. $\int \dfrac{1}{x\ln x}\,dx$

25. $\int \dfrac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

26. $\int \dfrac{\ln x^2}{x}\,dx$

27. $\int \dfrac{2x\ln(x^2+1)}{x^2+1}\,dx$

28. $\int \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

29. $\int \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx$

30. $\int e^{-x}(1+e^{2x})\,dx$

31. $\int \dfrac{x}{2x+1}\,dx$

32. $\int \dfrac{t-1}{t+1}\,dt$

33. $\int x\sqrt{2x+1}\,dx$

34. $\int \dfrac{x}{\sqrt[3]{4-3x}}\,dx$

35. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\,dx$

[*Sugerencia:* Sea $u=\sqrt{x}+1$.]

36. $\int \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)^{2/3}dx$

$\left[\textit{Sugerencia:}\ \text{Sea } u=\dfrac{1}{x}-1.\right]$

En los problemas 37 a 40 resuelva el problema con valor inicial dado para $y = f(x)$.

37. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+1}$ donde $y=1$ cuando $x=0$

38. $\dfrac{dy}{dx}=e^{2-x}$ donde $y=0$ cuando $x=2$

39. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+2}{x^2+4x+5}$ donde $y=3$ cuando $x=-1$

40. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\ln\sqrt{x}}{x}$ donde $y=2$ cuando $x=-1$

En los problemas 41 a 44 se indica la pendiente $f'(x)$ en cada punto (x, y) de una curva dada $y = f(x)$, junto con un punto particular (a, b) sobre la curva. Use esta información para hallar $f(x)$.

41. $f'(x)=(1-2x)^{3/2}$; $(0, 0)$

42. $f'(x)=x\sqrt{x^2+5}$; $(2, 10)$

43. $f'(x)=xe^{4-x^2}$; $(-2, 1)$

44. $f'(x)=\dfrac{2x}{1+3x^2}$; $(0, 5)$

En los problemas 45 a 48 se da la velocidad $v(t) = x'(t)$ en el momento t, de un objeto que se mueve a lo largo del eje x, *junto con la posición inicial* del objeto $x(0)$. *En cada caso, determine*:

a) La posición $x(t)$ en el momento t.
b) La posición del objeto en el momento $t = 4$.
c) El momento en el que el objeto está en $x = 3$.

45. $x'(t)=-2(3t+1)^{1/2}$; $x(0)=4$

46. $x'(t)=\dfrac{-1}{1+0.5t}$

47. $x'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2t+1}}$

48. $x'(t)=\dfrac{-2t}{(1+t^2)^{3/2}}$; $x(0)=4$

www.FreeLibros.com

49. COSTO MARGINAL En cierta fábrica, el costo marginal es $3(q - 4)^2$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es q unidades.

a) Exprese el costo total de producción en función de los gastos indirectos (el costo de producir 0 unidades) y el número de unidades producidas.

b) ¿Cuál es el costo de producir 14 unidades si el gasto indirecto es de \$436?

50. DEPRECIACIÓN El valor de reventa de una cierta máquina industrial disminuye a una tasa que depende de su edad. Cuando la máquina tiene t años, la tasa a la cual cambia su valor es $-960e^{-t/5}$ dólares por año.

a) Exprese el valor de la máquina en términos de su edad y de su valor inicial.

b) Si originalmente la máquina valía \$5 200, ¿cuánto valdrá cuando tenga 10 años?

51. CRECIMIENTO DE UN ÁRBOL Se trasplantó un árbol y después de x años este crecía a una tasa de

$$1 + \frac{1}{(x+1)^2}$$ metros por año. Después de 2 años el árbol alcanzó una altura de 5 metros. ¿Qué altura tenía cuando se transplantó?

52. VENTAS AL MENUDEO En cierta sección del país, se estima que dentro de t semanas, el precio del pollo crecerá a una tasa de $p'(t) = 3\sqrt{t+1}$ centavos por kilogramo por semana. Si actualmente el pollo cuesta \$3 por kilogramo, ¿cuánto costará dentro de 8 semanas?

53. INGRESO El ingreso marginal por la venta de x unidades de un cierto artículo se estima que será

$R'(x) = 50 + 3.5xe^{-0.01x^2}$ dólares por unidad,

donde $R(x)$ es el ingreso en dólares.

a) Determine $R(x)$, suponiendo que $R(0) = 0$.

b) ¿Qué ingreso se espera por la venta de 1 000 unidades?

54. CONTAMINACIÓN DEL AGUA Un derrame de petróleo en el océano tiene una forma aproximadamente circular, con radio $R(t)$ pies, t minutos después del inicio del derrame. El radio crece a una tasa de

$$R'(t) = \frac{21}{0.07t + 5} \text{ pies/min}$$

a) Determine una expresión para el radio $R(t)$, suponiendo que $R = 0$ cuando $t = 0$.

b) ¿Cuál es el área $A = \pi R^2$ del derrame después de 1 hora?

55. CONCENTRACIÓN DE UN MEDICAMENTO La concentración $C(t)$ en miligramos por centímetro cúbico (mg/cm^3) de un medicamento en el torrente sanguíneo de un paciente es de 0.5 mg/cm^3 inmediatamente después de una inyección y t minutos más tarde disminuye a la tasa de

$$C'(t) = \frac{-0.01e^{0.01t}}{(e^{0.01t} + 1)^2} \text{ mg/cm}^3 \text{ por minuto.}$$

Se aplica una nueva inyección cuando la concentración es menor que 0.05 mg/cm^3.

a) Determine una expresión para $C(t)$.

b) ¿Cuál es la concentración después de 1 hora? ¿Cuál es después de 3 horas?

c) Use el procedimiento de graficación de su calculadora con **TRACE** y **ZOOM** para determinar cuánto tiempo transcurre antes de que se administre la siguiente inyección.

56. VALOR DE LA TIERRA Se estima que dentro de t años, el valor $V(x)$ de un acre de tierra cultivable crecerá a una tasa de

$$V'(x) = \frac{0.4x^3}{\sqrt{0.2x^4 + 8\,000}}$$

dólares por año. Actualmente la tierra vale \$500 por acre.

a) Determine $V(x)$.

b) ¿Cuánto valdrá la tierra dentro de 10 años?

c) Use el procedimiento de graficación de su calculadora con **TRACE** y **ZOOM** para determinar cuánto tiempo transcurrirá para que la tierra valga \$1 000 por acre.

57. CONTAMINACIÓN DEL AIRE En cierto suburbio de Los Ángeles, el nivel de ozono $L(t)$ a las 7:00 a.m. es de 0.25 partes por millón (ppm). Una predicción del clima anticipa que el nivel de ozono t horas más tarde cambiará a una tasa de

$$L'(t) = \frac{0.24 - 0.03t}{\sqrt{36 + 16t - t^2}}$$

partes por millón por hora (ppm/h).

a) Exprese el nivel de ozono $L(t)$ como una función de t. ¿Cuándo ocurre el nivel máximo de ozono? ¿Cuál es el nivel máximo?

b) Use el procedimiento de graficación de su calculadora para trazar la gráfica de $L(t)$ y emplee **TRACE** y **ZOOM** para responder a las preguntas del inciso *a)*. Después determine en qué otro momento el nivel de ozono será igual al nivel de las 11:00 a.m.

58. OFERTA El propietario de una cadena de comida rápida determina que si se ofertan x miles de unidades de una nueva comida

www.FreeLibros.com

el precio marginal a ese nivel de oferta estará dado por

$$p'(x) = \frac{x}{(x+3)^2} \quad \text{dólares por unidad}$$

donde $p(x)$ es el precio (en dólares) por unidad a la cual todos las x unidades se venderán. Actualmente, se ofertan 5 000 unidades a un precio de \$2.20 por unidad.

a) Determine la función de oferta $p(x)$ (precio).

b) Si se ofertan 10 000 alimentos a restaurantes en la cadena, ¿qué precio unitario se deberá cobrar para que se vendan todas las unidades?

59. DEMANDA El gerente de un zapatería determina que el precio p (dólares) por cada par de zapatos deportivos de cierta marca popular, cambia a una tasa de

$$p'(x) = \frac{-300x}{(x^2+9)^{3/2}}$$

cuando los consumidores demandan x (miles) de pares . Cuando el precio es \$75 por par, son demandados 400 pares ($x = 4$).

a) Determine la función de demanda $p(x)$ (precio).

b) ¿A qué precio se demandarán 500 pares de zapatos deportivos? ¿A qué precio no se demandarán zapatos deportivos?

c) ¿Cuántos pares se demandarán a un precio de \$90 por par?

60. UTILIDAD MARGINAL Una compañía determina que el ingreso marginal por la producción de x unidades es $R'(x) = 7 - 3x - 4x^2$ cientos de dólares por unidad, y el costo marginal correspondiente es $C'(x) = 5 + 2x$ cientos de dólares por unidad. ¿En cuánto cambia la utilidad cuando el nivel de producción se eleva de 5 a 9 unidades?

61. UTILIDAD MARGINAL Repita el problema 60 para el ingreso marginal $R'(x) = \dfrac{11-x}{\sqrt{14-x}}$ y para el costo marginal $C'(x) = 2 + x + x^2$.

62. Halle $\int x^3(4-x^2)^{-1/2}\,dx$. [*Sugerencia:* Sustituya $u = 4 - x^2$ y tome en cuenta el hecho de que $x^2 = 4 - u$.]

63. Halle $\int x^{1/3}(x^{2/3}+1)^{3/2}\,dx$. [*Sugerencia:* Sustituya $u = x^{2/3} + 1$ y use $x^{2/3} = u - 1$.]

64. Halle $\int e^{-x}(1+e^x)^2\,dx$. [*Sugerencia:* ¿Es mejor fijar $u = 1 + e^x$ o $u = e^x$? ¿O es mejor evitar el método de sustitución?]

65. Halle e $\int \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$. [*Sugerencia:* Haga $u = 1 + e^x$.]

SECCIÓN 5.3 | La integral definida y el teorema fundamental del cálculo

Suponga que un agente de bienes y raíces desea evaluar una parcela sin construir que tiene 100 pies de ancho y que está limitada por calles en tres de sus lados y por un arroyo en el cuarto lado. El agente determina que si establece un sistema coordenado, tal como se muestra en la figura 5.2, el arroyo se puede describir por medio de la curva $y = x^3 + 1$, donde x y y están medidas en cientos de pies. Si el área de la parcela es A pies cuadrados y el agente estima que su tierra vale \$12 por pie cuadrado, entonces el valor total de la parcela es de $12A$ dólares. Si la parcela fuera de forma rectangular o triangular, e incluso trapezoidal, se podría determinar su área A sustituyendo en una fórmula bien conocida; sin embargo, la frontera superior de la parcela es curva, por tanto ¿cómo puede el agente determinar el área y después determinar el valor total de la parcela?

El objetivo de esta sección es demostrar que se puede expresar el área bajo la curva (por ejemplo, el área A del ejemplo de bienes raíces) como el límite de una suma de términos, que recibe el nombre de **integral definida.** Más adelante, se introducirá un resultado conocido como el **teorema fundamental del cálculo** que permite calcular integrales *definidas* y después su área y otras cantidades empleando los métodos de la integración *indefinida* (antiderivación) de las secciones 5.1 y 5.2. En el ejemplo 5.3.3 se muestra este procedimiento expresando el área A de nuestro ejemplo de bienes raíces como una integral definida y calculándola mediante el teorema fundamental del cálculo.

www.FreeLibros.com

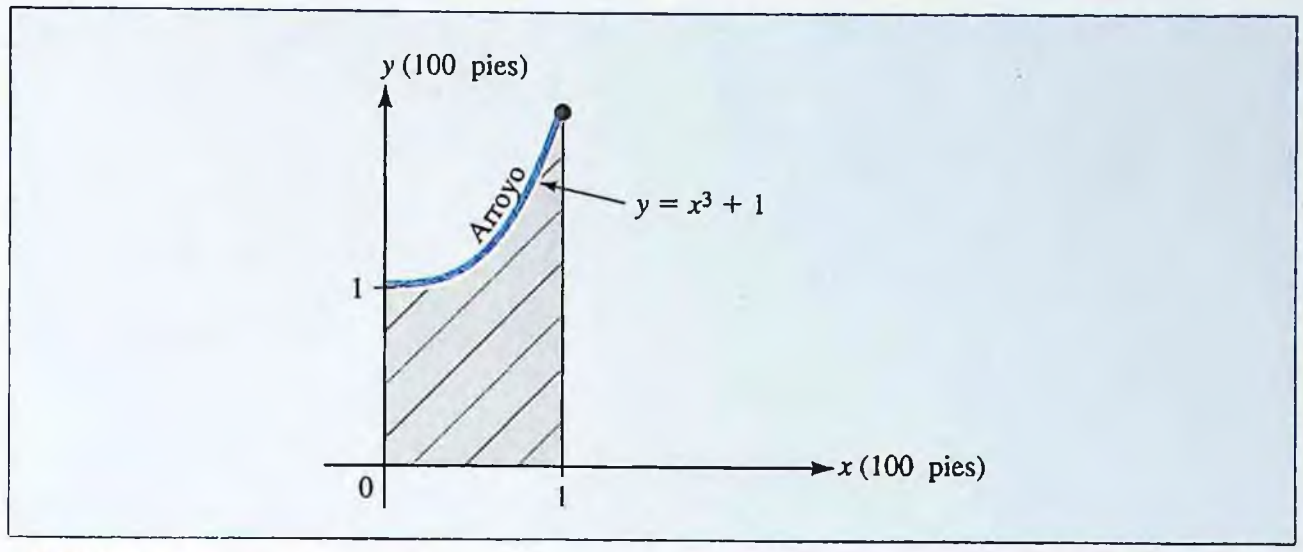


FIGURA 5.2 Determinación del valor de la tierra encontrando el área bajo la curva.

Área como el límite de una suma

Considere el área de la región bajo la curva $y = f(x)$ en un intervalo $a \leq x \leq b$, donde $f(x) \geq 0$ y f es continua, tal como se ilustra en la figura 5.3. Para determinar esta área, se sigue un procedimiento general muy útil:

Cuando se enfrente a algo que no sabe cómo manejar, trate de relacionarlo con algo que usted sabe cómo manejar.

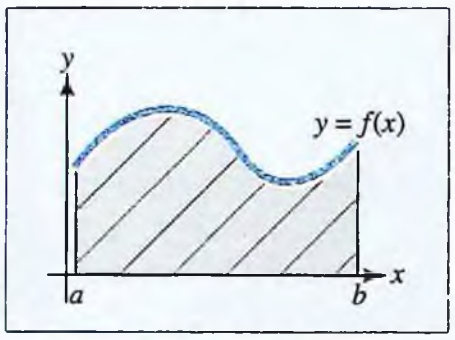


FIGURA 5.3 La región bajo la curva $y = f(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$.

En este caso particular, quizá no se conozca el área bajo la curva dada, pero sí se sabe cómo determinar el área de un rectángulo. Entonces, se procede a subdividir la región en un número de regiones rectangulares y luego se aproxima el área A bajo la curva $y = f(x)$ sumando las áreas de los rectángulos que la aproximan.

Concretamente, se inicia la aproximación dividiendo el intervalo $a \leq x \leq b$ en n subintervalos iguales, cada uno con longitud $\Delta x = (b - a)/n$, y denotando con x_j el punto extremo izquierdo del j-ésimo subintervalo, para $j = 1, 2, \ldots, n$. Luego se dibujan n rectángulos de tal forma que el j-ésimo rectángulo tenga al j-ésimo subintervalo como su base y $f(x_j)$ como su altura. En la figura 5.4 se ilustra el esquema de la aproximación.

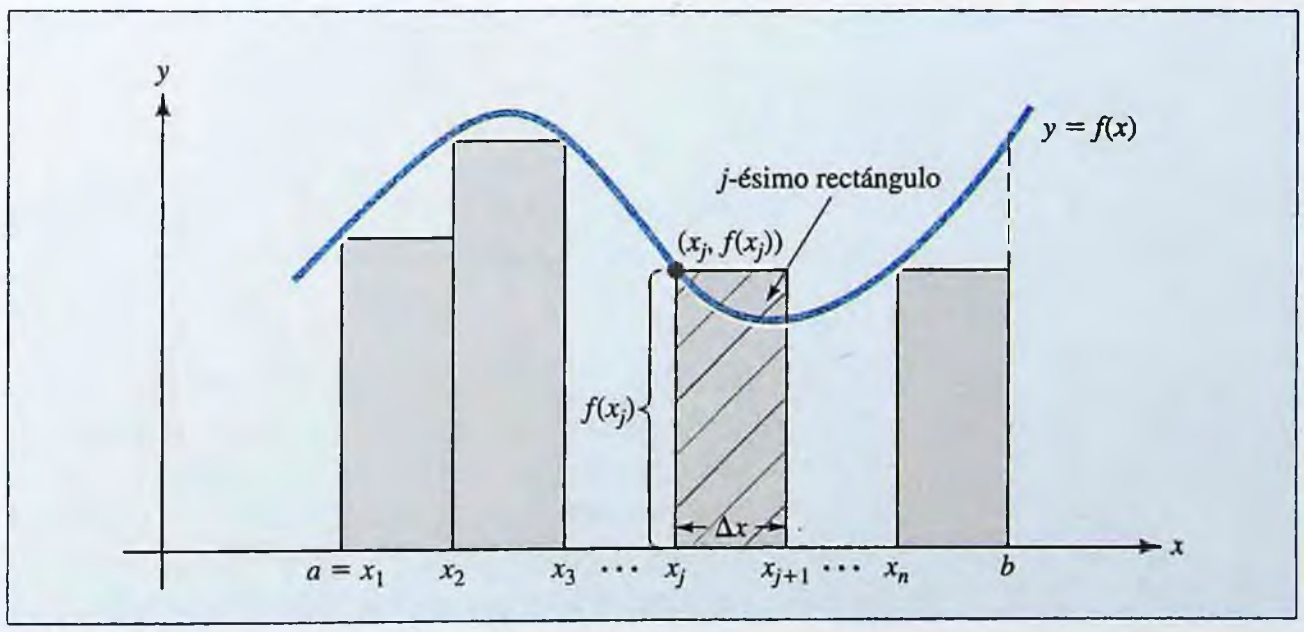


FIGURA 5.4 Una aproximación del área bajo la curva mediante rectángulos.

www.FreeLibros.com

El área del j-ésimo rectángulo es $f(x_j)\,\Delta x$ y se aproxima al área bajo la curva correspondiente al subintervalo $x_j \leq x \leq x_{j+1}$. La suma de las áreas de todos los n rectángulos es

$$\begin{aligned} S_n &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x \\ &= [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]\Delta x \end{aligned}$$

que aproxima el área total A bajo la curva.

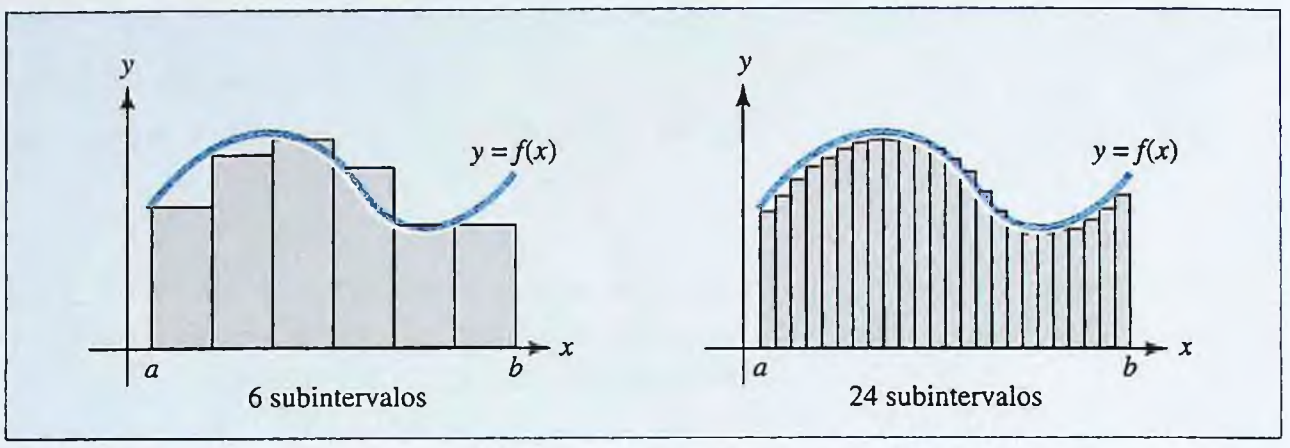


FIGURA 5.5 La aproximación mejora a medida que aumenta el número de subintervalos.

A medida que el número n de subintervalos se incrementa, la suma aproximada S_n se acerca cada vez más a lo que intuitivamente se entiende por el área bajo la curva, como se ilustra en la figura 5.5. Por tanto, es razonable definir el valor exacto del área bajo la curva, A, como el límite de las sumas. En resumen:

Área bajo la curva ■ Sea $f(x)$ continua y tal que satisface $f(x) \geq 0$ en el intervalo $a \leq x \leq b$. Entonces la región bajo la curva $y = f(x)$, en el intervalo $a \leq x \leq b$ tiene área

$$A = \lim_{n \to +\infty} [f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)]\Delta x$$

donde x_j es el punto extremo izquierdo del j-ésimo subintervalo, si el intervalo $a \leq x \leq b$ se divide en n partes iguales, cada una con longitud $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

NOTA En este punto se podría preguntar: "¿Por qué emplear el punto extremo izquierdo del subintervalo en vez de, digamos, el punto extremo derecho o incluso el punto medio?" La respuesta es que no existe una razón por la cual no se puedan utilizar esos puntos para calcular la altura de los rectángulos aproximados. De hecho, se puede subdividir el intervalo $a \leq x \leq b$ de forma arbitraria y elegir puntos arbitrarios en cada uno de los subintervalos, y aún así el resultado sería el mismo. Sin embargo, demostrar esta equivalencia es difícil, y está fuera del alcance del presente libro. ■

A continuación se muestra un ejemplo donde se calcula el área como el límite de una suma y luego se comprueba el valor del área empleando una fórmula geométrica.

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 5.3.1

Sea R la región bajo la gráfica de $f(x) = 2x + 1$ en el intervalo $1 \leq x \leq 3$, como se muestra en la figura 5.6*a*). Calcule el área de R como el límite de una suma.

Solución

La región R se muestra en la figura 5.6 aproximada por seis rectángulos, cada uno de ancho $\Delta x = \dfrac{3-1}{6} = \dfrac{1}{3}$. Los puntos extremos izquierdos en la división de $1 \leq x \leq 3$ son $x_1 = 1, x_2 = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$, y de forma similar, $x_3 = \dfrac{5}{3}$, $x_4 = 2, x_5 = \dfrac{7}{3}$, y $x_6 = \dfrac{8}{3}$. Los valores correspondientes de $f(x) = 2x + 1$ se dan en la siguiente tabla:

x_j	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	2	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$
$f(x_j) = 2x_j + 1$	3	$\frac{11}{3}$	$\frac{13}{3}$	5	$\frac{17}{3}$	$\frac{19}{3}$

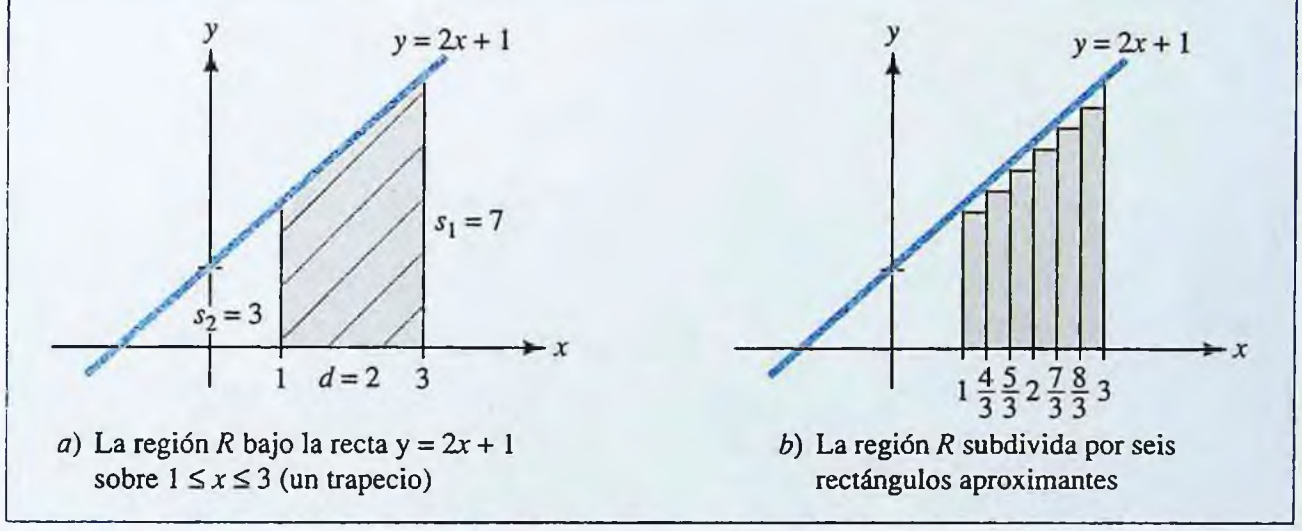
Entonces, el área A de la región R se aproxima mediante la suma

$$S = \left(3 + \frac{11}{3} + \frac{13}{3} + 5 + \frac{17}{3} + \frac{19}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{28}{3} \approx 9.333$$

REPASO

Justo-a-tiempo

Un trapecio es un polígono de cuatro lados con al menos dos lados paralelos.



a) La región R bajo la recta $y = 2x + 1$ sobre $1 \leq x \leq 3$ (un trapecio)

b) La región R subdivida por seis rectángulos aproximantes

FIGURA 5.6 Aproximación del área bajo una recta usando rectángulos.

Si continúa la subdivisión de la región R, empleando cada vez más rectángulos, las sumas aproximantes correspondientes, S_n, tienden al área exacta de la región, A. La suma ya calculada para $n = 6$ aparece en la siguiente tabla, junto con las sumas correspondientes para $n = 10$, 20, 50, 100 y 500. (Si tiene acceso a una computadora o a una calculadora programable, trate de escribir un programa para generar cualquiera de tales sumas para n dado.)

Número de divisiones n	6	10	20	50	100	500
Suma de la aproximación S_n	9.333	9.600	9.800	9.920	9.960	9.992

Los números en el renglón inferior de la tabla parecen aproximarse a 10 cuando n crece. Entonces, es razonable deducir que la región R tiene un área

$$A = \lim_{n \to +\infty} S_n = 10$$

www.FreeLibros.com

Observe en la figura 5.6*a* que la región R es un trapecio con un ancho $d = 3 - 1 = 2$, con lados paralelos de longitudes

$$s_1 = 2(3) + 1 = 7 \quad \text{y} \quad s_2 = 2(1) + 1 = 3$$

El trapecio tiene un área

$$A = \frac{1}{2}(s_1 + s_2)d = \frac{1}{2}(7 + 3)(2) = 10$$

que es el mismo resultado que se obtuvo utilizando el procedimiento del límite de la suma.

Integral definida

El área es sólo una de las muchas magnitudes que se pueden expresar como el límite de una suma. Para manejar esos casos, incluyendo aquellos para los cuales *no* se requiere $f(x) \geq 0$ y en los que tampoco se emplean puntos extremos izquierdos, se requiere de una terminología y notación que se introduce en la siguiente definición.

¡EXPLORE!

Introduzca en Y1 la función $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ y despliegue su gráfica empleando la pantalla [0, 4.7]1 por [−0.5, 1.5]0.5. Estime visualmente el área bajo la curva, desde $x = 2$ hasta $x = 3$, utilizando triángulos o rectángulos. Ahora use el procedimiento de integración numérica de su calculadora graficadora (tecla **CALC**, opción 7). ¿Qué tan aproximada fue su respuesta y por qué?

Integral definida ■ Sea $f(x)$ una función que es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$. Se subdivide el intervalo $a \leq x \leq b$ en n partes iguales, cada una con un ancho $\Delta x = \dfrac{b - a}{n}$, y se elige un número x_k en cada k-ésimo subintervalo, para $k = 1, 2, \ldots, n$. Se plantea la suma

$$[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\Delta x$$

llamada **suma de Riemann**.

Entonces, la **integral definida** de f en el intervalo $a \leq x \leq b$, denotada por $\int_a^b f(x)\,dx$, es el límite de la suma de Riemann cuando $n \to +\infty$; es decir,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\Delta x$$

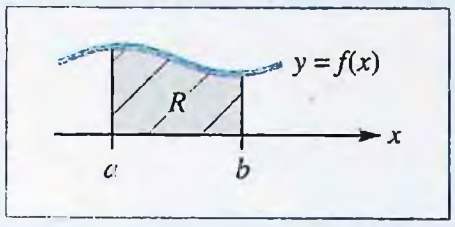
La función $f(x)$ recibe el nombre de **el integrando**, y los números a y b se conocen como los **límites inferior y superior de integración**, respectivamente. El proceso de calcular una integral definida se denomina **integración definida**.

Es sorprendente el hecho de que $f(x)$ sea continua en $a \leq x \leq b$ resulta suficiente para garantizar que el límite empleado para definir la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ existe, y es el mismo independientemente de cómo se elijan los puntos representativos, x_k, en los subintervalos.

El símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ utilizado para la integral definida es el mismo que el símbolo $\int f(x)\,dx$ para la integral indefinida, aunque la integral definida es un número específico mientras que la integral indefinida es una familia de funciones, las antiderivadas de f. Pronto se verá que estos dos conceptos aparentemente muy distintos están íntimamente relacionados. Ahora se presenta una forma condensada de la definición empleando la notación integral.

www.FreeLibros.com

Área como una integral definida ■ Si $f(x)$ es continua y $f(x) \geq 0$ en el intervalo $a \leq x \leq b$, entonces la región R bajo la curva $y = f(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$ tiene un área A dada por la integral definida $A = \int_a^b f(x)\,dx$.



Teorema fundamental del cálculo

Si el cálculo del límite de una suma fuera la única manera para evaluar una integral definida, el proceso de integración probablemente sería un poco más que una novedad matemática. Por fortuna, existe una forma más fácil de efectuar este cálculo, gracias al siguiente resultado notable que relaciona la integral definida con la antiderivación.

Teorema fundamental del cálculo ■ Si la función $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

donde $F(x)$ es cualquier antiderivada de $f(x)$ en $a \leq x \leq b$.

Al final de esta sección se verá un caso especial del teorema fundamental del cálculo. Cuando se aplica el teorema fundamental, se emplea la notación

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

NOTA Quizá usted se pregunte cómo el teorema fundamental del cálculo puede garantizar que si $F(x)$ es *cualquier* antiderivada de $f(x)$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Para verificar por qué esto es cierto, suponga que $G(x)$ es otra antiderivada. Entonces $G(x) = F(x) + C$ para una constante C, por tanto $F(x) = G(x) - C$ y

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= F(b) - F(a)\\ &= [G(b) - C] - [G(a) - C]\\ &= G(b) - G(a)\end{aligned}$$

porque se cancelan las C. Entonces, el valor es el mismo independientemente de qué antiderivada se use. ■

www.FreeLibros.com

En el ejemplo 5.3.2 se muestra el valor del teorema fundamental del cálculo para hallar la misma área que se estimó como el límite de una suma, en el ejemplo 5.3.1.

EJEMPLO | 5.3.2

Utilice el teorema fundamental del cálculo para determinar el área de la región bajo la recta $y = 2x + 1$ sobre el intervalo $1 \leq x \leq 3$.

Solución

El área está dada por la integral definida $A = \int_1^3 (2x + 1)\, dx$. Puesto que $F(x) = x^2 + x$ es una antiderivada de $f(x) = 2x + 1$, según el teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$A = \int_1^3 (2x + 1)\,dx = x^2 + x \Big|_1^3$$
$$= [(3)^2 + (3)] - [(1)^2 + (1)] = 10$$

como se estimó en el ejemplo 5.3.1.

¡EXPLORE!

Teniendo como referencia al ejemplo 5.3.3, use el procedimiento de integración numérica de su calculadora para confirmar numéricamente que

$$\int_0^1 (x^3 + 1)\, dx = 1.25>$$

EJEMPLO | 5.3.3

Determine el área de la parcela de tierra descrita en la introducción de esta sección; es decir, el área bajo la curva $y = x^3 + 1$ en el intervalo $0 \leq x \leq 1$, donde x y y están en cientos de pies. Si la tierra en la parcela se avalúa a \$12 por pie cuadrado, ¿cuál es el valor total de la parcela?

Solución

El área de la parcela está dada por la integral definida

$$A = \int_0^1 (x^3 + 1)\, dx$$

Como $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x$, es una antiderivada de $f(x) = x^3 + 1$, según el teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$A = \int_0^1 (x^3 + 1)\, dx = \frac{1}{4}x^4 + x \Big|_0^1$$
$$= \left[\frac{1}{4}(1)^4 + 1\right] - \left[\frac{1}{4}(0)^4 + 0\right] = \frac{5}{4}$$

Como x y y están medidas en cientos de pies, el área total es

$$\frac{5}{4} \times 100 \times 100 = 12\,500 \text{ pies}^2$$

y como la tierra en la parcela vale \$12 por pie cuadrado, el valor total de la parcela es

$$V = (\$12/\text{pie}^2)(12\,500 \text{ pies}^2) = \$150\,000$$

EJEMPLO | 5.3.4

Evalúe la integral definida $\int_0^1 (e^{-x} + \sqrt{x})\, dx$.

www.FreeLibros.com

Solución

Una antiderivada de $f(x) = e^{-x} + \sqrt{x}$ es $F(x) = -e^{-x} + \frac{2}{3}x^{3/2}$, por tanto la integral definida es

$$\begin{aligned}\int_0^1 (e^{-x} + \sqrt{x})\, dx &= \left(-e^{-x} + \frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Big|_0^1 \\ &= \left[-e^{-1} + \frac{2}{3}(1)^{3/2}\right] - \left[-e^{0} + \frac{2}{3}(0)\right] \\ &= \frac{5}{3} - \frac{1}{e} \approx 1.299\end{aligned}$$

La definición de la integral definida se originó por el cálculo de un área, que es una magnitud no negativa. Sin embargo, como la definición no requiere que $f(x) \geq 0$, es posible que una integral definida sea negativa, como se ilustra en el ejemplo 5.3.5.

EJEMPLO | 5.3.5

Evalúe $\int_1^4 \left(\frac{1}{x} - x^2\right) dx$.

Solución

Una antiderivada de $f(x) = \frac{1}{x} - x^2$ es $F(x) = \ln|x| - \frac{1}{3}x^3$, por tanto se tiene

$$\begin{aligned}\int_1^4 \left(\frac{1}{x} - x^2\right) dx &= \left(\ln|x| - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_1^4 \\ &= \left[\ln 4 - \frac{1}{3}(4)^3\right] - \left[\ln 1 - \frac{1}{3}(1)^3\right] \\ &= \ln 4 - 21 \approx -19.6137\end{aligned}$$

Reglas de integración

La siguiente lista de reglas se puede emplear para simplificar el cálculo de integrales definidas.

Reglas para integrales definidas

Sean f y g cualesquiera funciones continuas en $a \leq x \leq b$. Entonces,

1. **Regla del factor constante** $\int_a^b k\, f(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx$ para k constante
2. **Regla de la suma** $\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$
3. **Regla de la diferencia** $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$
4. $\int_a^a f(x)\, dx = 0$
5. $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$
6. **Regla aditiva de la integral definida** $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$

www.FreeLibros.com

En realidad las reglas 4 y 5 son casos especiales de la definición de la integral definida. Las primeras tres reglas se pueden demostrar empleando el teorema fundamental del cálculo junto con una regla análoga para integrales indefinidas. Por ejemplo, para verificar la regla del factor constante, suponga que $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$. Entonces, de acuerdo con la regla del factor constante para integrales indefinidas, $kF(x)$ es una antiderivada de $kf(x)$ y según el teorema fundamental del cálculo se tiene que

$$\int_a^b kf(x)\,dx = kF(x)\Big|_a^b$$

$$= kF(b) - kF(a) = k[F(b) - F(a)]$$

$$= k\int_a^b f(x)\,dx$$

En el problema 64 se pide verificar la regla de la suma utilizando un razonamiento similar.

En el caso donde $f(x) \geq 0$ en el intervalo $a \leq x \leq b$, la regla aditiva de la integral definida es un reflejo geométrico del hecho de que el área bajo la curva $y = f(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$ es la suma de las áreas bajo $y = f(x)$ en los subintervalos $a \leq x \leq c$ y $c \leq x \leq b$, como se ilustra en la figura 5.7. Sin embargo, es importante tener en cuenta que la regla aditiva de la integral definida es valida aún si $f(x)$ *no* satisface $f(x) \geq 0$ en $a \leq x \leq b$.

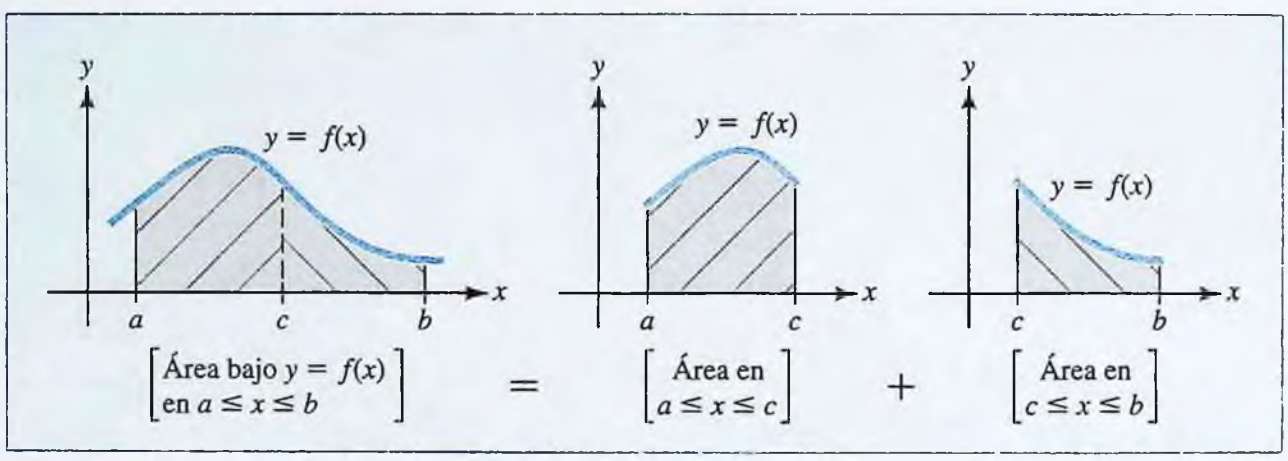


FIGURA 5.7 Regla aditiva de la integral definida (caso donde $f(x) \geq 0$).

EJEMPLO | 5.3.6

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones que son continuas en el intervalo $-2 \leq x \leq 5$ y que satisfacen

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = 3 \qquad \int_{-2}^{5} g(x)\,dx = -4 \qquad \int_{3}^{5} f(x)\,dx = 7$$

Utilice esta información para evaluar cada una de estas integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_{-2}^{5} [2f(x) - 3g(x)]\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$

Solución

a) Combinando las reglas de la diferencia y del factor constante, y sustituyendo la información dada se tiene que

$$\int_{-2}^{5} [2f(x) - 3g(x)]\,dx = \int_{-2}^{5} 2f(x)\,dx - \int_{-2}^{5} 3g(x)\,dx \qquad \textit{regla de la diferencia}$$

www.FreeLibros.com

$$= 2\int_{-2}^{5} f(x)\,dx - 3\int_{-2}^{5} g(x)\,dx \quad \textit{regla del factor constante}$$

$$= 2(3) - 3(-4) = 18 \quad \textit{sustituyendo la información dada}$$

b) Según la regla aditiva de la integral definida

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx = \int_{-2}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{5} f(x)\,dx$$

Resolviendo esta ecuación para la integral requerida $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$ y sustituyendo la información dada, se obtiene

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,dx = \int_{-2}^{5} f(x)\,dx - \int_{3}^{5} f(x)\,dx$$

$$= 3 - 7 = -4$$

Sustitución en una integral definida

Cuando se usa una sustitución $u = g(x)$ para evaluar una integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, se puede proceder de cualquiera de estas dos maneras:

1. Usar la sustitución para determinar una antiderivada $F(x)$ de $f(x)$, y luego evaluar la integral definida empleando el teorema fundamental del cálculo.
2. Usar la sustitución para expresar el integrando y dx en términos de u y du, y reemplazar los límites originales de integración, a y b, por los límites transformados $c = g(a)$ y $d = g(b)$. Luego calcular la integral original aplicando el teorema fundamental del cálculo a la integral definida transformada.

Estos procedimientos se muestran en los ejemplos 5.3.7 y 5.3.8.

REPASO

Justo-a-tiempo

Únicamente se necesita un miembro de la familia de antiderivadas de $f(x)$ para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ mediante el teorema fundamental del cálculo. Por tanto, el "+C" se puede dejar fuera de las integraciones intermedias.

EJEMPLO | 5.3.7

Calcule $\int_0^1 8x(x^2 + 1)^3\,dx$.

Solución

El integrando es un producto en el que uno de los factores, $8x$, es un múltiplo de la derivada de la expresión $x^2 + 1$, que aparece en el otro factor. Esto sugiere que se introduzca $u = x^2 + 1$. Entonces, $du = 2x\,dx$, y por tanto

$$\int 8x(x^2 + 1)^3\,dx = \int 4u^3\,du = u^4$$

Los límites de integración, 0 y 1, se refieren a la variable x y no a u. Por tanto, se puede proceder en una de las dos formas. Se puede reescribir la antiderivada en términos de x, o bien se pueden determinar los valores de u que corresponden a $x = 0$ y $x = 1$.

Si se elige la primera alternativa, se obtiene que

$$\int 8x(x^2 + 1)^3\,dx = u^4 = (x^2 + 1)^4$$

y por tanto $\int_0^1 8x(x^2 + 1)^3\,dx = (x^2 + 1)^4\Big|_0^1 = 16 - 1 = 15$

www.FreeLibros.com

Si se elige la segunda alternativa, se debe tener en cuenta el hecho de que $u = x^2 + 1$ para calcular que $u = 1$ cuando $x = 0$, y $u = 2$ cuando $x = 1$. Por consiguiente,

$$\int_0^1 8x(x^2 + 1)^3\, dx = \int_1^2 4u^3\, du = u^4\Big|_1^2 = 16 - 1 = 15$$

¡EXPLORE!

Tomando como referencia al ejemplo 5.3.8, use una instrucción de graficación con la pantalla [0, 3]1 por [−4, 1]1 para graficar $f(x) = \ln x/x$. Explique en términos del área por qué la integral de $f(x)$ en $1/4 \le x \le 3$ es negativa.

EJEMPLO | 5.3.8

Evalúe $\int_{1/4}^{2} \left(\frac{\ln x}{x}\right) dx$.

Solución

Sea $u = \ln x$, por tanto $du = \frac{1}{x}\, dx$. Entonces

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \int \ln x \left(\frac{1}{x}\, dx\right) = \int u\, du$$
$$= \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

Entonces,

$$\int_{1/4}^{2} \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]\Big|_{1/4}^{2} = \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{1}{2}\left(\ln \frac{1}{4}\right)^2$$
$$= \frac{-3}{2}(\ln 2)^2 \approx -0.721$$

De forma alternativa, se emplea la sustitución $u = \ln x$ para transformar los límites de integración:

$$\text{cuando } x = \frac{1}{4}, \text{ entonces } u = \ln \frac{1}{4}$$
$$\text{cuando } x = 2, \text{ entonces } u = \ln 2$$

Sustituyendo, se tiene que

$$\int_{1/4}^{2} \frac{\ln x}{x}\, dx = \int_{\ln 1/4}^{\ln 2} u\, du = \frac{1}{2}u^2\Big|_{\ln 1/4}^{\ln 2}$$
$$= \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{1}{2}\left(\ln \frac{1}{4}\right)^2 \approx -0.721$$

Variación total

En ciertas aplicaciones se da la tasa de cambio $Q'(x)$ de una magnitud $Q(x)$ y se requiere calcular **la variación total** $Q(b) - Q(a)$ en $Q(x)$ cuando x varía de $x = a$ a $x = b$. Esto se hizo en la sección 5.1 resolviendo problemas con valor inicial (recuerde los ejemplos 5.1.5 al 5.1.8). Sin embargo, como $Q(x)$ es una antiderivada de $Q'(x)$, el teorema fundamental del cálculo permite calcular la variación total según la fórmula de la integración definida.

Variación total ■ Si $Q'(x)$ es continua en el intervalo $a \le x \le b$, entonces la **variación total** de $Q(x)$ cuando x varía de $x = a$ a $x = b$ está dado por

$$Q(b) - Q(a) = \int_a^b Q'(x)\, dx$$

www.FreeLibros.com

A continuación se presentan dos ejemplos sobre la variación total.

EJEMPLO | 5.3.9

En cierta fábrica, el costo marginal es $3(q - 4)^2$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es q unidades. ¿En cuánto se incrementa el costo total de manufactura si el nivel de producción se aumenta de 6 a 10 unidades?

Solución

Sea $C(q)$ el costo total de producción de q unidades. Entonces el costo marginal es la derivada $\frac{dC}{dq} = 3(q - 4)^2$, y el incremento del costo si la producción se aumenta de 6 a 10 unidades está dado por la integral definida

$$\begin{aligned} C(10) - C(6) &= \int_6^{10} \frac{dC}{dq}\, dq \\ &= \int_6^{10} 3(q-4)^2\, dq = (q-4)^3 \Big|_6^{10} \\ &= (10-4)^3 - (6-4)^3 \\ &= \$208 \end{aligned}$$

EJEMPLO | 5.3.10

Una proteína con masa m (gramos) se desintegra en aminoácidos a una tasa dada por

$$\frac{dm}{dt} = \frac{-30}{(t+3)^2} \quad \text{g/h}$$

¿Cuál es la variación total de la masa de la proteína durante las 2 primeras horas?

Solución

La variación total está dada por la integral definida

$$m(2) - m(0) = \int_0^2 \frac{dm}{dt}\, dt = \int_0^2 \frac{-30}{(t+3)^2}\, dt$$

Si se sustituye $u = t + 3$, $du = dt$, y se cambian los límites de integración apropiadamente ($t = 0$ se convierte en $u = 3$ y $t = 2$ se convierte en $u = 5$), se encuentra que

$$\begin{aligned} m(2) - m(0) &= \int_0^2 \frac{-30}{(t+3)^2}\, dt = \int_3^5 -30u^{-2}\, du \\ &= -30\left(\frac{u^{-1}}{-1}\right)\Big|_3^5 = 30\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right] \\ &= -4 \end{aligned}$$

Entonces, la masa de la proteína tiene una variación total de 4 g durante las 2 primeras horas.

Justificación del teorema fundamental del cálculo para el caso del área

Esta sección termina con una justificación del teorema fundamental del cálculo para el caso donde $f(x) \geq 0$. Aquí, la integral definida $\int_a^b f(x)\, dx$, representa el área bajo la curva $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Para una x fija entre a y b, sea $A(x)$ el

www.FreeLibros.com

área bajo $y = f(x)$ en el intervalo $[a, x]$. Entonces el cociente incremental de $A(x)$ es

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h}$$

y la expresión $A(x + h) - A(x)$ en el numerador sólo es el área bajo la curva $y = f(x)$ entre x y $x + h$. Si h es pequeña, esta área es aproximadamente la misma que el área del rectángulo con altura $f(x)$ y ancho h, como se indica en la figura 5.8. Es decir,

$$A(x + h) - A(x) \approx f(x)h$$

o bien,

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} \approx f(x)$$

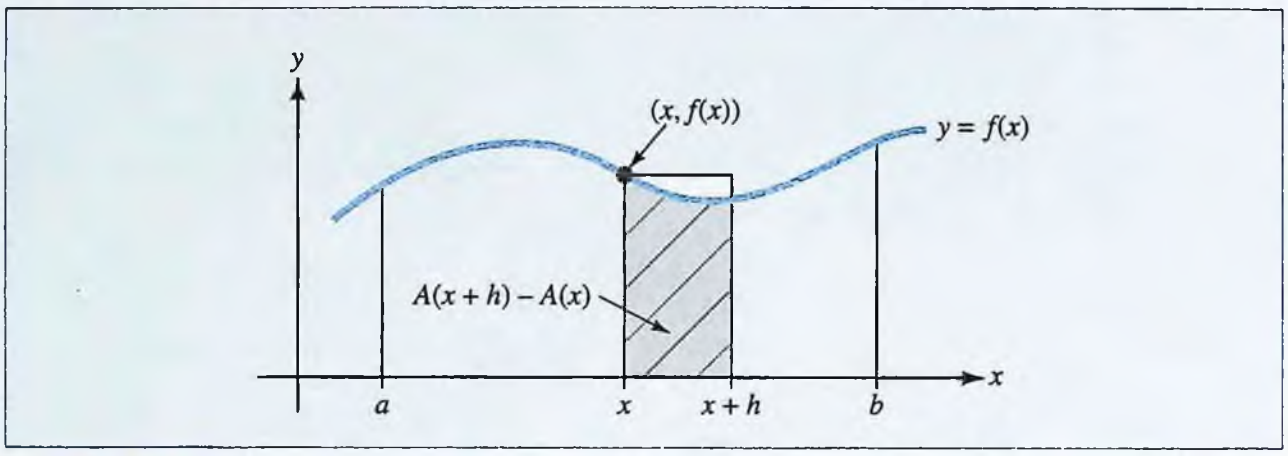


FIGURA 5.8 Área $A(x + h) - A(x)$.

Cuando h tiende a 0, el error en la aproximación se aproxima a 0, y se llega a que

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x + h) - A(x)}{h} = f(x)$$

Pero, según la definición de derivada,

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x + h) - A(x)}{h} = A'(x)$$

así que

$$A'(x) = f(x)$$

En otras palabras, $A(x)$ es una antiderivada de $f(x)$.

Sea $F(x)$ cualquier otra antiderivada de $f(x)$. Entonces, según la propiedad fundamental de las antiderivadas (sección 5.1), se tiene que

$$A(x) = F(x) + C$$

para alguna constante C y todas las x en el intervalo $a \leq x \leq b$. Como $A(x)$ representa el área bajo $y = f(x)$ entre a y x, es lógico que $A(a)$, el área entre a y a, sea 0, de modo que

www.FreeLibros.com

$$A(a) = 0 = F(a) + C$$

y $C = -F(a)$. El área bajo $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es $A(b)$, que satisface

$$A(b) = F(b) + C = F(b) - F(a)$$

Finalmente, como el área bajo $y = f(x)$ para $a \le x \le b$ también está dada por la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, se sigue que

$$\int_a^b f(x)\,dx = A(b) = F(b) - F(a)$$

como afirma el teorema fundamental del cálculo.

PROBLEMAS | 5.3

En los problemas 1 a 30 evalúe la integral definida dada empleando el teorema fundamental del cálculo.

1. $\int_{-1}^{2} 5\,dx$

2. $\int_{-2}^{1} \pi\,dx$

3. $\int_{0}^{5} (3x + 2)\,dx$

4. $\int_{1}^{4} (5 - 2t)\,dt$

5. $\int_{-1}^{1} 3t^4\,dt$

6. $\int_{1}^{4} 2\sqrt{u}\,du$

7. $\int_{-1}^{1} (2u^{1/3} - u^{2/3})\,du$

8. $\int_{4}^{9} x^{-3/2}\,dx$

9. $\int_{0}^{1} e^{-x}(4 - e^{x})\,dx$

10. $\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{e^{x}} - \frac{1}{e^{-x}}\right) dx$

11. $\int_{0}^{1} (x^4 + 3x^3 + 1)\,dx$

12. $\int_{-1}^{0} (-3x^5 - 3x^2 + 2x + 5)\,dx$

13. $\int_{2}^{5} (2 + 2t + 3t^2)\,dt$

14. $\int_{1}^{9} \left(\sqrt{t} - \frac{4}{\sqrt{t}}\right) dt$

15. $\int_{1}^{3} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

16. $\int_{0}^{\ln 2} (e^{t} - e^{-t})\,dt$

17. $\int_{-3}^{-1} \frac{t + 1}{t^3}\,dt$

18. $\int_{1}^{6} x^2(x - 1)\,dx$

19. $\int_{1}^{2} (2x - 4)^4\,dx$

20. $\int_{-3}^{0} (2x + 6)^4\,dx$

21. $\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{6t + 1}}\,dt$

22. $\int_{1}^{2} \frac{x^2}{(x^3 + 1)^2}\,dx$

23. $\int_{0}^{1} (t^3 + t)\sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}\,dt$

24. $\int_{0}^{1} \frac{6x}{x^2 + 1}\,dx$

www.FreeLibros.com

25. $\int_2^{e+1} \frac{x}{x-1}\,dx$

26. $\int_1^2 (t+1)(t-2)^6\,dt$

27. $\int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

28. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x}\,dx$

29. $\int_{1/3}^{1/2} \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

30. $\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}-1)^{3/2}}{\sqrt{x}}\,dx$

En los problemas 31 a 36 $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en el intervalo $-3 \le x \le 2$ y satisfacen

$$\int_{-3}^{2} f(x)\,dx = 5 \qquad \int_{-3}^{2} g(x)\,dx = -2 \qquad \int_{-3}^{1} f(x)\,dx = 0 \qquad \int_{-3}^{1} g(x)\,dx = 4$$

En cada caso use esta información, junto con las reglas para integrales definidas para evaluar la integral indicada.

31. $\int_{-3}^{2} [-2f(x) + 5g(x)]\,dx$

32. $\int_1^2 g(x)\,dx$

33. $\int_4^4 g(x)\,dx$

34. $\int_2^{-3} f(x)\,dx$

35. $\int_1^2 [3f(x) + 2g(x)]\,dx$

36. $\int_{-3}^{1} [2f(x) + 3g(x)]\,dx$

En los problemas 37 a 42 determine el área de la región R que yace bajo la curva dada $y = f(x)$ en el intervalo $a \le x \le b$.

37. Bajo $y = x^4$, sobre $-1 \le x \le 2$

38. Bajo $y = \sqrt{x}\,(x+1)$, sobre $0 \le x \le 4$

39. Bajo $y = e^{2x}$, sobre $0 \le x \le \ln 3$

40. Bajo $y = \frac{3}{x}$, sobre $1 \le x \le e^2$

41. Bajo $y = (3x+4)^{1/2}$, sobre $0 \le x \le 4$

42. Bajo $y = xe^{-x^2}$, sobre $0 \le x \le 3$

43. VALOR DE LA TIERRA Se estima que dentro de t años el valor de cierta parcela de tierra crecerá a una tasa de $V'(t)$ dólares por año. Determine una expresión para la cantidad en que crecerá el valor de la tierra durante los próximos 5 años.

44. ADMISIÓN A EVENTOS Los promotores de una feria del condado estiman que t horas después de que se abran las puertas a las 9:00 a.m., los visitantes ingresarán a la feria a una tasa de $N'(t)$ personas por hora. Determine una expresión para el número de personas que ingresará a la feria entre las 11:00 a.m. y la 1:00 p.m.

45. COSTO DE ALMACENAMIENTO Un vendedor minorista recibe un embarque de 12 000 libras de frijol que se consumirán a una tasa constante de 300 libras por semana. Si el costo de almacenamiento del frijol es de 0.2 centavos por libra por semana, ¿cuánto tendrá que pagar el vendedor por costos de almacenamiento durante las próximas 40 semanas?

46. CONTAMINACIÓN DEL AGUA Se estima que dentro de t semanas la población de cierta comunidad a orillas de un lago cambiará a una tasa de $0.6t^2 + 0.2t + 0.5$ miles de habitantes por año. Los ecologistas han determinado que el nivel de contaminación en el lago crece a una tasa de aproximadamente 5 unidades por cada 1 000 habitantes. ¿En cuánto crecerá la contaminación en el lago durante los próximos 2 años?

47. CONTAMINACIÓN DEL AIRE Un estudio ambiental de cierta comunidad sugiere que dentro de t años el nivel $L(t)$ de monóxido de carbono en el aire cambiará a una tasa de $L'(t) = 0.1t + 0.1$ partes por millón (ppm) al año. ¿En cuánto cambiará el nivel de contaminación durante los próximos 3 años?

www.FreeLibros.com

48. COSTO MARGINAL El costo marginal de producción de cierto artículo es $C'(q) = 6q + 1$ dólares por unidad cuando se producen q unidades.

a) ¿Cuál es el costo total de producción de las primeras 10 unidades?

b) ¿Cuál es el costo de producción de las *siguientes* 10 unidades?

49. CRECIMIENTO NETO DE LA POBLACIÓN Un estudio indica que dentro t meses la población de cierta ciudad crecerá a una tasa de $P'(t) = 5 + 3t^{2/3}$ habitantes por mes. ¿En cuánto se incrementará la población de la ciudad durante los próximos 8 meses?

50. PRODUCCIÓN DE PETRÓLEO Cierto pozo petrolero que produce 400 barriles de crudo por mes se secará en 2 años. El precio del crudo actualmente es de \$25 por barril y se espera que aumente a una tasa constante de 3 centavos por barril al mes. Si el petróleo se vende tan pronto como se extrae del suelo, ¿cuál será el ingreso total futuro del pozo?

51. AGRICULTURA Se estima que dentro de t días el cultivo de un granjero crecerá a una tasa de $0.3t^2 + 0.6t + 1$ busheles por día. ¿Cuánto crecerá el valor del cultivo durante los próximos 5 días si el precio en el mercado permanece fijo a \$3 por bushel?

52. INGRESO POR VENTAS Se estima que la demanda del producto de un fabricante crece exponencialmente a una tasa de 2% anual. Si la demanda actual es de 5 000 unidades por año, y si el precio permanece fijo a \$400 por unidad, ¿cuál es el ingreso que recibirá el fabricante por la venta del producto durante los próximos 2 años?

53. PRODUCCIÓN La Corporación Bejax ha preparado una línea de producción para fabricar un nuevo tipo de teléfonos celulares. La tasa de producción de los teléfonos es

$$\frac{dP}{dt} = 1\,500\left(2 - \frac{t}{2t+5}\right) \text{ unidades/mes}$$

¿Cuántos teléfonos se producen durante el tercer mes?

54. PUBLICIDAD Una agencia de publicidad inicia una campaña para promover un producto nuevo, y determina que t días después, el número de personas $N(t)$ que ha escuchado acerca del producto cambia a una tasa dada por personas por día

$$N'(t) = 5t^2 - \frac{0.04t}{t^2+3} \text{ personas por día}$$

¿Cuántas personas han oido sobre el producto durante la primera semana? ¿Cuántas personas durante la segunda semana?

55. CONCENTRACIÓN DE UN MEDICAMENTO La concentración de un medicamento en la sangre de un paciente t horas después de una inyección disminuye a una tasa de

$$C'(t) = \frac{-0.33t}{\sqrt{0.02t^2 + 10}} \text{ mg/cm}^3 \text{ por hora}$$

¿En cuánto cambia la concentración en las primeras 4 horas después de la inyección?

56. ESPECIES EN PELIGRO DE EXTINCIÓN Un estudio conducido por un grupo ambientalista en el año 2000 determina que dentro de t años, la población de cierta especie de ave en peligro de extinción disminuirá a una tasa de $P'(t) = -0.75t\sqrt{10 - 0.2t}$ individuos por año. ¿En cuánto se espera que cambie la población durante la década 2000-2010?

57. DEPRECIACIÓN El valor de reventa de cierta máquina industrial disminuye en un periodo de 10 años a una tasa que cambia con el tiempo. Cuando la máquina tiene t años, la tasa a la cual cambia su valor es $220(x - 10)$ dólares por año. ¿En cuánto se depreciará la máquina durante el segundo año?

58. CONSUMO DE AGUA El administrador de la ciudad de Paloma Linda estima que el agua se consume en su comunidad a una tasa de $C'(t) = 10 + 0.3e^{0.03t}$ mil millones de galones por año, donde $C(t)$ es el consumo de agua t años después del año 2000. ¿Cuánta agua consumirá la comunidad durante la década de 2000-2010?

59. CAMBIO EN BIOMASA Una proteína con masa m (gramos) se desintegra en aminoácidos a la tasa dada por

$$\frac{dm}{dt} = \frac{-2}{t+1} \text{ g/h}$$

¿Cuánta más proteína hay después de 2 horas que después de 5 horas?

60. CAMBIO EN BIOMASA Responda la pregunta del problema 59 si la tasa de desintegración está dada por

$$\frac{dm}{dt} = -(0.1t + e^{0.1t})$$

61. TASA DE APRENDIZAJE En un experimento sobre aprendizaje se proporciona a los sujetos una serie de hechos que deben memorizar, y se determina que, t minutos después del inicio del experimento, el sujeto promedio aprende a una

www.FreeLibros.com

tasa de

$$L'(t) = \frac{4}{\sqrt{t+1}} \text{ hechos por minuto,}$$

donde $L(t)$ es el número total de hechos memorizados en el tiempo t. Aproximadamente ¿cuántos hechos aprende el sujeto promedio durante los segundos 5 minutos (entre $t = 5$ y $t = 10$)?

62. DISTANCIA Y VELOCIDAD Un conductor viajando a una velocidad constante de 45 mph, decide acelerar de tal forma que su velocidad t horas después es $v(t) = 45 + 12t$ mph. ¿Cuánto recorre en las primeras 2 horas?

63. MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL Se lanza una pelota hacia arriba desde la parte superior de un edificio, y t segundos después ésta tiene una velocidad $v(t) = -32t + 80$ pies/s. ¿Cuál es la diferencia en la posición de la pelota después de 3 segundos?

64. Compruebe la regla de la suma para integrales definidas; es decir, si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo $a \le x \le b$, entonces

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

65. Se ha visto que la integral definida se puede emplear para calcular el área bajo la curva, pero la fórmula del "área como una integral" funciona de ambos sentidos.

a) Calcule $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$. [*Sugerencia:* observe que la integral es parte del área dentro del círculo $x^2 + y^2 = 1$.]

b) Calcule $\int_1^2 \sqrt{2x - x^2}\,dx$. [*Sugerencia:* Dibuje la gráfica de $y = \sqrt{2x - x^2}$ y busque una solución geométrica como en el inciso *a*).]

66. Dada la función de $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x+1}$, aproxime el valor de la integral $\int_0^2 f(x)\,dx$ completando los siguientes pasos:

a) Determine los números x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5 que subdividen el intervalo $0 \le x \le 2$ en cuatro subintervalos iguales. Use estos números para formar cuatro rectángulos que aproximen el área bajo la curva $y = f(x)$ sobre $0 \le x \le 2$.

b) Estime el valor de la integral dada calculando la suma de las áreas de los cuatro rectángulos aproximados en el inciso *a*).

c) Repita los incisos *a*) y *b*) con ocho subintervalos en lugar de cuatro.

SECCIÓN 5.4 | Aplicaciones de la integración definida: área entre curvas y valor promedio

Se ha visto que el área se puede expresar como un tipo especial de límite de una suma, llamada la integral definida, y luego se puede calcular aplicando el teorema fundamental del cálculo. Este procedimiento, denominado **integración definida,** se introdujo a través del cálculo de áreas porque el área es fácil de ver, pero hay muchas aplicaciones distintas al área en las cuales el proceso de integración tiene un papel importante.

En esta sección se amplían las ideas introducidas en la sección 5.3 para determinar el área entre dos curvas y el valor promedio de una función. Como parte de nuestro estudio del área entre curvas, se estudiará un concepto socioeconómico importante llamado curva de Lorentz, que se emplea para medir la riqueza relativa en una sociedad.

Aplicaciones de la integral definida

De forma intuitiva, la integración definida se puede considerar como un proceso que "acumula" un número infinito de piezas pequeñas de una cantidad para obtener la cantidad total. Ahora se presenta una descripción paso a paso de cómo emplear este proceso en las aplicaciones.

www.FreeLibros.com

Procedimiento para utilizar la integración definida en las aplicaciones

Para emplear la integración definida con el fin de "acumular" una cantidad Q sobre un intervalo $a \le x \le b$, se procede como sigue:

Paso 1. Se divide el intervalo $a \le x \le b$ en n subintervalos iguales, cada uno con longitud $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Se elige un número x_j del j-ésimo subintervalo, para $j = 1, 2, \ldots, n$.

Paso 2. Se aproximan partes pequeñas de la cantidad Q mediante productos de la forma $f(x_j)\Delta x$, donde $f(x)$ es una función apropiada, que es continua en $a \le x \le b$.

Paso 3. Se suman los productos aproximados individuales para estimar la cantidad total Q por medio de la suma de Riemann

$$[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\,\Delta x$$

Paso 4. Se convierte en exacta la aproximación del paso 3, tomando el límite de la suma de Riemann cuando $n \to +\infty$, para expresar Q como una integral definida; es decir,

$$Q = \lim_{n \to +\infty} [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

Luego se usa el teorema fundamental del cálculo para calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ y de esta forma obtener la cantidad requerida Q.

REPASO

Justo-a-tiempo

No hay una razón especial para usar "j" al denotar el índice en la suma. Los índices usados con más frecuencia son i, j, y k.

NOTACIÓN ***Notación de la suma*** Se puede emplear la *notación de la suma* para representar las sumas de Riemann que aparecen cuando se modelan magnitudes empleando la integración definida. Concretamente, para describir la suma

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

es suficiente especificar el término general de la suma, a_j, e indicar que se sumarán n términos con esa forma, iniciando con el término donde $j = 1$ y terminando con $j = n$. En este procedimiento es habitual usar la letra griega mayúscula sigma (Σ) y escribir la suma como $\sum_{j=1}^{n} a_j$. Entonces,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

En particular, la suma de Riemann

$$[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\,\Delta x$$

se puede escribir en forma condensada

$$\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\,\Delta x$$

De esta manera, el límite

$$\lim_{n \to +\infty} [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

www.FreeLibros.com

empleado para definir la integral definida, se puede expresar como

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

En el apéndice A se puede encontrar un repaso de la notación de la suma, incluyendo ejemplos. ■

Área entre dos curvas En ciertas aplicaciones prácticas es útil representar una cantidad de interés en términos del área entre dos curvas. Primero, se supone que f y g son continuas, no negativas [es decir, $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$], y satisfacen $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$, como se muestra en la figura 5.9*a*).

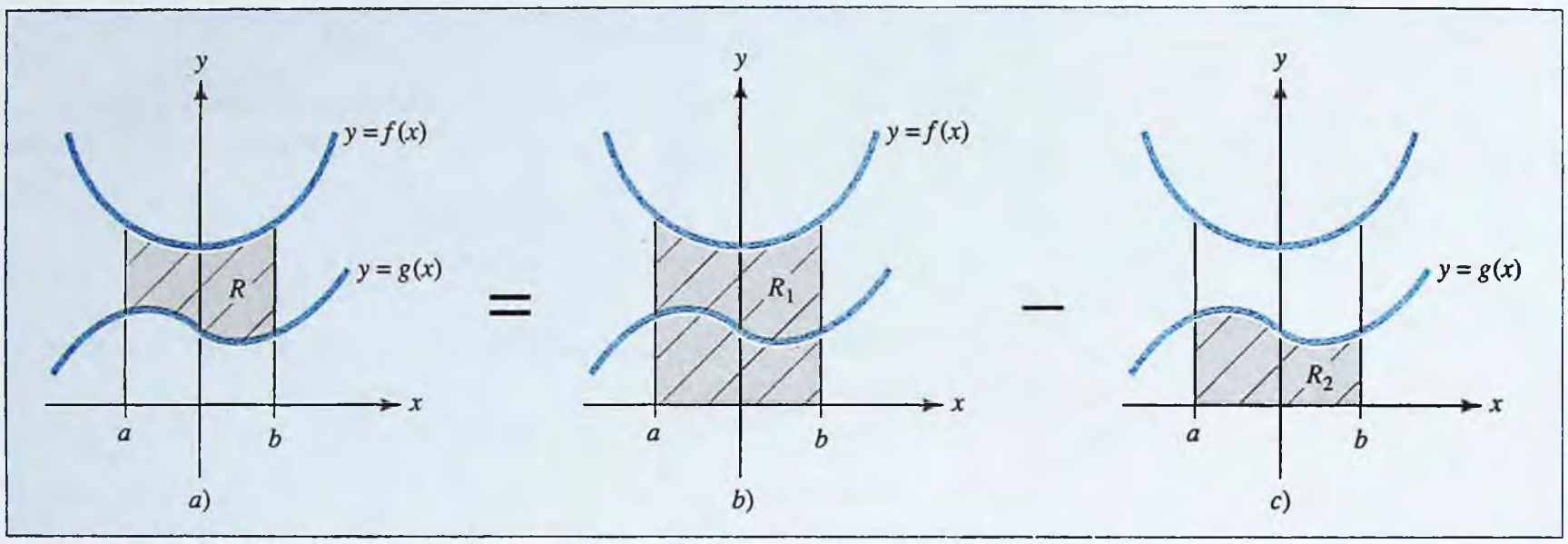


FIGURA 5.9 Área de R = área de R_1 − área de R_2.

Entonces, para determinar el área de la región R comprendida entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, en el intervalo $a \leq x \leq b$, simplemente se resta el área bajo la curva de abajo, $y = g(x)$ (figura 5.9*c*), del área bajo la curva de arriba $y = f(x)$ (figura 5.9*b*), de tal forma que

$$\text{Área de } R = [\text{área bajo } y = f(x)] - [\text{área bajo } y = g(x)]$$

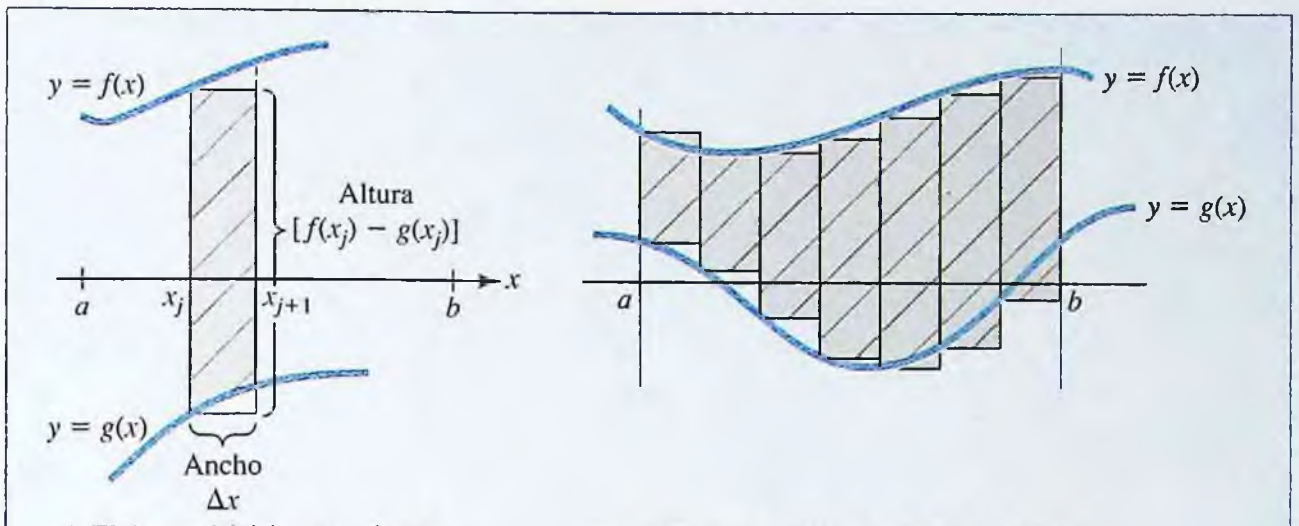
$$= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Esta fórmula también se aplica cuando $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$, incluso cuando las curvas $y = f(x)$ y $g(x)$ no estén ambas sobre el eje x. Se demostrará que esto es cierto empleando el procedimiento para la integración definida descrito en la página 397.

Paso 1. Se subdivide el intervalo $a \leq x \leq b$ en n subintervalos iguales, cada uno con ancho $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Para $j = 1, 2, \ldots, n$, sea x_j el punto extremo izquierdo del j-ésimo subintervalo.

Paso 2. Se construyen rectángulos aproximados con ancho Δx y altura $f(x_j) - g(x_j)$. Esto es posible puesto que $f(x) \geq g(x)$ en $a \leq x \leq b$, lo que garantiza que la altura no es negativa; es decir, $f(x_j) - g(x_j) \geq 0$. Para $j = 1, 2, \ldots, n$, el área $[f(x_j) - g(x_j)]\Delta x$ del j-ésimo rectángulo que ya se construyó es aproximadamente igual al área entre las dos curvas en el j-ésimo subintervalo, como se muestra en la figura 5.10*a*).

www.FreeLibros.com



a) El área del *j*-ésimo rectángulo aproxima el área entre las curvas en el *j*-ésimo subintervalo.

b) El área total entre las curvas se estima sumando las áreas de los rectángulos aproximantes.

FIGURA 5.10 Cálculo del área entre las curvas usando la integral definida.

Paso 3. Se suman las áreas aproximantes en cada subintervalo $[f(x_j) - g(x_j)]\,\Delta x$, para estimar el área total A entre las dos curvas en el intervalo $a \leq x \leq b$, mediante la suma de Riemann

$$A \approx [f(x_1) - g(x_1)]\,\Delta x + [f(x_2) - g(x_2)]\,\Delta x + \cdots + [f(x_n) - g(x_n)]\,\Delta x$$

$$= \sum_{j=1}^{n} [f(x_j) - g(x_j)]\,\Delta x$$

(Véase la figura 5.10*b*.)

Paso 4. Se hace exacta la aproximación tomando el límite de la suma de Riemann del paso 3, cuando $n \to +\infty$, para expresar el área total A entre las curvas como una integral definida; es decir,

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=1}^{n} [f(x_j) - g(x_j)]\,\Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

En resumen:

Área entre dos curvas ■ Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas y $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$, entonces el área A entre las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ en ese intervalo está dada por

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

EJEMPLO | 5.4.1

Determine el área de la región R acotada por las curvas $y = x^3$ y $y = x^2$.

Solución

Para encontrar los puntos donde se interceptan las curvas, resuelva las ecuaciones simultáneamente como sigue:

$$x^3 = x^2$$

$$x^3 - x^2 = 0 \quad \textit{restando } x^2 \textit{ en ambos miembros}$$

www.FreeLibros.com

REPASO

Justo-a-tiempo

Note que $x^2 \geq x^3$ para $0 \leq x \leq 1$. Por ejemplo,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 > \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$x^2(x-1) = 0 \qquad \textit{factorizando } x^2$$
$$x = 0,\ 1 \qquad \textit{uv} = 0 \textit{ si y sólo si } u = 0 \textit{ o } v = 0$$

Los puntos correspondientes (0, 0) y (1, 1) son los únicos puntos de intersección.

La región R acotada por las dos curvas está limitada arriba por $y = x^2$ y abajo por $y = x^3$, en el intervalo $0 \leq x \leq 1$ (véase la figura 5.11). El área de esta región está dada por la integral

$$A = \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1$$
$$= \left[\frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{4}(1)^4\right] - \left[\frac{1}{3}(0)^3 - \frac{1}{4}(0)^4\right] = \frac{1}{12}$$

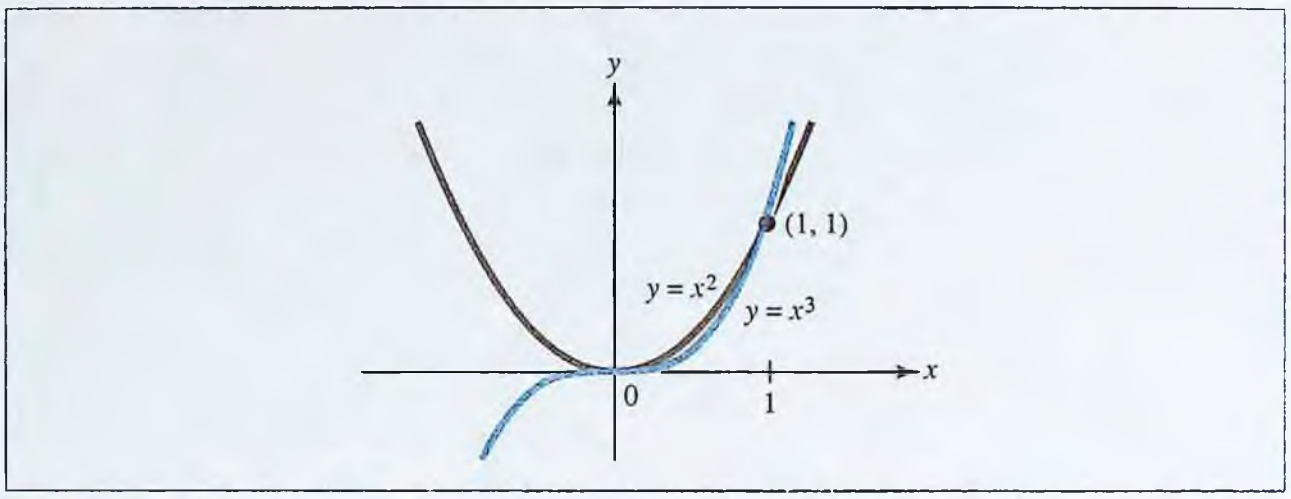


FIGURA 5.11 Región acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = x^3$.

En ciertas aplicaciones quizá se necesite determinar el área A entre las dos curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ en un intervalo $a \leq x \leq b$, donde $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq c$ pero $g(x) \geq f(x)$, para $c \leq x \leq b$. En este caso, se tiene

$$A = \underbrace{\int_a^c [f(x) - g(x)]\,dx}_{f(x) \geq g(x) \text{ en } a \leq x \leq c} + \underbrace{\int_c^b [g(x) - f(x)]\,dx}_{g(x) \geq f(x) \text{ en } c \leq x \leq b}$$

Considere el siguiente el ejemplo.

¡EXPLORE!

Tomando como referencia el ejemplo 5.4.2, introduzca Y1 = 4X y Y2 = X³ + 3X² en el editor de ecuaciones de su calculadora graficadora, empleando la pantalla [−6, 2]1 por [−25, 10]5. Determine los puntos de intersección de las dos curvas. Otra vista de esta área entre las dos curvas se logra haciendo Y3 = Y2 − Y1, deseleccionando (desactivando) Y1 y Y2 y graficando con [−4.5, 1.5]0.5 por [−5, 15]5. La integración numérica se puede aplicar a esta función diferencia.

EJEMPLO | 5.4.2

Determine el área de la región acotada por la recta $y = 4x$ y la curva $y = x^3 + 3x^2$.

Solución

Para encontrar dónde se intersecan la recta y la curva, se resuelven simultáneamente las ecuaciones como sigue:

$$x^3 + 3x^2 = 4x$$
$$x^3 + 3x^2 - 4x = 0 \qquad \textit{restando } 4x \textit{ en ambos miembros}$$
$$x(x^2 + 3x - 4) = 0 \qquad \textit{factorizando } x$$

www.FreeLibros.com

$$x(x-1)(x+4)=0 \qquad \textit{factorice } x^3+3x-4$$

$$x=0,\ 1,\ -4 \qquad \textit{uv}=0 \textit{ si y sólo si } u=0 \textit{ o bien } v=0$$

Los puntos de intersección correspondientes son (0, 0), (1, 4) y (−4, −16). En la figura 5.12 se muestran la curva y la recta.

En el intervalo $-4 \le x \le 0$, la curva está arriba de la recta, por tanto $x^3 + 3x^2 \ge 4x$, y la región acotada por la curva y la recta tiene área

$$A_1=\int_{-4}^{0}[(x^3+3x^2)-4x]\,dx=\frac{1}{4}x^4+x^3-2x^2\Big|_{-4}^{0}$$

$$=\left[\frac{1}{4}(0)^4+(0)^3-2(0)^2\right]-\left[\frac{1}{4}(-4)^4+(-4)^3-2(-4)^2\right]=32$$

En el intervalo $0 \le x \le 1$, la recta está arriba de la curva y la región acotada tiene área

$$A_2=\int_{0}^{1}[4x-(x^3+3x^2)]\,dx=2x^2-\frac{1}{4}x^4-x^3\Big|_{0}^{1}$$

$$=\left[2(1)^2-\frac{1}{4}(1)^4-(1)^3\right]-\left[2(0)^2-\frac{1}{4}(0)^4-(0)^3\right]=\frac{3}{4}$$

Por tanto, el área total acotada por la recta y la curva está dada por la suma

$$A=A_1+A_2=32+\frac{3}{4}=32.75$$

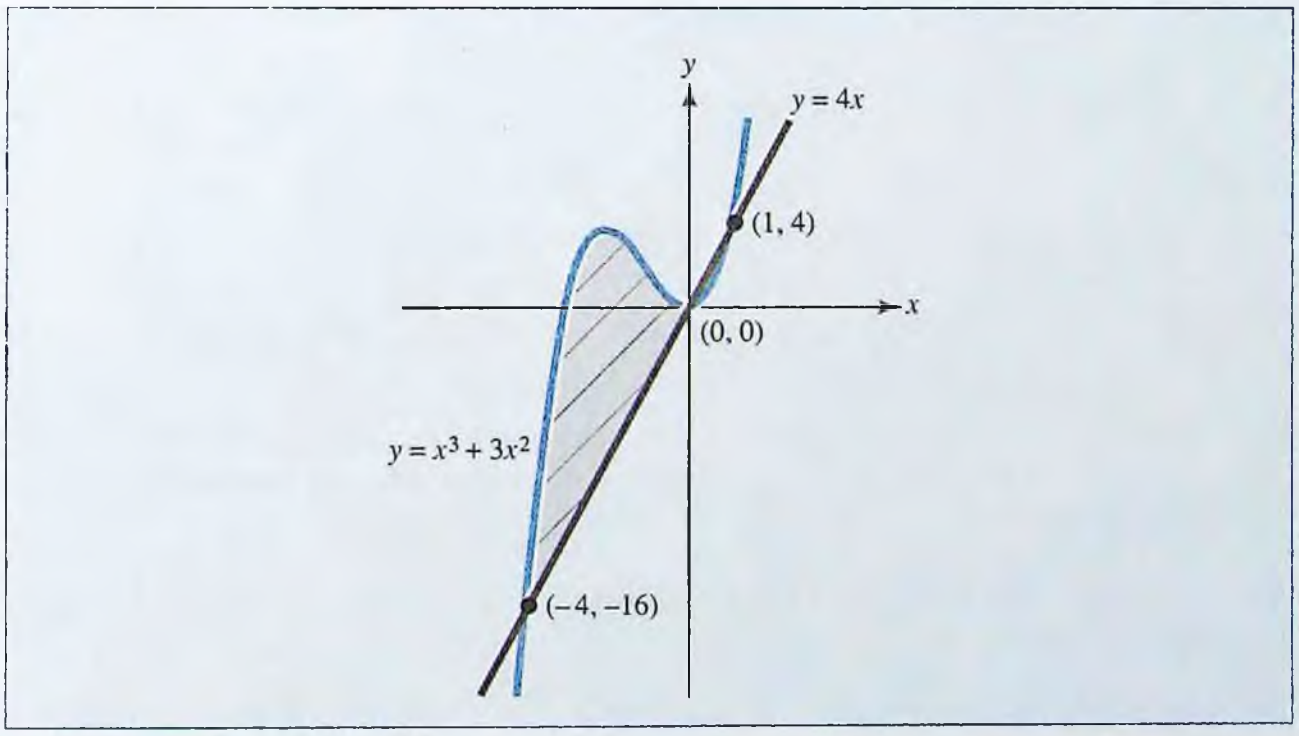


FIGURA 5.12 Región acotada por la recta $y = 4x$ y la curva $y = x^3 + 3x^2$.

www.FreeLibros.com

Exceso neto de utilidad

Algunas veces el área entre dos curvas se puede emplear como una forma de medir la cantidad de una magnitud que se ha acumulado durante un procedimiento particular. Por ejemplo, Suponga que dentro de t años, dos planes de inversión generarán utilidades $P_1(t)$ y $P_2(t)$, respectivamente, y que se espera que las tasas de rentabilidad respectivas, $P_1'(t)$ y $P_2'(t)$, satisfagan $P_2'(t) \geq P_1'(t)$ durante los próximos N años; es decir, en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq N$. Entonces $E(t) = P_2(t) - P_1(t)$ representa el **exceso de utilidad** del plan 2 sobre el plan 1 en el tiempo t, y el **exceso neto de utilidad** NE $= E(N) - E(0)$ en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq N$ está dado por la integral definida

$$\text{NE} = E(N) - E(0) = \int_0^N E'(t)\,dt$$

$$= \int_0^N [P_2'(t) - P_1'(t)]\,dt \qquad \textit{porque } E'(t) = [P_2(t) - P_1(t)]' = P_2'(t) - P_1'(t)$$

Esta integral se puede interpretar geométricamente como el área entre las curvas de las tasas de rentabilidad $y = P_1'(t)$ y $y = P_2'(t)$ como se muestra en la figura 5.13. En el ejemplo 5.4.3 se ilustra el cálculo del exceso neto de utilidad.

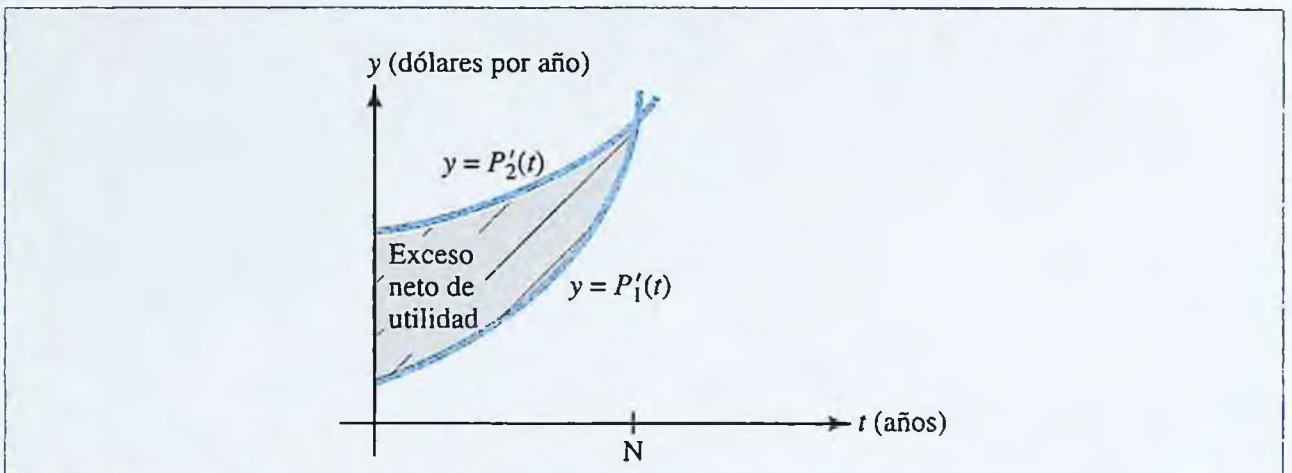


FIGURA 5.13 Exceso neto de utilidad como el área entre las curvas de las tasas de rentabilidad.

EJEMPLO | 5.4.3

Suponga que dentro de t años, una inversión generará utilidades a una tasa $P_1'(t) = 50 + t_2$ cientos de dólares por año, en tanto que una segunda inversión generará utilidades a una tasa de $P_2'(t) = 200 + 5t$ cientos de dólares por año.

a) ¿Durante cuántos años sobrepasa la tasa de rentabilidad de la segunda inversión a la de la primera?

b) Calcule el exceso neto de utilidad para el periodo determinado en el inciso *a*). Interprete el exceso neto de utilidad como un área.

Solución

a) La tasa de rentabilidad de la segunda inversión excede a la de la primera hasta que

$$\begin{aligned} P_1'(t) &= P_2'(t) \\ 50 + t^2 &= 200 + 5t \\ t^2 - 5t - 150 &= 0 && \textit{al restar } 200 + 5t \textit{ en ambos miembros} \\ (t - 15)(t + 10) &= 0 && \textit{factorizando} \\ t &= 15, -10 && \textit{como } uv = 0 \textit{ si y sólo si } u = 0 \textit{ o bien } v = 0 \\ t &= 15 \text{ años} && \textit{despreciando el tiempo negativo } t = -10 \end{aligned}$$

www.FreeLibros.com

b) El exceso de utilidad del plan 2 es $E(t) = P_2(t) - P_1(t)$, y el exceso neto de utilidad, NE, en el periodo de tiempo $0 \le t \le 15$ determinado en el inciso *a*) está dado por la integral definida

$$\text{NE} = E(15) - E(0) = \int_0^{15} E'(t)\,dt \qquad \textit{teorema fundamental del cálculo}$$

$$= \int_0^{15} [P_2'(t) - P_1'(t)]\,dt \qquad \textit{porque } E(t) = P_2(t) - P_1(t)$$

$$= \int_0^{15} [(200 + 5t) - (50 + t^2)]\,dt$$

$$= \int_0^{15} [150 + 5t - t^2]\,dt \qquad \textit{agrupando términos semejantes}$$

$$= \left[150t + 5\left(\frac{1}{2}t^2\right) - \left(\frac{1}{3}t^3\right)\right]\Bigg|_0^{15}$$

$$= \left[150(15) + \frac{5}{2}(15)^2 - \frac{1}{3}(15)^3\right] - \left[150(0) + \frac{5}{2}(0)^2 - \frac{1}{3}(0)^3\right]$$

$$= 1\,687.50 \text{ cientos de dólares}$$

Entonces, el exceso neto de utilidad es de \$168 750.

Las gráficas de las funciones de las tasas de rentabilidad $P_1'(t)$ y $P_2'(t)$ se muestran en la figura 5.14. El exceso neto de utilidad

$$\text{NE} = \int_0^{15} [P_2'(t) - P_1'(t)]\,dt$$

puede ser interpretado como el área de la región (sombreada) entre las curvas de las tasas de rentabilidad en el intervalo $0 \le t \le 15$.

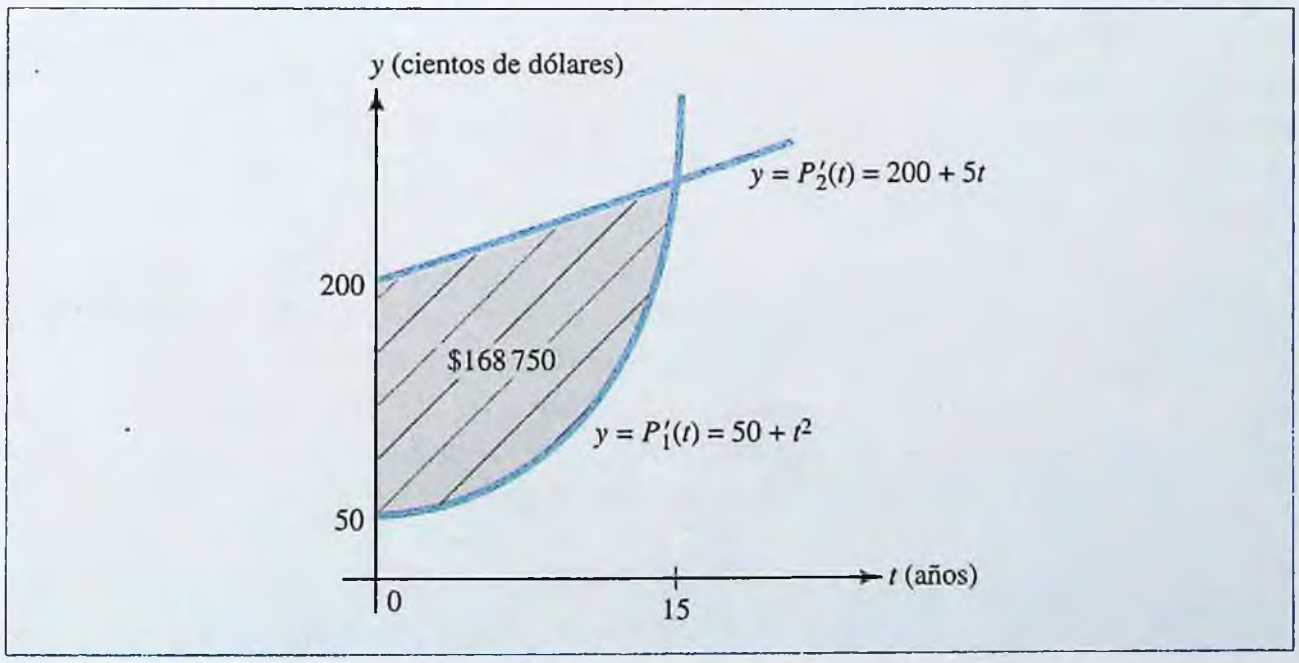


FIGURA 5.14 Exceso neto de utilidad para un plan de inversión con respecto a otro.

www.FreeLibros.com

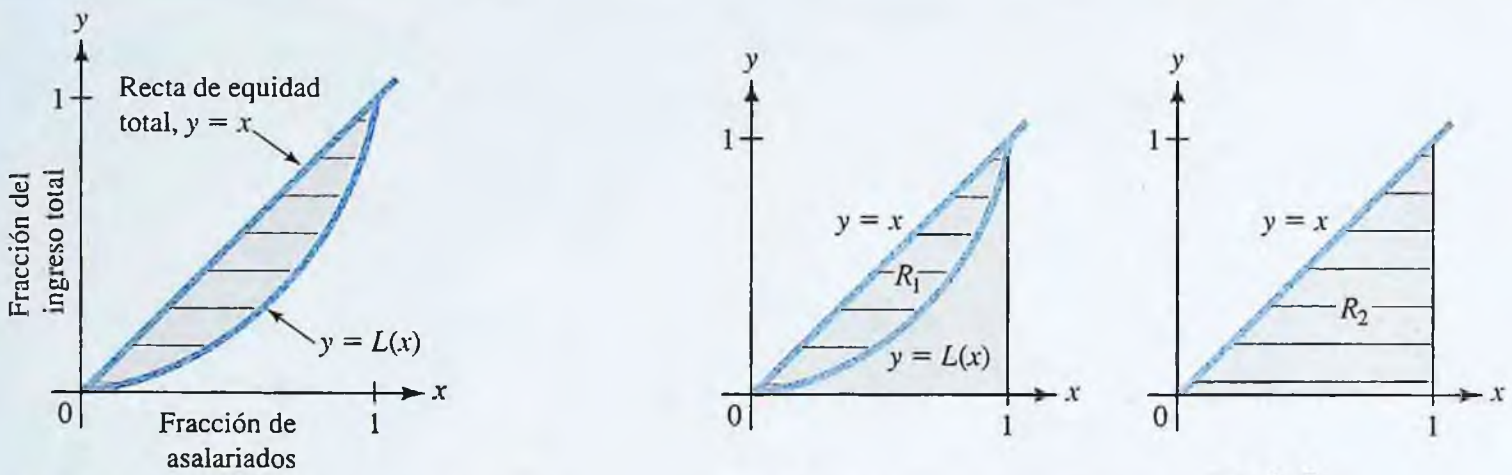
Curvas de Lorentz

El área también tiene un papel importante en el estudio de las **curvas de Lorentz**, que son una herramienta empleada por economistas y sociólogos para medir el porcentaje de riqueza de la sociedad que posee un porcentaje dado de su población. Para ser más específico, la curva de Lorentz de la economía de una sociedad particular es la gráfica de la función $L(x)$, que denota la fracción del ingreso nacional anual total recibido por $100x\%$ de menor salario del total de trabajadores asalariados en la sociedad, para $0 \le x \le 1$. Por ejemplo, si 30% de menor salario de todos los trabajadores asalariados recibe 23% del ingreso total de la sociedad, entonces $L(0.3) = 0.23$.

Note que $L(x)$ es una función creciente sobre el intervalo $0 \le x \le 1$ y tiene estas propiedades:

1. $0 \le L(x) \le 1$ debido a que $L(x)$ es un porcentaje
2. $L(0) = 0$ puesto que no se ganan salarios cuando no se emplean asalariados
3. $L(1) = 1$ ya que 100% de los salarios es recibido por 100% de los asalariados
4. $L(x) \le x$ pues $100x\%$ de menor salario de los asalariados no puede recibir más que $100x\%$ del ingreso total

En la figura 5.15*a* se muestra una curva de Lorentz típica.



a) La curva Lorentz $y = L(x)$ está por debajo de la recta de equidad total, $y = x$

b) El índice de Gini es el cociente $\text{GI} = \dfrac{\text{área de } R_1}{\text{área de } R_2}$

FIGURA 5.15 Curva de Lorentz $y = L(x)$, y su índice de Gini.

La recta $y = x$ representa el caso ideal que corresponde a la completa equidad en la distribución del ingreso (asalariados con $100x\%$ del ingreso más bajo reciben $100x\%$ de la riqueza de la sociedad). Entre más cerca esté la curva de Lorentz de esta recta, más equitativa será la distribución de la riqueza en la sociedad correspondiente. La desviación total de la distribución real de la riqueza en una sociedad respecto a la completa equidad se representa por el área de la región R_1, entre la curva de Lorentz $y = L(x)$ y la recta $y = x$. La relación de esta área con el área de la región R_2 bajo la recta de igualdad completa $y = x$ sobre $0 \le x \le 1$ se utiliza como una medida de la desigualdad de la distribución de la riqueza en la sociedad. Esta relación, denominada **índice de Gini**, (también se conoce como **índice de desigualdad del ingreso**), se puede calcular mediante la fórmula

$$\text{GI} = \frac{\text{área de } R_1}{\text{área de } R_2} = \frac{\text{área entre } y = L(x) \text{ y } y = x}{\text{área bajo } y = x \text{ sobre } 0 \le x \le 1}$$

www.FreeLibros.com

$$= \frac{\displaystyle\int_0^1 [x - L(x)]\,dx}{\displaystyle\int_0^1 x\,dx} = \frac{\displaystyle\int_0^1 [x - L(x)]\,dx}{1/2}$$

$$= 2\int_0^1 [x - L(x)]\,dx$$

(véase la figura 5.15*b*). Resumiendo:

Índice de Gini ■ Si $y = L(x)$ es la ecuación de una curva de Lorentz, entonces la desigualdad en la distribución de riqueza correspondiente se mide por medio del *índice de Gini*, el cual está dado por la fórmula

$$\text{Índice de Gini} = 2\int_0^1 [x - L(x)]\,dx$$

El índice de Gini siempre está entre 0 y 1. Un índice de 0 corresponde a una igualdad total en la distribución del ingreso, en tanto que un índice de 1 corresponde a una desigualdad total (todo el ingreso pertenece a 0% de la población). Entre menor sea el índice, más equitativa será la distribución del ingreso, y entre mayor sea el índice, más riqueza se concentra en sólo algunas manos. En el ejemplo 5.4.4 se ilustra cómo se pueden utilizar las curvas de Lorentz y el índice de Gini para comparar la equidad relativa de la distribución del ingreso para dos profesiones.

EJEMPLO | 5.4.4

Una agencia gubernamental determina que las curvas de Lorentz para la distribución del ingreso para odontólogos y contratistas en cierto estado están dadas por las funciones

$$L_1(x) = x^{1.7} \qquad \text{y} \qquad L_2(x) = 0.8x^2 + 0.2x$$

respectivamente. ¿Para cuál profesión es más justa la distribución del ingreso?

Solución

Los índices de Gini respectivos son

$$G_1 = 2\int_0^1 (x - x^{1.7})\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^{2.7}}{2.7}\right)\Bigg|_0^1 = 0.2593$$

y

$$G_2 = 2\int_0^1 [x - (0.8x^2 + 0.2x)]\,dx$$

$$= 2\left[-0.8\left(\frac{x^3}{3}\right) + 0.8\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]\Bigg|_0^1 = 0.2667$$

Como el índice de Gini para odontólogos es menor, se deduce que en este estado, los ingresos de los odontólogos están más uniformemente distribuidos que los de los contratistas.

Utilizando el índice de Gini, se puede ver cómo se compara la distribución del ingreso en los Estados Unidos con otros países. En la tabla 5.1 se lista el índice de Gini para naciones industrializadas y en vías de desarrollo. Obsérvese que con un índice de 0.46, la distribución del ingreso de los Estados Unidos es aproximadamente igual a la de Tailandia, que es menos equitativa que la del Reino Unido, Alemania o Dinamarca, pero mucho más equitativa que en Brasil

www.FreeLibros.com

o Panamá. (¿Hay algo que conozca acerca de la naturaleza sociopolítica de estos países que explique la diferencia en la equidad del ingreso?)

TABLA 5.1 Índices Gini para países seleccionados

País	Índice Gini
Estados Unidos	0.460
Brasil	0.601
Canadá	0.315
Dinamarca	0.247
Alemania	0.281
Japón	0.350
Sudáfrica	0.584
Panamá	0.568
Tailandia	0.462
Inglaterra	0.326

Fuente: David C. Colander, *Economics*, 4a. ed., McGraw-Hill, Boston, 2001; página 435.

Valor promedio de una función

Como una segunda ilustración de cómo se puede emplear la integración definida en las aplicaciones, se calculará el **valor promedio de una función**, que resulta de interés en muchas áreas. Primero, se tomará un momento para aclarar qué significa "valor promedio". Un maestro que desea calcular la calificación promedio en un examen simplemente suma todos las calificaciones individuales y después divide la suma entre el número de estudiantes que tomaron el examen, pero ¿cómo se determinaría, digamos, el nivel de contaminación promedio en una ciudad durante el día? La dificultad es que como el tiempo es continuo, hay "muchos" niveles de contaminación para sumarlos de manera usual. Entonces, ¿cómo se debe proceder?

Considere el caso general, cuando se desea determinar el valor promedio de la función $f(x)$ sobre el intervalo $a \le x \le b$, en el cual f es continua. Se comienza subdividiendo el intervalo $a \le x \le b$ en n partes iguales, cada una con longitud $\Delta x = (b - a)/n$. Si x_j es un número tomado del j-ésimo subintervalo, para $j = 1, 2, \ldots, n$, entonces el promedio de los valores correspondientes de la función $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ es

$$
\begin{aligned}
V_n &= \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \\
&= \frac{b-a}{b-a}\left[\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}\right] && \textit{multiplicando y dividiendo entre } (b-a) \\
&= \frac{1}{b-a}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\left(\frac{b-a}{n}\right) && \textit{factorizando la expresión } \frac{b-a}{n} \\
&= \frac{1}{b-a}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]\,\Delta x && \textit{porque } \Delta x = \frac{b-a}{n} \\
&= \frac{1}{b-a}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\,\Delta x
\end{aligned}
$$

que se reconoce como la suma de Riemann.

Si se se hace más fina la partición del intervalo $a \le x \le b$ tomando más y más puntos de subdivisión, entonces V_n se parece cada vez más a lo que intuitivamente se considera el valor promedio, V, de $f(x)$ en el intervalo $a \le x \le b$. Así, es razonable *definir* el valor promedio V como el límite de la suma de Riemann V_n cuando $n \to +\infty$; es decir, como la integral definida

¡EXPLORE!

Suponga que se desea calcular el valor promedio de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 1$ en el intervalo [1, 4]. Introduzca $f(x)$ en Y1 y obtenga su gráfica empleando la pantalla [0, 4.7]1 por [−2, 8]1. Sombree la región bajo la curva sobre el intervalo [1, 4] y calcule su área A. Haga Y2 igual a la función constante $\frac{A}{b-a} = \frac{A}{3}$. Éste es el valor promedio. Grafique Y2 y Y1 en la misma pantalla. ¿En qué número(s) entre 1 y 4 $f(x)$ es igual al valor promedio?

www.FreeLibros.com

$$V = \lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b-a} \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\Delta x$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Resumiendo:

Valor promedio de una función ■ Sea $f(x)$ una función que es continua en el intervalo $a \le x \le b$. Entonces el *valor promedio* V de $f(x)$ en $a \le x \le b$ está dado por la integral definida

$$V = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

EJEMPLO | 5.4.5

Un fabricante determina que t meses después de introducir un producto nuevo, las ventas de la compañía serán $S(t)$ miles de dólares, donde

$$S(t) = \frac{750t}{\sqrt{4t^2 + 25}}$$

¿Cuál es el promedio de las ventas mensuales de la compañía en los primeros 6 meses después de la introducción del producto nuevo?

Solución

El promedio de las ventas mensuales V en el periodo $0 \le t \le 6$ está dado por la integral

$$V = \frac{1}{6-0} \int_0^6 \frac{750t}{\sqrt{4t^2 + 25}}\,dt$$

Para evaluar esta integral, se hace la sustitución

$$u = 4t^2 + 25 \qquad \text{límites de integración}$$

$$du = 4(2t\,dt) \qquad \text{si } t = 0, \text{ entonces } u = 4(0)^2 + 25 = 25$$

$$t\,dt = \frac{1}{8}\,du \qquad \text{si } t = 6, \text{ entonces } u = 4(6)^2 + 25 = 169$$

Se obtiene

$$V = \frac{1}{6} \int_0^6 \frac{750}{\sqrt{4t^2 + 25}} (t\,dt)$$

$$= \frac{1}{6} \int_{25}^{169} \frac{750}{\sqrt{u}} \left(\frac{1}{8}\,du\right) = \frac{750}{6(8)} \int_{25}^{169} u^{-1/2}\,du$$

$$= \frac{750}{6(8)} \left(\frac{u^{1/2}}{1/2}\right)\Bigg|_{25}^{169} = \frac{750(2)}{6(8)} [(169)^{1/2} - (25)^{1/2}]$$

$$= 250$$

Entonces, para el periodo de 6 meses inmediatamente después de la introducción del producto nuevo, el promedio de las ventas de la compañía es de \$250 000 por mes.

www.FreeLibros.com

REPASO

Justo-a-tiempo

En un reloj de 24 horas se mide el tiempo transcurrido desde la medianoche. Así, las 6:00 a.m. corresponden a las 6 horas, en tanto que las 4:00 p.m. corresponden a las 16 horas.

EJEMPLO | 5.4.6

Un investigador determina que t horas después de medianoche durante un periodo típico de 24 horas, la temperatura en cierta ciudad del norte es $T(°C)$, donde

$$T(t) = 3 - \frac{2}{3}(t - 13)^2 \qquad 0 \leq t \leq 24$$

¿Cuál es la temperatura promedio en la ciudad entre las 6:00 a.m. y las 4:00 p.m.?

Solución

Puesto que las 6:00 a.m. y las 4:00 p.m. corresponden a $t = 6$ y $t = 16$, respectivamente, se desea calcular el promedio de la temperatura $T(t)$ para $6 \leq t \leq 16$, que está dada por la integral definida

$$\begin{aligned} T_{prom} &= \frac{1}{16 - 6}\int_6^{16}\left[3 - \frac{2}{3}(t - 13)^2\right]dt \\ &= \frac{1}{10}\left[3t - \frac{2}{9}(t - 13)^3\right]\Big|_6^{16} \\ &= \frac{1}{10}\left[3(16) - \frac{2}{9}(16 - 13)^3\right] - \frac{1}{10}\left[3(6) - \frac{2}{9}(6 - 13)^3\right] \\ &= -5.22 \end{aligned}$$

Entonces, la temperatura promedio durante el periodo dado es aproximadamente $-5.22°$ Celsius (o bien 22.6°F).

REPASO

Justo-a-tiempo

La temperatura en grados Fahrenheit F está relacionada a la temperatura en grados Celsius C mediante la fórmula $F = \frac{9}{5}C + 32$.

NOTA Si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ y $F(x)$ es cualquier antiderivada de $f(x)$ sobre el mismo intervalo, entonces el valor promedio V de $f(x)$ sobre el intervalo satisface

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{b - a}[F(b) - F(a)] \quad \textit{por teorema fundamental del cálculo} \\ &= \frac{F(b) - F(a)}{b - a} \end{aligned}$$

A este cociente incremental se le reconoce como la tasa de cambio promedio de $F(x)$ sobre $a \leq x \leq b$ (véase la sección 2.1). De esta forma se ha demostrado que:

El valor promedio de una función $f(x)$ en un intervalo $a \leq x \leq b$ es igual a la tasa de cambio promedio de cualquier antiderivada $F(x)$ de $f(x)$ en ese intervalo.

Ésta es otra manera de considerar la relación entre la derivación y la integración (antiderivación) considerada en el teorema fundamental del cálculo. ■

Interpretación geométrica del valor promedio La fórmula integral para el valor promedio

$$V = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx$$

www.FreeLibros.com

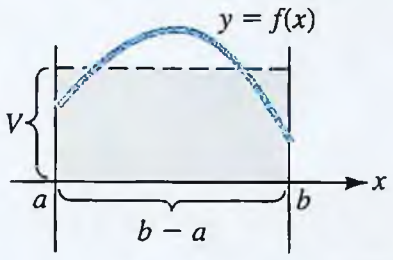
se puede reescribir como

$$(b - a)V = \int_a^b f(x)\,dx$$

En el caso en que $f(x) \geq 0$ esté en el intervalo $a \leq x \leq b$, la integral de la derecha puede ser interpretada como el área bajo la curva $y = f(x)$ en $a \leq x \leq b$, y el producto de la izquierda, como el área de un rectángulo con altura V y ancho $b - a$, igual a la longitud del intervalo. En otras palabras:

> *El valor promedio de $f(x)$ en $a \leq x \leq b$ es igual a la altura de un rectángulo, cuya base es el intervalo $a \leq x \leq b$, y cuya área es la misma que el área bajo la curva $y = f(x)$ en $a \leq x \leq b$.*

Esta interpretación geométrica se ilustra en la figura 5.16.



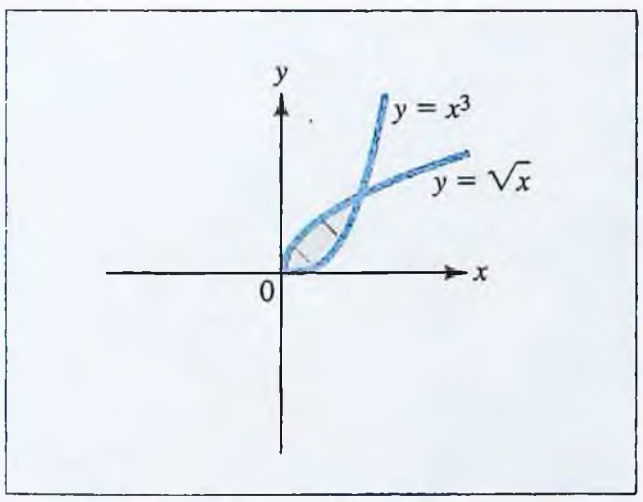
El rectángulo con base $a \leq x \leq b$ y altura V tiene la misma área que la región bajo la curva $y = f(x)$.

FIGURA 5.16 Interpretación geométrica del valor promedio V.

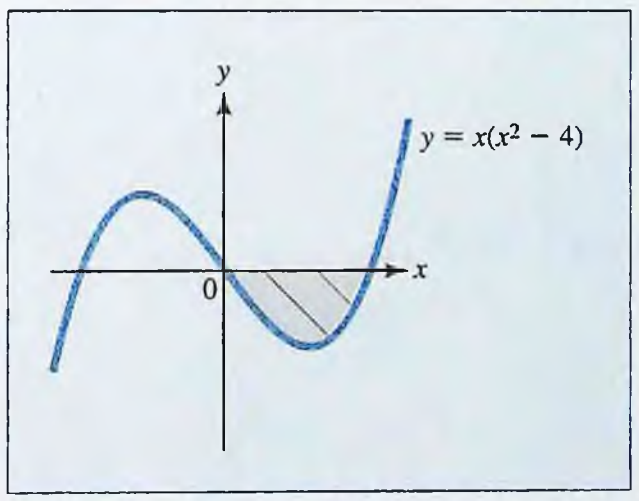
PROBLEMAS | 5.4

En los problemas 1 a 4 determine el área de la región sombreada.

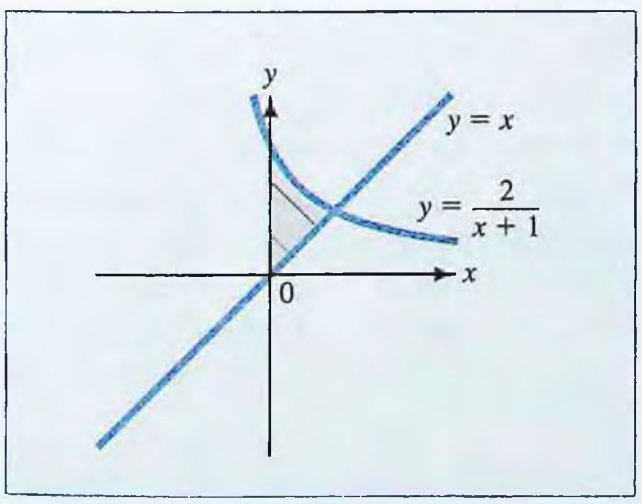
1.



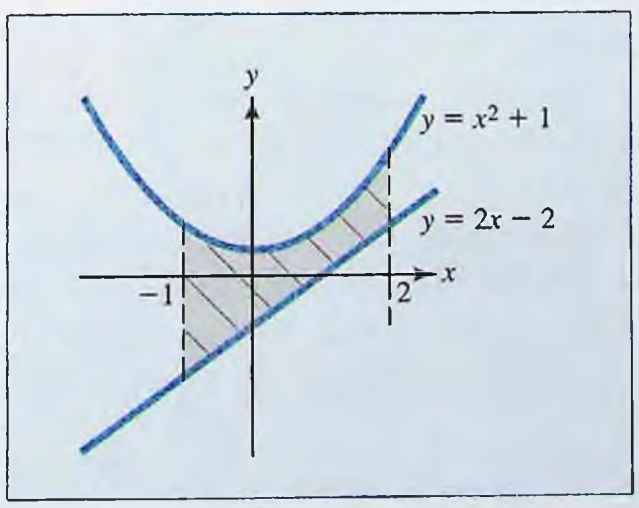
2.



3.



4.



www.FreeLibros.com

En los problemas 5 a 17 trace la región R dada y después determine su área.

5. R es la región acotada por las rectas $y = x$, $y = -x$, y $x = 1$.

6. R es la región acotada por las curvas $y = x^2$, $y = -x^2$, y la recta $x = 1$.

7. R es la región acotada por el eje x y la curva $y = -x^2 + 4x - 3$.

8. R es la región acotada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$, y la recta $x = \ln 2$.

9. R es la región acotada por la curva $y = x^2 - 2x$ y el eje x. [*Sugerencia:* Note que la región está debajo del eje x.]

10. R es la región acotada por la curva $y = \dfrac{1}{x^2}$ y las rectas $y = x$ y $y = \dfrac{x}{8}$.

11. R es la región acotada por las curvas $y = x^2 - 2x$ y $y = -x^2 + 4$.

12. R es la región entre la curva $y = x^3$ y la recta $y = 9x$.

13. R es la región entre las curvas $y = x^3 - 3x^2$ $y = x^2 + 5x$.

14. R es el triángulo acotado por la recta $y = 4 - 3x$ y los ejes de coordenadas.

15. R es el triángulo con vértices $(-4, 0)$, $(2, 0)$, y $(2, 6)$.

16. R es el rectángulo con vértices $(1, 0)$, $(-2, 0)$, $(-2, 5)$, y $(1, 5)$.

17. R es el trapecio acotado por las rectas $y = x + 6$ y $x = 2$ y los ejes de coordenadas.

En los problemas 18 a 23 determine el valor promedio de la función $f(x)$ dada, en el intervalo indicado $a \le x \le b$.

18. $f(x) = x^2 - 3x + 5$ sobre $-1 \le x \le 2$

19. $f(x) = 1 - x^2$ sobre $-3 \le x \le 3$

20. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$ sobre $0 \le x \le \ln 2$

21. $f(x) = e^{-x}(4 - e^{2x})$ sobre $-1 \le x \le 1$

22. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x + 6}$ sobre $-1 \le x \le 1$

23. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ sobre $0 \le x \le \ln 3$

En los problemas 24 a 27 determine el valor promedio V de la función dada sobre el intervalo indicado. En cada caso, trace la gráfica de la función junto con el rectángulo cuya base es el intervalo dado y cuya altura es el valor promedio V.

24. $f(x) = x$ sobre $0 \le x \le 4$

25. $f(x) = 2x - x^2$ sobre $0 \le x \le 2$

26. $g(t) = e^{-2t}$ sobre $-1 \le t \le 2$

27. $h(u) = \dfrac{1}{u}$ sobre $2 \le u \le 4$

CURVAS DE LORENTZ *En los problemas 28 a 33 determine el índice de Gini de la curva de Lorentz.*

28. $L(x) = x^2$

29. $L(x) = x^3$

30. $L(x) = 0.7x^2 + 0.3x$

31. $L(x) = 0.55x^2 + 0.45x$

32. $L(x) = \dfrac{e^x - 1}{e - 1}$

33. $L(x) = \dfrac{2}{3}x^{3.7} + \dfrac{1}{3}x$

34. TEMPERATURA Ciertos registros indican que t horas después de medianoche, la temperatura en el aeropuerto local fue de $f(t) = -0.3t^2 + 4t + 10$ grados Celsius. ¿Cuál fue la temperatura promedio en el aeropuerto entre las 9:00 a.m. y el mediodía?

35. PRECIOS DE LOS ALIMENTOS Unos registros indican que t meses después del inicio del año, el precio de la carne molida en los supermercados locales fue de $P(t) = 0.09t^2 - 0.2t + 1.6$ dólares por libra. ¿Cuál fue el precio promedio de la carne molida durante los 3 primeros meses del año?

36. EFICIENCIA Después de t meses en el trabajo, un empleado postal puede clasificar $Q(t) = 700 - 400e^{-0.5t}$ cartas por hora. ¿Cuál es la tasa media a la cual el empleado puede clasificar el correo durante los 3 primeros meses en el trabajo?

www.FreeLibros.com

37. CRECIMIENTO DE BACTERIAS El número de bacterias presente en cierto cultivo después de t minutos de un experimento era de $Q(t)$ $2\,000e^{0.05t}$. ¿Cuál fue el número medio de bacterias presentes durante los primeros 5 minutos del experimento?

38. VALOR PROMEDIO DE UNA INVERSIÓN Tom invierte \$5 000 en una cuenta que paga 6% capitalizado continuamente. ¿Cuál es el valor promedio de su inversión durante los próximos 10 años?

39. INVENTARIO Un inventario de 60 000 kilogramos de cierto artículo se usa a una tasa constante y se agota después de 1 año. ¿Cuáles es el inventario promedio en el año?

40. INVERSIÓN Suponga que dentro de t años, un plan de inversión generará utilidades a una tasa $P_1'(t) = 100 + t^2$ cientos de dólares por año, en tanto que una segunda inversión generará utilidades a una tasa de $P_2'(t) = 220 + 2t$ cientos de dólares por año.

a) ¿Durante cuántos años la tasa de rentabilidad de la segunda inversión excede a la de la primera?

b) Calcule el exceso neto de utilidad, suponiendo que invierte en el segundo plan durante el periodo determinado en el inciso *a*).

c) Trace las curvas de las tasa de rentabilidad $y = P_1'(t)$ y $y = P_2'(t)$ y marque la región cuya área representa el exceso neto de utilidad calculado en el inciso *b*).

41. INVERSIÓN Responda las preguntas del problema 40 para dos inversiones con tasas de rentabilidad respectivas $P_1'(t) = 130 + t^2$ cientos de dólares por año y $P_2'(t) = 306 + 5t$ cientos de dólares por año.

42. INVERSIÓN Responda las preguntas del problema 40 para dos inversiones con tasas de rentabilidad respectivas $P_1'(t) = 60e^{0.12t}$ miles de dólares por año y $P_2'(t) = 160e^{0.08t}$ miles de dólares por año.

43. INVERSIÓN Responda las preguntas del problema 40 para dos inversiones con tasas de rentabilidad respectivas $P_1'(t) = 90e^{0.1t}$ miles de dólares por año y $P_2'(t) = 140e^{0.07t}$ miles de dólares por año.

44. EFICIENCIA Después de t horas en el trabajo, un trabajador de una fábrica produce $Q_1'(t) = 60 - 2(t - 1)^2$ unidades por hora, en tanto que un segundo trabajador produce $Q_2'(t) = 50 - 5t$ unidades por hora.

a) Si ambos llegan al trabajo a las 8:00 a.m., ¿Cuántas unidades más habrá producido el primer trabajador que el segundo al mediodía?

b) Interprete la respuesta del inciso *a*) como el área entre dos curvas.

45. POBLACIÓN PROMEDIO La población de una cierta comunidad t años después del año 1990 está dada por

$$P(t) = \frac{e^{0.2t}}{4 + e^{0.2t}} \text{ millones de habitantes}$$

¿Cuál fue la población promedio de la comunidad durante la década de 1990 a 2000?

46. COSTO PROMEDIO El costo de producción de x unidades de un producto nuevo es $C(x) = 3x\sqrt{x} + 10$ cientos de dólares. ¿Cuál es el costo promedio de producción de las primeras 81 unidades?

47. CONCENTRACIÓN MEDIA DE UN MEDICAMENTO Se inyecta un medicamento a un paciente y t horas después la concentración del medicamento presente en el torrente sanguíneo del paciente está dada por

$$C(t) = \frac{3t}{(t^2 + 36)^{3/2}} \text{ mg/cm}^3$$

¿Cuál es la concentración media del medicamento durante las primeras 8 horas después de la inyección?

48. PUBLICIDAD Una firma de publicidad es contratada para promover un programa nuevo de televisión durante 3 semanas antes de su debut y durante 2 semanas después. Al cabo de t semanas de la campaña publicitaria se determina que $P(t)$ por ciento de los televidentes conoce acerca del programa, donde

$$P(t) = \frac{59t}{0.7t^2 + 16} + 6$$

¿Cuál es el porcentaje promedio de televidentes que conoce acerca del programa durante las 5 semanas de la campaña publicitaria?

49. ADMINISTRACIÓN DEL TRÁFICO Durante varias semanas el departamento de carreteras ha estado registrando la velocidad del tráfico en una carretera que pasa por cierta salida hacia el centro de la ciudad. Los datos sugieren que entre la 1:00 a.m. y las 6:00 p.m. en un día laborable normal, la velocidad del tráfico en la salida es aproximadamente $S(t) = t^3 - 10.5t^2 + 30t + 20$ millas por hora, donde t es el número de horas después del mediodía. Calcule la velocidad promedio del tráfico entre la 1:00 a.m. y las 6:00 p.m.

50. CAPACIDAD AERÓBICA PROMEDIO La capacidad aeróbica de una persona de x años está dada por

$$A(x) = \frac{110(\ln x - 2)}{x} \quad \text{para } x \geq 10$$

www.FreeLibros.com

¿Cuál es la capacidad aeróbica promedio para las personas entre 15 y 25 años de edad? ¿Cuál para las personas entre 60 y 70 años de edad?

51. EFECTO TÉRMICO DE LOS ALIMENTOS Normalmente el metabolismo de un organismo funciona a una tasa esencialmente constante, denominada *tasa metabólica basal* del organismo. Sin embargo, la tasa metabólica puede aumentar o disminuir dependiendo de la actividad del organismo. En particular, después de la ingesta de nutrientes, el organismo con frecuencia experimenta un aumento transitorio en su tasa metabólica, que gradualmente retorna al nivel basal.

Michelle acaba de terminar su cena de Navidad y su tasa metabólica ha aumentado de su nivel basal M_0 cuando "desahoga" el alimento durante las siguientes 12 horas. Suponga que t horas después del alimento, su tasa metabólica está dada por

$$M(t) = M_0 + 50te^{-0.1t^2} \qquad 0 \le t \le 12$$

kilojoules por hora (kJ/h).

a) ¿Cuál es la tasa metabólica promedio de Michelle durante el periodo de 12 horas?

b) Trace la gráfica de $M(t)$. ¿Cuál es la tasa metabólica pico y cuándo ocurre? [*Nota:* tanto la gráfica como la tasa pico contendrán M_0.]

52. DISTRIBUCIÓN DEL INGRESO En cierto Estado se determina que la distribución del ingreso para abogados está dada por la curva de Lorentz $y = L_1(x)$, donde

$$L_1(x) = \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{5}x$$

en tanto que para cirujanos está dada por $y = L_2(x)$, donde

$$L_2(x) = \frac{5}{8}x^4 + \frac{3}{8}x$$

Calcule el índice de Gini para cada curva de Lorentz. ¿Cuál profesión tiene la distribución del ingreso más equitativa?

53. DISTRIBUCIÓN DEL INGRESO Suponga que un estudio indica que la distribución del ingreso para jugadores profesionales de beisbol está dada por la curva de Lorentz $y = L_1(x)$, donde

$$L_1(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x$$

en tanto que las distribuciones para jugadores profesionales de futbol y basquetbol son $y = L_2(x)$ y $y = L_3(x)$, respectivamente, donde

$$L_2(x) = \frac{5}{6}x^2 + \frac{1}{6}x$$

y

$$L_3(x) = \frac{3}{5}x^4 + \frac{2}{5}x$$

Determine el índice de Gini para cada deporte profesional y determine cuál tiene la distribución de ingreso más equitativa. ¿Cuál tiene la distribución menos equitativa?

54. CRECIMIENTO COMPARATIVO La población de un país del tercer mundo crece exponencialmente a la insostenible tasa de

$P_1'(t) = 10e^{0.02t}$ miles de habitantes por año

donde t es el número de años después de 2000. Un estudio indica que si se instituyen ciertos cambios socioeconómicos en este país, entonces la población crecerá a la tasa restringida de

$$P_2'(t) = 10 + 0.02t + 0.002t^2$$

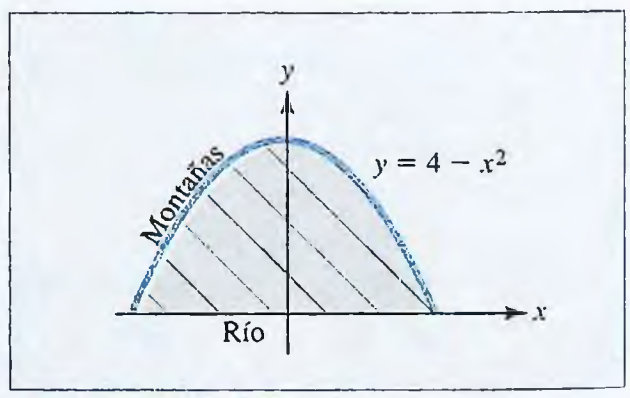
miles de habitantes por año. Si se hacen los cambios, ¿cuán menor será la población de este país en el año 2010 que si no se hacen esos cambios?

55. CRECIMIENTO COMPARATIVO Un segundo estudio del país del problema 54 indica que la acción de fuerzas restrictivas naturales hacen la tasa de crecimiento real igual a

$$P_3'(t) = \frac{20e^{0.02t}}{1 + e^{0.02t}}$$

en lugar de la tasa exponencial $P_1'(t) = 10e^{0.02t}$. Si esta tasa es correcta, ¿cuán menor será la población en el año 2010 que si fuera correcta la tasa exponencial?

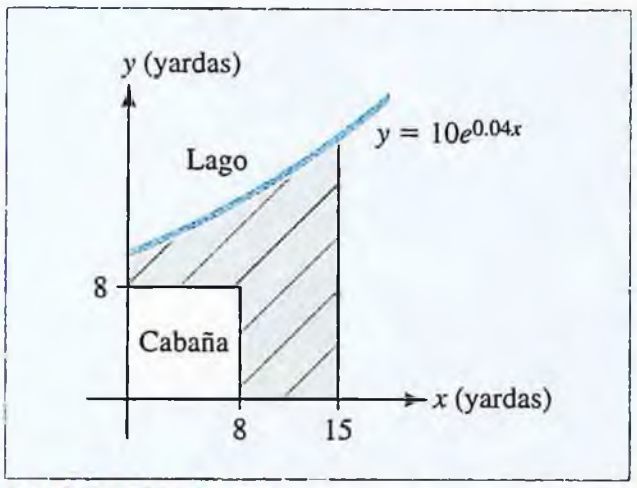
56. BIENES RAÍCES El territorio ocupado por cierta comunidad está delimitado de un lado por un río, y en los otros lados, por montañas, formando la región sombreada que se muestra en la figura. Si se introduce un sistema de coordenadas como se indica, el límite montañoso está dado aproximadamente por la curva $y = 4 - x^2$, donde x y y están medidas en millas. ¿Cuál es el área total ocupada por la comunidad?



PROBLEMA 56

www.FreeLibros.com

57. EVALUACIÓN DE BIENES RAÍCES En la figura se muestra una cabaña cuadrada con un lote de tierra adyacente a un lago. Si se introduce un sistema de coordenadas como se indica, con distancias dadas en yardas, el lindero de la propiedad que colinda con el lago es parte de la curva $y = 10e^{0.04x}$. Suponiendo que la cabaña cuesta \$2 000 por yarda cuadrada y la tierra en el lote fuera de la cabaña (la región sombreada en la figura) cuesta \$800 por yarda cuadrada, ¿cuál es el costo total de esta propiedad de vacaciones?



PROBLEMA 57

58. VOLUMEN DE SANGRE DURANTE LA SÍSTOLE Un modelo[3] del sistema cardiovascular relaciona el volumen $V(t)$ del gasto de sangre en la aorta en un momento t durante la sístole (la fase de contracción), con la presión $P(t)$ en la aorta en ese momento mediante la ecuación

$$V(t) = [C_1 + C_2P(t)]\left(\frac{3t^2}{T^2} - \frac{2t^3}{T^3}\right)$$

donde C_1 y C_2 son constantes positivas y T es el periodo de la fase sistólica (un tiempo fijo). Suponga que la presión en la aorta $P(t)$ se eleva a una tasa constante de P_0 cuando $t = 0$ a P_1 cuando $t = T$.

a) Demuestre que

$$P(t) = \left(\frac{P_1 - P_0}{T}\right)t + P_0$$

b) Determine el volumen promedio de sangre en la aorta durante la fase sistólica ($0 \le t \le T$). [*Nota:* La respuesta estará en términos de C_1, C_2, P_0, P_1 y T.]

59. REACCIÓN A UN MEDICAMENTO En ciertos modelos biológicos la reacción del cuerpo humano a un medicamento particular se mide mediante una función de la forma

$$F(M) = \frac{1}{3}(kM^2 - M^3) \qquad 0 \le M \le k$$

donde k es una constante positiva y M es la cantidad de medicamento absorbido en la sangre. La sensibilidad del cuerpo al medicamento se mide por medio de la derivada $S = F'(M)$.

a) Demuestre que el cuerpo es más sensible al medicamento cuando $M = k/3$.

b) ¿Cuál es la reacción promedio al medicamento para $0 \le M \le k/3$?

60. Aplique la instrucción de graficación de su calculadora para dibujar las gráficas de las curvas $y = x^2e^{-x}$ y $y = \dfrac{1}{x}$ en la misma pantalla. Use **ZOOM** y **TRACE** o alguna otra instrucción de su calculadora para encontrar dónde se intersecan las curvas. Luego calcule el área de la región acotada por las curvas empleando la instrucción de integración numérica.

61. Repita el problema 60 para las curvas $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{2} = 1$ y $y = x^3 - 8.9x^2 + 26.7x - 27$

62. Demuestre que el valor promedio V de una función continua $f(x)$ en el intervalo $a \le x \le b$ se puede calcular como la pendiente de la recta que une los puntos $(a, F(a))$ y $(b, F(b))$ en la curva $y = F(x)$, donde $F(x)$ es cualquier antiderivada de $f(x)$ en $a \le x \le b$.

[3] J. G. Defares, J. J. Osborn, y H. H. Hura, *Acta Physiol. Pharm. Neerl.*, Vol. 12, páginas 189-265.

www.FreeLibros.com

SECCIÓN 5.5 | Aplicaciones adicionales de negocios y economía

En esta sección se analizan varias aplicaciones importantes de la integración definida a los negocios y la economía, como son valor presente y futuro de un flujo de ingresos, disposición a gastar de un consumidor, y excedente de consumidores y de productores. La sección inicia mostrando cómo se puede emplear la integración para medir el valor de un bien.

Vida útil de una máquina

Suponga que t años después de ser puesta en marcha, una máquina ha generado un ingreso total $R(t)$ y que el costo total de operación y servicio de la máquina hasta este momento es $C(t)$. Entonces el ingreso total generado por la máquina hasta el momento t es $P(t) = R(t) - C(t)$. El ingreso decrece cuando los costos se acumulan a una tasa mayor que el ingreso; es decir, cuando $C'(t) > R'(t)$. Así, un gerente puede considerar desechar la máquina en el momento T, cuando $C'(T) = R'(T)$, y por eso el periodo $0 \leq t \leq T$ recibe el nombre de **vida útil** de la máquina. El ingreso neto durante la vida útil de la máquina le proporciona al gerente una medida de su valor.

¡EXPLORE!

Tomando como referencia el ejemplo 5.5.1, suponga que se tiene una nueva tasa de costo $C'_{\text{nueva}}(t) = 2\,000 + 6t^2$. Compare su vida útil y el ingreso neto con los de la función de la tasa del costo original. Use la pantalla [0, 20]5 por [−2 000, 8 000]1 000.

EJEMPLO 5.5.1

Suponga que cuando cierta máquina industrial tiene t años, genera ingreso a una tasa $R'(t) = 5\,000 - 20t^2$ dólares por año y que los costos de operación y servicio correspondientes a la máquina se acumulan a una tasa $C'(t) = 2\,000 + 10t^2$ dólares por año.

a) ¿Cuál es la vida útil de esta máquina?

b) Calcule el ingreso neto generado por la máquina durante su vida útil.

Solución

a) Para determinar la vida útil de la máquina T, se resuelve

$$\begin{aligned} C'(t) &= R'(t) \\ 2\,000 + 10t^2 &= 5\,000 - 20t^2 \\ 30t^2 &= 3\,000 \\ t^2 &= 100 \\ t &= 10 \end{aligned}$$

Entonces, la máquina tiene una vida útil de $T = 10$ años.

b) Como el ingreso $P(t)$ está dado por $P(t) = R(t) - C(t)$, se tiene que $P'(t) = R'(t) - C'(t)$, y el ingreso neto generado por la máquina durante su vida útil $0 \leq t \leq 10$ es

$$\begin{aligned} \text{NP} = P(10) - P(0) &= \int_0^{10} P'(t)\,dt \\ &= \int_0^{10} R'(t) - C'(t)\,dt \\ &= \int_0^{10} [(5\,000 - 20t^2) - (2\,000 + 10t^2)]\,dt \\ &= \int_0^{10} 3\,000 - 30t^2\,dt \\ &= 3\,000t - 10t^3 \Big|_0^{10} = \$20\,000 \end{aligned}$$

www.FreeLibros.com

En la figura 5.17 se muestra la gráfica de las curvas de la tasa del ingreso y de la tasa del costo. Los ingresos netos de la máquina durante su vida útil se representan por el área de la región (sombreada) entre las dos curvas de las tasas.

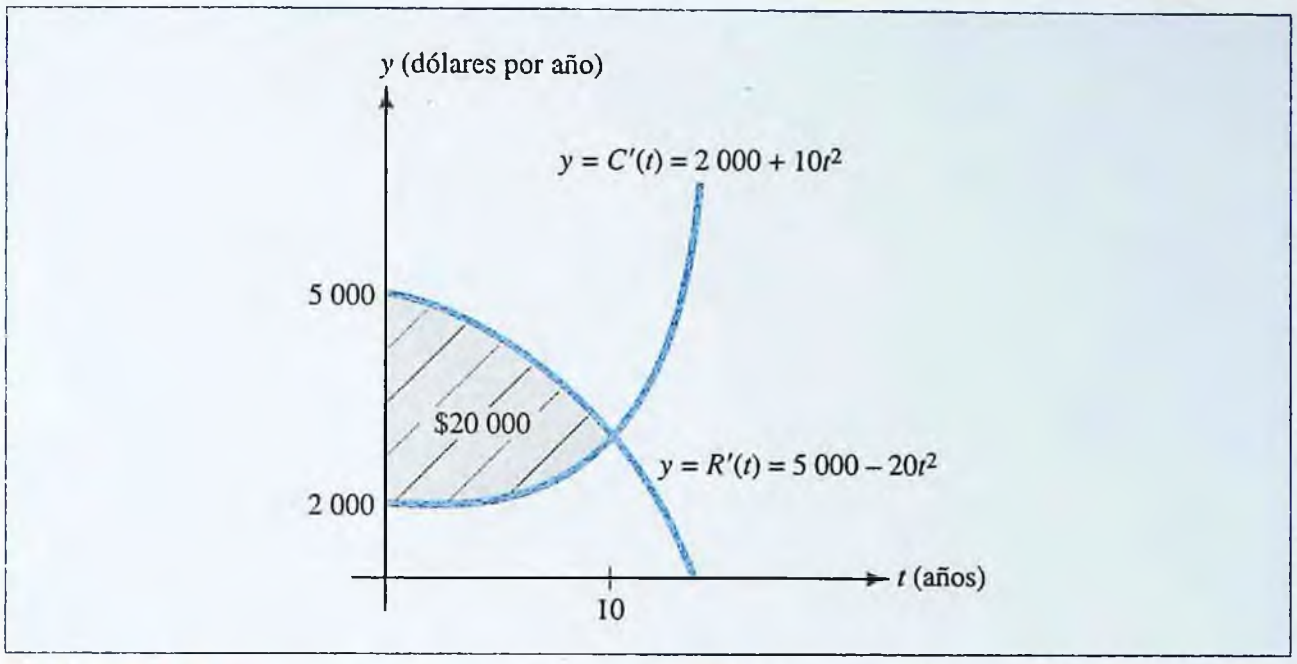


FIGURA 5.17 Ingreso neto respecto a la vida útil de una máquina.

Valor futuro y valor presente de un flujo de ingresos

En la siguiente aplicación se considera un flujo de ingresos transferido continuamente a una cuenta en la que gana interés durante un periodo específico (el **plazo**). Entonces el **valor futuro del flujo de ingresos** es la cantidad total (dinero transferido a la cuenta más los intereses) que se acumula de esta forma durante el plazo específico.

El cálculo del monto de un flujo de ingresos se ilustra en el ejemplo 5.5.2. La estrategia es aproximar el flujo continuo de ingresos mediante una secuencia de depósitos discretos denominada **anualidad**. El monto de la anualidad aproximante es una cierta suma, cuyo límite (una integral definida) es el valor futuro del flujo de ingresos.

EJEMPLO | 5.5.2

Se transfiere dinero continuamente a una cuenta a una tasa constante de $1 200 por año. La cuenta gana intereses a una tasa anual de 8% capitalizado continuamente. ¿Cuánto habrá en la cuenta al cabo de 2 años?

Solución

Recuerde de la sección 4.1 que P dólares invertidos a 8% capitalizados continuamente serán $Pe^{0.08t}$ dólares t años después.

Para aproximar el valor futuro del flujo de ingresos, se divide el intervalo de 2 años $0 \le t \le 2$ en n subintervalos iguales con longitud Δt años, y se denota por t_j el inicio del j-ésimo subintervalo. Entonces, durante el j-ésimo subintervalo (de longitud Δt años),

$$\text{Dinero depositado} = (\text{dólares por año})(\text{número de años}) = 1\,200\,\Delta t$$

Si se depositara todo este dinero al inicio del subintervalo (en el momento t_j), permanecería en la cuenta durante $2 - t_j$ años y por tanto crecería hasta $(1\,200\Delta t)e^{0.08(2-t_j)}$ dólares. Así,

$$\begin{matrix}\text{Valor futuro del dinero depositado} \\ \text{durante el } j\text{-ésimo subintervalo}\end{matrix} \approx 1\,200\,e^{0.08(2-t_j)}\Delta t$$

www.FreeLibros.com

Esta situación se ilustra en la figura 5.18 .

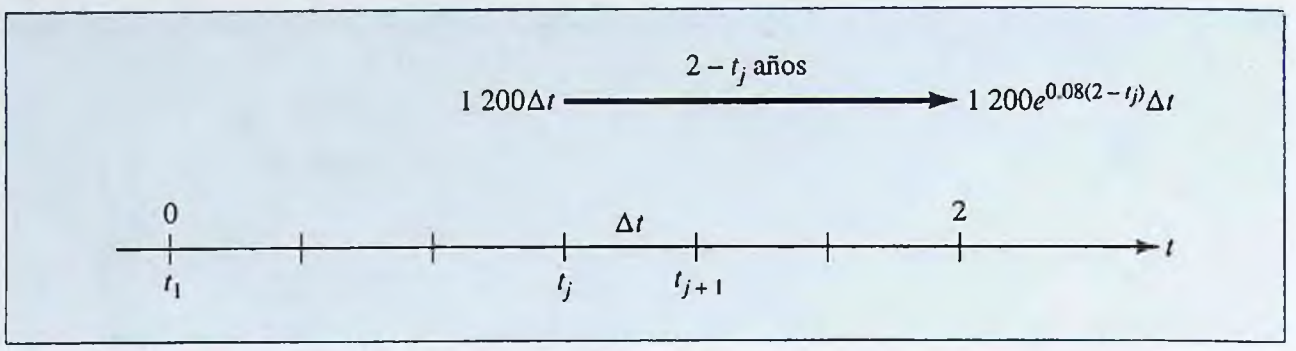


FIGURA 5.18 Valor futuro (aproximado) del dinero depositado durante el j-ésimo subintervalo.

El valor futuro de todo el flujo de ingresos es la suma de los valores futuros del dinero depositado durante cada uno de los n subintervalos. Por tanto,

$$\text{Valor futuro de flujo de ingresos} \approx \sum_{j=1}^{n} 1\,200e^{0.08(2-t_j)}\Delta t$$

(Observe que ésta es sólo una aproximación, porque se basa en la suposición de que todos los $1\,200\,\Delta t_n$ dólares se depositaron en el momento t_j, en lugar de continuamente durante todo el j-ésimo subintervalo.)

Cuando n crece ilimitadamente, la longitud de cada subintervalo tiende a cero y la aproximación tiende al valor futuro del flujo de ingresos. De aquí,

$$\begin{aligned}
\text{Valor futuro del flujo de ingresos} &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} 1\,200e^{0.08(2-t_j)}\Delta t \\
&= \int_0^2 1\,200e^{0.08(2-t)}\,dt = 1\,200e^{0.16}\int_0^2 e^{-0.08t}\,dt \\
&= -\frac{1\,200}{0.08}e^{0.16}(e^{-0.08t})\Big|_0^2 = -15\,000e^{0.16}(e^{-0.16}-1) \\
&= -15\,000 + 15\,000e^{0.16} \approx \$2\,602.66
\end{aligned}$$

Generalizando el razonamiento ilustrado en el ejemplo 5.5.2, se llega a la fórmula de integración para el valor futuro de un flujo de ingresos dado por $f(t)$, durante un plazo de T años:

$$\begin{aligned}
\text{FV} &= \int_0^T f(t)\,e^{r(T-t)}\,dt \\
&= \int_0^T f(t)\,e^{rT}\,e^{-rt}\,dt \\
&= e^{rT}\int_0^T f(t)\,e^{-rt}\,dt \quad \textit{factorizando la constante } e^{rT} \textit{ fuera de la integral}
\end{aligned}$$

A continuación se dan las formas primera y última de la fórmula para el valor futuro de futuras referencias.

www.FreeLibros.com

Valor futuro de un flujo de ingresos ■ Suponga que se transfiere dinero continuamente a una cuenta durante un periodo $0 \leq t \leq T$, a una tasa dada por la función $f(t)$, y que la cuenta gana interés a una tasa anual r, capitalizada continuamente. Entonces el valor futuro, VF, del flujo de ingresos después de T años está dado por la integral definida

$$\text{FV} = \int_0^T f(t)\, e^{r(T-t)}\, dt = e^{rT} \int_0^T f(t)\, e^{-rt}\, dt$$

En el ejemplo 5.5.2 se tenía $f(t) = 1\,200$, $r = 0.08$ y $T = 2$, así que

$$\text{FV} = e^{0.08(2)} \int_0^2 1\,200 e^{-0.08t}\, dt$$

El **valor presente** de un flujo de ingresos generado a una tasa continua $f(t)$, durante un plazo específico de T años, es la cantidad de dinero A que se debe depositar hoy, a la tasa de interés prevaleciente, para generar el mismo ingreso que el flujo de ingresos durante el mismo periodo de T años. Puesto que A dólares invertidos a una tasa de interés anual r capitalizado continuamente valdrán Ae^{rT} dólares en T años, se debe tener

$$Ae^{rT} = e^{rT} \int_0^T f(t)\, e^{-rt}\, dt$$

$$A = \int_0^T f(t)\, e^{-rt}\, dt \qquad \textit{dividiendo ambos miembros entre } e^{rT}$$

En resumen:

Valor presente de un flujo de ingresos ■ El **valor presente**, VP, de un flujo de ingresos que se deposita continuamente a la tasa $f(t)$ en una cuenta que gana interés a una tasa anual r capitalizada continuamente, durante un plazo de T años, está dado por

$$\text{PV} = \int_0^T f(t)\, e^{-rt}\, dt$$

En el ejemplo 5.5.3 se ilustra cómo se puede emplear el valor presente al tomar ciertas decisiones financieras.

EJEMPLO | 5.5.3

Jane trata de decidir entre dos inversiones. La primera cuesta \$1 000 y se espera que genere un flujo de ingresos continuo a una tasa de $f_1(t) = 3\,000e^{0.03t}$ dólares por año. La segunda inversión cuesta \$4 000 y se estima que genere ingreso a una tasa constante de $f_2(t) = 4\,000$ dólares por año. Si la tasa de interés anual permanece fija a 5% capitalizado continuamente durante los próximos 5 años, ¿cuál inversión generará más ingreso neto durante este periodo?

www.FreeLibros.com

Solución

El ingreso neto generado por cada inversión durante el periodo de 5 años es el valor presente de la inversión menos el costo inicial. Para cada inversión se tiene $r = 0.05$ y $T = 5$.

Para la primera inversión:

$$\begin{aligned}
\text{PV} - \text{costo} &= \int_0^5 (3\,000e^{0.03t})e^{-0.05t}\,dt - 1\,000 \\
&= 3\,000\int_0^5 e^{0.03t-0.05t}\,dt - 1\,000 \\
&= 3\,000\int_0^5 e^{-0.02t}\,dt - 1\,000 \\
&= 3\,000\left(\frac{e^{-0.02t}}{-0.02}\right)\Bigg|_0^5 - 1\,000 \\
&= -150\,000[e^{-0.02(5)} - e^0] - 1\,000 \\
&= 13\,274.39
\end{aligned}$$

Para la segunda inversión:

$$\begin{aligned}
\text{PV} - \text{costo} &= \int_0^5 (4\,000)e^{-0.05t}\,dt - 4\,000 \\
&= 4\,000\left(\frac{e^{-0.05t}}{-0.05}\right)\Bigg|_0^5 - 4\,000 \\
&= -80\,000[e^{-0.05(5)} - e^0] - 4\,000 \\
&= 13\,695.94
\end{aligned}$$

Entonces, el ingreso neto generado por la primera inversión es de \$13 274.39, mientras que la segunda inversión genera un ingreso neto de \$13 695.94. La segunda inversión es ligeramente mejor.

Curva de demanda de los consumidores y disposicióna gastar

Al estudiar el comportamiento del consumidor, los economistas suponen que el precio que un consumidor o grupo de consumidores está dispuesto a pagar para comprar una unidad adicional de un artículo es una función del número de unidades del artículo que el consumidor o grupo de consumidores ya han comprado.

Por ejemplo, una pareja joven con un presupuesto limitado podría estar dispuesta a gastar hasta \$200 en un televisor. Por la conveniencia de tener dos televisores (por ejemplo, para eliminar el conflicto entre ver el futbol o las telenovelas), la pareja podría estar dispuesta a gastar \$100 adicionales para comprar el segundo televisor. Puesto que habrá poco uso para más de dos televisores, la pareja podría no estar dispuesta a gastar más de \$30 en un tercer televisor.

Una función $p = D(q)$ que proporciona el precio por unidad que los consumidores están dispuestos a pagar para obtener la q-ésima unidad de un artículo se conoce como la **función de demanda de los consumidores** para el artículo. Como se ilustra en la figura 5.19 la función de demanda de los consumidores generalmente es una función decreciente de q. Es decir, el precio que los consumidores están dispuestos a pagar para obtener una unidad adicional disminuye cuando el número de unidades compradas aumenta.

La función de demanda de los consumidores $p = D(q)$ también se puede considerar como la tasa de cambio con respecto a q de la cantidad total $A(q)$ que los consumidores están dispuestos a gastar por q unidades; es decir; dA/dq. Integrando, se tiene que la cantidad total que los consumidores están dispuestos a pagar por q_0 unidades del artículo está dada por

www.FreeLibros.com

$$A(q_0) - A(0) = \int_0^{q_0} \frac{dA}{dq}\, dq = \int_0^{q_0} D(q)\, dq$$

En este contexto, los economistas denominan $A(q)$ la **disposición total a gastar** y $D(q) = A'(q)$ la **disposición marginal a gastar**. En términos geométricos, la disposición total a gastar por q_0 unidades es el área de la curva de demanda $p = D(q)$ entre $q = 0$ y $q = q_0$ (véase la figura 5.19).

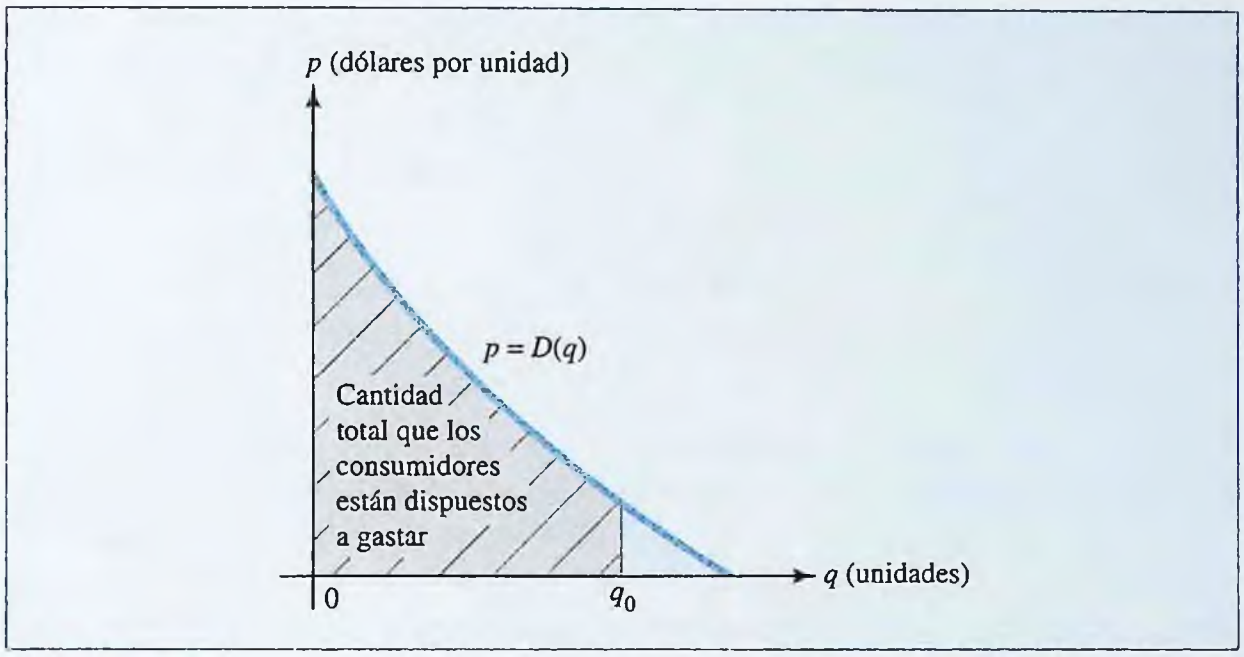


FIGURA 5.19 La cantidad que los consumidores están dispuestos a gastar es el área bajo la curva de demanda.

¡EXPLORE!

En el ejemplo 5.5.4, cambie $D(q)$ a $D_{\text{nueva}}(q) = 4(23 - q^2)$. ¿Aumenta o disminuye la cantidad que los consumidores están dispuestos a gastar para obtener 3 unidades del artículo? Grafique $D_{\text{nueva}}(q)$ en negritas para comparar su gráfica con la de $D(q)$, empleando la pantalla [0, 5]1 por [0, 150]10.

EJEMPLO 5.5.4

Suponga que la función de demanda de los consumidores para cierto artículo es $D(q) = 4(25 - q^2)$ dólares por unidad.

a) Determine la cantidad total de dinero que los consumidores están dispuestos a gastar para obtener 3 unidades del artículo.

b) Trace la curva de demanda e interprete la respuesta al inciso *a*) como un área.

Solución

a) Puesto que la función de la demanda $D(q) = 4(25 - q^2)$, medida en dólares por unidad, es la tasa de cambio con respecto a q de la disposición a gastar de los consumidores, la cantidad total que los consumidores están dispuestos a gastar para obtener 3 unidades del artículo está dada por la integral definida

$$A(3) = \int_0^3 D(q)\, dq = 4\int_0^3 (25 - q^2)\, dq$$

$$= 4\left(25q - \frac{1}{3}q^3\right)\Big|_0^3 = \$264$$

b) La curva de demanda de los consumidores se encuentra en la figura 5.20. En términos geométricos, la cantidad total de \$264, que los consumidores están dispuestos a gastar para obtener 3 unidades del artículo es el área bajo la curva de demanda, de $q = 0$ a $q = 3$.

www.FreeLibros.com

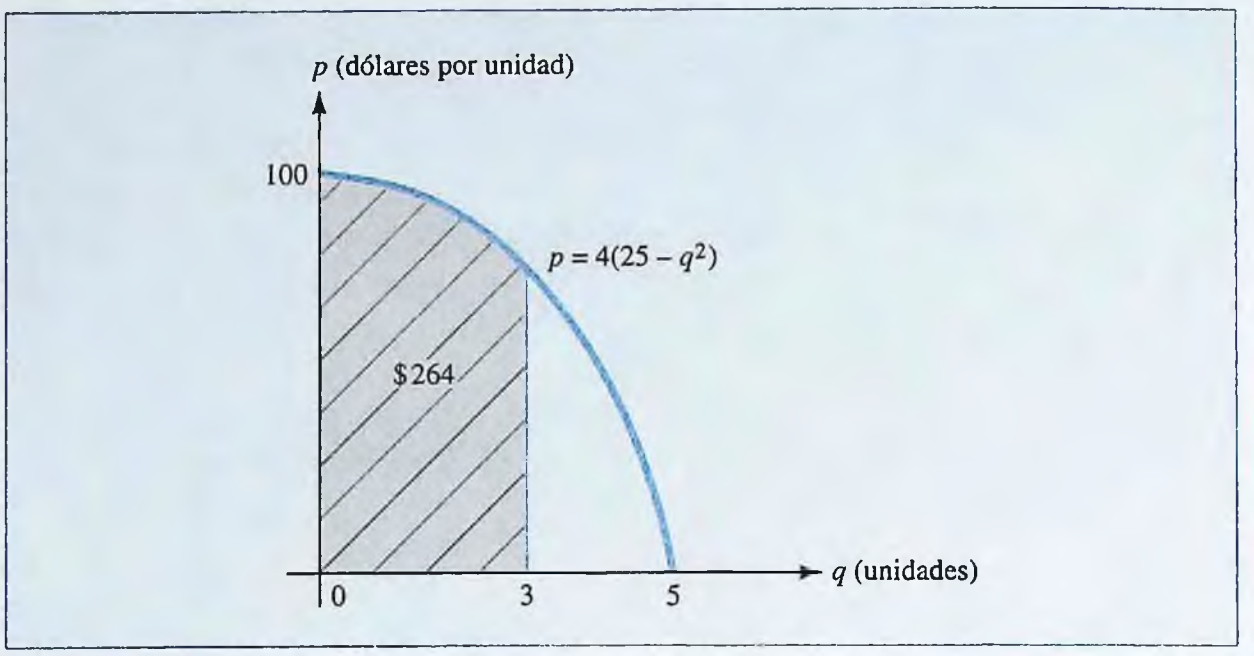


FIGURA 5.20 Disposición a gastar de los consumidores por 3 unidades, cuando la demanda está dada por $D(q) = 4(25 - q^2)$.

Excedente de consumidores y de productores

En una economía competitiva, la cantidad total que los consumidores realmente gastan en un artículo generalmente es menor a la cantidad total que hubieran estado dispuestos a gastar. La diferencia entre las dos cantidades se puede considerar como el ahorro realizado por los consumidores y en economía se conoce como **excedente de los consumidores.** Es decir,

$$\begin{bmatrix}\text{Excedente de los}\\ \text{consumidores}\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}\text{cantidad total que los consumidores}\\ \text{están dispuestos a gastar}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{gasto real de}\\ \text{los consumidores}\end{pmatrix}$$

Las condiciones del mercado determinan el precio unitario al cual se vende un artículo. Una vez que se conoce el precio p_0, la ecuación de demanda $p = D(q)$ determina el número de unidades q_0 que comprarán los consumidores. El gasto real de los consumidores por q_0 unidades del artículo, al precio de p_0 dólares por unidad, es p_0q_0 dólares. El excedente de los consumidores se calcula restando esta cantidad de la cantidad total que los consumidores hubieran estado dispuestos a gastar para obtener q_0 unidades del artículo.

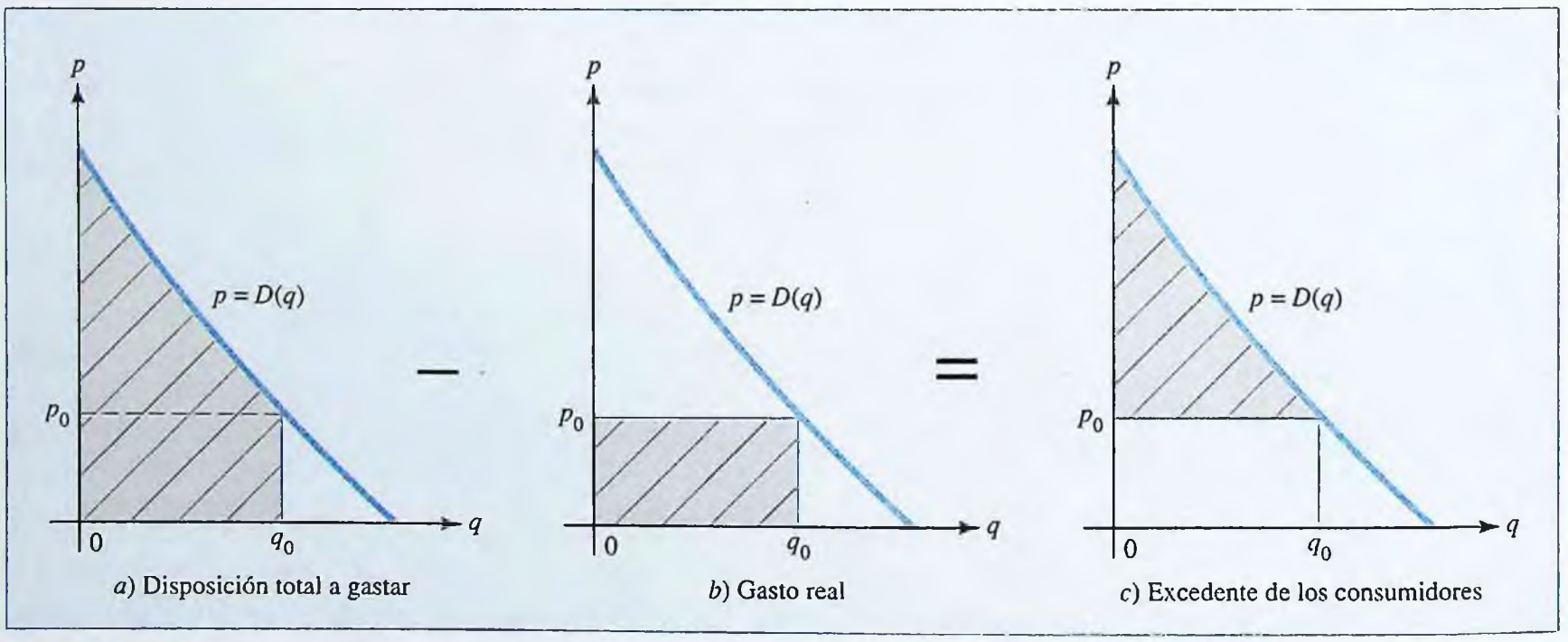


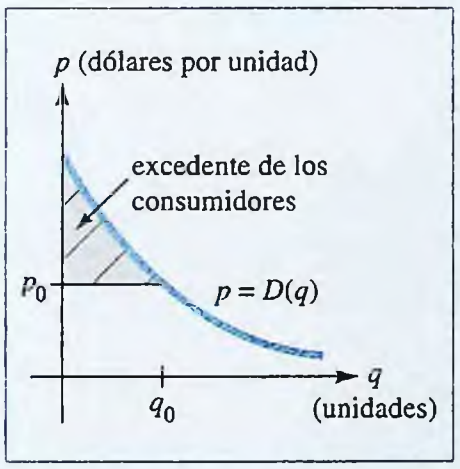
FIGURA 5.21 Interpretación geométrica del excedente de los consumidores.

www.FreeLibros.com

Para comprender mejor el concepto de excedente de los consumidores, considere nuevamente el ejemplo de la pareja que estaba dispuesta a gastar \$200 por su primer televisor, \$100 por el segundo y \$30 por el tercero. Suponiendo que el precio de mercado de los televisores es \$100 por unidad, entonces la pareja compraría sólo dos televisores y gastaría un total de $2 \times \$100 = \$200$. Esto es menos que los $\$200 + \$100 = \$300$ que la pareja hubiera estado dispuesta a gastar para obtener dichos televisores. El ahorro de $\$300 - \$200 = \$100$ es el excedente de los consumidores de la pareja.

El excedente de los consumidores tiene una interpretación geométrica simple, que se ilustra en la figura 5.21. Los símbolos p_0 y q_0 denotan el precio de mercado y la demanda correspondiente. En la figura 5.21*a* se muestra la región bajo la curva de demanda de $q = 0$ a $q = q_0$. Su área, como se ha visto, representa la cantidad total que los consumidores están dispuestos a gastar para obtener q_0 unidades del artículo. El rectángulo en la figura 5.21*b* tiene un área de p_0q_0 y por tanto representa el gasto real del consumidor por q_0 unidades a p_0 dólares por unidad. La diferencia entre estas dos áreas (figura 5.21*c*) representa el excedente de los consumidores. Es decir, el excedente de los consumidores EC es el área de la región entre la curva de demanda $p = D(q)$ y la recta horizontal $p = p_0$ y por tanto es igual a la integral definida

$$\begin{aligned} \text{EC} &= \int_0^{q_0} [D(q) - p_0]\, dq = \int_0^{q_0} D(q)\, dq - \int_0^{q_0} p_0\, dq \\ &= \int_0^{q_0} D(q)\, dq - p_0 q \Big|_0^{q_0} \\ &= \int_0^{q_0} D(q)\, dq - p_0 q_0 \end{aligned}$$



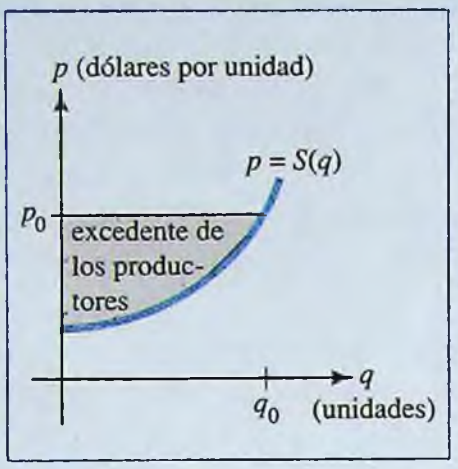
Excedente de los consumidores ■ Si se venden q_0 unidades de un artículo a un precio de p_0 por unidad y si $p = D(q)$ es la función de demanda de los consumidores por el artículo, entonces

$$\left[\begin{array}{c}\text{Excedente de los}\\ \text{consumidores}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\text{cantidad total que los}\\ \text{consumidores están dispuestos}\\ \text{a gastar por } q_0 \text{ unidades}\end{array}\right] - \left[\begin{array}{c}\text{gasto real del}\\ \text{consumidor por}\\ q_0 \text{ unidades}\end{array}\right]$$

$$\text{EC} = \int_0^{q_0} D(q)\, dq - p_0 q_0$$

El **excedente de los productores** es la otra cara de la moneda. En particular, una **función de oferta** $p = S(q)$ da el precio unitario que los productores están dispuestos a aceptar por ofertar q unidades en el mercado. Sin embargo, cualquier productor que esté dispuesto a aceptar menos que $p_0 = S(q_0)$ dólares por q_0 unidades tiene ganancia porque el precio es p_0. Entonces el excedente de los productores es la diferencia entre lo que los productores están dispuestos a aceptar para ofertar q_0 unidades y el precio que en realidad reciben. Si se razona como se hizo con el excedente de los consumidores, entonces se obtiene la siguiente fórmula para el excedente de los productores.

www.FreeLibros.com



Excedente de los productores ■ Si se venden q_0 unidades de un artículo a un precio de p_0 dólares por unidad, y $p = S(q)$ es la función de oferta de los productores para ese artículo, entonces

$$\left[\begin{array}{c}\text{Excedente de los}\\ \text{consumidores}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c}\text{gasto real de los}\\ \text{consumidores por}\\ q_0 \text{ unidades}\end{array}\right] - \left[\begin{array}{c}\text{cantidad total que los}\\ \text{productores reciben}\\ \text{cuando ofertan } q_0 \text{ unidades}\end{array}\right]$$

$$\text{EP} = p_0 q_0 - \int_0^{q_0} S(q)\, dq$$

EJEMPLO | 5.5.5

Un fabricante de neumáticos estima que los mayoristas comprarán (demandarán) q (miles) de neumáticos radiales cuando el precio sea

$$p = D(q) = -0.1q^2 + 90$$

dólares por neumático, y el mismo número de neumáticos se ofertarán cuando el precio sea

$$p = S(q) = 0.2q^2 + q + 50$$

dólares por neumático.

a) Determine el precio de equilibrio (cuando la oferta es igual a la demanda), así como la cantidad ofertada y demandada a ese precio.

b) Determine el excedente de los consumidores y el de los productores al precio de equilibrio.

Solución

a) Las curvas de oferta y demanda se muestran en la figura 5.22. La oferta es igual a la demanda cuando

$$\begin{aligned} -0.1q^2 + 90 &= 0.2q^2 + q + 50 \\ 0.3q^2 + q - 40 &= 0 \\ q &= 10 \quad \text{(se rechaza } q \approx -13.33\text{)} \end{aligned}$$

y $p = -0.1(10)^2 + 90 = 80$ dólares por neumático. Así, el equilibrio ocurre a un precio de \$80 por neumático, y la oferta y la demanda es de 10 000 neumáticos.

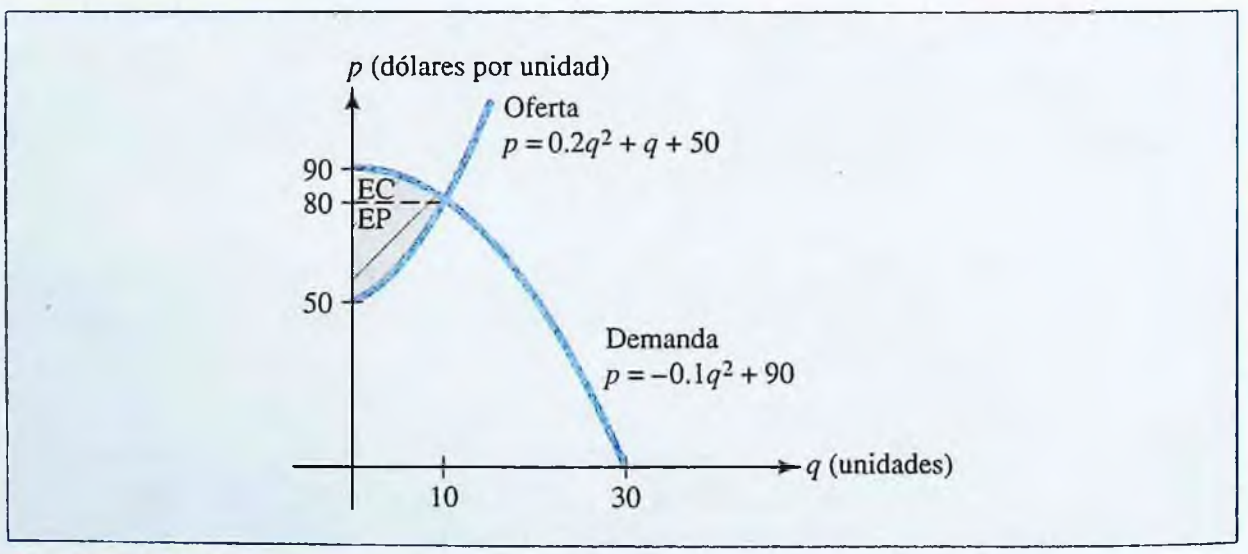


FIGURA 5.22 Excedente de los consumidores y de los productores para las funciones de demanda y oferta del ejemplo 5.5.5.

www.FreeLibros.com

b) Usando $p_0 = 80$ y $q_0 = 10$, se calcula que el excedente de los consumidores es

$$\begin{aligned} \text{EC} &= \int_0^{10} (-0.1q^2 + 90)\, dq - (80)(10) \\ &= \left[-0.1\left(\frac{q^3}{3}\right) + 90q\right]\Bigg|_0^{10} - (80)(10) \\ &\approx 866.67 - 800 = 66.67 \end{aligned}$$

o \$66 670 (puesto que $q_0 = 10$ en realidad es 10 000). El excedente de los consumidores es el área de la región sombreada identificada como EC en la figura 5.22.

El excedente de los productores es

$$\begin{aligned} \text{EP} &= (80)(10) - \int_0^{10} (0.2q^2 + q + 50)\, dq \\ &= (80)(10) - \left[0.2\left(\frac{q^3}{3}\right) + \left(\frac{q^2}{2}\right) + 50q\right]\Bigg|_0^{10} \\ &\approx 800 - 616.67 = 183.33 \end{aligned}$$

o \$183 330. El excedente de los productores es el área de la región sombreada identificada como EP en la figura 5.22.

PROBLEMAS | 5.5

DISPOSICIÓN A GASTAR DE LOS CONSUMIDORES *Para las funciones de demanda de los consumidores $D(q)$ en los problemas 1 a 6:*

a) Determine la cantidad total de dinero que los consumidores están dispuestos a gastar para obtener q_0 unidades del artículo.

b) Trace la curva de demanda e interprete la disposición a gastar de los consumidores del inciso a) como un área.

1. $D(q) = 2(64 - q^2)$ dólares por unidad; $q_0 = 6$ unidades
2. $D(q) = \dfrac{300}{(0.1q + 1)^2}$ dólares por unidad; $q_0 = 5$ unidades
3. $D(q) = \dfrac{400}{0.5q + 2}$ dólares por unidad; $q_0 = 12$ unidades
4. $D(q) = \dfrac{300}{4q + 3}$ dólares por unidad; $q_0 = 10$ unidades
5. $D(q) = 40e^{-0.05q}$ dólares por unidad; $q_0 = 10$ unidades
6. $D(q) = 50e^{-0.04q}$ dólares por unidad; $q_0 = 15$ unidades

EXCEDENTE DE LOS CONSUMIDORES *En los problemas 7 a 10, $p = D(q)$ es el precio (dólares por unidad) al cual serán demandadas q unidades de cierto artículo en el mercado (es decir, todas las q unidades se venderán a este precio), y q_0 es un nivel especifico de producción. En cada caso, determine el precio $p_0 = D(q_0)$ al cual se demandarán q_0 unidades y calcule el correspondiente excedente de los consumidores, EC. Trace la curva de demanda $y = D(q)$ y sombree la región cuya área representa el excedente de los consumidores.*

7. $D(q) = 2(64 - q^2)$; $q_0 = 3$ unidades
8. $D(q) = 150 - 2q - 3q^2$; $q_0 = 6$ unidades
9. $D(q) = 40e^{-0.05q}$; $q_0 = 5$ unidades
10. $D(q) = 75e^{-0.04q}$; $q_0 = 3$ unidades

EXCEDENTE DE LOS PRODUCTORES *En los problemas 11 a 14 $p = S(q)$ es el precio (dólares por unidad) al cual los productores ofertarán q unidades de cierto artículo en el mercado, y q_0 es un nivel de producción especifico. En cada caso determine el precio $p_0 = S(q_0)$ al cual se ofertarán q_0 unidades y calcule el excedente correspondiente de los productores, EP. Trace la curva de oferta $y = S(q)$ y sombree la región cuya área representa el excedente de los productores.*

11. $S(q) = 0.3q^2 + 30$; $q_0 = 4$ unidades
12. $S(q) = 0.5q + 15$; $q_0 = 5$ unidades
13. $S(q) = 10 + 15e^{0.03q}$; $q_0 = 3$ unidades
14. $S(q) = 17 + 11e^{0.01q}$; $q_0 = 7$ unidades

www.FreeLibros.com

EXCEDENTE DE LOS CONSUMIDORES Y DE LOS PRODUCTORES EN EQUILIBRIO *En los problemas 15 a 19 se dan las funciones de oferta y de demanda, $D(q)$ y $S(q)$ para un artículo particular. Específicamente se demandarán (venderán) q miles de unidades del artículo a un precio de $p = D(q)$ dólares por unidad, en tanto los productores ofertarán q miles de unidades cuando el precio sea $p = S(p)$ dólares por unidad. En cada caso:*

a) Determine el precio de equilibrio p_e (donde la oferta es igual a la demanda).
b) Determine el excedente de los consumidores y el de los productores en el punto de equilibrio.

15. $D(q) = 131 - \frac{1}{3}q^2$; $S(q) = 50 + \frac{2}{3}q^2$

16. $D(q) = 65 - q^2$; $S(q) = \frac{1}{3}q^2 + 2q + 5$

17. $D(q) = -0.3q^2 + 70$; $S(q) = 0.1q^2 + q + 20$

18. $D(q) = \sqrt{245 - 2q}$; $S(q) = 5 + q$

19. $D(q) = \frac{16}{q+2} - 3$; $S(q) = \frac{1}{3}(q + 1)$

20. INGRESO DURANTE LA VIDA ÚTIL DE UNA MÁQUINA Suponga que cuando una máquina industrial en particular tiene t años, genera ingreso a una tasa $R'(t) = 6\,025 - 8t^2$ dólares por año, y que los costos de operación y de servicio se acumulan a una tasa $C'(t) = 4\,681 + 13t^2$ dólares por año.

a) ¿Cuántos años transcurren antes de que empiece a decrecer la rentabilidad de la máquina?
b) Calcule el ingreso neto generado por la máquina durante su vida útil.
c) Trace la curva de la tasa de ingreso $y = R'(t)$ y la curva de la tasa del costo $y = C'(t)$ y sombree la región cuya área representa el ingreso neto calculado en el inciso *b*).

21. INGRESO DURANTE LA VIDA ÚTIL DE UNA MÁQUINA Responda la pregunta del problema 20 para una máquina que genera ingreso a una tasa de $R'(t) = 7\,250 - 18t^2$ dólares por año y para la cual los costos se acumulan a una tasa de $C'(t) = 3\,620 + 12t^2$ dólares por año.

22. RECAUDACIÓN DE FONDOS Se estima que dentro de t semanas, las contribuciones en respuesta a una campaña de recaudación de fondos se recibirán a una tasa de $R'(t) = 5\,000e^{-0.2t}$ dólares por semana, en tanto se espera que los gastos de campaña se acumulen a una tasa de $676 por semana.

a) ¿Durante cuántas semanas excede la tasa del ingreso a la tasa del costo?
b) ¿Qué ingresos netos generará la campaña durante el periodo determinado en el inciso *a*)?
c) Interprete los ingresos netos del inciso *b*) como un área entre dos curvas.

23. RECAUDACIÓN DE FONDOS Responda las preguntas del problema 22 para una campaña de caridad en la cual las contribuciones se hacen a una tasa de $R'(t) = 6\,537e^{-0.3t}$ dólares por semana y los gastos se acumulan a una tasa constante de $593 por semana.

24. MONTO DE UN FLUJO DE INGRESOS Se transfiere dinero continuamente a una cuenta a una tasa constante de $2 400 por año. La cuenta gana interés a una tasa anual de 6%, capitalizado continuamente. ¿Cuánto habrá al cabo de 5 años?

25. MONTO DE UN FLUJO DE INGRESOS Se transfiere dinero continuamente a una cuenta a una tasa constante de $1 000 por año. La cuenta gana interés a un tasa anual de 10% capitalizado continuamente. ¿Cuánto habrá en la cuenta después de 10 años?

26. DECISIÓN DE CONSTRUCCIÓN Magda desea ampliar y renovar su tienda de importaciones, y recibe las proposiciones de dos planes para hacer las mejoras. El primer plan le costará $40 000 y el segundo sólo costará le $25 000. Sin embargo, ella espera que las mejoras resultantes del primer plan proporcionen ingresos a una tasa continua de $10 000 por año, mientras que el flujo de ingresos esperado si lleva a cabo el segundo plan será de $8 000 por año. ¿Cuál plan dará como resultado un ingreso neto mayor durante los próximos 3 años si la tasa de interés prevaleciente es 5% anual capitalizado continuamente?

27. ANUALIDAD PARA EL RETIRO A la edad de 25 años, Tom empieza a depositar anualmente $2 500 en una cuenta individual de retiro que paga interés a una tasa anual de 5% capitalizado continuamente. Suponiendo que sus pagos se hacen como un flujo continuo de ingresos, ¿cuánto dinero habrá en su cuenta si se jubila a la edad de 60 años? ¿Cuánto habrá si se jubila a la edad de 65 años?

28. ANUALIDAD PARA RETIRO Cuando Sue tiene 30 años empieza a depositar $2 000 en un fondo de bonos que paga 8% de interés anual capitalizado continuamente. Suponiendo que sus depósitos se hacen como un flujo continuo de ingresos, ¿cuánto dinero habrá en su cuenta si se jubila a los 55 años de edad?

www.FreeLibros.com

29. VALOR PRESENTE DE UNA INVERSIÓN Una inversión generará ingresos continuamente a una tasa constante de $1 200 por año durante 5 años. Si la tasa de interés anual prevaleciente permanece fija a 5% capitalizado continuamente, ¿cuál es el valor presente de la inversión?

30. VALOR PRESENTE DE UNA FRANQUICIA El gerente de una cadena nacional de comida rápida está vendiendo una franquicia de 10 años en Cleveland, Ohio. La experiencia pasada en localidades similares sugiere que dentro de t años la franquicia generará ingresos a una tasa de $f(t) = \$10\,000$ por año. Si la tasa de interés anual prevaleciente permanece fija a 4% capitalizado continuamente, ¿cuál es el valor presente de la franquicia?

31. ANÁLISIS DE INVERSIÓN Adam trata de elegir entre dos oportunidades distintas de inversión. La primera costará $50 000 y se espera que produzca ingresos a una tasa continua de $15 000 por año. La segunda costará $30 000 y se espera que genere ingresos a una tasa de $9 000 por año. Si la tasa de interés prevaleciente permanece fija a 6% anual capitalizado continuamente, ¿cuál inversión generará más ingresos netos durante los próximos 5 años?

32. ANÁLISIS DE INVERSIÓN Kevin gasta $4 000 en una inversión que genera un flujo continuo de ingresos a una tasa de $f_1(t) = 3\,000$ dólares por año. Su amiga Molly hace una inversión distinta que también genera ingresos continuamente, pero a una tasa de $f_2(t) = 2\,000e^{0.04t}$ dólares por año. La pareja descubre que sus inversiones generan exactamente los mismos ingresos netos durante un periodo de 4 años. Si la tasa de interés anual prevaleciente permanece fija a 5% capitalizado continuamente, ¿cuánto pagó Molly por su inversión?

33. EXCEDENTE DE LOS CONSUMIDORES Un fabricante de partes de maquinaria determina que se venderán q unidades de una pieza particular cuando el precio sea $p = 110 - q$ dólares por unidad. El costo total de producción de las q unidades es $C(q)$ dólares, donde

$$C(q) = q^3 - 25q^2 + 2q + 3\,000$$

a) ¿Cuál es la utilidad que se deriva de la venta de las q unidades a p dólares por unidad? [*Sugerencia:* Primero se encuentra el ingreso $R = pq$; luego la utilidad = ingreso − costo.]

b) ¿Para qué valor de q se maximiza la utilidad?

c) Determine el excedente de los consumidores para el nivel de producción q_0 que corresponde a una utilidad máxima.

34. EXCEDENTE DE LOS CONSUMIDORES Repita el problema 33 para $p = 124 - 2q$ y $C(q) = 2q^3 - 59q^2 + 4q + 7\,600$.

35. AGOTAMIENTO DE FUENTES DE ENERGÍA Se extrae petróleo de un campo petrolero t años después de su apertura a una tasa de $P'(t) = 1.3e^{0.04t}$ mil millones de barriles por año. El campo tiene una reserva de 20 mil millones de barriles, y el precio del petróleo se mantiene constante a $26 por barril.

a) Determine la cantidad de petróleo, $P(t)$, extraida del campo en el momento t. ¿Cuánto petróleo se extrae del campo durante los primeros 3 años de su operación? ¿Cuánto durante los siguientes 3 años?

b) ¿Durante cuántos años, T, opera el campo antes de agotarse el petróleo?

c) Si la tasa de interés anual prevaleciente permanece fija a 5% capitalizado continuamente, ¿cuál es el valor presente del flujo de ingresos continuo $V = 26P'(t)$ durante el periodo de operación del campo, $0 \le t \le T$?

d) Si el propietario del campo petrolero decide vender en el primer día de operaciones, ¿considera que el valor presente determinado en el inciso *c)* sería un precio de venta justo? Explique su razonamiento.

36. AGOTAMIENTO DE FUENTES DE ENERGÍA Responda las preguntas del problema 35 para otro campo petrolero con una tasa de extracción de $P'(t) = 1.5e^{0.03t}$ y con una reserva de 16 mil millones de barriles. Puede suponer que el precio del petróleo aún es de $26 por barril y que la tasa de interés anual prevaleciente es de 5%.

37. AGOTAMIENTO DE FUENTES DE ENERGÍA Responda las preguntas del problema 35 para un campo petrolero con una tasa de extracción de $P'(t) = 1.2e^{0.02t}$ y con una reserva de 12 mil millones de barriles. Suponga que la tasa de interés prevaleciente es 5% igual que antes, pero que el precio del petróleo después de t años está dado por $A(t) = 26e^{0.015t}$.

38. CONTRATOS DEPORTIVOS Un jugador de beisbol estrella, sin agente, es el objeto de una guerra de subastas ente dos equipos rivales. El primer equipo ofrece un bono al momento de firmar el contrato de 3 millones de dólares y un contrato de 5 años garantizándole 8 millones de dólares en el presente año y un incremento de 3% anual durante el resto del contrato. El segundo equipo ofrece $9

www.FreeLibros.com

millones por año durante 5 años sin incentivos. Si la tasa de interés anual prevaleciente permanece fija a 4% capitalizado continuamente, ¿qué oferta dará más? [*Sugerencia:* Suponga que en ambas ofertas, el salario se paga como un flujo continuo de ingresos.]

39. PAGO DE LA LOTERÍA Al ganador de la lotería estatal se le ofrece recibir $10 millones ahora como pago único, o recibir A dólares al año durante los próximos 6 años como un flujo continuo de ingresos. Si la tasa de interés anual prevaleciente es de 5% capitalizado continuamente y las dos formas de pago tienen el mismo valor, ¿ cuánto es A?

40. INGRESO DE UNA INVERSIÓN Una encuesta de mercadeo indica que t meses después de introducir un nuevo tipo de purificador de aire al mercado, las ventas generarán un ingreso a una tasa de $P'(t)$ miles de dólares por mes, donde

$$P'(t) = \frac{500[1.4 - \ln(0.5t + 1)]}{t + 2}$$

a) ¿Cuándo es positiva y cuándo es negativa la tasa de rentabilidad? ¿Cuándo crece y cuándo decrece la tasa de rentabilidad?

b) ¿En qué tiempo $t = t_m$ se maximiza el ingreso mensual? Determine la variación total en el ingreso durante el periodo $0 \le t \le t_m$.

c) Al fabricante le cuesta $100 000 desarrollar el producto purificador, por tanto $P(0) = -100$. Use esta información junto con la integración para determinar $P(t)$.

d) Trace la gráfica de $P(t)$ para $t \ge 0$. Una "novedad" es un producto que tiene éxito rápidamente en el mercado, luego igual de rápido, pierde popularidad. Con base en la gráfica de $P(t)$, ¿llamaría a los purificadores una "novedad"? Explique.

41. INGRESO TOTAL Considere el siguiente problema: "Cierto pozo petrolero que produce 300 barriles de crudo al mes se agotará en 3 años. Se estima que dentro de t meses el precio del petróleo crudo será $P(t) = 18 + 0.3\sqrt{t}$ dólares por barril. Si el petróleo se vende tan pronto como se extrae del suelo, ¿cuál será el ingreso total futuro del pozo?"

a) Resuelva el problema empleando la integración definida. [*Sugerencia:* Divida el intervalo de 3 años (36 meses) $0 \le t \le 36$ en n subintervalos iguales con longitud Δt y defina t_j como el inicio del j-ésimo subintervalo. Determine una expresión que estime el ingreso $R(t_j)$ obtenido durante el j-ésimo subintervalo. Después exprese el ingreso total como el límite de una suma.]

b) Lea un artículo acerca de la industria petrolera y escriba un párrafo sobre los métodos matemáticos para modelar la producción petrolera.[4]

42. COSTOS DE ALMACENAMIENTO Un fabricante recibe N unidades de cierta materia prima que inicialmente se almacenan y luego se van retirando a una tasa constante, hasta que se agota el suministro 1 año más tarde. Suponga que los costos de almacenamiento permanecen fijos en p dólares por unidad por año. Utilice la integración definida para determinar una expresión para el costo total de almacenamiento que pagará el fabricante durante el año. [*Sugerencia:* Sea $Q(t)$ el número de unidades que permanecen almacenadas al cabo de t años y determine una expresión para $Q(t)$. Luego subdivida el intervalo $0 \le t \le 1$ en n subintervalos iguales y exprese el costo total de almacenamiento como el límite de una suma.]

[4] Un buen punto de partida es el artículo de J. A. Weyland y D. W. Ballew, "A Relevant Calculus Problem: Estimation of U.S. Oil Reserves", *The Mathematics Teacher*, Vol. 69 (1976), páginas 125-126.

SECCIÓN 5.6 | Aplicaciones adicionales de las ciencias sociales y de la vida

Ya se ha visto cómo se puede emplear la integración definida para calcular magnitudes de interés en las ciencias sociales y de la vida, como son la variación total, el valor promedio, y el índice de Gini de una curva de Lorentz. En esta sección se analizan varias aplicaciones adicionales, incluyendo supervivencia y renovación en un grupo, flujo sanguíneo por una arteria y gasto cardiaco.

www.FreeLibros.com

Supervivencia y renovación

En el ejemplo 5.6.1 la **función de supervivencia** proporciona la fracción de individuos de un grupo o población que se espera permanezcan en el grupo durante un periodo especifico. También se conoce una **función de renovación** que da la tasa a la cual llegan nuevos miembros, y el objetivo es predecir el tamaño del grupo en algún momento futuro. Los problemas de este tipo se originan en muchos campos, incluyendo sociología, ecología, demografía, e incluso en finanzas, donde la "población" es el número de dólares en una cuenta de inversión y "supervivencia y renovación" se refieren a las características de una estrategia de inversión.

EJEMPLO | 5.6.1

Una nueva clínica de salud mental acaba de abrir. Las estadísticas de instalaciones similares sugieren que la fracción de pacientes que aún estarán recibiendo tratamiento en la clínica t meses después de su visita inicial está dada por la función $f(t) = e^{-t/20}$. Inicialmente, en la clínica se aceptan 300 personas para su tratamiento y se planea aceptar pacientes nuevos a una tasa de 10 por mes. Aproximadamente ¿cuántas personas estarán recibindo tratamiento en la clínica dentro de 15 meses?

Solución

Puesto que $f(15)$ es la fracción de pacientes cuyo tratamiento continúa al menos durante 15 meses, se deduce que de los 300 pacientes actuales, sólo $300f(15)$ todavía recibirán tratamiento dentro de 15 meses.

Para aproximar el número de pacientes *nuevos* que recibirán tratamiento dentro de 15 meses, divida el intervalo de 15 meses $0 \le t \le 15$ en n subintervalos iguales con longitud Δt meses después y denote por t_j en inicio del j-ésimo subintervalo. Como los pacientes nuevos se aceptan a una tasa de 10 por mes, el número de pacientes nuevos aceptados durante el j-ésimo subintervalo es $10\ \Delta t$. Dentro de 15 meses, habrán transcurrido aproximadamente $15 - t_j$ meses desde que estos $10\ \Delta t$ pacientes nuevos tuvieron sus visitas iniciales, y por tanto aproximadamente $(10\ \Delta t)f(15 - t_j)$ de ellos aún estarán recibiendo tratamiento en ese momento (véase la figura 5.23). Así, el número total de pacientes nuevos que seguirán recibiendo tratamiento dentro de 15 meses se puede aproximar mediante la suma

$$\sum_{j=1}^{n} 10f(15 - t_j)\Delta t$$

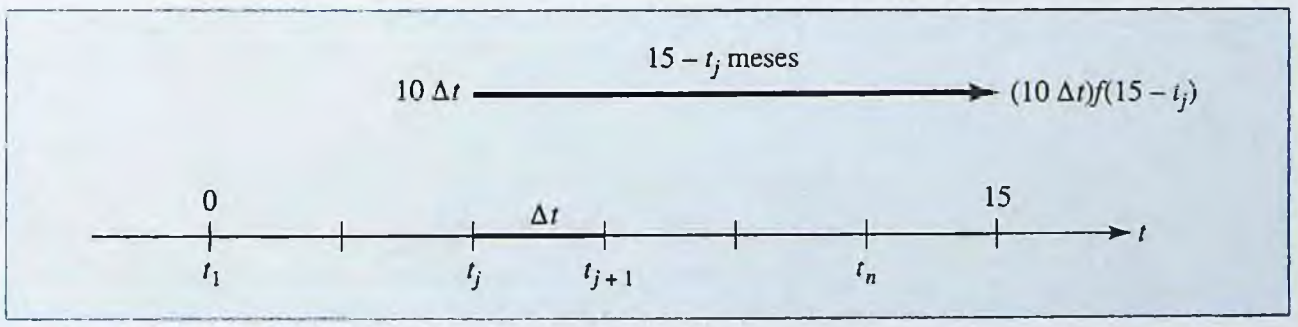


FIGURA 5.23 Miembros nuevos llegando durante el j-ésimo subintervalo.

Al sumar esto al número de pacientes actuales que seguirán recibiendo tratamiento dentro de 15 meses, se obtiene

$$P \approx 300f(15) + \sum_{j=1}^{n} 10f(15 - t_j)\Delta t$$

www.FreeLibros.com

donde P es el número de *todos* los pacientes (actuales y nuevos) que seguirán recibiendo tratamiento dentro de 15 meses.

Cuando n crece ilimitadamente, la aproximación mejora y tiende al valor verdadero de P. De ahí se sigue que

$$P = 300f(15) + \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} 10f(15 - t_j)\Delta t$$

$$= 300f(15) + \int_0^{15} 10f(15 - t)\, dt$$

Puesto que $f(t) = e^{-t/20}$, se tiene $f(15) = e^{-3/4}$ y $f(15 - t) = e^{-(15-t)/20} = e^{-3/4}e^{t/20}$. Así que

$$P = 300e^{-3/4} + 10e^{-3/4}\int_0^{15} e^{t/20}\, dt$$

$$= 300e^{-3/4} + 10e^{-3/4}\left(\frac{e^{t/20}}{1/20}\right)\Bigg|_0^{15}$$

$$= 300e^{-3/4} + 200(1 - e^{-3/4})$$

$$\approx 247.24$$

Es decir, dentro de 15 meses la clínica estará tratando aproximadamente a 247 pacientes.

Las ideas que se ilustran en el ejemplo 5.6.1 se pueden generalizar como sigue. Por definición, la unidad de tiempo se da en años, pero se aplica la misma fórmula cuando se usan otras unidades; por ejemplo, minutos, semanas, o meses (como en el ejemplo 5.6.1).

Supervivencia y renovación ■ Se supone que una población inicialmente tiene P_0 miembros y que se suman miembros nuevos a una tasa constante (renovación) de R individuos por año. Si se supone además que la fracción de la población que permanece durante al menos t años está dada por la función (supervivencia) $S(t)$, entonces dentro de T años la población será

$$P(T) = P_0S(T) + \int_0^T RS(T - t)\, dt$$

En el ejemplo 5.6.1 cada periodo es de 1 mes, la "población" inicial (membresía) es $P_0 = 300$, la tasa de renovación es $R = 10$, la función de supervivencia es $f(t) = e^{-t/20}$, y el plazo es $T = 15$ meses. Ahora se presenta otro ejemplo de supervivencia/renovación, esta vez del campo de la biología.

EJEMPLO | 5.6.2

Se introduce una toxina poco severa en una colonia de bacterias cuya población actual es de 600 000. Las observaciones indican que cada hora nacen 200 bacterias en la colonia, y que la fracción de la población que sobrevive durante t horas es $S(t) = e^{-0.015t}$. ¿Cuál es la población de la colonia después de 10 horas?

www.FreeLibros.com

Solución

Sustituyendo $P_0 = 600\,000$, $R = 200$ y $S(t)$ en la fórmula para supervivencia/renovación, se calcula que la población al cabo de $T = 10$ horas es

$$P(10) = \underbrace{600\,000}_{P_0}\underbrace{e^{-0.015(10)}}_{S(10)} + \int_0^{10} \underbrace{200}_{R}\underbrace{e^{-0.015(10-t)}}_{S(T-t)}\,dt$$

$$\approx 516\,425 + \int_0^{10} 200e^{-0.015(10)}e^{0.015t}\,dt \quad \textit{puesto que } e^{a+b} = e^a e^b$$

$$\approx 516\,425 + 200e^{-0.015(10)}\int_0^{10} e^{0.015t}\,dt \quad \textit{factorizando } 200e^{-0.015(10)} \textit{ fuera de la integral}$$

$$\approx 516\,425 + 172.14\left[\frac{e^{0.015t}}{0.015}\right]\Bigg|_0^{10}$$

$$\approx 516\,425 + 11\,476(e^{0.015(10)} - e^0)$$

$$\approx 518\,282$$

Entonces, la población decrece de 600 000 a 518 282 durante las primeras 10 horas, después de la introducción de la toxina.

NOTA En un problema de supervivencia/renovación, la función de renovación R no tiene que ser constante. En el problema 24 se pide modificar la solución del ejemplo 5.6.1 para determinar una expresión para el tamaño $P(T)$ de un grupo cuando la función de renovación $R(t)$ y la función de supervivencia $S(t)$ no son funciones constantes de t. Luego, en los problemas 25 y 26 se pide emplear esta expresión nueva para determinar la población. ■

Flujo de sangre por una arteria

Los biólogos han determinado que la velocidad de la sangre en una arteria es una función de la distancia de la sangre al eje central de la arteria. De acuerdo con la ley de Poiseuille, la velocidad (en centímetros por segundo) de la sangre que está a r centímetros del eje central de la arteria es $S(r) = k(R^2 - r^2)$, donde R es el radio de la arteria y k es una constante. En el siguiente ejemplo se verá cómo emplear esta información para calcular la tasa a la cual fluye la sangre por una arteria.

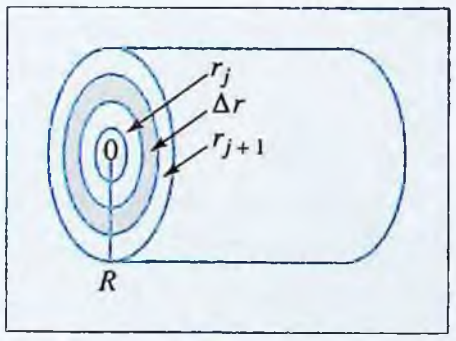


FIGURA 5.24 División de una sección transversal de una arteria en anillos concéntricos.

EJEMPLO | 5.6.3

Determine una expresión para la tasa (en centímetros cúbicos por segundo) a la cual fluye la sangre por una arteria de radio R si la velocidad de la sangre a r centímetros del eje central es $S(r) = k(R^2 - r^2)$, donde k es una constante.

Solución

Para aproximar el volumen de sangre que fluye por una sección transversal de la arteria cada segundo, divida el intervalo $0 \le r \le R$ en n subintervalos iguales de ancho Δr centímetros, y denote por r_j el inicio del j-ésimo subintervalo. Estos subintervalos determinan n anillos concéntricos, como se muestra en la figura 5.24.

Si Δr es pequeña, el área del j-ésimo anillo es aproximadamente el área de un rectángulo cuyo largo es la circunferencia del borde del anillo (del borde interior) y cuyo ancho es Δr. Es decir,

$$\text{Área del } j\text{-ésimo anillo} \approx 2\pi r_j \Delta r$$

www.FreeLibros.com

Si se multiplica el área del j-ésimo anillo (centímetros cuadrados) por la velocidad (centímetros por segundo) de la sangre que fluye por este anillo, se obtiene la tasa (centímetros cúbicos por segundo) a la cual fluye la sangre por el j-ésimo anillo. Puesto que la velocidad de la sangre fluyendo por el j-ésimo anillo es aproximadamente $S(r_j)$ centímetros por segundo, se deduce que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\text{Tasa de flujo}\\ \text{por el } j\text{-ésimo anillo}\end{pmatrix} &\approx \begin{pmatrix}\text{área del}\\ j\text{-ésimo anillo}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{velocidad de sangre}\\ \text{por } j\text{-ésimo anillo}\end{pmatrix}\\ &\approx (2\pi r_j\,\Delta r)S(r_j)\\ &\approx (2\pi r_j\,\Delta r)[k(R^2 - r_j^2)]\\ &\approx 2\pi k(R^2 r_j - r_j^3)\,\Delta r\end{aligned}$$

La tasa de flujo de la sangre por toda la sección transversal es la suma de los n términos, uno por cada uno de los n anillos concéntricos. Es decir,

$$\text{Tasa de flujo} \approx \sum_{j=1}^{n} 2\pi k(R^2 r_j - r_j^3)\,\Delta r$$

Cuando n crece ilimitadamente, esta aproximación tiende al valor verdadero de la tasa del flujo. En otras palabras,

$$\begin{aligned}\text{Tasa de flujo} &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} 2\pi k(R^2 r_j - r_j^3)\,\Delta r\\ &= \int_0^R 2\pi k(R^2 r - r^3)\,dr\\ &= 2\pi k\left(\frac{R^2}{2}r^2 - \frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_0^R\\ &= \frac{\pi k R^4}{2}\end{aligned}$$

Entonces, la sangre fluye a una tasa de $\dfrac{\pi k R^4}{2}$ centímetros cúbicos por segundo.

Gasto cardiaco

Al estudiar el sistema cardiovascular, con frecuencia los investigadores médicos están interesados en saber el **gasto cardiaco** del corazón de una persona, que es el volumen de sangre que bombea el corazón en un tiempo unitario. El gasto cardiaco se mide mediante un procedimiento denominado **método de dilución de tintura**.[5] En éste se inyecta una cantidad conocida de tinte en la vena, cerca del corazón. Luego, el tinte circula con la sangre por el ventrículo derecho del corazón, los pulmones, y el ventrículo izquierdo del corazón antes de que finalmente aparezca en el sistema arterial. Se introduce una sonda de monitoreo en la aorta y se toman muestras de sangre a intervalos de tiempo regulares para medir la concentración de tinte saliendo del corazón hasta que todo el tinte pasa por el punto de monitoreo. En la figura 5.25 se muestra una gráfica típica de la concentración de tinte.

[5] Véase el módulo, "Measuring Cardiac Output" por B. Horelick y S. Koont, *UMAP Modules 1977: Tools for Teaching*, Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., Lexington, MA, 1978. Otra buena fuente es *Calculus and Its Applications*, por S. Farlow and G. Haggard, McGraw-Hill, Boston, 1990, páginas 332-334.

www.FreeLibros.com

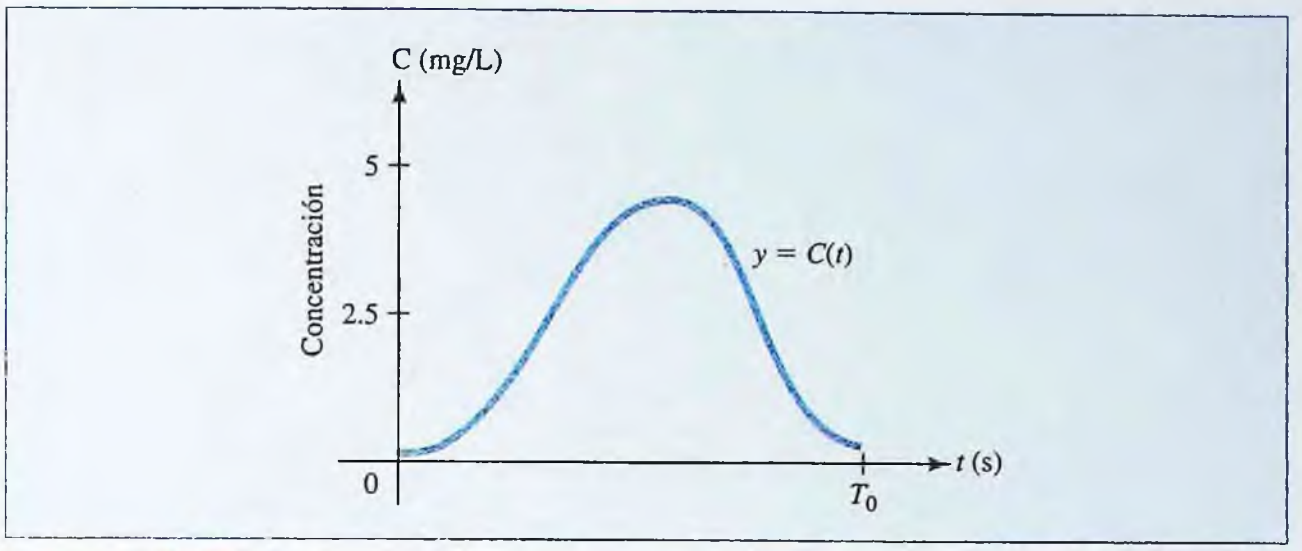


FIGURA 5.25 Gráfica típica que muestra la concentración de tinte en la aorta de un paciente.

Suponga que la cantidad de tinte inyectada es D mg, y que $C(t)$ (mg/L) es la concentración de tinte en el momento t. Sea T_0 el tiempo total requerido para que todo el tinte pase por el punto de monitoreo, y considere el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq T_0$ dividido en n subintervalos iguales, cada uno con longitud $\Delta t = (T_0 - 0)/n$. Si R es el gasto cardiaco (litros/min), entonces por la sonda de monitoreo pasan aproximadamente $R\Delta t$ litros de sangre durante el k-ésimo subintervalo de tiempo $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, portando $C(t_k)R\Delta t$ mg de tinte. Sumando las cantidades de tinte en todos los n subintervalos, se obtiene la suma,

$$\sum_{k=1}^{n} C(t_k)R\,\Delta t$$

como una aproximación de la cantidad total de tinte, y tomando el límite cuando $n \to +\infty$ se obtiene la cantidad total real de tinte como una integral definida:

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} C(t_k)R\,\Delta t = \int_0^{T_0} C(t)R\,dt = R\int_0^{T_0} C(t)\,dt$$

Puesto que originalmente se inyectaron D miligramos de tinte, se debe tener

$$D = R\int_0^{T_0} C(t)\,dt$$

por tanto el gasto cardiaco está dado por

$$R = \frac{D}{\displaystyle\int_0^{T_0} C(t)\,dt}$$

¡EXPLORE!

Tomando como referencia al ejemplo 5.6.4, grafique la función de la concentración de tinte $C(t) = 0.09t^2e^{-0.0007t^3}$ usando la pantalla [0, 23.5]5 por [−1, 6]1. Calcule el gasto cardiaco del paciente suponiendo un periodo de observación de sólo 20 segundos, y compare con los resultados obtenidos en el ejemplo (para un periodo de 20 segundos).

EJEMPLO | 5.6.4

Un médico inyecta 4 mg de tinte en una vena cercana al corazón de un paciente, y un dispositivo de monitoreo registra la concentración de tinte en la sangre a intervalos regulares durante un periodo de 23 segundos. Se determina que la concentración en el momento t $(0 \leq t \leq 23)$ se aproxima bastante bien mediante la función

$$C(t) = 0.09t^2e^{-0.0007t^3}\ \text{mg/L}$$

Con base en esta información, ¿cuál es el gasto cardiaco del paciente?

www.FreeLibros.com

Solución

Integrando $C(t)$ en el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 23$, se tiene que

$$\int_0^{23} C(t)\,dt = \int_0^{23} 0.09t^2 e^{-0.0007t^3}\,dt$$

$$= 0.09\int_0^{23} e^{-0.0007t^3}(t^2\,dt) \qquad \text{sustituyendo } u = t^3,\ du = 3t^2\,dt$$

$$= 0.09\int_0^{12,167} e^{-0.0007u}\left(\frac{1}{3}\,du\right) \qquad \text{cuando } x = 0,\ u = 0;\ \text{cuando } x = 23,\ u = (23)^3 = 12\,167$$

$$= \frac{0.09}{3}\left(\frac{e^{-0.0007u}}{-0.0007}\right)\Bigg|_0^{12,167}$$

$$\approx -42.86\left[e^{-0.0007(12,167)} - e^0\right]$$

$$\approx 42.85$$

Entonces, el gasto cardiaco es

$$R = \frac{4}{\int_0^{23} C(t)\,dt}$$

$$\approx \frac{4}{42.85} \approx 0.093 \quad \text{litros/s}$$

o,

$$R \approx (0.093 \text{ litros/s})(60 \text{ s/min}) \approx 5.6 \text{ litros/min}$$

PROBLEMAS | 5.6

SUPERVIVENCIA Y RENOVACIÓN *En los problemas 1 a 4 se proporciona una población inicial P_0 junto con una tasa de renovación R, y una función de supervivencia $S(t)$. En cada caso, use la información dada para determinar la población al cabo del plazo indicado T.*

1. $P_0 = 50\,000$; $R = 40$; $S(t) = e^{-0.1t}$, t en meses; plazo $T = 5$ meses
2. $P_0 = 100\,000$; $R = 300$; $S(t) = e^{-0.02t}$, t en días; plazo $T = 10$ días
3. $P_0 = 500\,000$; $R = 800$; $S(t) = e^{-0.011t}$, t en años; plazo $T = 3$ años
4. $P_0 = 800\,000$; $R = 500$; $S(t) = e^{-0.005t}$, t en meses; plazo $T = 5$ meses
5. CRECIMIENTO NETO DE LA POBLACIÓN Se proyecta que dentro de t años la población de cierto país cambiará a una tasa de $e^{0.02t}$ millones por año. Si la población actual es de 50 millones, ¿cuál será la población dentro de 10 años?
6. CRECIMIENTO NETO DE LA POBLACIÓN Un estudio indica que dentro de x meses, la población de cierto pueblo crecerá a una tasa de $10 + 2\sqrt{x}$ habitantes por mes. ¿Cuánto crecerá la población durante los próximos 9 meses?
7. MEMBRESÍA DE GRUPO Una asociación nacional de consumidores ha compilado estadísticas que sugieren que la fracción de sus miembros que aún están activos t después de unirse a la asociación está dada por $f(t) = e^{-0.2t}$. Una nueva sucursal local tiene 200 miembros fundadores y se espera atraer miembros nuevos a la tasa de 10 por mes. ¿Cuántos miembros nuevos puede esperar la sucursal tener al cabo de 8 meses?

www.FreeLibros.com

8. TENDENCIAS POLÍTICAS Sarah Greene se postula para alcalde. Las encuestas indican que la fracción de quienes la apoyan t semanas después de saber acerca de su candidatura está dada por $f(t) = e^{-0.03t}$. En el momento que ella declaró su candidatura, 25 000 personas la apoyaban y se suman nuevos adeptos a una tasa constante de 100 personas por semana. Aproximadamente, ¿cuántas personas es probable que voten por ella si las elecciones se llevan a cabo 20 semanas después que ella entró a la contienda?

9. PROPAGACIÓN DE UNA ENFERMEDAD Una nueva cepa de influenza acaba de ser declarada epidemia por las autoridades de salud. Actualmente 5 000 personas tienen la enfermedad y cada día se suman 60 víctimas más. Si la fracción de las personas infectadas que aún tienen la enfermedad t días después de contraerla está dada por $f(t) = e^{-0.02t}$, ¿cuántas personas tendrán influenza al cabo de 30 días?

10. DESPERDICIOS NUCLEARES Cierta planta nuclear produce desperdicios radiactivos en la forma de estroncio-90 a una tasa constante de 500 libras por año. Los desperdicios se desintegran exponencialmente con una vida media de 28 años. ¿Qué fracción de los desperdicios radiactivos de la planta nuclear permanecerá después de 140 años? [*Sugerencia:* Considere este problema como de supervivencia y renovación.]

11. CONSUMO DE ENERGÍA Se estima que la demanda de petróleo crece exponencialmente a una tasa de 10% anual. Si la demanda de petróleo actualmente es de 30 mil millones de barriles por año, ¿cuánto petróleo se consumirá durante los próximos 10 años?

12. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN Los administradores de un pueblo estiman que la fracción de personas que aún estarán residiendo en el pueblo t años después de llegar está dada por la función $f(t) = e^{-0.04t}$. Si la población actual es de 20 000 habitantes y llegan nuevos ciudadanos a una tasa de 500 por año, ¿cuál será la población dentro de 10 años?

13. CITAS POR COMPUTADORA Los operadores de un servicio nuevo de citas por computadora estiman que la fracción de personas que retendrán su membresía en el servicio durante al menos t meses está dada por la función $f(t) = e^{-t/10}$. Hay 8 000 miembros fundadores, y los operadores esperan atraer 200 miembros nuevos por mes. ¿Cuántos miembros tendrá el servicio dentro de 10 años?

14. FLUJO SANGUÍNEO Calcule la tasa (en centímetros cúbicos por segundo) a la cual fluye la sangre por una arteria de radio 0.1 centímetros si la velocidad de la sangre a r centímetros del eje central es $8 - 800r^2$ centímetros por segundo.

15. GASTO CARDIACO Un médico inyecta 5 mg de tinte en una vena cerca del corazón de un paciente y monitoreando la concentración de tinte en la sangre durante un periodo de 24 horas, determina que la concentración de tinte que sale del corazón después de t segundos ($0 \le t \le 24$) está dada por la función

$$C(t) = -0.028t^2 + 0.672t \quad \text{mg/L}$$

a) Utilice esta información para determinar el gasto cardiaco del paciente.

b) Trace la gráfica de $C(t)$ y compárela con la gráfica de la figura 5.25. ¿En qué se parecen las dos gráficas? ¿En qué se diferencian?

16. GASTO CARDIACO Responda las preguntas del problema 15 para la siguiente función de concentración de tinte

$$C(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \le t \le 2 \\ -0.034(t^2 - 26t + 48) & \text{para } 2 \le t \le 24 \end{cases}$$

17. GASTO CARDIACO Responda las preguntas del problema 15 para la siguiente función de concentración de tinte

$$C(t) = \frac{1}{12\,312}(t^4 - 48t^3 + 378t^2 + 4\,752t$$

18. DENSIDAD DE POBLACIÓN La densidad de población a r millas del centro de cierta ciudad es $D(r) = 5\,000(1 + 0.5r^2)^{-1}$ habitantes por milla cuadrada. ¿Cuántas personas viven dentro de un radio de 3 millas del centro de la ciudad? [*Sugerencia:* Divida un disco circular de radio 3 en anillos concéntricos].

19. DENSIDAD DE POBLACIÓN La densidad de población a r millas del centro de una cierta ciudad es $D(r) = 25\,000e^{-0.05r^2}$ habitantes por milla cuadrada. ¿Cuántas personas viven a un radio de entre 1 y 2 millas del centro de la ciudad? [*Sugerencia*: Vea la sugerencia al problema 18.]

20. LEY DE POISEUILLE La sangre fluye por una arteria de radio R. A una distancia de r centímetros del eje central de la arteria, la velocidad de la sangre está dada por $S(r) = k(R^2 - r^2)$. Demuestre que la velocidad media de la sangre es un medio de la velocidad máxima.

21. REGULACIÓN DE COLESTEROL La grasa viaja por el torrente sanguíneo ligada a una proteína en una combinación denominada *lipoproteína*. La lipoproteína de baja densidad recoge colesterol del hígado y lo entrega a las células, disminuyendo cualquier exceso de colesterol en las paredes de las arterias. Demasiada lipoproteína de baja densidad en el torrente sanguíneo incrementa el riesgo de enfermedades del corazón y de apoplejías. Se ha descubierto que un paciente con un nivel elevado de lipoproteína de baja densidad recibe un medicamento que reduce el nivel a la tasa dada por

$$L'(t) = -0.3t(49 - t^2)^{0.4} \quad \text{unidades/día}$$

www.FreeLibros.com

donde t es el número de días después que el medicamento comienza a administrarse, para $0 \leq t \leq 7$.

a) ¿En cuánto cambia el nivel de lipoproteína de baja densidad durante los primeros 3 días después que el medicamento comienza a administrarse ?

b) Suponga que el nivel de lipoproteína de baja densidad es de 150 en el momento que comienza a administrarse el medicamento. Determine $L(t)$.



c) El nivel recomendado como "seguro" de lipoproteína de baja densidad es de 130. ¿Cuántos días transcurren para que el nivel de lipoproteína de baja densidad sea "seguro"?

22. REGULACIÓN DE COLESTEROL Durante su revisión médica anual, a un paciente se le recomienda adoptar un régimen de ejercicio, dieta y medicación para disminuir su nivel de colesterol en la sangre a 220 miligramos por decilitro (mg/dl). Suponga que el paciente descubre que su nivel de colesterol t días después de iniciar el régimen es

$$L(t) = 190 + 65e^{-0.003t}.$$

a) ¿Cuál era el nivel de colesterol del paciente cuando inició el régimen?

b) ¿Cuántos días N debe permanecer el paciente siguiendo el régimen para disminuir su nivel de colesterol a 220 mg/dl?

c) ¿Cuál era el nivel promedio de colesterol del paciente durante los primeros 30 días del régimen? ¿Cuál era el nivel promedio durante el periodo completo $0 \leq t \leq N$ del régimen?

23. CRECIMIENTO BACTERIAL Se conduce un experimento con dos colonias de bacterias, cada una tiene inicialmente una población de 100 000. En la primera colonia se introduce un producto ligeramente tóxico que restringe su crecimiento de tal forma que sólo se agregan 50 bacterias nuevas por día y la fracción de bacterias que sobreviven al menos t días está dada por $f(t) = e^{-0.011t}$. El crecimiento de la segunda colonia se restringe indirectamente, limitando el suministro de alimento y espacio de expansión, y después de t días, se determina que esta colonia contiene

$$P(t) = \frac{5\,000}{1 + 49e^{0.009t}}$$

miles de individuos. ¿Cuál colonia es mayor después de 50 días? ¿Después de 100 días? ¿Después de 300 días?

24. MEMBRESÍA DE GRUPO Se ha formado un grupo con una membresía inicial de P_0. Suponga que la fracción de la membresía del grupo que permanece en él durante al menos t años está dada por la función $S(t)$, y que en el tiempo t, se suman miembros nuevos al grupo a una tasa de $R(t)$ miembros por año. Demuestre que dentro de N años, el grupo tendrá $P(N)$ miembros, donde

$$P(N) = P_0S(N) + \int_0^N R(t)S(N - t)\,dt$$

25. CRECIMIENTO DE ESPECIES EN PELIGRO DE EXTINCIÓN Los ecologistas estiman que actualmente la población de cierta especie en peligro de extinción es de 3 000. Se espera que la población crezca a una tasa $R(t) = 10e^{0.01t}$ individuos por año dentro de t años, y la fracción que sobrevive t años está dada por $S(t) = e^{-0.07t}$. ¿Cuál será la población de la especie en 10 años? [*Sugerencia:* Véase el problema 24.]

26. TENDENCIAS DE POBLACIÓN La población de una pequeña ciudad es actualmente de 85 000. Un estudio encargado por la oficina del alcalde determina que las personas se establecen en el pueblo a una tasa de $R(t) = 1\,200e^{0.01t}$ por año y que la fracción de la población que continúa viviendo en el pueblo t años después de llegar está dada por $S(t) = e^{-0.02t}$. ¿Cuántos habitantes habrá en la ciudad en 10 años? [*Sugerencia:* Véase el problema 24.]

27. TENDENCIAS DE POBLACIÓN Responda la pregunta del problema 26 para una tasa de renovación constante $R = 1\,000$ y la función de supervivencia

$$S(t) = \frac{1}{t + 1}$$

28. EVALUACIÓN DE LA EFECTIVIDAD DE UN MEDICAMENTO Una firma farmacéutica ha recibido el permiso de la Administración de Alimentos y Medicamentos (FDA, por sus siglas en inglés) para probar la efectividad de un medicamento nuevo que combate un virus. La firma administra la droga a un grupo de individuos de prueba, no infectados, pero susceptibles, y empleando métodos estadísticos, determina que t meses después del inicio de la prueba, las personas en el grupo se están infectando a una tasa de $D'(t)$ cientos de individuos por mes, donde

$$D'(t) = 0.2 - 0.04t^{1/4}$$

Las cifras de gobierno indican que sin la droga, la tasa de infección hubiera sido $W'(t)$ cientos de individuos por mes, donde

$$W'(t) = \frac{0.8e^{0.13t}}{(1 + e^{0.13t})^2}$$

Si la prueba se evalúa 1 año después de su inicio, ¿a cuántas personas protege el medicamento de la infección? ¿Qué porcentaje de las personas, que se hubieran infectado si el medicamento no se hubiera empleado, se protegieron de la infección gracias al medicamento?

29. EVALUACIÓN DE LA EFECTIVIDAD DE UN MEDICAMENTO Repita el problema 28 para otro medicamento para el cual la

www.FreeLibros.com

tasa de infección es

$$D_1'(t) = 0.12 + \frac{0.08}{t+1}$$

Suponga que la tasa de comparación del gobierno permanece igual; es decir,

$$W'(t) = \frac{0.8e^{0.13t}}{(1+e^{0.13t})^2}$$

30. ESPERANZA DE VIDA En cierto país subdesarrollado la esperanza de vida de una persona de t años es $L(t)$ años, donde

$$L(t) = 41.6(1 + 1.07t)^{0.13}$$

a) ¿Cuál es la esperanza de vida al nacer de una persona en este país? ¿Cuál es la esperanza a los 50 años de edad?

b) ¿Cuál es la esperanza de vida promedio de todos los habitantes en este país entre las edades de 10 y 70 años?

c) Determine la edad T de tal forma que $L(T) = T$. Denote por T el *límite de vida* para este país. ¿Qué se puede decir acerca de la esperanza de vida de una persona con más de T años?

d) Determine la esperanza de vida promedio L_e en el intervalo $0 \le t \le T$. ¿Por qué es razonable denominar L_e la *duración esperada de vida* para la gente en este país?

31. ESPERANZA DE VIDA Responda las preguntas del problema 30 para un país cuya función de la esperanza de vida es

$$L(t) = \frac{110e^{0.015t}}{1+e^{0.015t}}$$

32. ENERGÍA USADA EN EL VUELO En una investigación de V. A. Tucker y K. Schmidt-Koenig,[6] se determinó que la energía E empleada por una ave en vuelo varía con la velocidad v (km/h) del ave. Para una clase particular de periquito, el gasto de energía cambia a una tasa dada por

$$\frac{dE}{dv} = \frac{0.31v^2 - 471.75}{v^2} \quad \text{para } v > 0$$

donde E está dada en joules por gramo masa por kilómetro. Las observaciones indican que el periquito tiende a volar a la velocidad $v_{\text{mín}}$ que minimiza E.

a) ¿Cuál es la velocidad más económica $v_{\text{mín}}$?

b) Suponga que cuando el periquito vuela a la velocidad más económica $v_{\text{mín}}$ su gasto de energía es $E_{\text{mín}}$. Utilice esta información para determinar $E(v)$ para $v > 0$ en términos de $E_{\text{mín}}$.

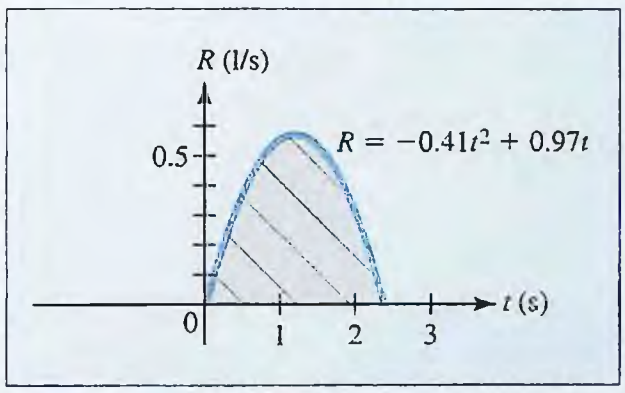
33. MEDICIÓN DE LA RESPIRACIÓN Un neumotacógrafo es un aparato empleado por los médicos para graficar la tasa del flujo de aire que entra y sale de los pulmones cuando un paciente respira. En la figura adjunta se muestra la gráfica de la tasa de la inhalación (aspirando) para un determinado paciente. El área bajo la gráfica mide el volumen total de aire inhalado por el paciente durante la fase de inhalación de un ciclo de respiración. Suponga que la tasa de inhalación está dada por

$$R(t) = -0.41t^2 + 0.97t \quad \text{litros/s}$$

a) ¿Cuánto dura la fase de inhalación?

b) Determine el volumen de aire tomado en los pulmones del paciente durante la fase de inhalación.

c) ¿Cuál es la tasa media del flujo de aire en los pulmones durante la fase de inhalación?



PROBLEMA 33

34. MEDICIÓN DE LA RESPIRACIÓN Repita el problema 33 con la función de la tasa de inhalación

$$R(t) = -1.2t^3 + 5.72t \quad \text{litros/s}$$

y trace la gráfica de $R(t)$.

[6] E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 3a. ed., Springer-Verlag, Nueva York, 1979, página 299.

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Términos importantes, símbolos y fórmulas

Antiderivada; integral indefinida: (358)

$$\int f(x)dx \; F'(x) = +C \text{ si y sólo si } F'(x) = f(x)$$

Regla de la potencia: (359)

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{para } n \neq -1$$

Regla logarítmica: $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$ (359)

Regla exponencial: $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$ (359)

Regla del factor constante: $\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$ (360)

Regla de la suma: (360)

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

Problema con valor inicial (362)

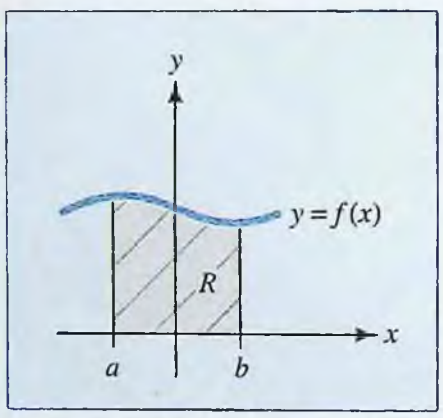
Integración por sustitución: (369)

$$\int g(u(x))u'(x)\, dx = \int g(u)\, du \quad \begin{array}{l} \text{donde } u = u(x) \\ du = u'(x)\, dx \end{array}$$

Integral definida: (380)

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} [f(x_1) + \cdots + f(x_n)]\Delta x$$

Área bajo la curva: (382)



Área de R
$= \int_a^b f(x)\, dx$

Reglas para integrales definidas: (387)

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$$

Regla del factor constante: (387)

$$\int_a^b kf(x)\, dx = k \int_a^b f(x)\, dx \quad \text{para } k \text{ constante}$$

Regla de la suma: (387)

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$$

Regla de la diferencia: (387)

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$$

Regla aditiva de la integral definida: (387)

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

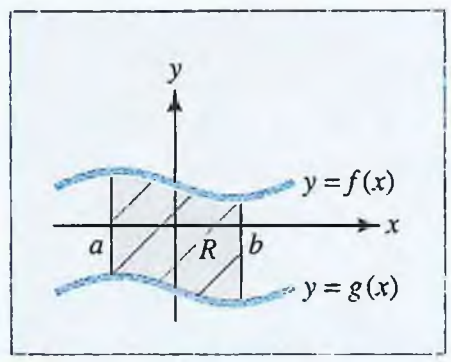
Teorema fundamental del cálculo: (385)

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \quad \text{donde } F'(x) = f(x)$$

Variación total de $Q(x)$ sobre el intervalo $a \leq x \leq b$: (390)

$$Q(b) - Q(a) = \int_a^b Q'(x)\, dx$$

Área entre dos curvas: (398)



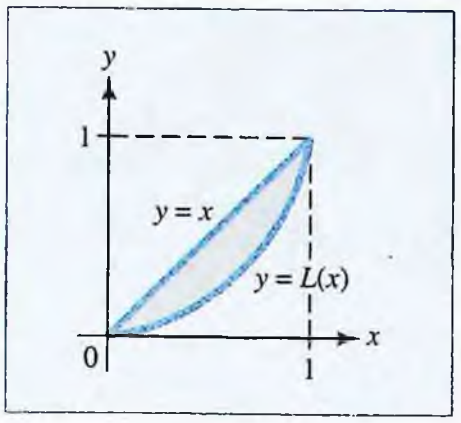
Área de R
$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$

Valor promedio de una función $f(x)$ sobre un intervalo $a \leq x \leq b$: (406)

$$V = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

www.FreeLibros.com

Curva de Lorentz: (404)



$$\text{Índice de Gini} = 2\int_0^1 [x - L(x)]\,dx$$

Exceso neto de utilidad: (402)

Valor futuro (monto) de un flujo de ingresos: (415)

Valor presente de un flujo de ingresos: (415)

Disposición a gastar de los consumidores: (418)

Excedente de los consumidores: (420)

$$\text{EC} = \int_0^{q_0} D(q)\,dq - p_0q_0, \text{ donde } p = D(q) \text{ es la demanda}$$

Excedente de los productores: (421)

$$\text{EP} = p_0q_0 - \int_0^{q_0} S(q)\,dq, \text{ donde } p = S(q) \text{ es la oferta}$$

Supervivencia y renovación: (427)

Flujo de sangre por una arteria: (429)

Gasto cardiaco: (430)

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Revisión del capítulo 5

1. Determine estas integrales indefinidas (antiderivadas).

a) $\int x^3 - \sqrt{3x} + 5e^{-2x}\,dx$

b) $\int \frac{x^2 - 2x + 4}{x}\,dx$

c) $\int \sqrt{x}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)dx$

d) $\int \frac{x}{(3 + 2x^2)^{3/2}}\,dx$

e) $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{x}\,dx$

f) $\int xe^{1+x^2}dx$

2. Evalúe cada una de estas integrales.

a) $\int_1^4 x^{3/2} + \frac{2}{x}\,dx$

b) $\int_0^3 e^{3-x}\,dx$

c) $\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx$

d) $\int_0^3 \frac{(x+3)}{\sqrt{x^2 + 6x + 4}}\,dx$

3. En cada caso, determine el área de la región indicada.

a) La región acotada por la curva $y = x + \sqrt{x}$, el eje x, y las rectas $x = 1$ y $x = 4$.

b) La región acotada por la curva $y = x^2 - 3x$ y la recta $y = x + 5$.

4. Determine el valor promedio de la función $f(x) = \frac{x-2}{x}$ sobre el intervalo $1 \le x \le 2$.

5. VARIACIÓN TOTAL DEL INGRESO El ingreso marginal de producción de q unidades de cierto artículo es $R'(q) = q(10 - q)$ cientos de dólares por unidad. ¿Cuál es el ingreso adicional generado cuando el nivel de producción se incrementa de 4 a 9 unidades?

6. EQUILIBRIO COMERCIAL El gobierno de cierto país estima que dentro de t años, las importaciones se incrementarán a una tasa de $I'(t)$ y las exportaciones, a la tasa $E'(t)$, ambas en miles millones de dólares por año, donde

$I'(t) = 12.5e^{0.2t}$ y $E'(t) = 1.7t + 3$

¿En cuánto se incrementará el déficit comercial de este país durante los próximos cinco años?

7. EXCEDENTE DE LOS CONSUMIDORES Suponga que los consumidores demandan q cientos de unidades de cierto artículo cuando el precio es $p = 25 - q^2$ dólares por unidad. ¿Cuál es el excedente de los consumidores para el artículo cuando el nivel de producción es $q_0 = 4$(400 unidades)?

8. MONTO DE UN FLUJO DE INGRESOS Se transfiere continuamente dinero a una cuenta a una tasa constante de $5 000 por año. La cuenta gana interés a una tasa anual de 5% capitalizado continuamente. ¿Cuánto habrá en la cuenta a cabo de 3 años?

9. CRECIMIENTO DE LA POBLACIÓN Los demógrafos estiman que la fracción de personas que aún

www.FreeLibros.com

residirán en cierta ciudad t años después de llegar está dada por la función $f(t) = e^{-0.02t}$. Si la población actual es de 50 000 y arriban nuevos ciudadanos a una tasa de 700 por año, ¿cuál será la población dentro de 20 años?

10. CONCENTRACIÓN PROMEDIO DE UN MEDICAMENTO A un paciente se le inyecta un medicamento y t horas después la concentración del medicamento que permanece en el torrente sanguíneo del paciente está dada por

$$C(t) = \frac{0.3t}{(t^2 + 16)^{1/2}} \quad \text{mg/cm}^3$$

¿Cuál es la concentración promedio del medicamento durante las primeras 3 horas después de aplicada la inyección?

Problemas de repaso

En los problemas 1 a 20 determine la integral indefinida que se indica.

1. $\int (x^3 + \sqrt{x} - 9)\, dx$

2. $\int \left(x^{2/3} - \frac{1}{x} + 5 + \sqrt{x}\right) dx$

3. $\int (x^4 - 5e^{-2x})\, dx$

4. $\int \left(2\sqrt[3]{s} + \frac{5}{s}\right) ds$

5. $\int \left(\frac{5x^3 - 3}{x}\right) dx$

6. $\int \left(\frac{3e^{-x} + 2e^{3x}}{e^{2x}}\right) dx$

7. $\int \left(t^5 - 3t^2 + \frac{1}{t^2}\right) dt$

8. $\int (x + 1)(2x^2 + \sqrt{x})\, dx$

9. $\int \sqrt{3x + 1}\, dx$

10. $\int (3x + 1)\sqrt{3x^2 + 2x + 5}\, dx$

11. $\int (x + 2)(x^2 + 4x + 2)^5\, dx$

12. $\int \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 2}\, dx$

13. $\int \frac{3x + 6}{(2x^2 + 8x + 3)^2}\, dx$

14. $\int (t - 5)^{12}\, dt$

15. $\int v(v - 5)^{12}\, dv$

16. $\int \frac{\ln(3x)}{x}\, dx$

17. $\int 5xe^{-x^2}\, dx$

18. $\int \left(\frac{x}{x - 4}\right) dx$

19. $\int \left(\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\right) dx$

20. $\int \left(\frac{e^x}{e^x + 5}\right) dx$

En los problemas 21 a 30 evalúe la integral definida que se indica.

21. $\int_0^1 (5x^4 - 8x^3 + 1)\, dx$

22. $\int_1^4 (\sqrt{t} + t^{-3/2})\, dt$

23. $\int_0^1 (e^{2x} + 4\sqrt[3]{x})\, dx$

24. $\int_1^9 \frac{x^2 + \sqrt{x} - 5}{x}\, dx$

25. $\int_{-1}^2 30(5x - 2)^2\, dx$

26. $\int_{-1}^1 \frac{(3x + 6)}{(x^2 + 4x + 5)^2}\, dx$

www.FreeLibros.com

27. $\int_0^1 2te^{t^2-1}\,dt$

28. $\int_0^1 e^{-x}(e^{-x}+1)^{1/2}\,dx$

29. $\int_0^{e-1}\left(\frac{x}{x+1}\right)dx$

30. $\int_e^{e^2}\frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

ÁREA ENTRE DOS CURVAS *En los problemas 31 a 38 trace la región indicada R y determine su área usando la integración.*

31. R es la región bajo la curva $y = x + 2\sqrt{x}$ en el intervalo $1 \le x \le 4$

32. R es la región bajo la curva $y = e^x + e^{-x}$ en el intervalo $-1 \le x \le 1$

33. R es la región bajo la curva $y = \frac{1}{x} + x^2$ en el intervalo $1 \le x \le 2$

34. R es la región bajo la curva $y = \sqrt{9 - 5x^2}$ en el intervalo $0 \le x \le 1$

35. R es la región acotada por la curva $y = \frac{4}{x}$ y la recta $x + y = 5$

36. R es la región acotada por las curvas $y = \frac{8}{x}$ y $y = \sqrt{x}$ y la recta $x = 8$

37. R es la región acotada por la curva $y = 2 + x - x^2$ y el eje x.

38. R es la región triangular con vértices (0, 0), (2, 4) y (0, 6).

VALOR PROMEDIO DE UNA FUNCIÓN *En los problemas 39 a 42 determine el valor promedio de la función dada en el intervalo indicado.*

39. $f(x) = x^3 - 3x + \sqrt{2x}$; en $1 \le x \le 8$

40. $f(t) = t\sqrt[3]{8 - 7t^2}$; en $0 \le t \le 1$

41. $g(v) = ve^{-v^2}$; en $0 \le v \le 2$

42. $h(x) = \frac{e^x}{1 + 2e^x}$; en $0 \le x \le 1$

EXCEDENTE DE LOS CONSUMDORES *En los problemas 43 a 46 $p = D(q)$ es la curva de demanda para un artículo particular; es decir, se demandan q unidades del artículo cuando el precio es $p = D(q)$ dólares por unidad. En cada caso, para el nivel de producción dado q_0, determine $p_0 = D(q_0)$ y calcule el excedente de los consumidores correspondiente.*

43. $D(q) = 4(36 - q^2)$; $q_0 = 2$ unidades

44. $D(q) = 100 - 4q - 3q^2$; $q_0 = 5$ unidades

45. $D(q) = 10e^{-0.1q}$; $q_0 = 4$ unidades

46. $D(q) = 5 + 3e^{-0.2q}$; $q_0 = 10$ unidades

CURVAS DE LORENTZ *En los problemas 47 a 50 trace la curva de Lorentz $y = L(x)$ y determine el índice de Gini correspondiente.*

47. $L(x) = x^{3/2}$

48. $L(x) = x^{1.2}$

49. $L(x) = 0.3x^2 + 0.7x$

50. $L(x) = 0.75x^2 + 0.25x$

En los problemas 51 a 54 resuelva el problema con valor inicial dado.

51. $\frac{dy}{dx} = 2$, donde $y = 4$ cuando $x = -3$

52. $\frac{dy}{dx} = x(x - 1)$, donde $y = 1$ cuando $x = 1$

53. $\frac{dx}{dt} = e^{-2t}$, donde $y = 4$ cuando $t = 0$

54. $\frac{dy}{dx} = \frac{t+1}{t}$, donde $y = 3$ cuando $t = 1$

55. Determine la función cuya recta tangente tiene pendiente $x(x^2 + 1)^{-1}$ para cada x, y cuya gráfica pasa por el punto (1, 5).

56. Determine la función cuya recta tangente tiene pendiente xe^{-2x^2} para cada x, y cuya gráfica pasa por el punto (0, 3).

57. VALOR NETO DE UN BIEN Se estima que dentro de t días el cultivo de un granjero crecerá a una tasa de $0.5t^2 + 4(t + 1)^{-1}$ bushels por día. ¿Cuánto crecerá el valor del cultivo durante los próximos 6 días si el precio de mercado permanece fijo a $42 por bushel?

58. DEPRECIACIÓN El valor de reventa de cierta máquina industrial disminuye a una tasa que cambia con el tiempo. Cuando la máquina tiene t años, la tasa a la que cambia su valor es $200(t - 6)$ dólares por año. Si la máquina se compró nueva por $12 000, ¿cuánto valdrá 10 años después?

RESUMEN DEL CAPÍTULO

www.FreeLibros.com

59. VENTA DE BOLETOS Los promotores de un feria estiman que t horas después de abrir las puertas a las 9:00 a.m. los visitantes ingresarán a la feria a una tasa de $-4(t + 2)^3 + 54(t + 2)^2$ personas por hora. ¿Cuántas personas ingresarán a la feria entre las 10:00 a.m. y el mediodía?

60. COSTO MARGINAL En cierta fábrica el costo marginal es $6(q - 5)^2$ dólares por unidad cuando el nivel de producción es q unidades. ¿Cuánto crecerá el costo total de manufactura si el nivel de producción se incrementa de 10 a 13 unidades?

61. TRANSPORTE PÚBLICO Se estima que dentro de x semanas, el número de viajeros que usa una línea nueva del metro crecerá a una tasa de $18x^2 + 500$ por semana. Actualmente 8 000 viajeros usan el metro. ¿Cuántos lo usarán dentro de 5 semanas?

62. VARIACIÓN TOTAL DE LA BIOMASA Una proteína con masa m (gramos) se desintegra en aminoácidos a una tasa dada por

$$\frac{dm}{dt} = \frac{-15t}{t^2 + 5}$$

¿Cuál es la variación total de masa de la proteína durante las primeras 4 horas?

63. CONSUMO DE PETRÓLEO Se estima que t años a partir del comienzo del 2000, la demanda de petróleo en cierto país cambia a una tasa de $D'(t) = (1 + 2t)^{-1}$ mil millones de barriles por año. ¿Cuándo se consume (demanda) más petróleo durante 2001 o 2004? ¿Cuánto más?

64. VALOR FUTURO DE UN FLUJO DE INGRESOS Se transfiere dinero continuamente a una cuenta a una tasa constante de \$5 000 por año. La cuenta gana interés a una tasa anual de 5% capitalizado continuamente. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta al cabo de 3 años?

65. VALOR FUTURO DE UN FLUJO DE INGRESOS Se transfiere dinero continuamente a una cuenta a una tasa constante de \$12 000 por año. La cuenta gana interés a una tasa anual de 8% capitalizado continuamente. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta al cabo de 5 años?

66. VALOR PRESENTE DE UN FLUJO DE INGRESOS ¿Cuál es el valor presente de una inversión que generará utilidades continuamente a una tasa constante de \$1 000 por año, durante 10 años, si la tasa de interés anual prevaleciente permanece fija en 7% capitalizado continuamente?

67. INVENTARIO DE BIENES RAÍCES En cierta comunidad la fracción de casas puestas a la venta que permanecen sin venderse durante al menos t semanas es aproximadamente $f(t) = e^{-0.2t}$. Si actualmente hay 200 casas en el mercado y si se ponen en el mercado casas adicionales a una tasa de 8 por semana, aproximadamente ¿cuántas casas estarán en el mercado al cabo de 10 semanas?

68. INGRESO MEDIO Un fabricante de bicicletas espera que dentro de x meses los consumidores compren 5 000 bicicletas por mes al precio de $P(x) = 80 + 3\sqrt{x}$ dólares por bicicleta. ¿Cuál es el ingreso medio que el fabricante puede esperar de la venta de las bicicletas durante los siguientes 16 meses?

69. DESECHOS NUCLEARES Una planta nuclear produce desechos radiactivos a una tasa constante de 300 libras por año. Los desechos se desintegran exponencialmente con una vida media de 35 años. ¿Cuántos desechos radiactivos de la planta habrá después de 200 años?

70. CRECIMIENTO DE UN ÁRBOL Un árbol se transplanta y, después de x años crece a una tasa de

$$h'(x) = 0.5 + \frac{1}{(x + 1)^2}$$

metros por año. ¿Cuánto crece el árbol durante el segundo año?

71. INGRESO FUTURO Un pozo de petróleo que produce 900 barriles por mes se agotará en 3 años. Actualmente el precio del crudo es de \$16 por barril y se espera que se incremente a una tasa constante de 8 centavos por barril al mes. Si el petróleo se vende tan pronto como se extrae del suelo, ¿cuál será el ingreso total futuro del pozo?

72. EXCEDENTE DE LOS CONSUMIDORES Suponga que la función de demanda de los consumidores para cierto artículo es $D(q) = 50 - 3q - q^2$ dólares por unidad.

a) Determine el número de unidades que se comprarán si el precio de mercado es de \$32 por unidad.

b) Calcule la disposición a gastar de los consumidores para obtener el número de unidades del inciso *a*).

c) Calcule el excedente de los consumidores cuando el precio de mercado es de \$32 por unidad.

d) Use la instrucción de graficación de su calculadora para trazar la curva de demanda. Interprete la disposición a gastar de los consumidores y el excedente de los consumidores como áreas relacionadas con esta curva.

73. PRECIO MEDIO Los registros indican que t meses después del inicio del año, el precio del tocino en los supermercados locales era $P(t) = 0.06t^2 - 0.2t + 1.2$ dólares por libra. ¿Cuál era el precio medio del tocino durante los primeros 6 meses del año?

www.FreeLibros.com

74. ÁREA SUPERFICIAL DEL CUERPO HUMANO El área superficial S del cuerpo de una persona promedio de 4 pies de altura, que pesa w libras cambia a una tasa

$$S'(w) = 110w^{-0.575} \text{ pulg}^2/\text{lb}$$

En particular, el cuerpo de un niño que mide 4 pies y pesa 50 lb tiene un área de 1 365 pulg^2. Si el niño gana 3 lb mientras permanece con la misma altura, ¿cuánto se incrementa el área superficial del cuerpo del niño?

75. CAMBIO DE TEMPERATURA Se ha determinado que t horas después de la media noche la temperatura T (°C) en cierta ciudad del norte cambia a una tasa dada por

$$T'(t) = -0.02(t - 7)(t - 14) \quad \text{°C/h}$$

¿Cuánto cambia la temperatura entre las 8:00 a.m. y las 8:00 p.m.?

76. EFECTO DE UNA TOXINA En una colonia de bacterias se introduce una toxina y t horas después, la población $P(t)$ de la colonia cambia a la tasa

$$\frac{dP}{dt} = -(\ln 3)3^{4-t}$$

Si había 1 millón de bacterias en la colonia cuando la toxina se introdujo ¿qué representa $P(t)$?

[*Sugerencia:* Note que $3^x = e^{x \ln 3}$.]

77. ANÁLISIS MARGINAL En cierta parte del país, el precio de los huevos Grado A actualmente es de $2.50 por docena. Los estudios indican que dentro de x semanas, el precio $p(x)$ cambiará a la tasa de $p'(x) = 0.2 + 0.003x^2$ centavos por semana.

a) Emplee la integración para determinar $p(x)$ y luego use la instrucción de graficación de su calculadora para trazar la gráfica de $p(x)$. ¿Cuánto costarán los huevos al cabo de 10 semanas?

b) Suponga que la tasa de cambio del precio fuera $p'(x) = 0.3 + 0.003x^2$. ¿Cómo afecta esto a $p(x)$? Compruebe su conjetura trazando la nueva función del precio en la misma pantalla que la función original. Ahora ¿cuánto costarán los huevos al cabo de 10 semanas?

78. INVERSIÓN EN UN PERIODO DE MERCADO A LA BAJA Jan abre una cuenta de acciones con $5 000 al inicio de enero y a continuación deposita $200 al mes. Por desgracia, el mercado va a la baja, y ella ve que t meses después de depositar un dólar, sólo quedan $100f(t)$ centavos, donde $f(t) = e^{-0.01t}$. Si este patrón continua, ¿cuánto tendrá en su cuenta después de 2 años? [*Sugerencia:* Considere este problema como de supervivencia/renovación.]

79. DISTANCIA Y VELOCIDAD Después de t minutos un objeto que se mueve a lo largo de una recta tiene una velocidad $v(t) = 1 + 4t + 3t^2$ metros por minuto. ¿Cuánto viaja el objeto durante el tercer minuto?

80. POBLACIÓN PROMEDIO La población (en miles) de cierta ciudad, t años después del 1 de enero de 1995, está dada por la función

$$P(t) = \frac{150e^{0.03t}}{1 + e^{0.03t}}$$

¿Cuál es la población promedio de la ciudad durante la década de 1995−2005?

81. DISTRIBUCIÓN DEL INGRESO Un estudio sugiere que la distribución de los ingresos para trabajadores sociales y para físioterapeutas se puede representar mediante las curvas de Lorentz $y = L_1(x)$ y $y = L_2(x)$, respectivamente, donde

$$L_1(x) = x^{1.6} \text{ y } L_2(x) = 0.65x^2 + 0.35x$$

¿Para cuál profesión está más equitativa la distribución del ingreso?

82. DISTRIBUCIÓN DEL INGRESO Un estudio conducido por cierto estado determina que las curvas de Lorentz para maestros de preparatoria y para agentes de bienes raíces están dadas por las funciones

$$L_1(x) = 0.67x^4 + 0.33x^3$$
$$L_2(x) = 0.72x^2 + 0.28x$$

respectivamente. ¿Para cuál profesión está más equitativamente distribuido el ingreso?

83. VELOCIDAD Y DISTANCIA Un automóvil es conducido de manera que después de t horas su velocidad es $S(t)$ millas por hora.

a) Escriba una integral definida que dé la velocidad media del automóvil durante las primeras N horas.

b) Escriba una integral definida que indique la distancia total que el automóvil recorre durante las primeras N horas.

c) Analice las relaciones entre las integrales en los incisos *a*) y *b*).

84. Utilice la instrucción de graficación de su calculadora para trazar las curvas $y = -x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ y $y = x \ln x$ en la misma pantalla. Use **ZOOM** y **TRACE** o alguna otra instrucción de su calculadora para encontrar dónde se intersecan las curvas, y luego calcule el área de la región acotada por ellas.

85. Repita el problema 84 para las curvas

$$y = \frac{x - 2}{x + 1} \quad \text{y} \quad y = \sqrt{25 - x^2}$$

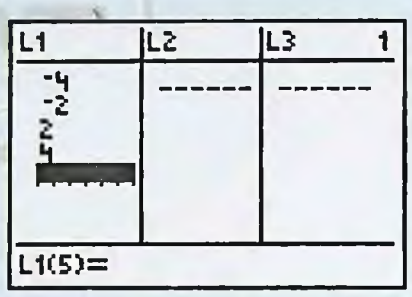
www.FreeLibros.com

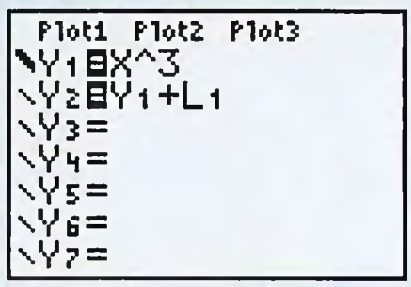
¡EXPLORE! ACTUALIZACIÓN

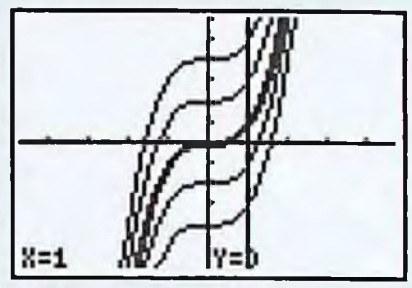
Las soluciones completas para los ejercicios ¡EXPLORE! Se encuentran en el sitio específico del libro en la red. www.mhhe.com/hoffmann

Solución al ejercicio ¡Explore! de la página 357

Introduzca las constantes $\{-4, -2, 2, 4\}$ en L1 y escriba Y1 = X3 y Y2 = Y1 + L1. Grafique Y1 en negritas, usando la pantalla $[-4.7, 4.7]1$ por $[-6, 6]1$. En $x = 1$ (donde se ha trazado una recta vertical), las pendientes para cada curva parecen iguales.



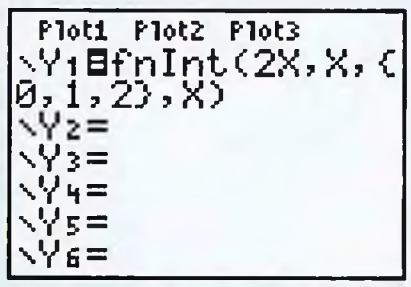


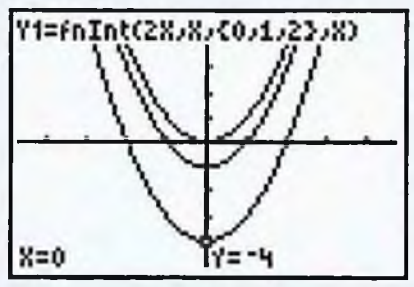


Usando la instrucción de su calculadora gráfica que traza la recta tangente, trace rectas tangentes en $x = 1$ para varias de estas curvas. Cada una de las rectas tangentes en $x = 1$ tiene pendiente igual a 3, aunque cada recta tiene una intersección distinta con el eje y.

Solución al ejercicio ¡Explore! de la página 358

La integración numérica, **fnInt**(expresión, variable, límite inferior, límite superior) puede ser localizada a través de la tecla **MATH, 9:fnInt(**, que fue usada para escribir Y1 en el cuadro que sigue. Se ha obtenido una familia de gráficas que parecen ser parabólicas con vértices a lo largo del eje y en $y = 0$, 1 y 4. La antiderivada de $f(x) = 2x$ es $F(x) = x^2 + C$, donde, para este caso, $C = 0, -1$ y -4.

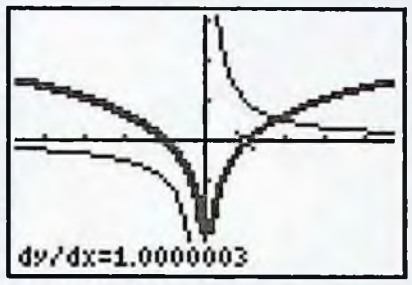


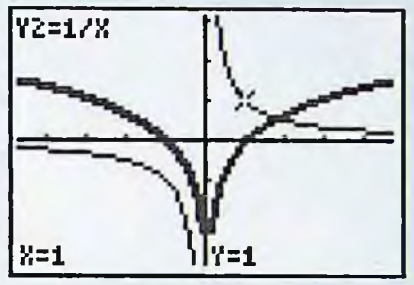


www.FreeLibros.com

Solución al ejercicio ¡Explore! de la página 359

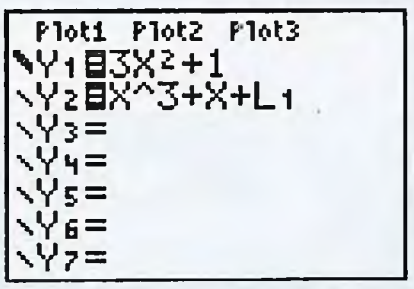
Introduzca $y = F(x) = \ln |x|$ en Y1 como ln(abs(x)), usando un estilo de graficación en negritas, e introduzca $f(x) = 1/x$ en Y2, empleando una pantalla decimal. Observe las gráficas que aparecen aquí. Elija $x = 1$, y compare la derivada $F'(1)$, que aparece en la gráfica de la izquierda como $dy/dx = 1.0000003$, con el valor $y = 1$ de $f(1)$ que aparece a la derecha. La diferencia despreciable entre los valores se puede deber al uso de la derivación numérica. En general, al elegir cualquier otro valor x distinto de cero, se puede verificar que $F'(x) = f(x)$. Por ejemplo, cuando $x = -2$, se tiene $F'(-2) = -0.5 = f(-2)$.

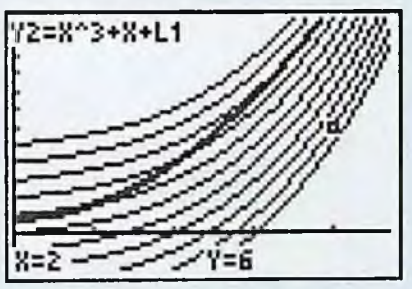


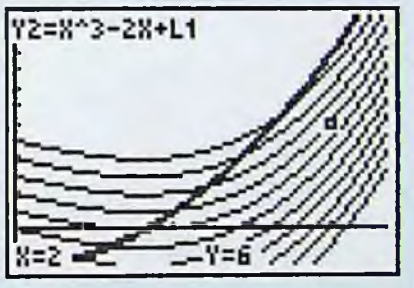


Solución al ejercicio ¡Explore! de la página 361

Introduzca los números enteros de -5 a 5 en L1 (**STAT EDIT 1**). Escriba las ecuaciones en el editor de ecuaciones como se muestra. Ahora grafique, con la pantalla indicada y observe que se generan las curvas de las antiderivadas en secuencia, de los niveles inferiores a los superiores. **TRACE** hasta el punto (2, 6) y observe que la antiderivada que pasa por este punto es la segunda en la lista L1. Esta curva es $F(x) = x^3 + x - 4$, que también puede ser calculada de forma analítica, como en el ejemplo 5.1.4. Para $f(x) = 3x^2 - 2$ se puede usar la misma pantalla para obtener la gráfica de la derecha. La antiderivada es la octava en la lista L1, y corresponde a $F(x) = x^3 - 2x + 2$, cuyo término constante se puede confirmar algebraicamente.

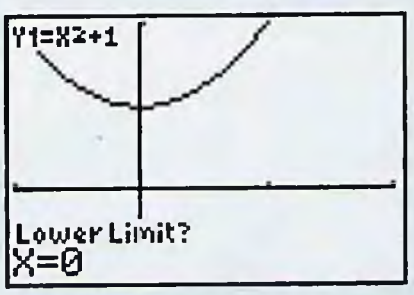


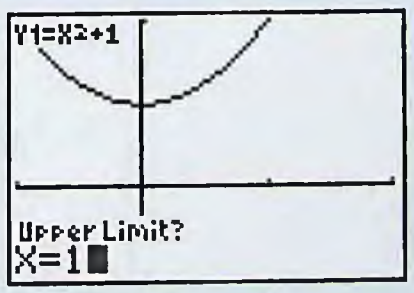


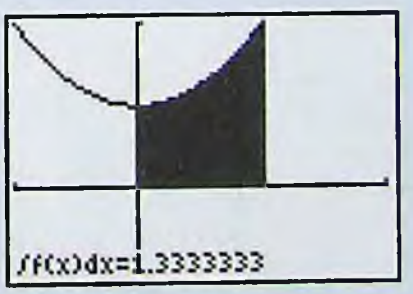


Solución al ejercicio ¡Explore! de la página 386

Siguiendo el ejemplo 5.3.3, haga $Y1 = x^3 + 1$ y grafique empleando una pantalla $[-1, 3]1$ por $[-1, 2]1$. Acceda a la instrucción de integración numérica a través de **CALC, 7:∫f(x) dx**, especificando el límite inferior como $X = 0$ y el límite superior como $X = 1$, para obtener $\int_0^1 x^3 + 1\, dx = 1.25$. Después multiplique por 10 000 para obtener el área requerida.



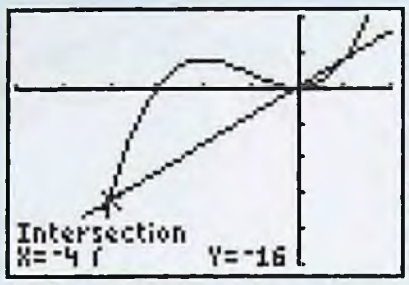


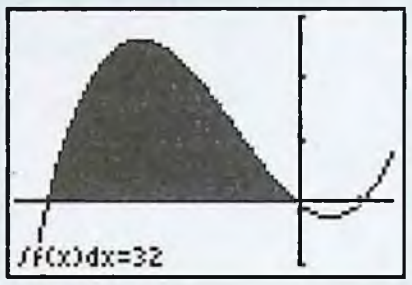


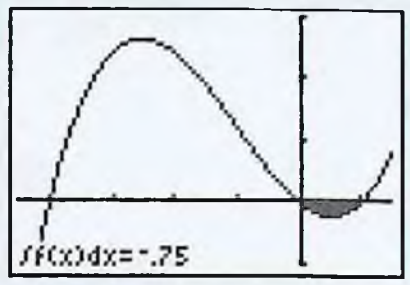
www.FreeLibros.com

Solución al ejercicio ¡Explore! de la página 401

Siguiendo el ejemplo 5.4.2, haga Y1 = 4X y Y2 = $X^3 + 3X^2$ en el editor de ecuaciones de su calculadora graficadora, utilizando la pantalla [−6, 2]1 por [−25, 10]5. Los puntos de intersección están en $x = -4$, 0 y 1. Considerando $y = 4x$ como una línea horizontal base, el área entre Y1 y Y2 puede ser considerada como el área de la curva de la diferencia Y3 = Y2 − Y1. Deseleccione (desactive) Y1 y Y2 y grafique Y3 en la pantalla [−4.5, 1.5]0.5 por [−5, 15]5. La integración numérica aplicada a esta curva entre $x = -4$ y 0 produce un área de 32 unidades cuadradas para el primer sector finito entre las dos curvas. La región del segundo sector finito entre $x = 0$ y 1 tiene un área de −0.75. El área total entre las dos curvas es $32 + |-0.75| = 32.75$.

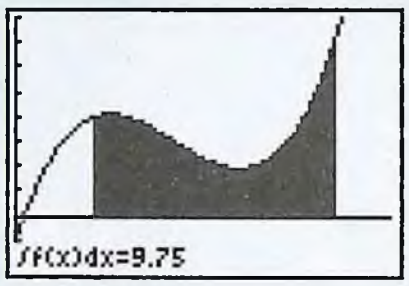


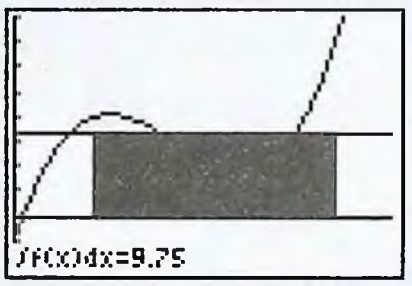


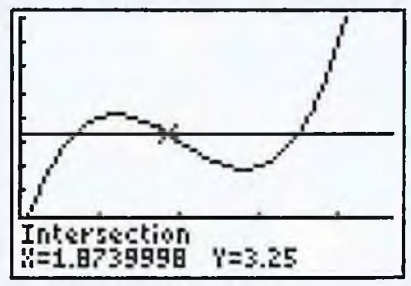


Solución al ejercicio ¡Explore! de la página 406

Haga Y1 = $x^3 - 6x^2 + 10x - 1$ y utilice la instrucción **CALC,7:∫f(x) dx**, para determinar que el área bajo la curva de $x = 1$ a $x = 4$ es 9.75 unidades cuadradas, lo que es igual a la porción rectangular bajo Y2= 9.75/(4 − 1) = 3.25, de longitud 3. Es como si se considerara que el área bajo $f(x)$ en [1, 4] se hizo agua y se convirtiera en una superficie a nivel, de altura 3.25, que es el valor promedio de $f(x)$. Este valor se alcanza en $x = 1.874$ (se muestra a la derecha) y también en $x = 3.473$. Recuerde que se debe borrar el dibujo anterior, empleando **DRAW, 1:ClrDraw**, antes de trazar el dibujo siguiente.

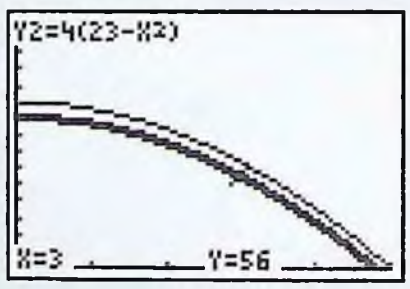


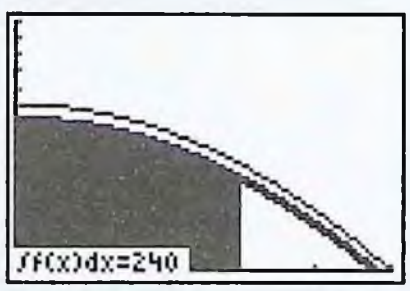




Solución al ejercicio ¡Explore! de la página 419

Graficamos $D_{nuevo}(q)$ en negritas como Y2 = 4(23 − X^2) con $D(q)$ en Y1 = 4(25 − X^2), usando la pantalla [0, 5]1 por [0, 150]10. Se ve que $D_{nueva}(q)$ en negritas es menor que $D(q)$ para el rango de valores observado, lo que apoya la conjetura de que el área bajo la curva $D_{nueva}(q)$ será menor que la de $D(q)$, en el rango de valores [0, 3]. Esta área resulta ser de $240, que es menor a los $264 que se muestran para $D(q)$ en la figura 5.17.





www.FreeLibros.com

REFLEXIONE ACERCA DE...



DIFERENCIAS APENAS NOTABLES EN LA PERCEPCIÓN

El cálculo puede ayudar a responder preguntas acerca de la percepción humana, incluyendo aquellas preguntas que relacionan el número de frecuencias de sonido diferentes o el número de tonos de luz diferentes que la gente puede distinguir (véase la figura adjunta). Nuestro objetivo ahora es mostrar cómo se puede usar el cálculo integral para estimar el número de pasos que una persona puede distinguir cuando se incrementa la frecuencia del sonido a partir de la menor frecuencia audible de 15 hertz (Hz), a la mayor frecuencia audible de 18 000 Hz. (En este contexto hertz, abreviado Hz, es igual a ciclos por segundo.)



Un modelo matemático[7] de la percepción auditiva humana emplea la fórmula $y = 0.767x^{0.439}$, donde y Hz es el cambio más pequeño en frecuencia que es detectable a la frecuencia de x Hz. Entonces, en el extremo inferior del rango de escucha humano, 15 Hz, el cambio más pequeño de frecuencia que una persona detecta es $y = 0.767 \times 15^{0.439} \approx 2.5$ Hz, en tanto que en el extremo superior de escucha humano, cerca de 18 000 Hz, la menor diferencia perceptible es aproximadamente $y = 0.767 \times 18\,000^{0.439} \approx 57$ Hhz. Si el menor cambio de frecuencia perceptible fuera el mismo para todas las frecuencias que las personas pueden escuchar, se podría determinar el número de pasos perceptibles por el oído humano simplemente dividiendo el rango total de frecuencias entre el tamaño de este cambio perceptible más pequeño. Por desgracia, se ha visto que el menor cambio de frecuencia perceptible se aumento con el incremento de la frecuencia, por tanto la aproximación simple no funciona. Sin embargo, se puede estimar el número de pasos perceptibles empleando la integración.

Con este propósito, sea $y = f(x)$ la menor diferencia de frecuencia que la gente puede distinguir a la frecuencia x. A continuación se eligen números $x_0, x_1, \ldots, x_n$ comenzando por $x_0 = 15$ Hz, y continuando hasta la mayor frecuencia $x_n = 18\,000$ Hz, de manera que para $j = 0, 2, \ldots, n - 1$,

$$x_j + f(x_j) = x_{j+1}$$

[7] Parte de este ensayo se basa en *Applications of Calculus: Selected Topics from the Environmental and Life Sciences*, por Anthony Barcellos, McGraw-Hill, 1994, páginas 21-24.

www.FreeLibros.com

En otras palabras, X_{j+1} es el número que se obtiene sumando la menor diferencia perceptible para x_j a la misma x_j. Así, el $j-$ésimo paso tiene una longitud

$$\Delta x_j = x_{j+1} - x_j = f(x_j)$$

Dividiendo entre $f(x_j)$, se obtiene

$$\frac{\Delta x_j}{f(x_j)} = \frac{x_{j+1} - x_j}{f(x_j)} = 1$$

y se sigue que

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta x_j}{f(x_j)} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x_{j+1} - x_j}{f(x_j)} = \frac{x_1 - x_0}{f(x_0)} + \frac{x_2 - x_1}{f(x_1)} + \cdots + \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n)}$$
$$= \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ términos}} = n$$

La suma en el lado izquierdo de esta ecuación es una suma de Reimann, y como las longitudes de los pasos $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$ son muy pequeñas, la suma es aproximadamente igual a una integral definida. Específicamente, se tiene

$$\int_{x_0}^{x_n} \frac{dx}{f(x)} \approx \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\Delta x_j}{f(x_j)} = n$$

Finalmente, usando la fórmula de modelación $f(x) = 0.767x^{0.439}$ junto con $x_0 = 15$ y $x_n = 18\,000$, se determina que

$$\int_{x_0}^{x_n} \frac{dx}{f(x)} = \int_{15}^{18\,000} \frac{dx}{0.767x^{0.439}}$$
$$= \frac{1}{0.767}\left(\frac{x^{0.561}}{0.561}\right)\Bigg|_{15}^{18\,000}$$
$$= 2.324(18\,000^{0.561} - 15^{0.561})$$
$$= 556.2$$

Entonces, hay aproximadamente 556 pasos perceptibles en el rango de audición de 15 Hz a 18 000 Hz.

A continuación se hacen algunas preguntas para aplicar estos principios a problemas concernientes a la percepción auditiva y visual.

Preguntas

1. Las 88 teclas de un piano varían de 15 Hz a 4 186 Hz. Si el número de teclas se basara en el número de diferencias perceptibles, ¿cuántas teclas tendría un piano?

2. Un monitor en blanco y negro de 8 bits puede dar 256 tonos en la escala de grises. Sea x la oscuridad de un tono de gris, donde $x = 0$ para el color blanco y $x = 1$ para el color completamente negro. Un modelo de la percepción dentro de la escala de grises emplea la fórmula $y = Ax^{0.3}$, donde A es una constante positiva y y es el cambio más pequeño detectable por el ojo humano en el nivel de gris x. Algunos experimentos demuestran que el ojo humano es incapaz de distinguir 256 distintos tonos de gris, por lo que el número n de diferencias

www.FreeLibros.com

de sombreado detectable de $x = 0$ a $x = 1$ debe ser menor que 256. Suponiendo que $n < 256$, encuentre un límite inferior para la constante A en la fórmula de modelación $y = Ax^{0.3}$.

3. Un modelo de la habilidad de la visión humana para distinguir colores con tonos distintos usa la fórmula $y = 2.9 \times 10^{-24}\, x^{8.52}$, donde y es la menor diferencia perceptible para un color con longitud de onda x, con ambas x y y medidas en nanómetros (nm).

a) La luz de color azul-verde tiene una longitud de onda de 580 nm. ¿Cuál es la menor diferencia perceptible en esta longitud de onda?

b) La luz de color rojo tiene una longitud de onda de 760 nm. ¿Cuál es la menor diferencia perceptible en esta longitud de onda?

c) ¿Cuántos pasos perceptibles hay entre un tono de luz de color azul-verde y un tono de luz de color rojo?

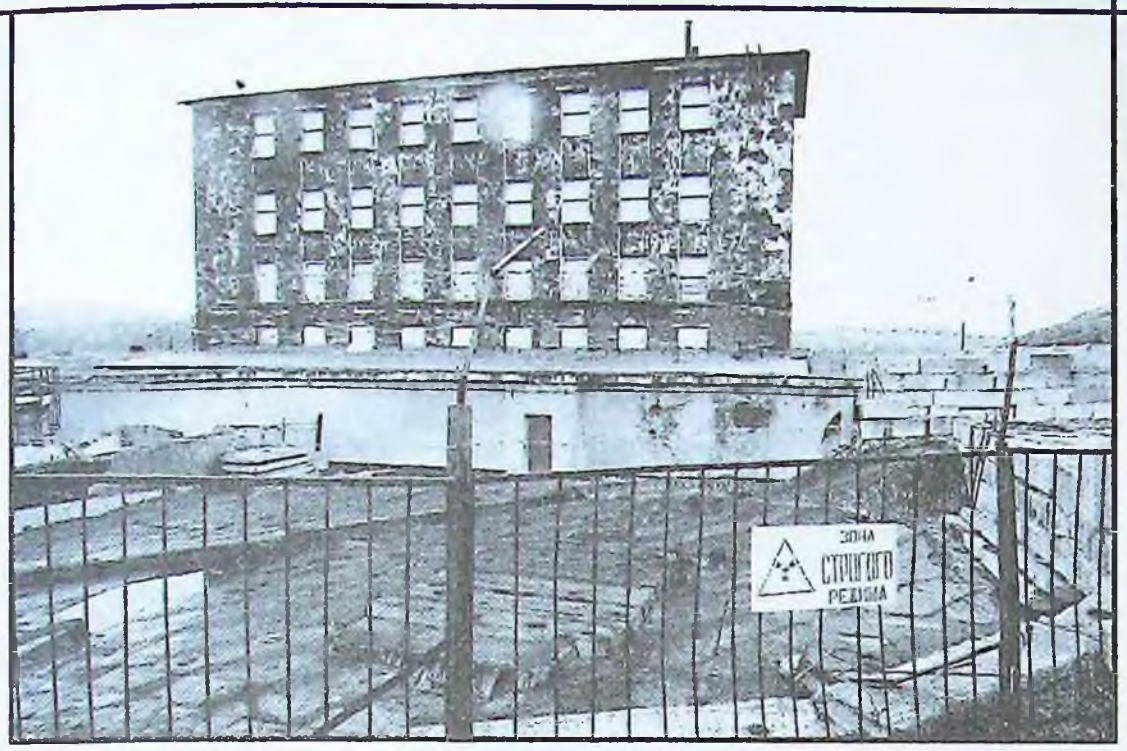
4. Determine un modelo de la forma $y = ax^k$ para diferencias perceptibles en tonos para el espectro de colores desde la luz de color azul-verde de 580 nm, hasta la luz de color violeta, de 400 nm. Considere el hecho que la diferencia mínima perceptible a las longitudes de onda de la luz azul-verde es de 1 nm, en tanto que en la longitud de onda de la luz de color violeta, la diferencia mínima perceptible es de 10 nm.

REFLEXIONE ACERCA DE...

www.FreeLibros.com

www.FreeLibros.com

CAPÍTULO 6



Éste es un vertedero de desechos nucleares en la península de Kola, Rusia. Los efectos a largo plazo de la acumulación de desechos nucleares pueden ser determinados por integración impropia.

TEMAS ADICIONALES DE INTEGRACIÓN

1 Integración por partes; tablas de integrales
2 Integrales impropias
3 Integración numérica
Resumen del capítulo
Términos importantes, símbolos y fórmulas
Revisión del capítulo 6
Problemas de repaso
¡Explore! Actualización
Reflexione acerca de...

www.FreeLibros.com

SECCIÓN 6.1 Integración por partes; tablas de integrales

La integración por partes es una técnica de integración basada en la regla del producto para la derivación. En particular, si $u(x)$ y $v(x)$ son funciones derivables de x, entonces

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx}$$

de modo que

$$u(x)\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}[u(x)v(x)] - v(x)\frac{du}{dx}$$

Integrando ambos lados de esta ecuación con respecto a x, se obtiene

$$\int\left[u(x)\frac{dv}{dx}\right]dx = \int\frac{d}{dx}[u(x)v(x)]\,dx - \int\left[v(x)\frac{du}{dx}\right]dx$$

$$= u(x)v(x) - \int\left[v(x)\frac{du}{dx}\right]dx$$

porque $u(x)v(x)$ es una antiderivada de $\dfrac{d}{dx}[u(x)v(x)]$. Además, esta fórmula integral se puede escribir de forma más compacta como

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

ya que

$$dv = \frac{dv}{dx}dx \quad \text{y} \quad du = \frac{du}{dx}dx$$

A la ecuación $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ se le llama **fórmula de integración por partes.** El gran valor de esta fórmula es que, si podemos hallar funciones u y v de modo que una integral determinada $\int f(x)\,dx$ se pueda expresar en la forma $\int f(x)\,dx = \int u\,dv$, entonces tenemos

$$\int f(x)\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

y el cálculo de la integral dada se cambia por el cálculo de la integral $\int v\,du$. Si la integral $\int v\,du$ es más fácil de calcular que $\int u\,dv$, entonces el intercambio facilita el cálculo de $\int f(x)\,dx$. A continuación se da un ejemplo.

EJEMPLO | 6.1.1

Calcule $\int x^2 \ln x\,dx$.

www.FreeLibros.com

Solución

La estrategia es expresar $\int x^2 \ln x\,dx$ como $\int u\,dv$ seleccionando u y v de manera que $\int v\,du$ sea más fácil de evaluar que $\int u\,dv$. Esta estrategia sugiere que se elija

$$u = \ln x \qquad \text{y} \qquad dv = x^2\,dx$$

ya que

$$du = \frac{1}{x}\,dx$$

es una expresión más sencilla que $\ln x$, mientras que v se puede obtener por medio de la integración, relativamente fácil, de

$$v = \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3$$

(Para que sea más sencillo, se maneja el "$+ C$" fuera del cálculo hasta el último paso.) Si se sustituye esta opción por u y v en la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\int x^2 \ln x\,dx = \int \underbrace{(\ln x)}_{u}\underbrace{(x^2\,dx)}_{dv} = \underbrace{(\ln x)}_{u}\underbrace{\left(\frac{1}{3}x^3\right)}_{v} - \int \underbrace{\left(\frac{1}{3}x^3\right)}_{v}\underbrace{\left(\frac{1}{x}\,dx\right)}_{du}$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

A continuación se muestra un resumen del procedimiento antes ilustrado.

Integración por partes

Para hallar una integral $\int f(x)\,dx$ se usa la fórmula de integración por partes:

Paso 1. Elija las funciones u y v de modo que $f(x)\,dx = u\,dv$. Intente escoger u tal que du sea más sencilla que u, y una dv que sea fácil de integrar.

Paso 2. Organice el cálculo de du y v como

$$\begin{array}{ll} u & dv \\ du & v = \displaystyle\int dv \end{array}$$

y sustituya en la fórmula de integración por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

(continúa)

www.FreeLibros.com

Paso 3. Complete la integración al hallar $\int v\,du$. Entonces

$$\int f(x)\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Agregue "+ C" sólo al final del cálculo.

La selección de una u y dv apropiadas para la integración por partes requiere de conocimiento y experiencia. Así, en el ejemplo 6.1.1, las cosas no serían tan sencillas si se hubiera escogido $u = x^2$ y $dv = \ln x\,dx$. Ciertamente $du = 2x\,dx$ es más sencillo que $u = x^2$, pero, ¿qué es $v = \int \ln x\,dx$? De hecho, calcular esta integral es tan difícil como hallar la integral original $\int x^2 \ln x\,dx$ (vea el ejemplo 6.1.4). Los ejemplos 6.1.2, 6.1.3 y 6.1.4 ilustran varias formas de escoger u y dv en integrales que pueden ser manejadas usando integración por partes.

EJEMPLO | 6.1.2

Encuentre $\int xe^{2x}dx$.

Solución

Aun cuando los factores x y e^{2x} son fáciles de integrar, sólo x se hace más sencilla cuando se deriva. Por lo tanto, se elige $u = x$ y $dv = e^{2x}\,dx$ y se tiene que

$$u = x \qquad dv = e^{2x}\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\overbrace{u}\ \overbrace{dv}\qquad \overbrace{u}\ \overbrace{v}\qquad\qquad \overbrace{v}\ \overbrace{du}$$

$$\int x(e^{2x}dx) = x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \int\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} + C$$

EJEMPLO | 6.1.3

Encuentre $\int x\sqrt{x+5}\,dx$.

www.FreeLibros.com

Solución

De nuevo, los factores x y $\sqrt{x+5}$ son fáciles de derivar y de integrar, pero x se simplifica por derivación, mientras que la derivada de $\sqrt{x+5}$ es incluso más complicada que la misma $\sqrt{x+5}$. Esta observación sugiere que se escoja

$$u = x \qquad dv = \sqrt{x+5}\,dx = (x+5)^{1/2}dx$$

de este modo,

$$du = dx \qquad v = \frac{2}{3}(x+5)^{3/2}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\underbrace{u}\ \underbrace{dv}\qquad \underbrace{u}\ \underbrace{v}\qquad\qquad \underbrace{v}\ \underbrace{du}$$

$$\int x(\sqrt{x+5}\,dx) = x\left[\frac{2}{3}(x+5)^{3/2}\right] - \int\left[\frac{2}{3}(x+5)^{3/2}\right]dx$$

$$= \frac{2}{3}x(x+5)^{3/2} - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}(x+5)^{5/2}\right] + C$$

$$= \frac{2}{3}x(x+5)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+5)^{5/2} + C$$

NOTA Algunas integrales se pueden evaluar tanto por sustitución como por integración por partes. Así, la integral del ejemplo 6.1.3 se puede hallar por sustitución como sigue:

Sea $u = x + 5$. Entonces $du = dx$ y $x = u - 5$, y

$$\int x\sqrt{x+5}\,dx = \int (u-5)\sqrt{u}\,du = \int (u^{3/2} - 5u^{1/2})\,du$$

$$= \frac{u^{5/2}}{5/2} - \frac{5u^{3/2}}{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{5}(x+5)^{5/2} - \frac{10}{3}(x+5)^{3/2} + C$$

La forma de esta integral no es la misma que la hallada en el ejemplo 6.1.3. Para demostrar que las dos formas son equivalentes, observe que la antiderivada del ejemplo 6.1.3 se puede escribir como

$$\frac{2x}{3}(x+5)^{3/2} - \frac{4}{15}(x+5)^{5/2} = (x+5)^{3/2}\left[\frac{2x}{3} - \frac{4}{15}(x+5)\right]$$

$$= (x+5)^{3/2}\left(\frac{2x}{5} - \frac{4}{3}\right) = (x+5)^{3/2}\left[\frac{2}{5}(x+5) - \frac{10}{3}\right]$$

$$= \frac{2}{5}(x+5)^{5/2} - \frac{10}{3}(x+5)^{3/2}$$

que es la forma de la antiderivada obtenida por sustitución. Este ejemplo muestra que es muy posible que aunque usted trabaje correctamente no obtenga la respuesta dada al final del libro.

www.FreeLibros.com

Integración definida por partes

La fórmula de integración por partes se puede aplicar a las integrales definidas observando que

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

La integración definida por partes se usa en el ejemplo 6.1.4 para hallar un área.

EJEMPLO | 6.1.4

Encuentre el área de la región limitada por la curva $y = \ln x$, el eje x y las líneas $x = 1$ y $x = e$.

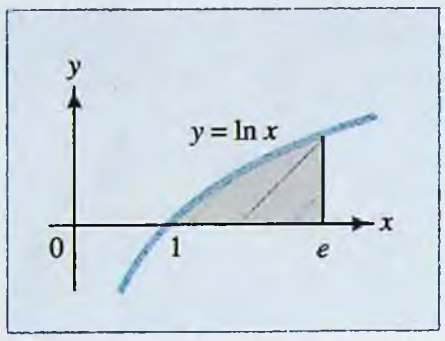


FIGURA 6.1 Región bajo $y = \ln x$ sobre $1 \le x \le e$.

Solución

La región se muestra en la figura 6.1. Como $\ln x \ge 0$ para $1 \le x \le e$, el área está dada por la integral definida

$$A = \int_1^e \ln x\,dx$$

Para evaluar esta integral usando la integración por partes, considere $\ln x\,dx$ como $(\ln x)(1\,dx)$ y use

$$u = \ln x \qquad dv = 1\,dx$$
$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \int 1\,dx = x$$

Así, el área requerida es

$$A = \int_1^e \ln x\,dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\left(\frac{1}{x}dx\right)$$
$$= x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e 1\,dx = (x\ln x - x)\Big|_1^e$$
$$= [e\ln e - e] - [1\ln 1 - 1]$$
$$= [e(1) - e] - [1(0) - 1] \qquad \ln e = 1 \text{ y } \ln 1 = 0$$
$$= 1$$

Como otra muestra del papel que juega la integración por partes en las aplicaciones, se usa en el ejemplo 6.1.5 para calcular el valor futuro de un flujo continuo de ingresos (véase la sección 5.5).

EJEMPLO | 6.1.5

Joyce está considerando una inversión de 5 años y estima que dentro de t años la inversión estará generando un flujo continuo de ingresos de $3\,000 + 50t$ dólares por año. Si la tasa prevaleciente de interés anual permanece fija en 4%, y es capitalizada continuamente durante los 5 años, ¿cuál es el valor de la inversión en 5 años?

Solución

El "valor" de la inversión de Joyce se mide como el valor futuro del flujo de ingreso en el término de 5 años. Recuerde (de la sección 5.5) que un flujo de ingresos depositado

www.FreeLibros.com

continuamente a una tasa $f(t)$, en una cuenta que gana interés a una tasa anual r, capitalizada continuamente por un término de T años, tiene un valor futuro VF (iniciales de valor futuro) dado por la integral

$$\mathrm{VF} = \int_0^T f(t)\, e^{r(T-t)}\, dt$$

Para esta inversión, se tiene $f(t) = 3\ 000 + 50t$, $r = 0.04$ y $T = 5$ de modo que el valor futuro está dado por la integral

$$\mathrm{VF} = \int_0^5 (3\,000 + 50t) e^{0.04(5-t)}\, dt$$

Al integrar por partes con

$$u = 3\,000 + 50t \qquad dv = e^{0.04(5-t)}\, dt$$

$$du = 50\, dt \qquad v = \frac{e^{0.04(5-t)}}{-0.04} = -25e^{0.04(5-t)}$$

se obtiene

$$\mathrm{VF} = \left[(3\,000 + 50t)(-25)e^{0.04(5-t)}\right]\Big|_0^5 - \int_0^5 (50)(-25)e^{0.04(5-t)}\, dt$$

$$= \left[(-75\,000 - 1\,250t)e^{0.04(5-t)}\right]\Big|_0^5 + 1\,250\left[\frac{e^{0.04(5-t)}}{-0.04}\right]\Big|_0^5$$

$$= \left[(-106\,250 - 1\,250t)e^{0.04(5-t)}\right]\Big|_0^5 \qquad \textit{al agrupar los términos}$$

$$= \left[-106\,250 - 1\,250(5)\right]e^0 - \left[-106\,250 - 1\,250(0)\right]e^{0.04(5)}$$

$$\approx 17\,274.04$$

Por lo tanto, en 5 años, la inversión de Joyce valdrá aproximadamente \$17 274.

Aplicación repetida de la integración por partes

A veces la integración por partes lleva a una nueva integral que también debe ser integrada por partes. Dicha situación se ilustra en el ejemplo 6.1.6.

EJEMPLO | 6.1.6

Encuentre $\int x^2 e^{2x}\, dx$.

Solución

Como el factor e^{2x} es fácil de integrar y x^2 se simplifica al ser derivada, se selecciona

$$u = x^2 \qquad dv = e^{2x}\, dx$$

para que

$$du = 2x\, dx \qquad v = \int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

www.FreeLibros.com

Integrando por partes, se obtiene

$$\int x^2 e^{2x}\,dx = x^2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) - \int\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)(2x\,dx)$$
$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}\,dx$$

La integral que queda ahora $\int xe^{2x}\,dx$ también se puede obtener usando la integración por partes. De hecho, en el ejemplo 6.1.2, se había calculado que

$$\int xe^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} + C$$

Por tanto,

$$\int x^2e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x}\right] + C$$
$$= \frac{1}{4}(2x^2 - 2x + 1)e^{2x} + C$$

Uso de tablas de integrales

La mayor parte de las integrales que encontrará en áreas de las ciencias sociales, administrativas o biológicas se pueden evaluar con el uso de fórmulas básicas dadas en la sección 5.1, junto con la sustitución e integración por partes. No obstante, en ocasiones se puede encontrar una integral que no se pueda resolver por estos métodos. Algunas integrales, por ejemplo $\int \frac{e^x}{x}\,dx$ no se pueden calcular por ningún método; en cambio otras se pueden hallar con el uso de una **tabla de integrales.**

En las páginas 458 y 459 aparece una breve tabla de integrales.[1] Note que la tabla está dividida en secciones, como las "formas con $\sqrt{u^2 - a^2}$"; además, las fórmulas están dadas en términos de constantes denotadas a, b y n. El uso de esta tabla se muestra en los ejemplos del 6.1.7 al 6.1.11.

¡EXPLORE!

Siguiendo el ejemplo 6.1.7, introduzca $f(x) = \frac{1}{x(3x-6)}$ en Y1 y $F(x) = -\frac{1}{6}\ln\left(\text{abs}\left(\frac{x}{3x-6}\right)\right)$ en Y2 usando el estilo en negritas de la graficadora. Grafique ambas funciones con el uso de la pantalla decimal modificada [−3.7, 5.7]1 por [−2, 2]1. Verifique que $F'(x) = f(x)$ por $x = \{-2, 0\}$.

EJEMPLO | 6.1.7

Halle $\int \frac{1}{x(3x-6)}\,dx$.

Solución

Aplique la fórmula 6 con $a = -6$ y $b = 3$ para obtener

$$\int \frac{1}{x(3x-6)}\,dx = -\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x}{3x-6}\right| + C$$

[1] Una tabla más completa de las integrales se puede hallar en algunos textos de referencia como *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, de Murray R. Spiegel, Series Schaum Outlines, McGraw-Hill, Nueva York.

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 6.1.8

Halle $\int \frac{1}{6 - 3x^2}\, dx$.

Solución

Si el coeficiente de x^2 fuera 1 en lugar de 3, se podría usar la fórmula 16. Esto sugiere que primero se escriba el integrando como

$$\frac{1}{6 - 3x^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2 - x^2}\right)$$

y luego se aplique la fórmula 16 con $a = \sqrt{2}$:

$$\int \frac{1}{6 - 3x^2}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \ln \left|\frac{\sqrt{2} + x}{\sqrt{2} - x}\right| + C$$

EJEMPLO | 6.1.9

Encuentre $\int \frac{1}{3x^2 + 6}\, dx$.

Solución

Es natural tratar de comparar esta integral con la de la fórmula 16 escribiendo

$$\int \frac{1}{3x^2 + 6}\, dx = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{-2 - x^2}\, dx$$

No obstante, como -2 es negativo, no se puede escribir como el cuadrado a^2 de ningún número real a, de modo que la fórmula no aplica. Existe una fórmula para esta integral pero comprende funciones trigonométricas inversas, que no se estudiarán en este texto.

EJEMPLO | 6.1.10

Encuentre $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 - 9}}\, dx$.

Solución

Para colocar esta integral en la forma de la fórmula 20, vuelva a escribir el integrando como

$$\frac{1}{\sqrt{4x^2 - 9}} = \frac{1}{\sqrt{4(x^2 - 9/4)}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 9/4}}$$

Entonces aplique la fórmula con $a^2 = 9/4$ para obtener

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x^2 - 9}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9/4}}\, dx = \frac{1}{2} \ln \left|x + \sqrt{x^2 - 9/4}\right| + C$$

www.FreeLibros.com

BREVE TABLA DE INTEGRALES

Formas con $a + bu$

1. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}[a + bu - a\ln|a+bu|] + C$

2. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3}[(a+bu)^2 - 4a(a+bu) + 2a^2\ln|a+bu|] + C$

3. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2}\left[\frac{a}{a+bu} + \ln|a+bu|\right] + C$

4. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu - 2a)\sqrt{a+bu} + C$

5. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C \quad a>0$

6. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$

7. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = \frac{-1}{a}\left[\frac{1}{u} + \frac{b}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|\right] + C$

8. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2(a+bu)^2} = \frac{-1}{a^2}\left[\frac{a+2bu}{u(a+bu)} + \frac{2b}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|\right] + C$

Formas con $\sqrt{a^2 + u^2}$

9. $\displaystyle\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$

10. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$

11. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{-1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right| + C$

12. $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2+u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} + C$

13. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{8}(a^2+2u^2)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$

www.FreeLibros.com

Formas con $\sqrt{a^2 - u^2}$

14. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = \frac{-1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$

15. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$

16. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + u}{a - u} \right| + C$

17. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\, du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$

Formas con $\sqrt{u^2 - a^2}$

18. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

19. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{u^2}\, du = \frac{-\sqrt{u^2 - a^2}}{u} + \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

20. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$

21. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{u^2 - a^2}}{a^2 u} + C$

Formas con e^{au} y $\ln u$

22. $\displaystyle\int ue^{au}\, du = \frac{1}{a^2}(au - 1)e^{au} + C$

23. $\displaystyle\int \ln u\, du = u \ln |u| - u + C$

24. $\displaystyle\int \frac{du}{u \ln u} = \ln |\ln u| + C$

25. $\displaystyle\int u^m \ln u\, du = \frac{u^{m+1}}{m + 1}\left(\ln u - \frac{1}{m + 1}\right) \quad m \neq -1$

Fórmulas de reducción

26. $\displaystyle\int u^n e^{au}\, du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1} e^{au}\, du$

27. $\displaystyle\int (\ln u)^n\, du = u(\ln u)^n - n\int (\ln u)^{n-1}\, du$

28. $\displaystyle\int u^n \sqrt{a + bu}\, du = \frac{2}{b(2n + 3)}[u^n(a + bu)^{3/2} - na\int u^{n-1}\sqrt{a + bu}\, du] \quad \text{para } n \neq -\frac{3}{2}$

www.FreeLibros.com

El ejemplo final comprende el uso de la fórmula 26. Ésta se llama **fórmula de reducción** porque permite expresar una integral determinada en términos de una integral más sencilla de la misma forma.

EJEMPLO | 6.1.11

Encuentre $\int x^3 e^{5x}\,dx$.

Solución

Aplique la fórmula 26 con $n = 3$ y $a = 5$ para obtener

$$\int x^3 e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}x^3 e^{5x} - \frac{3}{5}\int x^2 e^{5x}\,dx$$

Ahora aplique de nuevo la fórmula 26, esta vez con $n = 2$ y $a = 5$ para obtener

$$\int x^2 e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}x^2 e^{5x} - \frac{2}{5}\int x e^{5x}\,dx$$

A continuación aplique la fórmula una vez más (con $n = 1$, $a = 5$) para evaluar la integral de la derecha:

$$\begin{aligned}\int x e^{5x}\,dx &= \frac{1}{5}x e^{5x} - \frac{1}{5}\int (1)e^{5x}\,dx \\ &= \frac{1}{5}x e^{5x} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}e^{5x}\right) + C\end{aligned}$$

Por último, evalúe la integral original combinando estos resultados:

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{5x}\,dx &= \frac{1}{5}x^3 e^{5x} - \frac{3}{5}\left[\frac{1}{5}x^2 e^{5x} - \frac{2}{5}\int x e^{5x}\,dx\right] \\ &= \frac{1}{5}x^3 e^{5x} - \frac{3}{25}x^2 e^{5x} + \frac{6}{25}\left[\frac{1}{5}x e^{5x} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}e^{5x}\right)\right] + C \\ &= \left[\frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{25}x^2 + \frac{6}{125}x - \frac{6}{625}\right]e^{5x} + C\end{aligned}$$

SISTEMAS ALGEBRAICOS CON COMPUTADORA Ciertas calculadoras científicas, al igual que programas de software como el MAPLE, MATHCAD y MATHEMATICA, contienen un sistema algebraico computacional (CAS) que compara un integrando dado con integrandos de una tabla que tienen en la memoria. Si bien la integración electrónica que usa un CAS es útil, su uso no tiene sentido si la mayoría de las integrales que usted encuentra se pueden calcular fácilmente a mano o con una breve tabla como las que aparecen en las páginas 458 y 459. ■

www.FreeLibros.com

PROBLEMAS | 6.1

En los problemas del 1 al 26, use la integración por partes para hallar la integral dada.

1. $\int xe^{-x}\,dx$

2. $\int xe^{x/2}\,dx$

3. $\int (1-x)e^{x}\,dx$

4. $\int (3-2x)e^{-x}\,dx$

5. $\int t \ln 2t\,dt$

6. $\int t \ln t^2\,dt$

7. $\int ve^{-v/5}\,dv$

8. $\int we^{0.1w}\,dw$

9. $\int x\sqrt{x-6}\,dx$

10. $\int x\sqrt{1-x}\,dx$

11. $\int x(x+1)^8\,dx$

12. $\int (x+1)(x+2)^6\,dx$

13. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}\,dx$

14. $\int \dfrac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$

15. $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{x}{\sqrt{x+5}}\,dx$

16. $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x}{\sqrt{4x+1}}\,dx$

17. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{e^{2x}}\,dx$

18. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

19. $\displaystyle\int_{1}^{e^2} x \ln \sqrt[3]{x}\,dx$

20. $\displaystyle\int_{0}^{1} x(e^{-2x}+e^{-x})\,dx$

21. $\displaystyle\int_{1/2}^{e/2} t \ln 2t\,dt$

22. $\displaystyle\int_{1}^{2} (t-1)e^{1-t}\,dt$

23. $\int \dfrac{\ln x}{x^2}\,dx$

24. $\int x(\ln x)^2\,dx$

25. $\int x^3 e^{x^2}\,dx$

[*Sugerencia:* Use $dv = xe^{x^2}\,dx$.]

26. $\int \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

[*Sugerencia:* Use $dv = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.]

Use la tabla de integrales de las páginas 458-459 para hallar las integrales de los problemas de 27 al 38.

27. $\int \dfrac{x\,dx}{3-5x}$

28. $\int \sqrt{x^2-9}\,dx$

29. $\int \dfrac{\sqrt{4x^2-9}}{x^2}\,dx$

30. $\int \dfrac{dx}{(9+2x^2)^{3/2}}$

31. $\int \dfrac{dx}{x(2+3x)}$

32. $\int \dfrac{t\,dt}{\sqrt{4-5t}}$

www.FreeLibros.com

33. $\int \frac{du}{16 - 3u^2}$

34. $\int we^{-3w}\,dw$

35. $\int (\ln x)^3\,dx$

36. $\int x^2\sqrt{2 + 5x}\,dx$

37. $\int \frac{dx}{x^2(5 + 2x)^2}$

38. $\int \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x}\,dx$

39. Encuentre la función cuya tangente tiene pendiente $(x + 1)e^{-x}$ para cada valor de x y cuya gráfica pasa por el punto (1,5).

40. Encuentre la función cuya tangente tiene pendiente $x \ln \sqrt{x}$ para cada valor de $x > 0$ y cuya gráfica pasa por el punto $(2, -3)$.

41. DISTANCIA Después de t segundos, un cuerpo se mueve con velocidad $te^{-t/2}$ metros por segundo. Exprese la posición del cuerpo como función del tiempo.

42. EFICIENCIA Luego de t horas en el trabajo, un trabajador de una fábrica puede producir $100te^{-0.5t}$ unidades por hora. ¿Cuántas unidades produce el trabajador durante las primeras 3 horas?

43. RECOLECCIÓN DE FONDOS Después de t semanas, las aportaciones en respuesta a una campaña para recolectar fondos llegaban a razón de $2\,000te^{-0.2t}$ dólares por semana. ¿Cuánto dinero se recolectó durante las primeras 5 semanas?

44. COSTO MARGINAL Un fabricante ha encontrado que el costo marginal es $(0.1q + 1)e^{0.03q}$ dólares por unidad cuando q unidades se han producido. El costo total de producir 10 unidades es \$200. ¿Cuál es el costo total de producir las primeras 20 unidades?

45. CRECIMIENTO POBLACIONAL Está proyectado que dentro de t años, la población de cierta ciudad estará cambiando a razón de $t \ln \sqrt{t + 1}$ miles de personas por año. Si la población actual es de 2 millones, ¿cuál será la población dentro de 5 años?

46. CRECIMIENTO POBLACIONAL La población $P(t)$ (en miles) de una colonia de bacterias, t horas después de la introducción de una toxina, está cambiando a razón de $P'(t) = (1 - 0.5t)e^{0.5t}$ miles de bacterias por hora. ¿Cuánto cambia la población durante la cuarta hora?

47. CONCENTRACIÓN PROMEDIO DE UNA DROGA La concentración de una droga t horas después de ser inyectada en el torrente sanguíneo de un paciente es $C(t) = 4\,te^{(2-0.3t)}$ mg/mL. ¿Cuál es la concentración promedio de la droga en el torrente sanguíneo del paciente en las primeras 6 horas después de la inyección?

Los problemas 48 al 59 comprenden aplicaciones desarrolladas en las secciones 5.4, 5.5 y 5.6 del capítulo 5.

48. PROMEDIO DE DEMANDA Un fabricante determina que cuando se producen x cientos de unidades de una mercancía, la utilidad generada es $P(x)$ miles de dólares, donde

$$P(x) = \frac{500 \ln(x + 1)}{(x + 1)^2}$$

¿Cuál es la utilidad promedio en el intervalo de $0 \le x \le 10$?

49. VALOR FUTURO DE UNA INVERSIÓN Se transfiere dinero en una cuenta a razón de $R(t) = 3\,000 + 5t$ dólares por año durante 10 años, donde t es el número de años después del año 2000. Si la cuenta paga 5% de interés capitalizado continuamente, ¿cuánto habrá en la cuenta al término del periodo de 10 años de inversión (en 2010)?

50. VALOR FUTURO DE UNA INVERSIÓN Se transfiere dinero en una cuenta a razón de $R(t) = 1\,000te^{-0.3t}$ dólares por año durante 5 años. Si la cuenta paga 4% de interés capitalizado continuamente, ¿cuánto se acumulará en la cuenta en un periodo de 5 años?

51. VALOR PRESENTE DE UNA INVERSIÓN Una inversión generará ingresos continuamente a razón de $R(t) = 20 + 3t$ cientos de dólares por año, durante 5 años. Si la tasa prevaleciente de interés es 7% capitalizado continuamente, ¿cuál es el valor presente de la inversión?

52. EVALUACIÓN DE INVERSIÓN La administración de una cadena nacional de pizzerías vende una franquicia de 6 años para operar su más reciente negocio en Orlando, Florida. Según la experiencia obtenida en localidades semejantes, se espera que dentro de t años la franquicia estará generando utilidades continuamente, a razón de $R(t) = 300 + 5t$ miles de dólares por año. Si la tasa prevaleciente de interés permanece fija durante los siguientes 6 años a 6% capitalizado continuamente, ¿cuál sería un precio justo a cobrar por la franquicia? [*Sugerencia:* Use valor presente para medir lo que "valdrá" la franquicia.]

www.FreeLibros.com

53. MEMBRESÍA DE GRUPO Un club de lectores ha recogido datos estadísticos que sugieren que la fracción de sus miembros aún activos t meses después de inscribirse, está dada por la función $S(t) = e^{-0.02t}$. Actualmente, el club tiene 5 000 socios y espera atraer nuevos socios a razón de $R(t) = 5t$ por mes. ¿Cuántos socios se puede esperar que tenga el club al final de 9 meses? [*Sugerencia:* Considere éste como un problema de permanencia/renovación y use el resultado del problema 24 de la sección 5.6.]

54. PROPAGACIÓN DE UNA ENFERMEDAD Un nuevo virus acaba de ser declarado una epidemia por funcionarios de sanidad. Actualmente, 10 000 personas tienen la enfermedad y se estima que dentro de t días, nuevos casos se reportarán a razón de $R(t) = 10te^{-0.1t}$ personas por día. Si la fracción de las víctimas que tendrán el virus t días después del contagio está dada por $S(t) = e^{-0.015t}$, ¿cuántas personas estarán infectadas por el virus dentro de 90 días? ¿Y dentro de un año (365 días)? [*Sugerencia:* Considere éste como un problema de permanencia/renovación y use el resultado del problema 24 de la sección 5.6.]

55. SUPERÁVIT DE CONSUMIDORES Un fabricante ha determinado que cuando se producen q miles de unidades de cierta mercancía, el precio al que todas las unidades se pueden vender es $p = D(q)$ dólares por unidad, donde D es la función de demanda

$$D(q) = 10 - qe^{0.02q}$$

a) ¿A qué precio se demandan 5 000 unidades ($q_0 = 5$)?

b) Encuentre el superávit de consumidores cuando se demandan 5 000 unidades.

56. SUPERÁVIT DE CONSUMIDORES Responda las preguntas del problema 55 para la función de demanda

$$D(q) = \ln\left(\frac{52}{q+1}\right)$$

si se demandan 12 000 ($q_0 = 12$) unidades.

57. CURVA DE LORENTZ Encuentre el índice de Gini para una distribución de ingreso cuya curva de Lorentz es la gráfica de la función $L(x) = xe^{x-1}$, para $0 \le x \le 1$.

58. COMPARACIÓN DE DISTRIBUCIONES DE INGRESO En cierto país las curvas de Lorentz para las distribuciones de ingreso de abogados e ingenieros son $y = L_1(x)$ y $y = L_2(x)$, respectivamente, donde

$$L_1(x) = 0.6x^2 + 0.4x \quad \text{y} \quad L_2(x) = x^2e^{x-1}$$

Encuentre el índice de Gini para cada curva. ¿Qué profesión tiene una distribución más equitativa de ingreso?

59. RENDIMIENTO CARDIACO Un médico inyecta 5 mg de colorante en una vena cerca del corazón de un paciente y determina que la concentración del colorante que sale del corazón, después de t segundos, está dada por la función

$$C(t) = 1.54te^{-0.12t} - 0.007t^2$$

Si se supone que transcurren 20 segundos para que toda la tintura pase por el corazón, ¿cuál es el rendimiento cardiaco del paciente?

60. Use la integración por partes para verificar la fórmula 27 de reducción:

$$\int (\ln u)^n du = u(\ln u)^n - n\int (\ln u)^{n-1} du$$

61. Use la integración por partes para verificar la fórmula 26 de reducción:

$$\int u^n e^{au} du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au} du$$

62. Encuentre la fórmula de reducción para

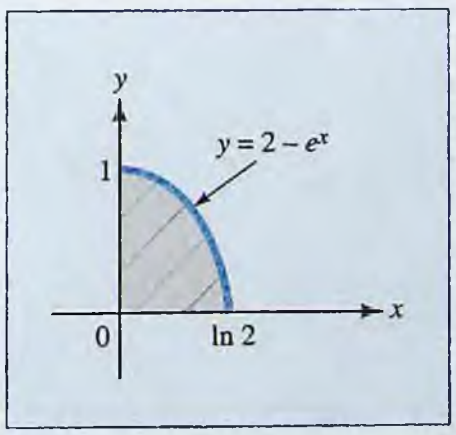
$$\int u^n \ln u^m du$$

CENTRO DE UNA REGIÓN *Sea $f(x)$ una función continua con $f(x) \ge 0$ para $a \le x \le b$. Sea R la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x, y las rectas $x = a$ y $x = b$. Entonces el* centroide (*o* centro) *de R es el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, donde*

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b xf(x)dx \quad \text{y} \quad \bar{y} = \frac{1}{2A}\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

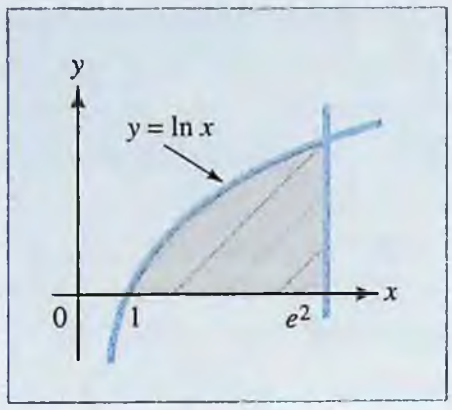
y A es el área de R. En los problemas 63 y 64, encuentre el centroide de la región mostrada.

63.



www.FreeLibros.com

64.

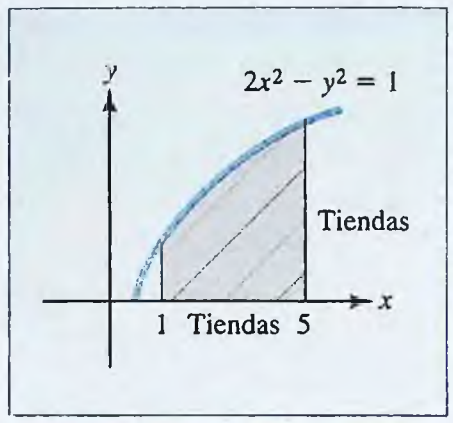


[*Sugerencia:* Será necesario usar una fórmula de la tabla de integrales de las páginas 458 y 459.]

65. SEGURIDAD EN CENTRO COMERCIAL La región sombreada que se muestra en la figura es un lote de estacionamiento para un centro comercial. Las dimensiones están en cientos de pies. Para mejorar la seguridad en el estacionamiento, el gerente del centro comercial planea construir un kiosco de observación en el centro del lote (vea la definición que precede a los problemas 63 y 64).

a) ¿En dónde instalaría usted el kiosco? Describa la ubicación que escoja en términos del sistema de coordenadas indicado en la figura. [*Sugerencia:* Puede necesitar una fórmula de la tabla de integrales de las páginas 458 y 459.]

b) Escriba un párrafo sobre seguridad en estacionamientos de centros comerciales. En particular, ¿piensa que el centro geométrico sería la principal consideración para ubicar un kiosco de seguridad, o hay otros problemas más importantes?



PROBLEMA 65

66. Use la calculadora graficadora para trazar las gráficas de las curvas $y = x^2e^{-x}$ y $y = \frac{1}{x}$ en la misma pantalla. Use **ZOOM** y **TRACE**, o alguna otra función de su calculadora, para hallar el punto donde se cruzan las curvas, y luego calcule el área de la región limitada por las curvas.

67. Repita el problema 66 para las curvas

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2} = 1 \qquad \text{y} \qquad y = x^3 - 3.5x^2 + 2x$$

Si su calculadora tiene una función de integración numérica, úsela para evaluar cada una de las integrales de los problemas 68 al 71. En cada caso, verifique su resultado aplicando una fórmula de integración apropiada.

68. $\int_1^2 x^2 \ln \sqrt{x}\, dx$

69. $\int_2^3 \sqrt{4x^2 - 7}\, dx$

70. $\int_0^1 x^3\sqrt{4 + 5x}\, dx$

71. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{(x + 1)^2}\, dx$

SECCIÓN 6.2 | Integrales impropias

La definición de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, dada en la sección 5.3, requiere que el intervalo de integración $a \le x \le b$ esté acotado, pero en ciertas aplicaciones es útil considerar integrales sobre intervalos *no acotados* como $x \ge a$. Estas **integrales impropias** se definen en esta sección, así como algunas de sus propiedades y aplicaciones.

www.FreeLibros.com

La integral impropia $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

La integral impropia de $f(x)$ sobre el intervalo no acotado $x \geq a$ se denota como $x \geq a$ por $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Si $f(x) \geq 0$ para $x \geq a$, esta integral se puede interpretar como el área de la región bajo la curva de $y = f(x)$ a la derecha de $x = a$, como se ve en la figura 6.2a. Aun cuando esta región tiene extensión infinita, su área puede ser finita o infinita, dependiendo de la rapidez con que $f(x)$ se aproxime a cero cuando x aumenta indefinidamente.

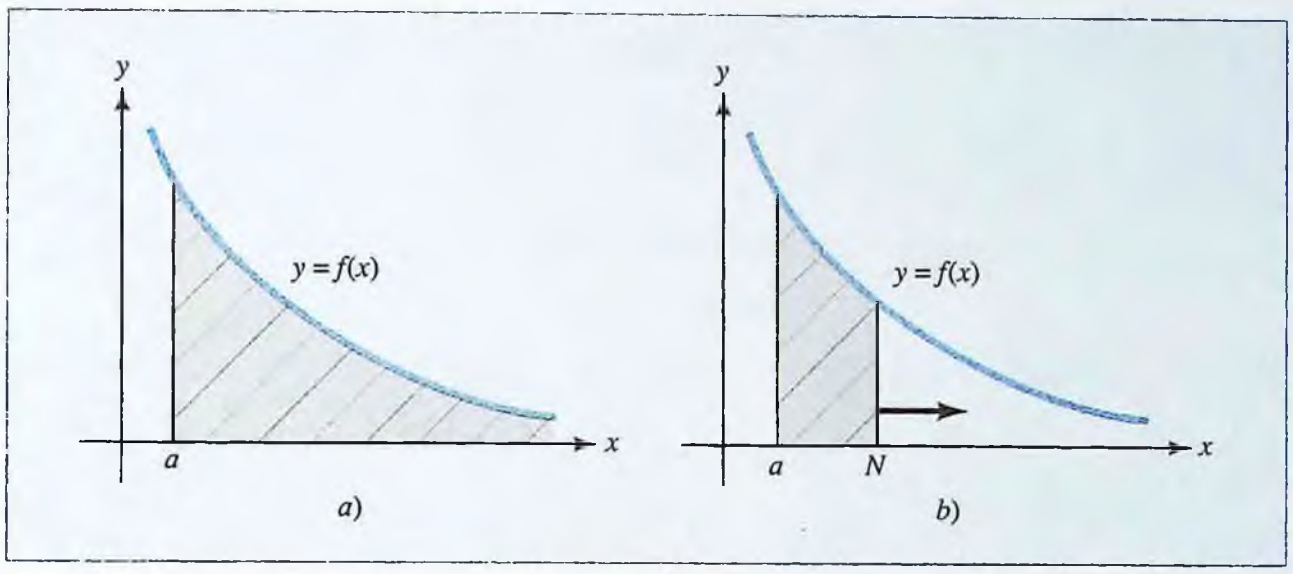


FIGURA 6.2 Área $= \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_0^N f(x)\,dx.$

Una estrategia apropiada para hallar el área de esta región es usar primero una integral definida para calcular el área de $x = a$ hasta algún número finito $x = N$ y luego hacer que N tienda a infinito en la expresión resultante. Esto es,

$$\text{Área total} = \lim_{N\to+\infty} (\text{área de } a \text{ a } N) = \lim_{N\to+\infty} \int_a^N f(x)\,dx$$

Esta estrategia se ilustra en la figura 6.2*b* y da lugar a la siguiente definición de la integral impropia.

La integral impropia ■ Si $f(x)$ es continua para $x \geq a$, entonces

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{N\to+\infty} \int_a^N f(x)dx$$

Si el límite existe, se dice que la integral impropia **converge** al valor del límite. Si no existe el límite, la integral impropia **diverge.**

¡EXPLORE!

Referido al ejemplo 6.2.1. Escriba $f(x) = 1/x^2$ en Y1 del editor de ecuaciones y escriba Y2 = **fnInt(Y1, X, 1, X, 0.001)**, que es la función de integración numérica. Haga que la función de la tabla inicie en X = 500, con incrementos de 500. Explique lo que observa.

EJEMPLO 6.2.1

Evalúe la integral impropia

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$$

o demuestre que ésta diverge.

www.FreeLibros.com

Solución

Primero calcule la integral de 1 a N y luego haga que N tienda a infinito. Continúe su trabajo de este modo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_1^N \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\Big|_1^N\right) = \lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{1}{N}+1\right) = 1$$

EJEMPLO | 6.2.2

Evalúe la integral impropia

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$$

o demuestre que ésta diverge.

Solución

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_1^N \frac{1}{x}\,dx = \lim_{N\to+\infty}\left(\ln|x|\Big|_1^N\right) = \lim_{N\to+\infty}\ln N = +\infty$$

Como el límite no existe (como un valor finito), entonces la integral impropia diverge.

NOTA Se acaba de mostrar que la integral impropia $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge (ejemplo 6.2.1); mientras que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ diverge (ejemplo 6.2.2). En términos geométricos, lo anterior indica que el área bajo la curva $y = \frac{1}{x^2}$ a la derecha de $x = 1$ es *finita*, mientras que la correspondiente área bajo la curva $y = \frac{1}{x^2}$ a la derecha de $x = 1$ es *infinita*. La diferencia se debe al hecho de que cuando x aumenta ilimitadamente, $\frac{1}{x^2}$ se aproxima a cero más rápidamente que $\frac{1}{x}$. Tales observaciones se demuestran en la figura 6.3. ■

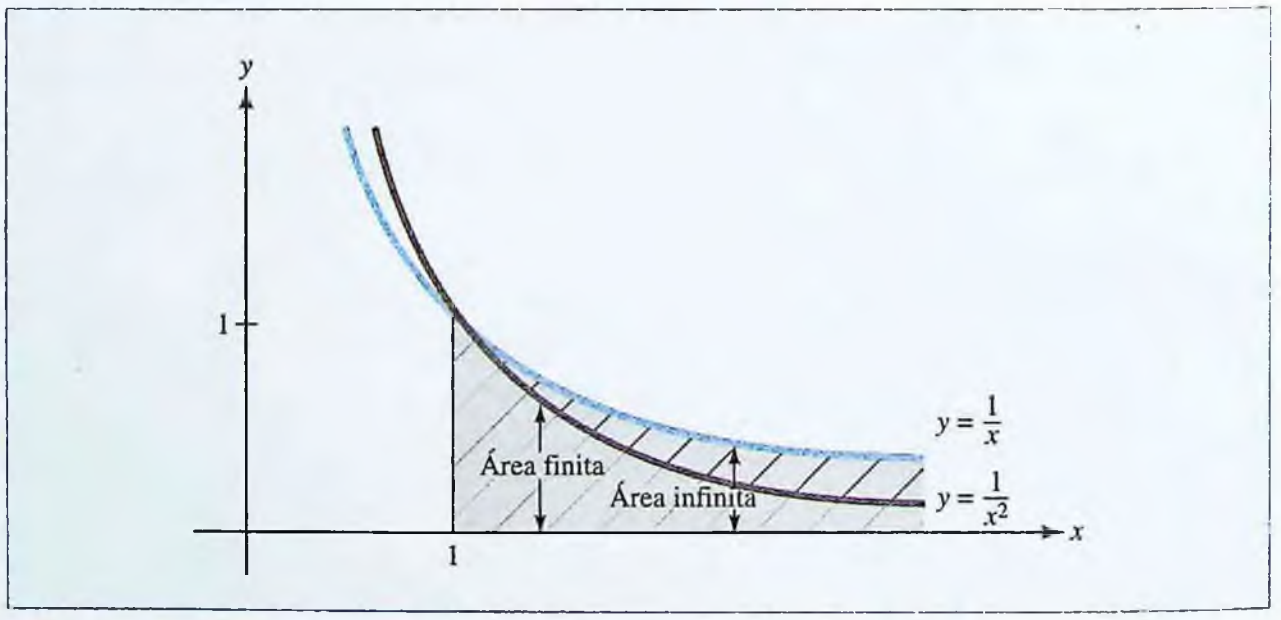


FIGURA 6.3 Comparación del área bajo $y = 1/x$ con la que está bajo $y = 1/x^2$.

www.FreeLibros.com

La evaluación de integrales impropias que surgen de problemas prácticos comprende a veces límites de la forma

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N^p}{e^{kN}} = \lim_{N\to\infty} N^p e^{-kN} \quad (\text{para } k > 0)$$

En general, un término exponencial e^{kN} crece mucho más rápido que un término de *cualquier* potencia N^p, de modo que

$$N^p e^{-kN} = \frac{N^p}{e^{kN}}$$

"a largo plazo" se hará muy pequeño. Para resumir:

Un límite útil para calcular integrales impropias ■ Para cualquier potencia p y número positivo k,

$$\lim_{N\to\infty} N^p e^{-kN} = 0$$

¡EXPLORE!

Considere el ejemplo 6.2.3. Grafique $f(x) = xe^{-2x}$ usando la pantalla [0, 9.4]1 por [−0.05, 0.02]1. Use la función de integración gráfica de su calculadora, **CALC(2nd TRACE, 7: f(x) dx**, para demostrar que el área bajo $f(x)$ de 0 a un valor x relativamente grande se aproxima al valor 1/4.

EJEMPLO | 6.2.3

Evalúe la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,dx$$

o demuestre que ésta diverge.

Solución

$$\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,dx = \lim_{N\to+\infty}\int_0^N xe^{-2x}\,dx$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x}\Big|_0^N + \frac{1}{2}\int_0^N e^{-2x}\,dx\right) \qquad \textit{integración por partes}$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right)\Big|_0^N$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}Ne^{-2N} - \frac{1}{4}e^{-2N} + 0 + \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

como $e^{-2N} \to 0$ y $Ne^{-2N} \to 0$ cuando $N \to +\infty$.

Aplicaciones de la integral impropia

A continuación se examinan dos aplicaciones de la integral impropia las cuales generalizan aplicaciones desarrolladas en el capítulo 5. En cada una de ellas la estrategia es expresarla como una integral definida con un límite de integración superior variable, la cual luego se deja crecer ilimitadamente. Al leer estas aplicaciones, resultará útil consultar los ejemplos análogos del capítulo 5.

Valor presente de un flujo perpetuo de ingreso

En el ejemplo 5.5.3 de la sección 5.5, se demuestra la forma en que el valor presente de una inversión que genera ingreso continuamente, en un periodo finito de tiempo, se puede calcular con una integral definida. Si la generación de ingreso continúa a perpetuidad, entonces se requiere de una integral impropia para calcular su valor presente, tal como se ilustra en el ejemplo 6.2.4.

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 6.2.4

Un donador desea otorgar una beca a un colegio local con un regalo que proporcione un flujo continuo de ingresos a razón de $25\,000 + 1\,200t$ dólares por año a perpetuidad. Suponiendo que la tasa prevaleciente de interés anual permanezca fija a 5% capitalizada continuamente, ¿qué cantidad se requiere para financiar la donación?

Solución

El regalo del donador debe ser igual al valor presente del flujo continuo de ingresos a perpetuidad. Recuerde de la sección 5.5 que un flujo de ingreso $f(t)$ depositado continuamente durante un término de T años, en una cuenta que gana interés a una tasa anual r capitalizada continuamente, tiene un valor presente dado por la integral

$$\text{VP} = \int_0^T f(t)e^{-rt}\,dt$$

Para el regalo del donador se tiene $f(t) = 25\,000 + 1\,200t$ y $r = 0.05$, de modo que para un término de T años, el valor presente es

Valor presente del regalo durante T años

$$\text{VP} = \int_0^T (25\,000 + 1\,200t)e^{-0.05t}\,dt$$

Integrando por partes, con

$$u = 25\,000 + 1\,200t \qquad dv = e^{-0.05t}\,dt$$

$$du = 1\,200dt \qquad v = \frac{e^{-0.05t}}{-0.05} = -20e^{-0.05t}$$

se calcula el valor presente como sigue:

$$\begin{aligned}
\text{VP} &= \int_0^T (25\,000 + 1\,200t)e^{-0.05t}\,dt \\
&= \left[(25\,000 + 1\,200t)(-20e^{-0.05t})\right]\Big|_0^T - \int_0^T 1\,200(-20e^{-0.05t})\,dt \\
&= \left[(-500\,000 - 24\,000t)e^{-0.05t}\right]\Big|_0^T + 24\,000\left(\frac{e^{-0.05t}}{-0.05}\right)\Big|_0^T \\
&= \left[(-980\,000 - 24\,000t)e^{-0.05t}\right]\Big|_0^T \\
&= \left[(-980\,000 - 24\,000T)e^{-0.05T}\right] - \left[(-980\,000 - 24\,000(0))e^{0}\right] \\
&= (-980\,000 - 24\,000T)e^{-0.05T} + 980\,000
\end{aligned}$$

Para hallar el valor presente a perpetuidad, se busca el límite cuando $T \to +\infty$; esto es, se calcula la integral impropia

Valor presente del regalo a perpetuidad

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} (25\,000 + 1\,200t)e^{-0.05t}\,dt \\
&= \lim_{T\to+\infty} [(-980\,000 - 24\,000T)e^{-0.05T} + 980\,000] \\
&= 0 + 980\,000 \qquad \text{como } e^{-0.05T} \to 0 \text{ y } Te^{-0.05T} \to 0 \text{ como } T \to +\infty \\
&= 980\,000
\end{aligned}$$

Por tanto, la beca se establece con un regalo de $980 000.

www.FreeLibros.com

Desecho nuclear En el ejemplo 5.6.1, de la sección 5.6, se examina un problema de permanencia y renovación para un término de duración finita en el que se presentó una renovación a tasa constante. En el ejemplo 6.2.5 se considera la situación más general en la que la permanencia y renovación varían con el tiempo y el proceso de permanencia/renovación ocurre a perpetuidad.

EJEMPLO | 6.2.5

Se estima que dentro de t años, cierta planta nuclear estará produciendo desechos nucleares a razón de $f(t) = 400t$ libras por año. Los desechos se desintegran exponencialmente a razón de 2% por año. ¿Qué ocurrirá a largo plazo con la acumulación de desechos radiactivos provenientes de la planta?

Solución

Para hallar la cantidad de desechos radiactivos presente después de N años, divida el intervalo de N años $0 \le t \le N$ en n subintervalos iguales de Δt años de duración y denote con t_j el principio del j-ésimo subintervalo (figura 6.4). Entonces,

$$\text{Cantidad de desechos producidos durante el } j\text{-ésimo intervalo} \approx 400t_j\Delta t$$

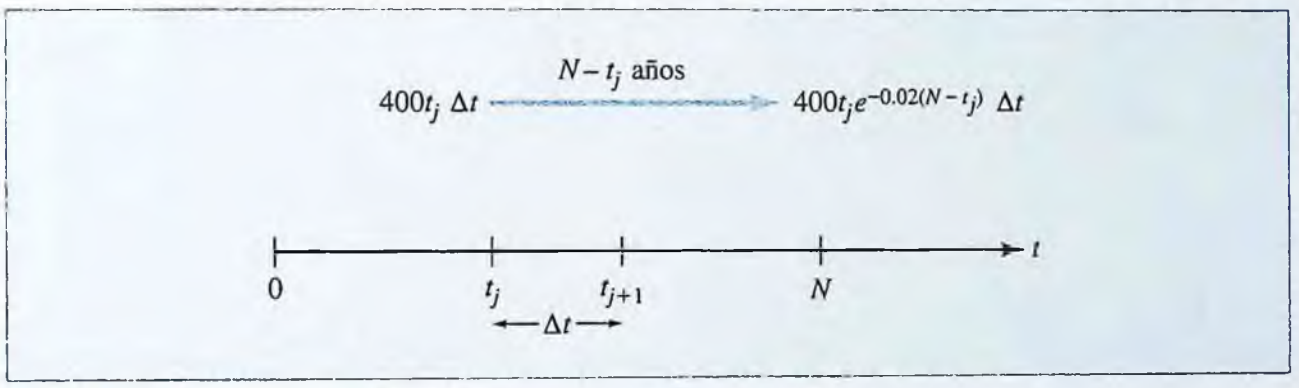


FIGURA 6.4 Desechos radiactivos generados durante el j-ésimo subintervalo.

Dado que los desechos se desintegran exponencialmente a razón de 2% al año, y como hay $N - t_j$ años entre los tiempos $t = t_j$ y $t = N$, se deduce que

$$\begin{aligned}&\text{Cantidad de desechos producida}\\ &\text{durante el } j\text{-ésimo subintervalo que} \approx 400t_j e^{-0.02(N-t_j)}\Delta t\\ &\text{está presente en el momento } t = N\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\text{Cantidad de desechos presente después de } N \text{ años} &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n} 400t_j e^{-0.02(N-t_j)}\Delta t\\ &= \int_0^N 400te^{-0.02(N-t)}\,dt\\ &= 400e^{-0.02N}\int_0^N te^{0.02t}\,dt\end{aligned}$$

La cantidad de desechos radiactivos presente, a largo plazo, es el límite de esta expresión cuando N tiende a infinito. Es decir,

$$\text{Cantidad de desechos presente a largo plazo} = \lim_{N\to+\infty} 400e^{-0.02N}\int_0^N te^{0.02t}\,dt$$

www.FreeLibros.com

$$= \lim_{N\to+\infty} 400e^{-0.02N}\left(50te^{0.02t} - 2\,500e^{0.02t}\right)\Big|_0^N$$

$$= \lim_{N\to+\infty} 400e^{-0.02N}\left(50Ne^{0.02N} - 2\,500e^{0.02N} + 2\,500\right)$$

$$= \lim_{N\to+\infty} 400\left(50N - 2\,500 + 2\,500e^{-0.02N}\right)$$

$$= +\infty$$

Esto es, a largo plazo, la acumulación de desechos radiactivos provenientes de la planta aumentará ilimitadamente.

PROBLEMAS | 6.2

En los problemas del 1 al 24, calcule la integral impropia o demuestre que ésta diverge.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-3/2}\,dx$

3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-2/3}\,dx$

5. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{2x-1}\,dx$

6. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}\,dx$

7. $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{(2x-1)^2}\,dx$

8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$

9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 5e^{-2x}\,dx$

10. $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{1-x}\,dx$

11. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{(x^3+2)^2}\,dx$

12. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^3+2}\,dx$

13. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}\,dx$

14. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$

15. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

16. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$

17. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2xe^{-3x}\,dx$

18. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{1-x}\,dx$

19. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$

20. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

21. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$

22. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$

23. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\,dx$

24. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

www.FreeLibros.com

25. VALOR PRESENTE DE UNA INVERSIÓN Una inversión generará $2 400 al año a perpetuidad. Si el dinero se genera continuamente en el año y si la tasa prevaleciente de interés anual permanece fija a 4% capitalizada continuamente, ¿cuál es el valor presente de la inversión?

26. VALOR PRESENTE DE LA RENTA DE UNA PROPIEDAD Se estima que dentro de t años, un complejo de apartamentos estará generando utilidad para su propietario a razón de $f(t) = 10\,000 + 500t$ dólares por año. Si la utilidad se genera a perpetuidad y la tasa prevaleciente de interés anual permanece fija a 5% capitalizada continuamente, ¿cuál es el valor presente del complejo de apartamentos?

27. VALOR PRESENTE DE UNA FRANQUICIA La administración de una cadena nacional de restaurantes de comida rápida está vendiendo una franquicia permanente en Seattle, Washington. La experiencia en lugares semejantes sugiere que dentro de t años, la franquicia estará generando utilidades a razón de $f(t) = 12\,000 + 900t$ dólares por año. Si la tasa prevaleciente de interés permanece fija a 5% capitalizada continuamente, ¿cuál es el valor presente de la franquicia?

28. DESECHO NUCLEAR Cierta planta nuclear genera desechos radiactivos a razón de 600 libras por año. Los desechos se desintegran exponencialmente a 2% por año. ¿Qué cantidad de desechos radiactivos de la planta estará presente a largo plazo?

29. ATENCIÓN MEDICA La fracción de pacientes que permanecerán recibiendo tratamiento en cierta clínica t meses después de su visita inicial es $f(t) = e^{-t/20}$. Si la clínica acepta nuevos pacientes a razón de 10 por mes, ¿aproximadamente cuántos pacientes estarán recibiendo tratamiento en la clínica a largo plazo?

30. CRECIMIENTO POBLACIONAL Estudios demográficos llevados a cabo en cierta ciudad indican que la fracción de residentes que permanecerán en la ciudad por lo menos t años es $f(t) = e^{-t/20}$. La población actual de la ciudad es 200 000, y se estima que estarán llegando nuevos residentes a razón de 100 personas por año. Si esta estimación es correcta, ¿qué le ocurrirá a la población de la ciudad a largo plazo?

31. MEDICINA Un paciente en un hospital recibe 5 unidades de cierto medicamento cada hora por vía intravenosa. El medicamento se elimina en forma exponencial, de modo que la fracción que queda en el cuerpo del paciente t horas después es $f(t) = e^{-t/10}$. Si el tratamiento se continúa de manera indefinida, ¿aproximadamente cuántas unidades de medicamento quedarán en el cuerpo del paciente a largo plazo?

32. DONACIÓN Un rico patrocinador de un pequeño colegio privado desea donar una cátedra de matemáticas con un regalo de G mil dólares. Suponga que el matemático que ocupa la cátedra va a recibir $70 000 por año en salarios y prestaciones. Si el dinero cuesta 8% por año capitalizado continuamente, ¿cuál es el valor mínimo posible de G?

33. COSTO CAPITALIZADO DE UNA PROPIEDAD El **costo capitalizado** de una propiedad es la suma del costo original de la propiedad y el valor presente de mantener la propiedad. Suponga que una compañía está considerando la compra de dos máquinas diferentes. La máquina 1 cuesta $10 000 y dentro de t años su mantenimiento costará $M_1(t) = 1\,000(1 + 0.06t)$ dólares. La máquina 2 cuesta sólo $8 000, pero el costo de su mantenimiento en el momento t es $M_2(t) = 1\,100$ dólares.

a) Si el costo del dinero es 9% por año capitalizado continuamente, ¿cuál es el costo capitalizado de cada máquina? ¿Cuál máquina debe comprar la compañía?

b) Investigue varios métodos empleados por economistas para hacer comparaciones entre propiedades que compiten. Escriba un párrafo comparando dichos métodos.

34. HISTORIA DEL ESPÍA Todavía tambaleante después de su encuentro con un camello (problema 56 de la sección 5.1), nuestro espía tropieza con una trampa puesta por Scélérat y sus hombres. En la balacera resultante, la fracción de chicos malos que queda en condiciones de pelear t minutos después de entrar en combate es $e^{-t/5}$. Desafortunadamente para el espía, cada 10 minutos llegan dos nuevos pistoleros. Suponiendo que el espía tiene balas suficientes para continuar peleando con esta eficiencia, ¿cuántos chicos malos quedarán en pie a largo plazo?

35. VALOR PRESENTE Una inversión generará ingresos continuamente a razón de Q dólares por año a perpetuidad. Suponiendo que hay una tasa fija de interés r, capitalizado continuamente, use una integral impropia para demostrar que el valor presente de la inversión es $\frac{Q}{r}$ dólares.

36. VALOR PRESENTE En t años, una inversión estará generando $f(t) = A + Bt$ dólares por año, donde A y B son constantes. Suponga que el ingreso se genera a perpetuidad, con una tasa fija de interés anual r, capitalizado continuamente. Demuestre que el valor presente de esta inversión es $\frac{A}{r} + \frac{B}{r^2}$ dólares.

www.FreeLibros.com

SECCIÓN 6.3 | Integración numérica

En esta sección veremos algunas técnicas que se pueden usar para aproximar integrales definidas. Métodos numéricos como éstos se necesitan cuando la función que se integra no tiene una antiderivada en forma de combinación de funciones elementales. Por ejemplo, ni $\sqrt{x^3 + 1}$ ni e^x/x tienen antiderivada en forma de combinación de funciones elementales.

Aproximación por rectángulos

Si $f(x)$ es positiva en el intervalo $a \leq x \leq b$, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ es igual al área bajo la gráfica de f entre $x = a$ y $x = b$. Como puede verse en la sección 5.3, una forma de aproximar esta área es usar n rectángulos, tal como se muestra en la figura 6.5. En particular, se divide el intervalo $a \leq x \leq b$ en n subintervalos del mismo ancho $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ y con x_j se denota el inicio del j-ésimo subintervalo. La base del j-ésimo rectángulo es el j-ésimo subintervalo, y su altura es $f(x_j)$. Por lo tanto, el área del j-ésimo rectángulo es $f(x_j)\Delta x$. La suma de las áreas de todos los n rectángulos es una aproximación del área bajo la curva. Así, una aproximación a la integral definida correspondiente es

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(x_1)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

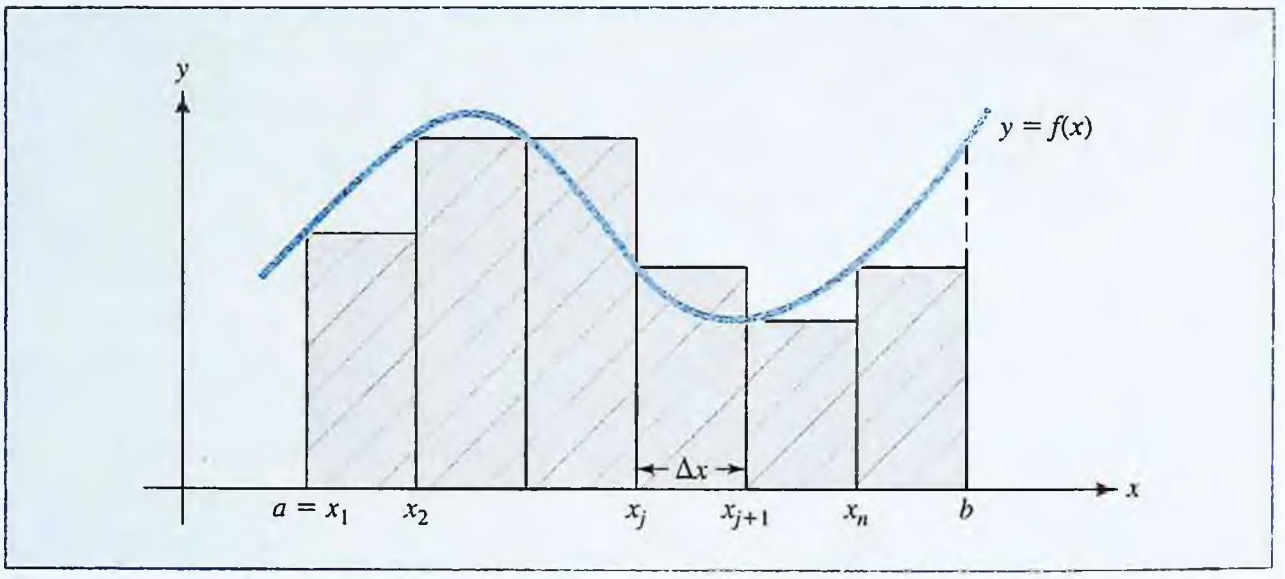


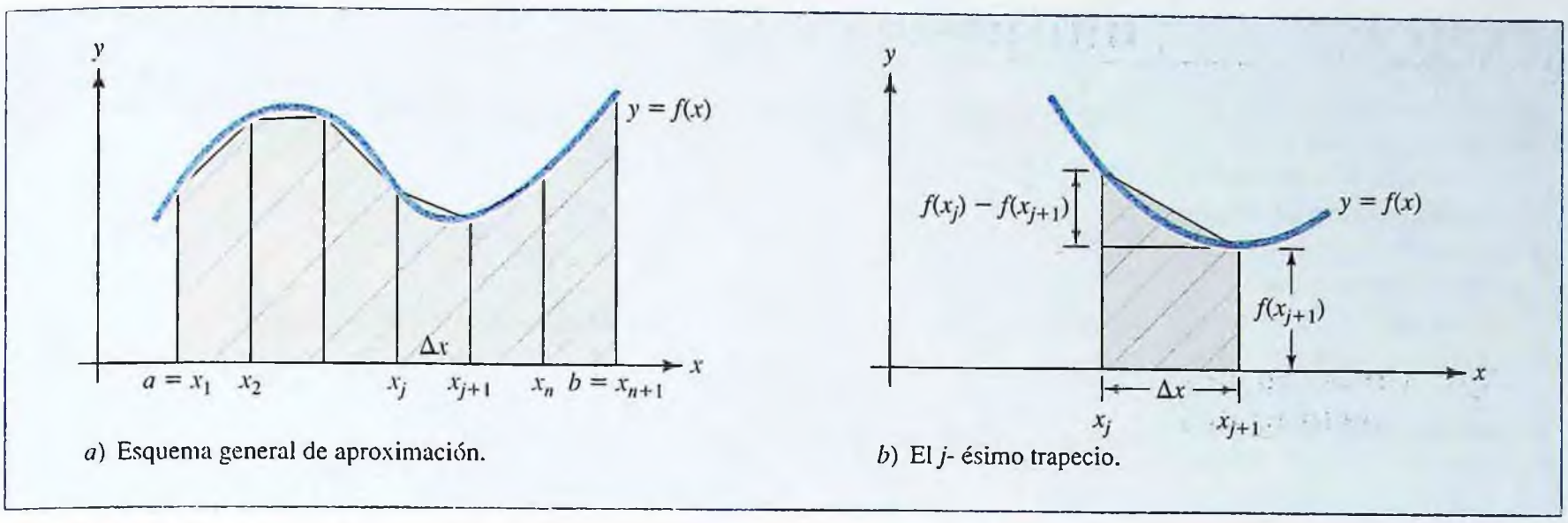
FIGURA 6.5 Aproximación por rectángulos.

Esta aproximación mejora a medida que aumenta el número de rectángulos, y se puede estimar la integral con cualquier grado deseado de precisión, tomando n suficientemente grande. No obstante, en vista de que por lo general se requieren grandes valores de n para obtener una precisión razonable, en la práctica pocas veces se usa la aproximación por rectángulos.

Aproximación por trapecios

La precisión de la aproximación mejora considerablemente si se usan trapecios en lugar de rectángulos. La figura 6.6*a* muestra el área de la figura 6.5 aproximada por n trapecios. Note cuán mejor es la aproximación en este caso.

www.FreeLibros.com



a) Esquema general de aproximación.

b) El *j*- ésimo trapecio.

FIGURA 6.6 Aproximación por trapecios.

REPASO

Justo-a-tiempo

Recuerde que un trapecio es un cuadrilátero con dos lados paralelos. Si dos lados paralelos están a h unidades uno de otro y tienen longitudes b_1 y b_2, entonces el trapecio tiene un área de

$$A = \frac{h}{2}(b_1 + b_2)$$

El j-ésimo trapecio se muestra con mayor detalle en la figura 6.6*b*. Note que está formado por un rectángulo con un triángulo recto en su parte superior. Como

$$\text{Área de rectángulo} = f(x_{j+1})\Delta x$$

y

$$\text{Área de triángulo} = \frac{1}{2}[f(x_j) - f(x_{j+1})\Delta x$$

se deduce que

$$\text{Área del } j\text{-ésimo trapecio} = f(x_{j+1})\Delta x + \frac{1}{2}[f(x_{j+1})]\Delta x$$

$$= \frac{1}{2}[f(x_j) + f(x_{j+1})]\Delta x$$

La suma de las áreas de todos los n trapecios es una aproximación del área bajo la curva y por lo tanto una aproximación de la integral definida correspondiente. Así,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]\Delta x + \frac{1}{2}[f(x_2) + f(x_3)]\Delta x + \cdots + \frac{1}{2}[f(x_n) + f(x_{n+1})]\Delta x$$

$$= \frac{\Delta x}{2}[f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_n) + f(x_{n+1})]$$

Esta fórmula de aproximación se conoce como la **regla de los trapecios** y se aplica incluso si la función f no es positiva.

La regla de los trapecios

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{2}[f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_n) + f(x_{n+1})]$$

El uso de la regla de los trapecios se muestra en el ejemplo 6.3.1.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Considere el ejemplo 6.3.1 donde $a = 1$, $b = 2$ y $n = 10$. La función de lista de una calculadora puede usarse para ayudar en los cálculos de integración numérica por la regla de los trapecios. Sea Y1 = 1/*x*. Introduzca los valores de *x* 1.0, 1.1, . . . , 1.9, 2.00 en L1, y en L2 ponga los coeficientes de los trapecios 1,2, . . . , 2,1. Escriba L3 = Y1(L1)*L2*H/2 donde $H = (b - a)/n$. Confirme el resultado obtenido en el ejemplo 6.3.1. Revise la sección ¡Explore! Actualización con más detalles al final de este capítulo.

EJEMPLO | 6.3.1

Use la regla de los trapecios con $n = 10$ para aproximar $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

Solución

Como
$$\Delta x = \frac{2 - 1}{10} = 0.1$$
el intervalo $1 \le x \le 2$ está dividido en 10 subintervalos por los puntos
$$x_1 = 1,\ x_2 = 1.1,\ x_3 = 1.2,\ \ldots,\ x_{10} = 1.9,\ x_{11} = 2$$
como se muestra en la figura 6.7.

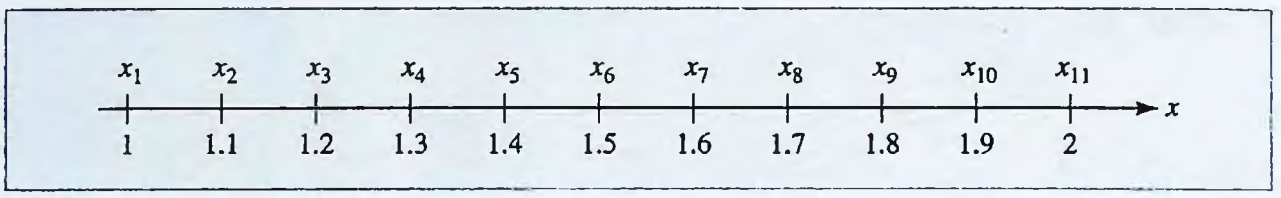


FIGURA 6.7 División del intervalo $1 \le x \le 2$ en 10 subintervalos.

Entonces, por la regla de los trapecios,
$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \frac{0.1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1.1} + \frac{2}{1.2} + \frac{2}{1.3} + \frac{2}{1.4} + \frac{2}{1.5} + \frac{2}{1.6} + \frac{2}{1.7} + \frac{2}{1.8} + \frac{2}{1.9} + \frac{1}{2}\right)$$
$$\approx 0.693771$$

La integral definida en el ejemplo 6.3.1 se puede evaluar de manera directa. En particular,
$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln 2 \approx 0.693147$$
Por tanto, la aproximación de esta integral, usando la regla de los trapecios con $n = 10$, es precisa (después de redondeo) con dos lugares decimales.

Precisión de la regla de los trapecios

La diferencia entre el valor real de la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ y la aproximación generada por la regla de los trapecios cuando se usan n subintervalos está denotada por E_n. A continuación se presenta una estimación del valor absoluto de E_n, que se demuestra en cursos más avanzados.

Estimación del error de la regla de los trapecios ■ Si M es el valor máximo de $|f''(x)|$ en el intervalo $a \le x \le b$, entonces
$$|E_n| \le \frac{M(b - a)^3}{12n^2}$$

El uso de esta fórmula se ilustra en el ejemplo 6.3.2.

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 6.3.2

Estime la precisión de la aproximación de $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ por la regla de los trapecios con $n = 10$.

Solución

Comenzando con $f(x) = \frac{1}{x}$, calcule las derivadas

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad \text{y} \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

y observe que el máximo valor de $|f''(x)|$ para $1 \le x \le 2$ is $|f''(1)| = 2$.

Aplique la fórmula del error con

$$M = 2 \qquad a = 1 \qquad b = 2 \qquad \text{y} \qquad n = 10$$

y obtenga

$$|E_{10}| \le \frac{2(2-1)^3}{12(10)^2} \approx 0.00167$$

Esto es, se garantiza que el error de la aproximación del ejemplo 6.3.1 no es mayor a 0.00167. (De hecho, con cinco lugares decimales, el error es 0.00062, como se puede ver, si se compara la aproximación obtenida en el ejemplo 6.3.1 con la representación decimal de ln 2.)

Cuando se usa la regla de los trapecios para estimar una integral definida es importante que el error de aproximación se mantenga pequeño. Si se desea obtener un cierto grado de precisión, es posible determinar cuántos intervalos se requieren para lograr esa meta, como se ilustra en el ejemplo 6.3.3.

EJEMPLO | 6.3.3

¿Cuántos subintervalos se requieren para garantizar que el error será menor a 0.00005 en la aproximación de $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ usando la regla de los trapecios?

Solución

Del ejemplo 6.3.2 se sabe que $M = 2$, $a = 1$ y $b = 2$, de modo que

$$|E_n| \le \frac{2(2-1)^3}{12n^2} = \frac{1}{6n^2}$$

El objetivo es hallar el entero positivo mínimo n para el que

$$\frac{1}{6n^2} < 0.00005$$

o, lo que es lo mismo,

$$n^2 > \frac{1}{6(0.00005)}$$

de donde

$$n > \sqrt{\frac{1}{6(0.00005)}} \approx 57.74$$

El entero más pequeño es $n = 58$, por lo tanto, se necesitan 58 subintervalos para asegurar la precisión deseada.

www.FreeLibros.com

Aproximación usando parábolas: Regla de Simpson

El número relativamente grande de subintervalos requeridos en el ejemplo 6.3.3 para asegurar una precisión dentro de 0.00005 sugiere que la aproximación por trapecios puede no ser suficientemente eficiente para algunas aplicaciones. Existe otra fórmula de aproximación, llamada **regla de Simpson,** que no es más difícil de usar que la regla de los trapecios, pero que con frecuencia requiere considerablemente menos cálculos para lograr un grado específico de precisión. Al igual que la regla de los trapecios, está basada en la aproximación del área bajo una curva por columnas; pero, a diferencia de la regla de los trapecios, usa arcos parabólicos en lugar de segmentos de rectas en la parte superior de las columnas.

Para ser más exactos, la aproximación de una integral definida que usa parábolas está basada en la siguiente construcción (ilustrada en la figura 6.8 para $n = 6$): Divida el intervalo $a \leq x \leq b$ en un número **par** de subintervalos, para que los subintervalos adyacentes puedan ser pareados sin que sobre ninguno. Aproxime la parte de la gráfica que se encuentra sobre el primer par de subintervalos, por medio de la parábola (única) que pasa por los tres puntos $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, y $(x_3, f(x_3))$, y use el área bajo esta parábola entre x_1 y x_3 para aproximar el área correspondiente bajo la curva. Haga lo mismo para las parejas restantes de subintervalos y use la suma de las áreas resultantes para aproximar el área total bajo la gráfica. He aquí la fórmula de aproximación que resulta de esta construcción.

Regla de Simpson ■ Para un entero par n,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}[f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + 4f(x_4) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + 4f(x_n) + f(x_{n+1})]$$

Note que, en la suma de la aproximación por la regla de Simpson, los valores primero y último de la función están multiplicados por 1, mientras que los otros están multiplicados alternativamente por 4 y 2.

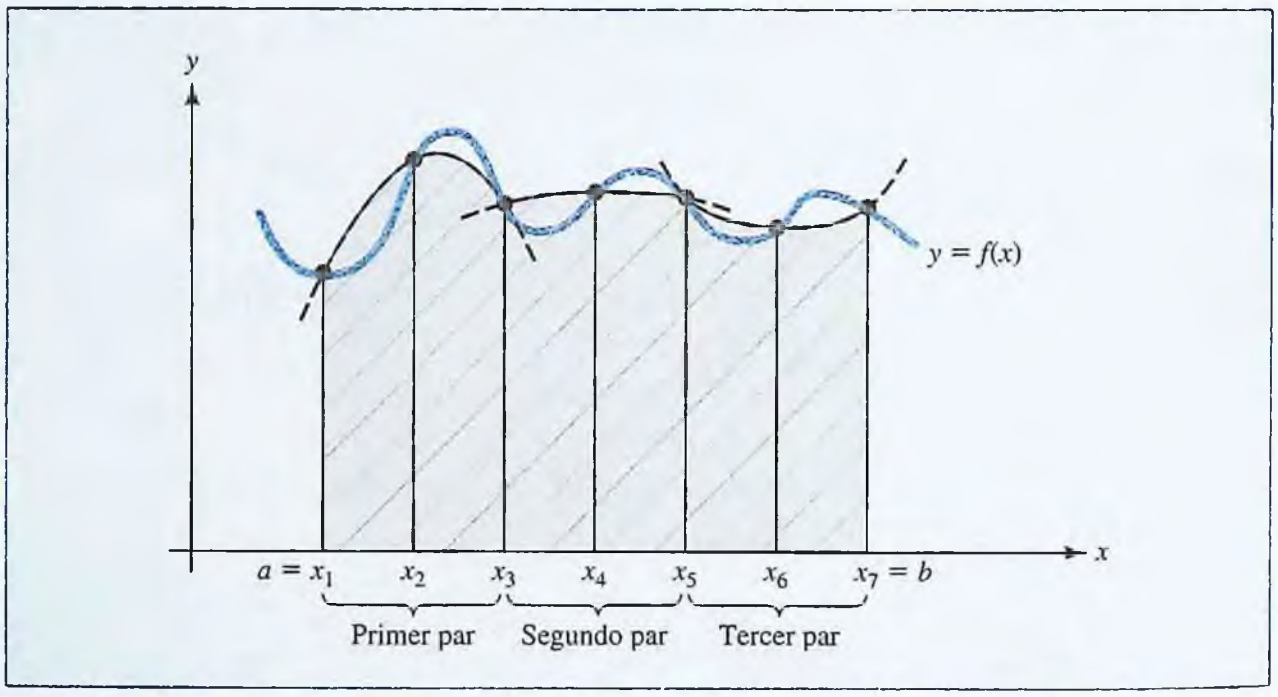


FIGURA 6.8 Aproximación con uso de parábolas.

La prueba de la regla de Simpson se basa en el hecho de que la ecuación de una parábola es un polinomio de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$. Para cada par de subintervalos, los tres puntos dados se usan para hallar los coeficientes A, B y C, y el polinomio resultante se integra entonces para obtener el área correspondiente. Los detalles de la prueba son fáciles pero tediosos, así que se omitirán.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Considere el ejemplo 6.3.4, donde $a = 1$, $b = 2$, y $n = 10$. Puede usar la función de lista de una calculadora graficadora para facilitar los cálculos en la regla de Simpson. Sea Y1 = $1/x$. Ponga los valores $x = 1.0, 1.1, \ldots, 1.9, 2.0$, en la lista L1, y los coeficientes de la regla de Simpson 1, 4, 2, . . . , 4, 1 en L2. para $H = (b - a)/n$, escriba L3 = Y1(L1)*L2*H/3. Confirme el resultado obtenido en el ejemplo 6.3.4. Vea el ¡EXPLORE! de la página 474 para más detalles sobre la regla de los trapecios.

EJEMPLO | 6.3.4

Use la regla de Simpson con $n = 10$ para aproximar $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

Solución

Como ocurre en el ejemplo 6.3.1, $\Delta x = 0.1$, y por tanto el intervalo $1 \le x \le 2$ se divide en los 10 subintervalos con

$$x_1 = 1,\ x_2 = 1.1,\ x_3 = 1.2,\ \ldots,\ x_{10} = 1.9,\ x_{11} = 2$$

Entonces, por la regla de Simpson,

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \frac{0.1}{3}\left(\frac{1}{1} + \frac{4}{1.1} + \frac{2}{1.2} + \frac{4}{1.3} + \frac{2}{1.4} + \frac{4}{1.5} + \frac{2}{1.6} + \frac{4}{1.7} + \frac{2}{1.8} + \frac{4}{1.9} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\approx 0.693150$$

Note que ésta es una excelente aproximación, con 6 lugares decimales, al verdadero valor; es decir, $\ln 2 = 0.693147$.

Precisión de la regla de Simpson

El cálculo del error para la regla de Simpson utiliza la cuarta derivada $f^{(4)}(x)$ de forma semejante a la que se usó la segunda derivada $f''(x)$ en el cálculo del error para la regla de los trapecios. A continuación aparece la fórmula de la estimación.

Estimación de error para la regla de Simpson ■ Si M es el valor máximo de $|f^{(4)}(x)|$ en el intervalo $a \le x \le b$, entonces

$$|E_n| \le \frac{M(b-a)^5}{180n^4}$$

A continuación se muestra una aplicación de esta fórmula.

¡EXPLORE!

Use la regla de Simpson con $n = 4$ para aproximar $\int_0^2 (3x^2 + 1)\,dx$. Para realizarlo, introduzca la función en su calculadora graficadora y evalúela en 0, 0.5, 1.0, 1.5 y 2.0. Encuentre la suma apropiada. Compare su respuesta con la hallada cuando se usan rectángulos y cuando se usa la regla de los trapecios. Vea más detalles en la página 489 acerca de la regla de los trapecios.

EJEMPLO | 6.3.5

Estime la precisión de la aproximación de $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ por la regla de Simpson, con $n = 10$.

Solución

Comenzando con $f(x) = \frac{1}{x}$, calcule las derivadas

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(x) = \frac{2}{x^3} \qquad f^{(3)}(x) = -\frac{6}{x^4} \qquad f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}$$

y observe que el máximo valor de $|f^{(4)}(x)|$ en el intervalo $1 \le x \le 2$ es $|f^{(4)}(1)| = 24$.

Ahora, aplique la fórmula del error con $M = 24$, $a = 1$, $b = 2$ y $n = 10$ con el fin de obtener

$$|E_{10}| \le \frac{24(2-1)^5}{180(10)^4} \approx 0.000013$$

Esto es, está garantizado que el error de aproximación en el ejemplo 6.3.4 no es mayor a 0.000013.

REPASO

Justo-a-tiempo

Recuerde que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-n})$$

$$= -nx^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}}$$

En el ejemplo 6.3.6 la estimación del error se usa para determinar el número de subintervalos requeridos para garantizar un grado específico de precisión.

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 6.3.6

¿Cuántos subintervalos se necesitan para asegurar una precisión dentro de 0.00005 en la aproximación de $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ por la regla de Simpson?

Solución

Del ejemplo 6.3.5 se sabe que $M = 24$, $a = 1$, y $b = 2$. Por tanto,

$$|E_n| \leq \frac{24(2-1)^5}{180n^4} = \frac{2}{15n^4}$$

El objetivo es hallar el entero (par) positivo más pequeño para el que

$$\frac{2}{15n^4} < 0.00005$$

o, lo que es equivalente, $$n^4 > \frac{2}{15(0.00005)}$$

es decir $$n > \left[\frac{2}{15(0.00005)}\right]^{1/4} \approx 7.19$$

Este entero (par) más pequeño es $n = 8$, por lo que se necesitan ocho subintervalos para asegurar la precisión deseada. Compare con el resultado del ejemplo 6.3.3, donde se encontró que se necesitaban 58 subintervalos para asegurar el mismo grado de precisión usando la regla de los trapecios.

Interpretación de datos con integración numérica

La integración numérica se puede usar con frecuencia para estimar una cantidad $\int_a^b f(x)\,dx$ cuando todo lo que se sabe acerca de $f(x)$ es un conjunto de datos determinados en forma experimental. A continuación se muestra un ejemplo.

EJEMPLO | 6.3.7

Jack necesita saber el área de su piscina para comprarle una cubierta, pero esto es difícil debido a la forma irregular de la piscina. Suponga que Jack hace las mediciones que se ilustran en la figura 6.9 a intervalos de 4 pies a lo largo de la base de la piscina (todas las medidas son en pies). ¿Cómo puede usar la regla de los trapecios para estimar el área?

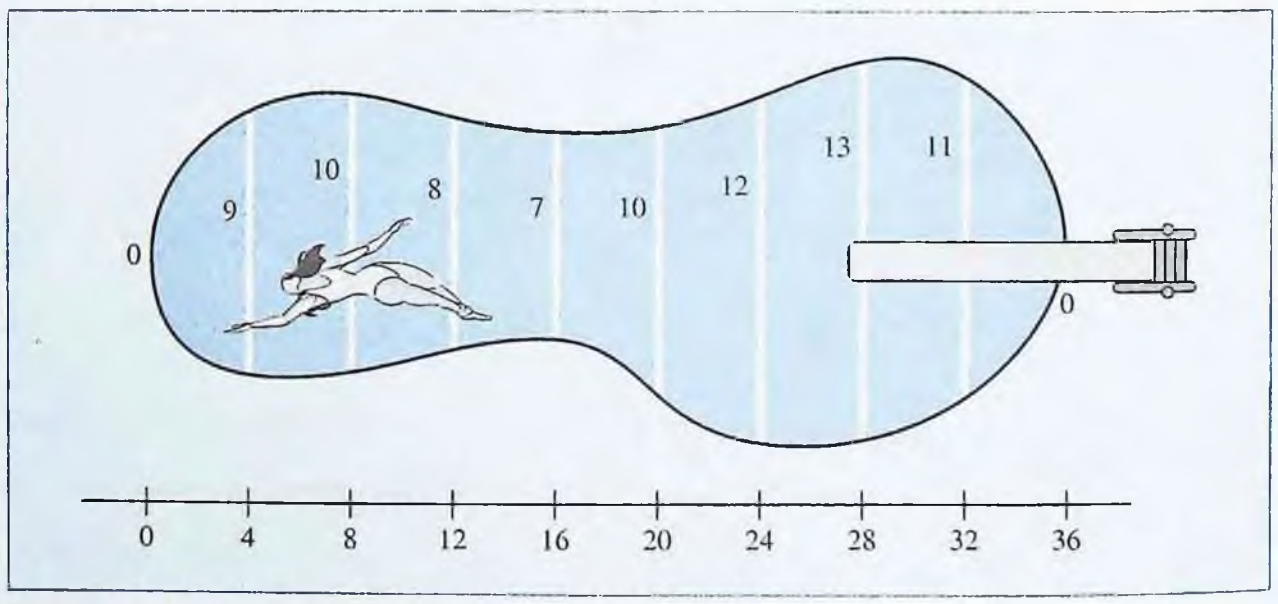


FIGURA 6.9 Mediciones en una piscina.

www.FreeLibros.com

Solución

Si Jack pudiera hallar funciones $f(x)$ para el borde superior de la piscina y $g(x)$ para el borde inferior, entonces el área estaría dada por la integral definida $A = \int_0^{36} [f(x) - g(x)]dx$.

La forma irregular hace imposible, o al menos impráctico, hallar fórmulas para f y g pero las mediciones de Jack le dicen que

$$f(0) - g(0) = 0 \quad f(4) - g(4) = 9 \quad f(8) - g(8) = 10 \ldots f(36) - g(36) = 0$$

Sustituyendo esta información en la aproximación de la regla de los trapecios y usando $\Delta x = (36 - 0)/9 = 4$, Jack obtiene

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{36} [f(x) - g(x)]dx \\ &= \frac{4}{2}[0 + 2(9) + 2(10) + 2(8) + 2(7) + 2(10) + 2(12) + 2(13) + 2(11) + 0] \\ &= \frac{4}{2}(160) = 320 \end{aligned}$$

Por tanto, Jack estima que el área de la piscina es de aproximadamente 320 pies^2.

PROBLEMAS | 6.3

En los problemas del 1 al 8, aproxime la integral dada usando a) la regla de los trapecios y b) la regla de Simpson con el número especificado de subintervalos.

1. $\int_1^2 x^2\,dx;\ n = 4$

2. $\int_4^6 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx;\ n = 10$

3. $\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx;\ n = 4$

4. $\int_2^3 \frac{1}{x^2 - 1}\,dx;\ n = 4$

5. $\int_{-1}^0 \sqrt{1 + x^2}\,dx;\ n = 4$

6. $\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx;\ n = 6$

7. $\int_0^1 e^{-x^2}dx;\ n = 4$

8. $\int_0^2 e^{x^2}\,dx;\ n = 10$

En los problemas del 9 al 14, aproxime la integral dada y estime el error $|E_n|$ usando a) la regla de los trapecios y b) la regla de Simpson con el número especificado de subintervalos.

9. $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx;\ n = 4$

10. $\int_0^2 x^3\,dx;\ n = 8$

11. $\int_1^3 \sqrt{x}\,dx;\ n = 10$

12. $\int_1^2 \ln x\,dx;\ n = 4$

13. $\int_0^1 e^{x^2}dx;\ n = 4$

14. $\int_0^{0.6} e^{x^3}dx;\ n = 6$

www.FreeLibros.com

En los problemas del 15 al 20 determine cuántos subintervalos se necesitan para garantizar una precisión dentro de 0.00005 en la aproximación de la integral dada por medio de a) la regla de los trapecios y b) la regla de Simpson.

15. $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$

16. $\int_0^4 (x^4 + 2x^2 + 1)\,dx$

17. $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

18. $\int_1^2 \ln(1 + x)\,dx$

19. $\int_{1.2}^{2.4} e^x\,dx$

20. $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$

21. Un cuarto de círculo de radio 1 tiene ecuación $y = \sqrt{1 - x^2}$ para $0 \le x \le 1$ y tiene área $\pi/4$. Por tanto, $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = \pi/4$. Use esta fórmula para estimar π aplicando:
a) La regla de los trapecios
b) La regla de Simpson
En cada caso, use $n = 8$ subintervalos.

22. Use la regla de los trapecios con $n = 8$ para estimar el área limitada por la curva $y = \sqrt{x^3 + 1}$, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

23. Use la regla de los trapecios con $n = 10$ para estimar el valor promedio de la función $f(x) = \dfrac{e^{-0.4x}}{x}$ en el intervalo $1 \le x \le 6$.

24. VALOR PRESENTE DE UNA FRANQUICIA La administración de una cadena nacional de restaurantes está vendiendo una franquicia de 5 años para operar su más reciente negocio en Tulare, California. La experiencia anterior en localidades semejantes sugiere que dentro de t años la franquicia estará generando utilidades a razón de $f(t) = 12\,000\sqrt{t}$ dólares por año. Suponga que la tasa prevaleciente de interés anual será fija durante los siguientes 5 años al 5% capitalizado en forma continua. Use la regla de Simpson con $n = 10$ para estimar el valor presente de la franquicia.

25. DISTANCIA Y VELOCIDAD Sue y Tom están de viaje en un auto que tiene el odómetro descompuesto. Para determinar la distancia que recorren entre las 2 y las 3 P.M., Tom (el pasajero) toma lecturas del velocímetro (en mph) cada 5 minutos:

Minutos después de las 2:00 P.M.	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Lectura del velocímetro	45	48	37	39	55	60	60	55	50	67	58	45	49

Use la regla de los trapecios para estimar la distancia total recorrida por la pareja durante la hora en cuestión.

26. ATENCIÓN MEDICA MENTAL Un condado acaba de abrir una clínica para enfermos mentales. Inicialmente, la clínica acepta 300 personas para tratamiento y planea aceptar nuevos pacientes a razón de 10 por mes. Por $f(t)$ denote la fracción de personas que reciben tratamiento de manera continua durante al menos t días. En los primeros 60 días, se llevan registros y se obtienen estos valores de $f(t)$:

t (días)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
$f(t)$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{20}$

www.FreeLibros.com

Use esa información junto con la regla de los trapecios para estimar el número de pacientes en la clínica al final del periodo de 60 días. [*Sugerencia:* Éste es un problema de supervivencia/renovación. Recuerde el ejemplo 5.6.1 de la sección 5.6.]

27. VALOR FUTURO DE UNA INVERSIÓN Marc tiene una pequeña inversión que le da un flujo variable de ingresos, que es depositado en forma continua en una cuenta que gana interés a una tasa anual de 4% capitalizado continuamente. Él revisa el flujo mensual de la inversión el primer día de cada mes durante un periodo de 1 año, y obtiene los resultados de la tabla siguiente.

Mes	Ene	Mar	May	Jul	Sep	Nov	Ene
Flujo de ingreso	$437	$357	$615	$510	$415	$550	$593

Por ejemplo, el ingreso es depositado en la cuenta a razón de $615 al mes el 1 de mayo, pero 2 meses después, la tasa del flujo es de sólo $510 por mes. Use esta información junto con la regla de Simpson para estimar el valor futuro del flujo de ingreso durante este periodo de 1 año. [*Sugerencia:* Recuerde el ejemplo 5.5.2 de la sección 5.5.]

28. RENDIMIENTO CARDIACO A PARTIR DE DATOS Por lo general, cuando se mide el rendimiento cardiaco[2] (ejemplo 5.6.4 de la sección 5.6.) los médicos no tienen una fórmula específica, $C(t)$, para calcular la concentración de colorante que pasa por el corazón de un paciente. En lugar de esto, se usan métodos de análisis de datos. Suponga que 5 mg de colorante se inyectaron a cierto paciente en una vena cerca del corazón y que se tomaron mediciones cada 5 segundos en un periodo de 30 segundos, obteniéndose los siguientes datos:

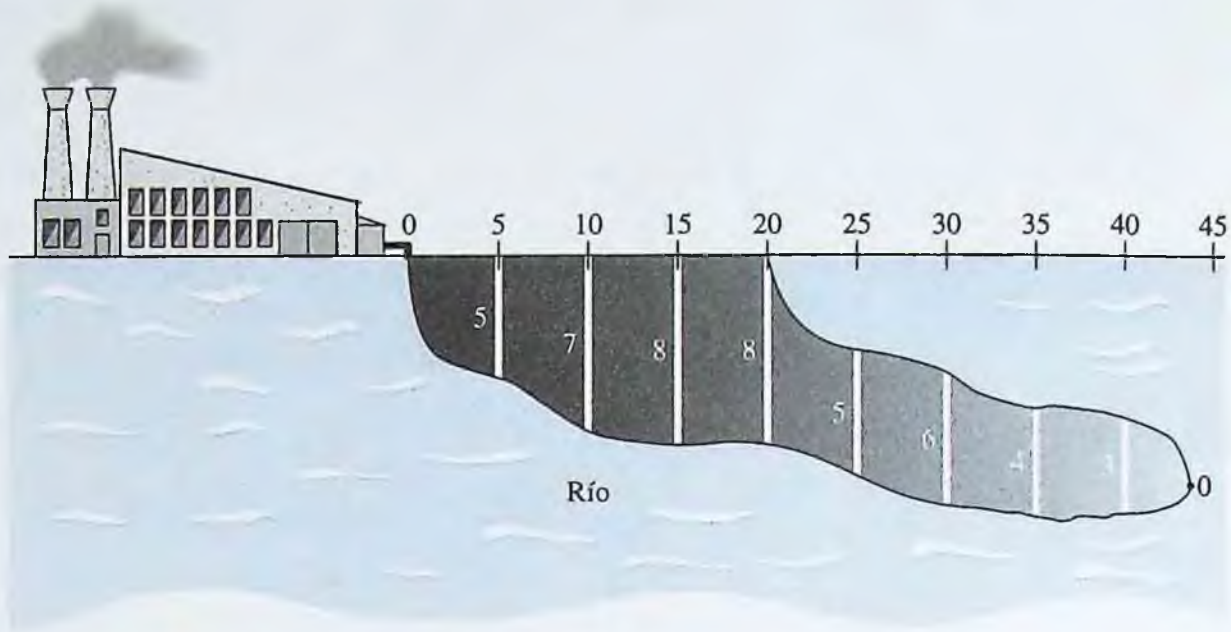
Tiempo t (segundos)	0	5	10	15	20	25	30
Concentración $C(t)$ (mg/L)	0	10	36	35	15	12	8

Use la regla de Simpson para estimar la integral $\int_0^{30} C(t)\,dt$. Con base en este resultado, ¿cuál es el rendimiento cardiaco aproximado del paciente?

29. CONTROL DE CONTAMINACIÓN Una planta industrial descarga contaminante en un río. El contaminante se extiende cuando es llevado corriente abajo por el río y, 3 horas más tarde, el derrame tiene la forma que se ve en la figura de la página 482. Las mediciones (en pies) en el derrame se hacen a intervalos de 5 pies, como se indica en la figura. Use esta información junto con la regla de los trapecios para estimar el área del derrame.

[2]Para una discusión más detallada sobre el gasto cardiaco consulte la sección "Reflexione acerca de..." al final de este capítulo.

www.FreeLibros.com



PROBLEMA 29

30. UTILIDAD NETA A PARTIR DE DATOS El primer día de cada mes, el gerente de una pequeña compañía estima el porcentaje al que espera aumenten las utilidades durante ese mes. Los resultados se citan en la siguiente tabla para los primeros 6 meses del año; en ésta, $P'(t)$ es el porcentaje de crecimiento de utilidades, en miles de dólares por mes, esperados durante el t-ésimo mes ($t = 1$ para enero, $t = 6$ para junio). Use esta información junto con la regla de los trapecios para estimar la utilidad total obtenida por la compañía durante este periodo de 6 meses (enero a junio).

t (mes)	1	2	3	4	5	6
2% de utilidad $P'(t)$	0.65	0.43	0.72	0.81	1.02	0.97

31. SUPERÁVIT DE CONSUMIDORES A PARTIR DE DATOS Un economista que estudia la demanda de cierta mercancía reúne los datos en la siguiente tabla; ésta da el número de unidades de la mercancía, q (en miles), que serán demandadas (vendidas) a un precio de p dólares por unidad. Use esta información junto con la regla de Simpson para estimar el superávit de los consumidores cuando se producen 24 000 unidades; esto es, cuando $q_0 = 24$.

q (1 000 unidades)	0	4	8	12	16	20	24
p (dólares por unidad)	49.12	42.90	31.32	19.83	13.87	10.58	7.25

32. SUPERÁVIT DE LOS PRODUCTORES A PARTIR DE DATOS Un economista que estudia la oferta de cierta mercancía ha reunido los datos en la siguiente tabla que indica el número de unidades de la mercancía, q (en miles), que serán ofertadas al mercado por los productores a un precio de p dólares por unidad. Use esta información junto con la regla de los trapecios para estimar el superávit de los productores, cuando se ofertan 7 000 unidades ($q_0 = 7$).

q (1 000 unidades)	0	1	2	3	4	5	6	7
p (dólares por unidad)	1.21	3.19	3.97	5.31	6.72	8.16	9.54	11.03

33. DISTRIBUCIÓN DEL INGRESO Un sociólogo que estudia la distribución del ingreso en una sociedad industrial compila los datos que aparecen en la siguiente tabla; donde $L(x)$ denota la fracción de la riqueza total de la sociedad, re-

www.FreeLibros.com

cibida por $100x\%$ de los salarios más bajos de los empleados de esa sociedad. Use esta información junto con la regla de los trapecios para estimar el índice de Gini (GI) para dicha sociedad; es decir,

$$\text{GI} = 2\int_0^1 [x - L(x)]\,dx$$

x	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1
$L(x)$	0	0.0063	0.0631	0.1418	0.2305	0.3342	0.4713	0.6758	1

34. PORCENTAJE DE MORTALIDAD POR SIDA La siguiente tabla, que aparece en la sección "Reflexione acerca de" al final del capítulo 3, da el número de muertos por sida reportados durante el t-ésimo año después de 1990, para el periodo 1990-2001. (*Fuente: Centros para Prevención y Control de Enfermedades, Centro Nacional para Prevención del HIV, STD y TB.*)

Año	t	Muertes por sida reportadas	Año	t	Muertes por sida reportadas
1990	0	31 120	1996	6	38 296
1991	1	36 175	1997	7	22 245
1992	2	40 587	1998	8	18 823
1993	3	45 850	1999	9	18 249
1994	4	50 842	2000	10	16 672
1995	5	51 670	2001	11	15 603

Sin embargo, la tabla no muestra todos los datos debido a que muchas muertes, que en realidad se deben al sida, no son reportadas o son atribuidas a otras causas. Sea $D(t)$ la función que da el número acumulado de muertes por sida en el momento t. Entonces los datos de la tabla pueden ser considerados como tasa de cambio de $D(t)$ en diferentes tiempos; esto es, como índices de mortalidad. Por ejemplo, la tabla indica que en 1992 ($t = 2$) las muertes por sida ocurrían a razón de 40 587 por año.

a) Suponiendo que $D(t)$ es derivable, explique por qué el número total N de muertes por sida durante el periodo 1990-2001 está dado por la integral

$$N = \int_0^{11} D'(t)\,dt$$

b) Estime N usando los datos de la tabla junto con la regla de los trapecios para aproximar la integral del inciso *a*).

c) ¿Por qué es probable que la función $D(t)$ de mortalidad *no sea* derivable? ¿Invalida esto la estimación de N hecha en el inciso *b*)? Escriba un párrafo en pro o en contra del procedimiento empleado para estimar N en este problema.

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Términos importantes, símbolos y fórmulas

Integración por partes: (451)

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Tabla de integrales: (458, 459)

Formas que contienen $a + bu$ (458)

Formas que contienen $\sqrt{a^2 + u^2}$ (458)

Formas que contienen $\sqrt{a^2 - u^2}$ (459)

Formas que contienen $\sqrt{u^2 - a^2}$ (459)

Formas que contienen e^{au} y $\ln u$ (459)

Fórmulas de reducción (459)

Integral impropia: (465)

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_a^N f(x)\,dx$$

Un límite útil: (467)

Para cualesquiera potencias p y $k > 0$,

$$\lim_{N\to+\infty} N^p e^{-kN} = 0$$

Regla de los trapecios: (473)

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\approx \frac{\Delta x}{2}[f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_n) + f(x_{n+1})]$$

Estimación de error: (474)

$$|E_n| \le \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

donde M es el valor máximo de $|f''(x)|$ en $[a, b]$

Regla de Simpson: para n par, (476)

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{\Delta x}{3}[f(x_1) + 4f(x_2) + 2f(x_3) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + 4f(x_n) + f(x_{n+1})]$$

Estimación de error: (477)

$$|E_n| \le \frac{M(b-a)^5}{180n^4}$$

donde M es el valor máximo de $|f^{(4)}(x)|$ en $[a, b]$

Revisión del capítulo 6

1. Use integración por partes para hallar cada una de las siguientes integrales indefinidas y definidas.

a) $\int \sqrt{2x}\ln x^2\,dx$

b) $\int_0^1 xe^{0.2x}\,dx$

c) $\int_{-4}^0 x\sqrt{1-2x}\,dx$

d) $\int \frac{x-1}{e^x}\,dx$

2. En cada caso, evalúe la integral impropia dada o demuestre que diverge.

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1.1}}\,dx$

b) $\int_1^{+\infty} xe^{-2x}\,dx$

c) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$

d) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx$

3. Use la tabla de integrales de las páginas 458-459 para hallar las siguientes integrales.

a) $\int \left(\ln\sqrt{3x}\right)^2 dx$

b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$

c) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$

d) $\int \frac{dx}{3x^2 - 4x}$

4. DESECHOS NUCLEARES Después de t años de operación, cierta planta nuclear genera desechos radiactivos a razón de $R(t)$ libras por año, donde

$$R(t) = 300e^{0.001t}$$

Los desechos se desintegran exponencialmente a razón de 3% por año. ¿Cuánto desecho radiactivo de la planta estará presente a largo plazo?

www.FreeLibros.com

5. VALOR PRESENTE DE UNA PROPIEDAD Se estima que dentro de t años un edificio de oficinas estará generando utilidades a su propietario a razón de $R(t) = 50 + 3t$ mil dólares por año. Si la utilidad se genera a perpetuidad y la tasa prevaleciente de interés anual permanece al 6% capitalizado continuamente, ¿cuál es el valor presente del edificio de oficinas?

6. CONCENTRACIÓN DE MEDICAMENTO Un paciente en un hospital recibe por vía intravenosa, 0.7 mg de cierto medicamento cada hora. El medicamento se elimina en forma exponencial, de modo que la fracción del medicamento que queda en el cuerpo del paciente después de t horas es $f(t) = e^{-0.2t}$. Si el tratamiento se continúa de manera indefinida, ¿aproximadamente cuántas unidades quedarán en el torrente sanguíneo del paciente a largo plazo (cuando $t \to +\infty$)?

7. CONTAMINACIÓN DEL AGUA Suponga que una planta industrial derrama un contaminante en un río a razón de $R(t) = 800e^{-0.05t}$ unidades por hora en cada momento t (horas). Si el derrame continúa de manera indefinida, ¿cuál es la cantidad total de contaminante que será vertida en el río?

8. Use la regla de los trapecios con $n = 8$ para estimar el valor de la integral

$$\int_3^4 \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x}\, dx$$

Utilice la tabla de integrales de las páginas 458-459 para calcular el valor exacto de la integral y compare con su aproximación.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Problemas de repaso

En los problemas 1 al 10, use la integración por partes para hallar la integral dada.

1. $\int te^{1-t}\, dt$

2. $\int (5 + 3x)e^{-x/2}\, dx$

3. $\int x\sqrt{2x + 3}\, dx$

4. $\int_{-9}^{-1} \frac{y\, dy}{\sqrt{4 - 5y}}$

5. $\int_1^4 \frac{\ln\sqrt{s}}{\sqrt{s}}\, ds$

6. $\int (\ln x)^2\, dx$

7. $\int_{-2}^{1} (2x + 1)(x + 3)^{3/2}\, dx$

8. $\int \frac{w^3}{\sqrt{1 + w^2}}\, dw$

9. $\int x^3\sqrt{3x^2 + 2}\, dx$

10. $\int_0^1 \frac{x + 2}{e^{3x}}\, dx$

En los problemas 11 al 16, use la tabla de integrales de las páginas 458-459 para hallar la integral dada.

11. $\int \frac{5\, dx}{8 - 2x^2}$

12. $\int \frac{2\, dt}{\sqrt{9t^2 + 16}}$

13. $\int w^2 e^{-w/3}\, dw$

14. $\int \frac{4\, dx}{x(9 + 5x)}$

15. $\int (\ln 2x)^3\, dx$

16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - x^2}}$

En los problemas 17 al 26, evalúe la integral impropia dada o demuestre que diverge.

17. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1 + 2x}}\, dx$

18. $\int_0^{+\infty} (1 + 2x)^{-3/2}\, dx$

19. $\int_0^{+\infty} \frac{3t}{t^2 + 1}\, dt$

20. $\int_0^{+\infty} 3e^{-5x}\, dx$

21. $\int_0^{+\infty} xe^{-2x}\, dx$

22. $\int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-x^3}\, dx$

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

23. $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x}\,dx$

24. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2}\,dt$

25. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

26. $\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{x+2}\,dx$

27. DESECHOS NUCLEARES Después de t años de operación, cierta planta nuclear genera desechos nucleares a razón de $R(t)$ libras por año, donde

$$R(t) = 300 - 200e^{-0.03t}$$

Los desechos se desintegran en forma exponencial a razón de 2% por año. ¿Qué cantidad de desechos radiactivos de esa planta estará presente a largo plazo?

28. PRODUCCIÓN Después de t horas en el trabajo, un obrero puede producir $100e^{-0.5t}$ unidades por hora. ¿Cuántas unidades produce entre las 10:00 A.M. y el mediodía un obrero que llega al trabajo a las 8:00 A.M.?

29. DEMOGRAFÍA (SUPERVIVENCIA/RENOVACIÓN) Estudios demográficos realizados en cierta ciudad indican que la fracción de residentes que quedarán en la ciudad después de t años es $f(t) = e^{-t/20}$. La población actual de la ciudad es 100 000 y se estima que dentro de t años otras personas llegarán a razón de $100t$ por año. Si dicha estimación es correcta, ¿qué ocurrirá a la población de la ciudad a largo plazo? [*Sugerencia:* Vea el problema 24, sección 5.6.]

30. CRECIMIENTO DE LAS SUSCRIPCIONES Los editores de una revista nacional han encontrado que la fracción de suscriptores que siguen siéndolo después de t años es $f(t) = e^{-t/10}$. Actualmente, la revista tiene 20 000 suscriptores y se estima que se venderán nuevas suscripciones a razón de 1 000 por año. Aproximadamente, ¿cuántos suscriptores tendrá la revista a largo plazo?

31. VALOR PRESENTE DE UNA INVERSIÓN Se estima que dentro de t años, cierta inversión estará generando ingresos a razón de $f(t) = 8\,000 + 400t$ dólares por año. Si los ingresos se generan a perpetuidad y la tasa prevaleciente de interés anual permanece fija a 5% capitalizada continuamente, encuentre el valor presente de la inversión.

32. PRUEBA PSICOLÓGICA En un experimento psicológico se encuentra que la proporción de participantes que requiere más de t minutos para terminar cierta tarea está dada por

$$\int_t^{+\infty} 0.07e^{-0.07u}\,du.$$

a) Encuentre la proporción de participantes que requieren más de 5 minutos para terminar la tarea.

b) ¿Qué proporción requiere entre 10 y 15 minutos para terminar la tarea?

INTEGRACIÓN NUMÉRICA *En los problemas 33 al 36, aproxime la integral dada y estime el error con el número de subintervalos indicado, usando:*

a) La regla de los trapecios

b) La regla de Simpson

33. $\int_1^3 \frac{1}{x}\,dx;\ n = 10$

34. $\int_0^2 e^{x^2}\,dx;\ n = 8$

35. $\int_1^2 \frac{e^x}{x}\,dx;\ n = 10$

36. $\int_1^2 xe^{1/x}\,dx;\ n = 8$

INTEGRACIÓN NUMÉRICA *En los problemas 37 y 38 determine cuántos subintervalos se requieren para garantizar una precisión dentro de 0.00005 del valor real de la integral dada, usando:*

a) La regla de los trapecios

b) La regla de Simpson

37. $\int_1^3 \sqrt{x}\,dx$

38. $\int_{0.5}^1 e^{-1.1x}\,dx$

39. COSTO TOTAL A PARTIR DEL COSTO MARGINAL Un fabricante determina que el costo marginal de producir q unidades de cierta mercancía es $C'(q) = \sqrt{q}e^{0.01q}$ dólares por unidad.

a) Exprese el costo total de producir las primeras 8 unidades como una integral definida.

b) Estime el valor de la integral del costo total del inciso *a)* usando la regla de los trapecios, con $n = 8$ subintervalos.

40. INGRESO A PARTIR DE DATOS DE LA DEMANDA Un economista que estudia la demanda de cierta mercancía reúne los datos en la siguiente tabla; ésta indica el número de unidades q (en miles) de la mercancía que será demandada (vendida) a un precio de p dólares por unidad.

www.FreeLibros.com

q (1 000 unidades)	0	4	8	12	16	20	24
p (\$/unidades)	49.12	42.90	31.32	19.83	13.87	10.58	7.25

Use esta información junto con la regla de Simpson para estimar el ingreso total

$$R = \int_0^{24} qp(q)\,dq \quad \text{mil dólares}$$

obtenido cuando el nivel de producción aumenta de 0 a 24 000 unidades ($q = 0$ a $q = 24$).

41. Use la función de gráficas de su calculadora para trazar las curvas $y = -x^3 - 2x^2 + 5x - 2$ y $y = x \ln x$ en la misma pantalla. Use **ZOOM** y **TRACE**, o alguna otra función de su calculadora, para hallar el punto donde las curvas se cruzan y luego calcule el área de la región limitada por las curvas.

42. Repita el problema 41 para las curvas

$$y = \frac{x-2}{x+1} \quad \text{y} \quad y = \sqrt{25 - x^2}$$

Si su calculadora tiene una función de integración numérica, úsela para evaluar las integrales de los problemas 43 y 44. En cada caso, verifique su resultado aplicando la fórmula de integración apropiada de la tabla de las páginas 458-459.

43. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2}{9 - x^2}\,dx$

44. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{9 + 4x^2}\,dx$

45. Use la función de integración numérica de su calculadora para calcular

$$I(N) = \int_0^N \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\,dx$$

para $N = 1, 10, 50$. Con base en sus resultados, ¿piensa usted que la integral impropia

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}\,dx$$

converge? Si es así, ¿a qué valor?

46. Use la función de integración numérica de su calculadora para calcular

$$I(N) = \int_1^N \frac{\ln(x+1)}{x}\,dx$$

para $N = 10, 100, 1\,000, 10\,000$. Con base en sus resultados, ¿piensa usted que la integral impropia

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}\,dx$$

converge? Si es así, ¿a qué valor?

RESUMEN DEL CAPÍTULO

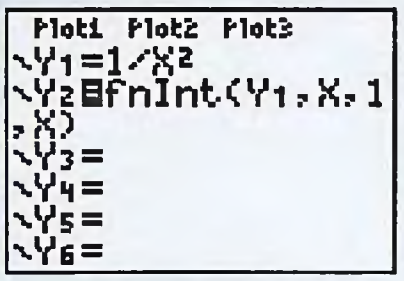
www.FreeLibros.com

¡EXPLORE! ACTUALIZACIÓN

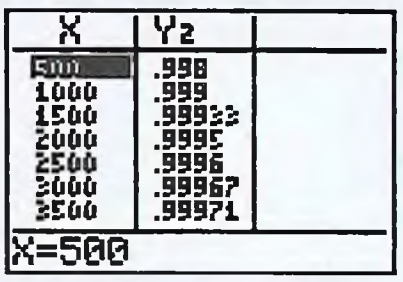
Las soluciones completas para las secciones ¡Explore! que aparecen en todo el libro se encuentran accesibles en la página web www.mhhe.com/hoffmann.

Solución para ¡Explore! de la página 465

Consulte el ejemplo 6.2.1. Escriba $f(x) = 1/x^2$ en Y1 del editor de ecuaciones y escriba Y2 = **fnInt**(Y1,X,1,X,.001), usando la función de integración numérica que se encuentra en el menú **MATH, 9:fnInt**(. Se eliminó la selección Y1 para mostrar sólo los valores de Y2. Haga que la función de la tabla empiece en X = 500, con incrementos de 500, como se ve en la pantalla de enmedio. La tabla de la derecha muestra el área bajo $f(x) = 1/x^2$ de $x = 1$ al valor designado X. Parece que los valores integrales convergen lentamente al valor de 1. Posiblemente encuentre que su calculadora graficadora toma algunos segundos para calcular los valores Y2.

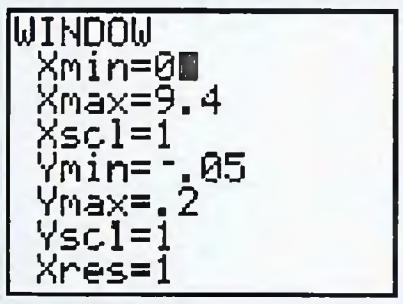


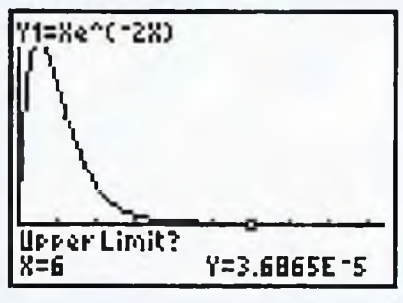


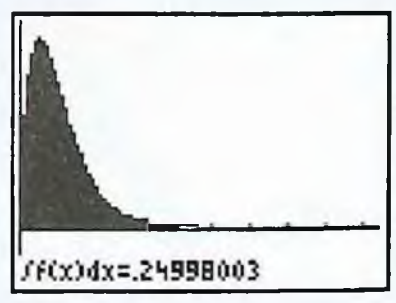


Solución para ¡Explore! de la página 467

Consulte el ejemplo 6.2.3. Introduzca $f(x) = xe^{-2x}$ en Y1 y construya la pantalla [0, 9.4]1 por [−.05, .2]1, como se ve en la siguiente pantalla de la izquierda. Use la función de integración gráfica de su calculadora, **CALC** (**2nd TRACE**),**7:** $\int f(x)\,dx$, para mostrar el área bajo $f(x)$. Parece que casi toda el área bajo la curva $f(x)$ para los números reales no negativos estará presente en el intervalo $[0,x]$, para $x < 10$. Fije el límite inferior como 0 y el límite superior en un valor x, por ejemplo $x = 6$, como se ve en la pantalla del medio. Se ve que en este intervalo el área bajo la curva es aproximadamente 0.24998, mientras que el área en el intervalo $[0, \infty]$ es $\frac{1}{4}$, lo que implica que sólo una parte muy pequeña del área queda en $x > 6$. Repita este análisis para el caso cuando el límite superior sea $x = 7$ o 9.



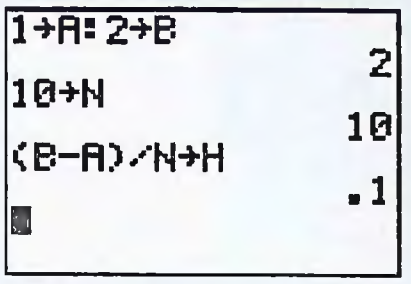


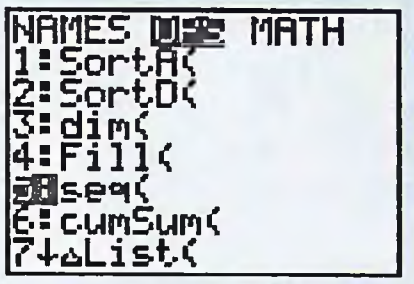


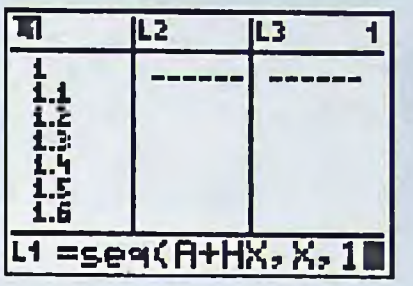
Solución para ¡Explore! de la página 474

Las funciones de lista de su calculadora graficadora se pueden usar para facilitar los cálculos de integración numérica requeridos por la regla de los trapecios. Siguiendo el ejemplo 6.3.1, haga $f(x) = 1/x$, $a = 1$, $b = 2$, y $n = 10$. Escriba Y1 = $1/x$. En una pantalla en blanco guarde los valores 1 en A, 2 en B y 10 en N, y defina (B − A)/N como H. Una forma rápida de generar los números 1.0, 1.1, . . . , 1.9,2.0 en L1 (acceso por **STAT, EDIT, 1:Edit**) es escribir **L1= seq(A + HX, X, 0, N)**, donde el comando de secuencia se puede hallar en **LIST** (**2nd STAT**), **OPS, 5:seq(**. Las siguientes tres pantallas muestran estos pasos.

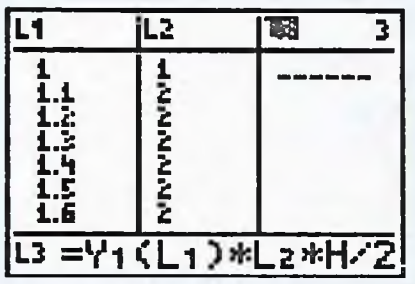
www.FreeLibros.com

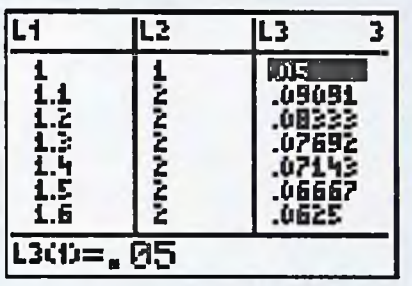


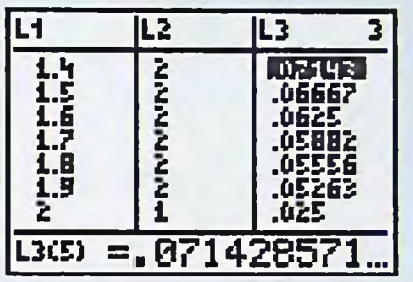




Ahora introduzca los coeficientes de la regla de los trapecios 1, 2, . . . , 2,1 en L2. Escriba **L3 = Y1(L1)* L2* H/2,** recordando que debe poner el cursor en la línea de encabezado superior de L3 para escribir el comando deseado. Las pantallas del medio y la derecha muestran todos los datos.

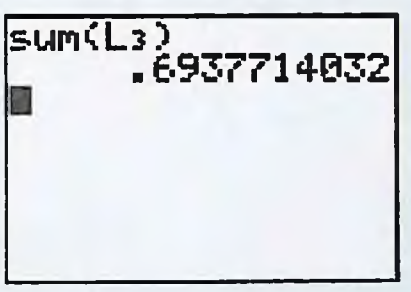


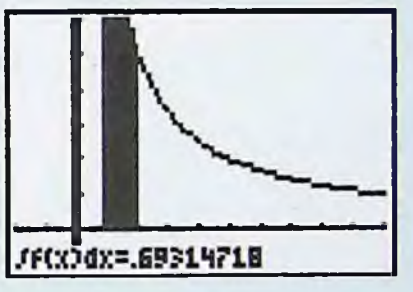




Por último, la suma de la lista L3 da la aproximación deseada de la regla de los trapecios para $f(x) = 1/x$ sobre [1, 2] con $n = 10$. El comando suma se puede hallar en **LIST (2nd STAT),MATH, 5:sum(**, como se ve abajo. La respuesta coincide con la del ejemplo 6.3.1, y es una buena aproximación de la respuesta obtenida por evaluación directa de la integral.







Los pasos de la calculadora graficadora mostrados aquí dan los comandos clave para escribir un programa que calcule la regla de los trapecios de una función $f(x)$, sobre el intervalo $[a,b]$ con n subdivisiones. Como ejercicio, realice algunos cálculos con $n = 20$ en lugar de $n = 10$.

www.FreeLibros.com



REFLEXIONE ACERCA DE...

MEDICIÓN DEL RENDIMIENTO CARDIACO

El **rendimiento cardiaco**, F, del corazón de una persona es el ritmo al que el corazón bombea la sangre en un periodo específico de tiempo. La medición del rendimiento cardiaco ayuda a los médicos a tratar pacientes que han sufrido infartos, al diagnosticar la magnitud del daño en el corazón. Específicamente, para una persona sana en reposo, el rendimiento cardiaco es entre 3 y 4 litros por minuto y es relativamente estable, pero el rendimiento cardiaco de alguien con una enfermedad cardiovascular grave puede ser de apenas 2 a 3 litros por minuto. Debido a que el rendimiento cardiaco es tan importante en cardiología, los investigadores médicos han ideado varias formas de medirlo. En la sección 5.6 se estudió brevemente el rendimiento cardiaco, y el objetivo actual es ampliar ese análisis examinando dos métodos que usan la integración para medir el rendimiento cardiaco, uno de los cuales comprende la integración impropia. (Nuestro estudio es una adaptación de un artículo del *The UMAP Journal* y del UMAP Module que aparece en las referencias citadas al final de este ensayo.)



Un método tradicional para medir el rendimiento cardiaco es una técnica conocida como **dilución de tintura.** En este método, se inyecta colorante en una vena principal cerca del corazón. La sangre que lleva este colorante circula por el ventrículo derecho, pasa por los pulmones, por la aurícula izquierda y el ventrículo derecho, y luego entra al sistema arterial, regresando a la aurícula izquierda y el ventrículo izquierdo. La concentración del colorante que pasa por una arteria o vena se mide a intervalos de tiempo específicos y, a partir de estas concentraciones, se calcula el rendimiento cardiaco. El colorante que por lo general se utiliza en la dilución es endocianuro verde. Muy poco de este colorante se recircula al corazón después que pasa por el cuerpo, porque es metabolizado por el hígado.

Ahora suponga que X_0 gramos de colorante se inyectan en una vena cerca del corazón, donde se mezcla con la sangre de un paciente. Denote por $C(t)$ la concentración del colorante en el momento t, al principio de la arteria pulmonar. Note que $C(0) = 0$ y que $C(t)$ aumenta con relativa rapidez hasta un máximo, y luego decrece a cero en un periodo relativamente corto, digamos T segundos. La rapidez con la que el colorante sale del corazón en el momento t es igual a $F \cdot C(t)$. Nótese que $F \cdot C(t)$ tiene unidades en litros/minuto · gramos/litro, que se simplifica a gramos/minuto.

Para deducir una fórmula para F, se comienza por dividir el intervalo entre $t = 0$ y $t = T$ en n subintervalos de igual longitud, usando los puntos $0 = t_0$, $t_1 = T/n$, $t_2 = 2T/n$, . . . , $t_n = T$. Note que $C_j(t)$, que es la concentración del colorante durante el

www.FreeLibros.com

j-ésimo subintervalo, es casi constante, de modo que la cantidad de colorante que sale del corazón durante el j-ésimo subintervalo es aproximadamente

$$F \cdot C_j(t)\Delta t$$

Para hallar la cantidad total de colorante que sale del corazón, se suman los términos para los n subintervalos y se tiene

$$X_0 = \sum_{j=0}^{n-1} FC_j(t)\Delta t$$

Pasando al límite cuando n tiende a infinito, se obtiene la estimación

$$X_0 = F\int_0^T C(t)\,dt$$

lo que significa que

$$F = \frac{X_0}{\displaystyle\int_0^T C(t)\,dt}$$

Para ver cómo se usa esta fórmula para hallar F, suponga que se inyectan 5 miligramos de endocianuro verde en una vena mayor cerca del corazón de un paciente que hace ejercicios y que la concentración de tintura medida cada 4 segundos es la que se muestra en la tabla 1:

TABLA 1 Datos de dilución para medir el rendimiento cardiaco

Tiempo (segundos)	*Concentración*
0	0
4	1.0
8	4.5
12	2.5
16	1.0
20	0.5
24	0

Se sigue que

$$\int_0^T c(t)\,dt \approx 4 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 4.5 + 4 \cdot 2.5 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 0.5 = 38$$

Concluimos que F es aproximadamente 5/38 litros/segundo = 7.9 litros/minuto. Este rendimiento cardiaco es normal para alguien que hace ejercicios.

Debido a la necesidad de tomar muestras de sangre repetidamente, puede resultar difícil medir el rendimiento cardiaco usando el flujo sanguíneo. La dilución de colorante puede también producir resultados imprecisos porque los colorantes pueden ser inestables, además de que una cantidad considerable de colorante puede recircular por el cuerpo o el colorante puede ser eliminado lentamente. Por eso, pueden ser preferibles otros métodos para determinar el rendimiento cardiaco. En la década de 1970 se introdujo un método para medir el rendimiento cardiaco llamado **termodilución.** En este método, se inserta un catéter con un globo en la vena del brazo del paciente. Ese catéter es guiado a la vena cava superior. Luego un termistor, dispositivo que mide temperaturas, es guiado por el lado derecho del corazón y se posiciona varios centímetros dentro de la arteria pulmonar. Una vez que el termistor está en su lugar, se inyecta una solución fría, por lo general 10 mililitros de una solución a 5% de dextrosa en agua a 0°C. Cuan-

www.FreeLibros.com

REFLEXIONE ACERCA DE...

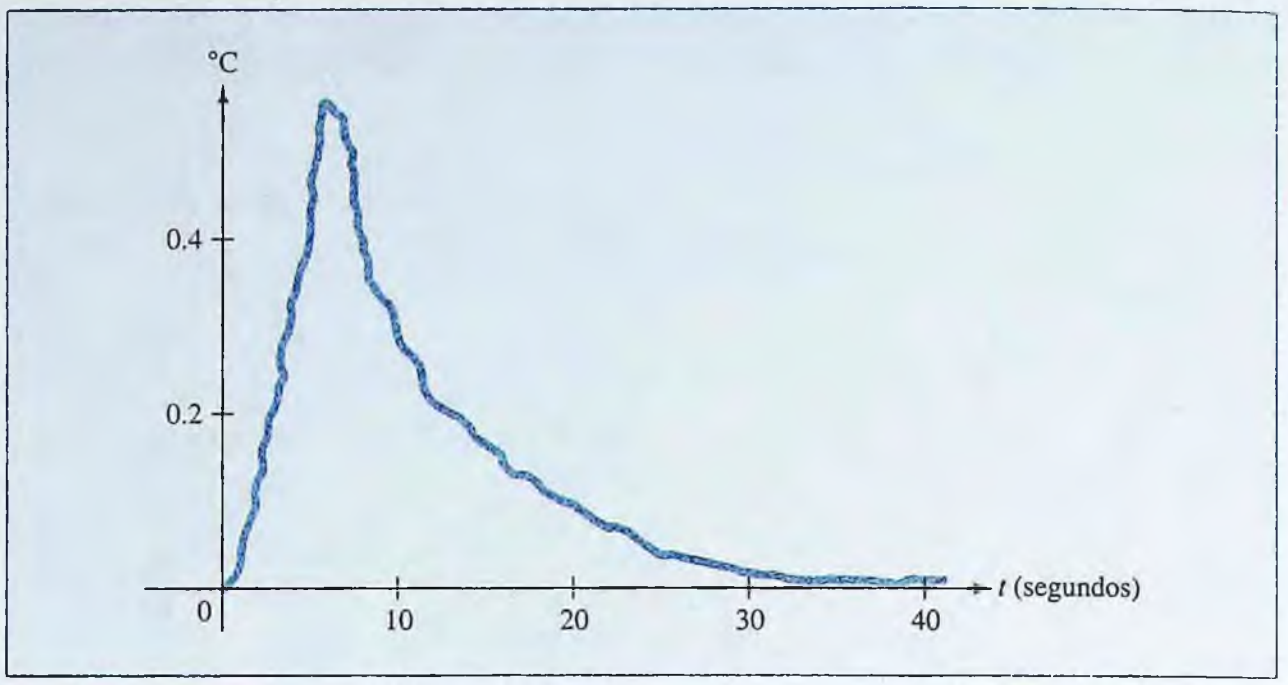


FIGURA 1 Variación de temperatura de la sangre T_{var} medida en la arteria pulmonar t segundos después de la inyección de una solución fría en el atrio derecho del corazón.

do esta solución fría se mezcla con la sangre en el lado derecho del corazón, la temperatura de la sangre disminuye. La temperatura de la sangre mezclada con la solución fría es detectada por el termistor; éste se conecta a una computadora que registra las temperaturas y muestra la gráfica de dichas temperaturas en un monitor. La figura 1 muestra la variación típica de temperatura de la sangre al principio de la arteria pulmonar, t segundos después de la inyección de 10 mililitros de solución de dextrosa a 0°C.

A continuación, se muestra la forma de determinar el rendimiento cardiaco con el uso de los datos de temperatura recolectados durante la termodilución. Se Denota por T_i la temperatura de la sustancia inyectada y por T_b la temperatura corporal; esto es, la temperatura de la sangre antes de inyectar la solución fría. Entonces Q_{ent}, el efecto enfriador de la sustancia inyectada, puede medirse como el producto del volumen V de la sustancia inyectada, por la diferencia de temperatura $T_b - T_i$ entre el cuerpo y la sustancia inyectada; es decir,

$$Q_{ent} = V(T_b - T_i)$$

En un corto intervalo Δt, el efecto enfriador de la sangre enfriada que pasa por el termistor está dado por el producto de la variación de temperatura T_{var} que registramos y la cantidad total de sangre $F\Delta t$ que circula por la arteria pulmonar durante este intervalo. Por tanto, el efecto enfriador *total* Q_{sal} (para el tiempo $t \geq 0$) puede ser medido por la integral impropia

$$Q_{sal} = \int_0^\infty F\, T_{var}\, dt = F \int_0^\infty T_{var}\, dt$$

El hecho clave para calcular el rendimiento cardiaco es que $Q_{sal} = rQ_{ent}$, donde r es un factor de corrección relacionado con cuánto efecto enfriador se pierde cuando la solución enfriada pasa al cuerpo. (El valor de r para una forma particular en que la sustancia inyectada entra al torrente sanguíneo se puede calcular por recolección de datos.) Insertando las fórmulas halladas para $Q_{sal} = rQ_{ent}$, se obtiene

$$rV(T_B - T_i) = F \int_0^\infty T_{var}\, dt$$

www.FreeLibros.com

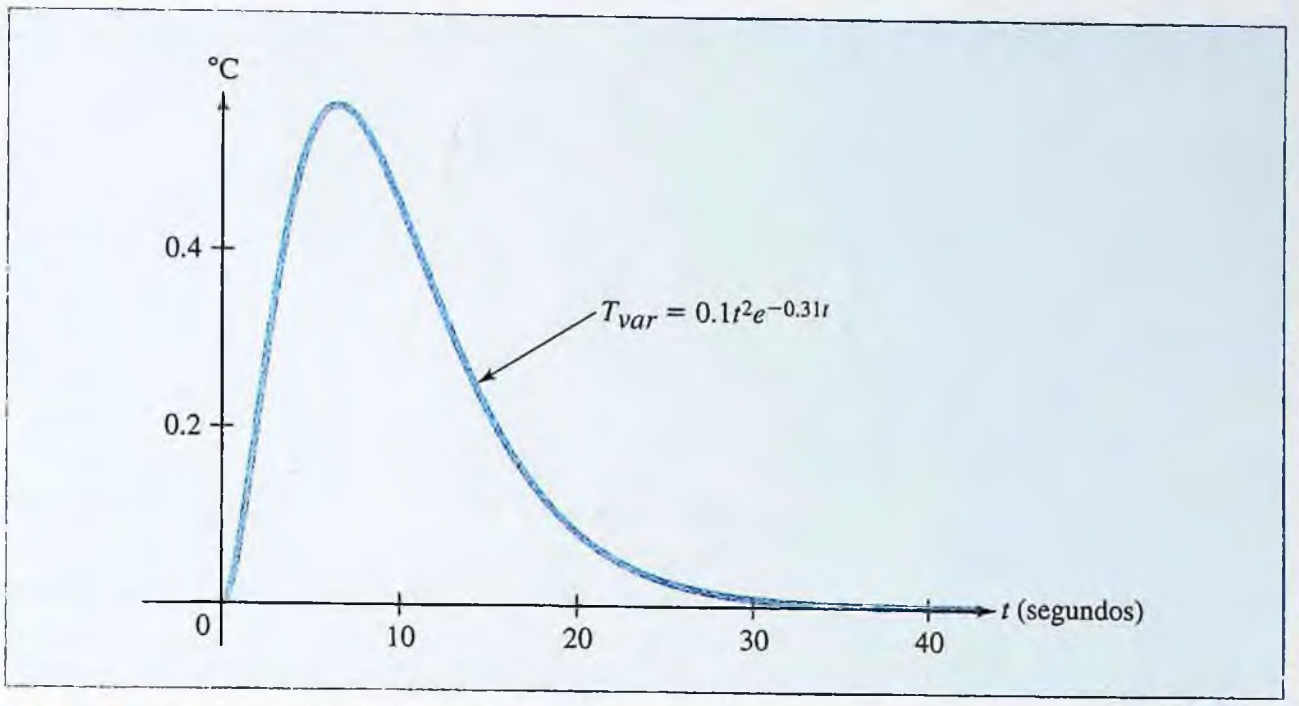


FIGURA 2 Aproximación de la variación de temperatura usando $T_{var} = 0.1t^2e^{-0.31t}$.

Despejando la rapidez F del rendimiento cardiaco, se encuentra que

$$F = \frac{rV(T_b - T_i)}{\int_0^\infty T_{var}\, dt}$$

Para ilustrar la forma en que se puede usar este método, se modela la variación de temperatura con la función continua $T_{var} = 0.1t^2e^{-0.31t}$, cuya gráfica se ilustra en la figura 2.

Con el uso de esta aproximación, suponga que $T_B = 37°C$, $T_i = 0°$, $V = 10$ y $r = 0.9$ (de modo que 10% del efecto enfriador de la sustancia inyectada se pierde cuando pasa al torrente sanguíneo). Sustituyendo en la ecuación para F, se obtiene

$$F = \frac{(0.9)(10)(37 - 0)}{\int_0^\infty 0.1t^2\, e^{-0.31t}\, dt}$$

El cálculo de esta integral impropia, con el uso de integración por partes, (los detalles de este cálculo se dejan al lector) muestra que

$$F = \frac{333}{0.1[2/(0.31)^3]} = 45 \text{ mililitros/segundo} = 2.7 \text{ litros/minuto}$$

Nótese que en estos cálculos el numerador de la fórmula de F tiene unidades de mililitros por grados Celsius y el denominador tiene unidades de grados Celsius por segundos, de modo que F tiene unidades de mililitros por segundo. Para convertir esto a unidades de litros por minuto se multiplica por 60/1 000 = 0.06. Al ver un rendimiento cardiaco de 2.7 litros/minuto, se concluye que el paciente tiene un grave problema cardiovascular.

Preguntas

1. Estime el rendimiento cardiaco de un paciente si se inyectan 18 miligramos de tintura de endocianuro verde en una vena mayor cerca del corazón, y la concentración de colorante medida cada 3 segundos es como se muestra en la tabla.

www.FreeLibros.com

REFLEXIONE ACERCA DE...

Tiempo (segundos)	Concentración
0	0
3	0.5
6	2.5
9	4.0
12	1.5
15	0.5
18	0

2. Suponga que cuando se aplica a un paciente el método de termodilución, se encuentra que puede usar $T_{var} = 0.08t^2e^{-0.43t}$ para modelar la variación de temperatura. Suponga que la temperatura corporal del paciente es de 36°C, que 12 ml de sustancia inyectada, a una temperatura de 5°C, se inyectan en una arteria mayor cerca del corazón del paciente, y que el factor de corrección es $r = 0.9$. Estime el rendimiento cardiaco F para este paciente.
3. El método de dilución de colorante para medir el rendimiento cardiaco se puede modificar para ser aplicado a otros problemas de circulación. Use este método para hallar una fórmula para el derrame total diario P, de un contaminante en un río, que circula a un ritmo constante de F m^3/h, si se sabe que en un punto fijo, a s metros corriente abajo de la planta industrial donde tiene lugar el derrame, la concentración del contaminante en el momento t (horas) está dado por la función $C(t)$.
4. Usando la fórmula hallada en la pregunta 3, estime la cantidad de cadmio que una planta de baterías vierte en un río, si el caudal del río es de 2.3×10^5 m^3/h y la concentración de cadmio, medida en un punto a 1 000 metros río abajo desde la planta, es la que se muestra en la tabla.

Tiempo	Concentración
3 A.M.	8.5 mg/m^3
6 A.M.	12.0 mg/m^3
9 A.M.	14.5 mg/m^3
Mediodía	13.0 mg/m^3
3 P.M.	12.5 mg/m^3
6 P.M.	10.0 mg/m^3
9 P.M.	7.5 mg/m^3
Medianoche	6.0 mg/m^3

REFERENCIAS

M.R. Cullen, Linear Models in Biology, Ellis Horwood Ltd., Chichester, 1985.

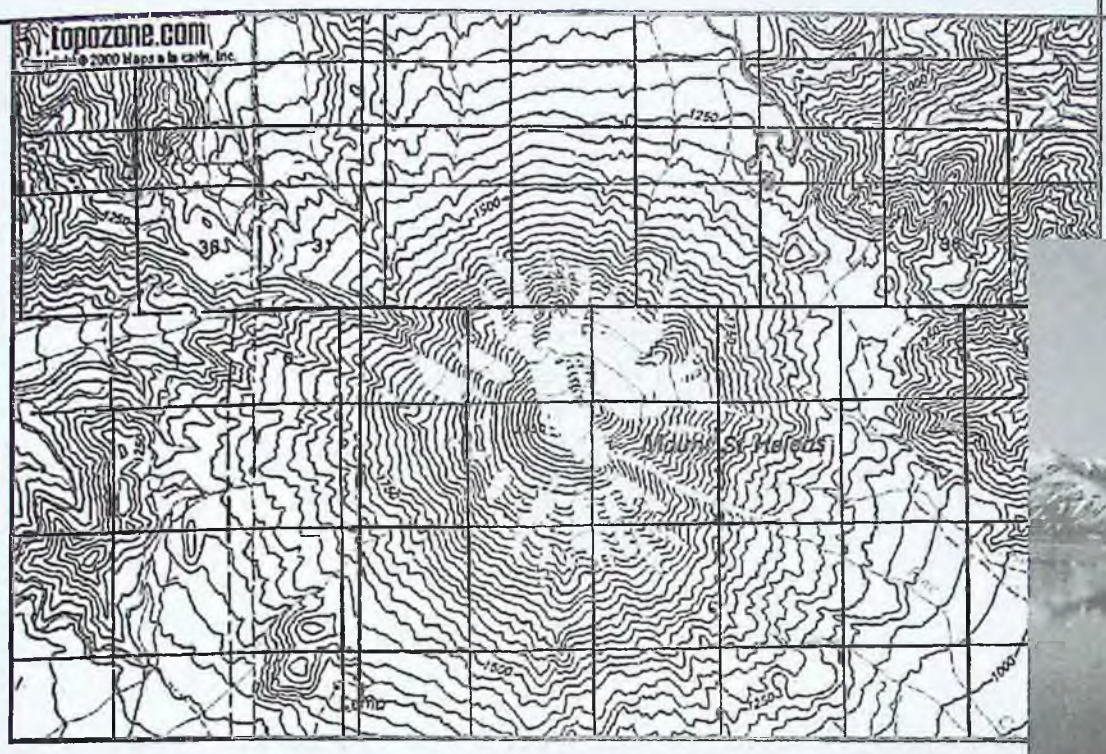
Arthur Segal, "Flow System Integrals", *The UMAP Journal,* Volumen III, núm. 1, 1982.

Brindell Horelick y Sinan Koont, "Measuring Cardiac Output", UMAP Module 71, Birkhauser-Boston Inc., 1979.

William Simon, *Mathematical Techniques for Biology and Medicine*, Dover Publications, Mineola, N.Y., 1986; pp. 194-210 (capítulo IX).

www.FreeLibros.com

CAPÍTULO 7





La forma de una superficie se puede visualizar si se trazan sus curvas de nivel, las que, en el caso de una montaña, son curvas de elevación constante.

CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

1 Funciones de varias variables
2 Derivadas parciales
3 Funciones de optimización de dos variables
4 El método de mínimos cuadrados
5 Optimización con restricciones: método de los multiplicadores de Lagrange
6 Integrales dobles
Resumen del capítulo
Términos importantes, símbolos y fórmulas
Revisión del capítulo 7
Problemas de repaso
¡Explore! Actualización
Reflexione acerca de...

www.FreeLibros.com

SECCIÓN 7.1 | Funciones de varias variables

En los negocios, si un fabricante determina que x unidades de cierta mercancía pueden ser vendidas en el país a \$90 la unidad, y que y unidades pueden ser vendidas en mercados extranjeros a \$110 por unidad, entonces el ingreso total obtenido por todas las ventas está dado por

$$R = 90x + 110y$$

En psicología, el cociente de inteligencia (IQ) de una persona se mide por la razón

$$\text{IQ} = \frac{100m}{a}$$

donde a y m son la edad real y la edad mental de la persona, respectivamente. Un carpintero que construye un contenedor de x pies de largo, y pies de ancho y z pies de profundidad sabe que la caja tendrá un volumen V y un área superficial S, donde

$$V = xyz \qquad \text{y} \qquad S = 2xy + 2xz + 2yz$$

Éstas son típicas situaciones prácticas en las que una cantidad de interés depende de los valores de dos o más variables. Otro ejemplo es el volumen de agua en el estanque de una comunidad, el cual puede depender de la cantidad de lluvia, de la población de la comunidad y de la producción de una fábrica, la que a su vez puede depender del costo de las materias primas.

En este capítulo se extienden los métodos de cálculo para incluir funciones de dos o más variables independientes. Casi todo el trabajo se realizará con funciones de dos variables, que, como se verá, pueden ser representadas geométricamente como superficies en el espacio tridimensional, en lugar de curvas en el plano. Comencemos por una definición y alguna terminología.

Función de dos variables ■ Una función f de dos variables independientes, x y y, es una regla que asigna a cada par ordenado (x, y), de un conjunto determinado D (el **dominio** de f), exactamente un número real, denotado por $f(x, y)$.

NOTA **Convención de dominio:** A menos que se indique otra cosa, se supone que el dominio de f es el conjunto de todas las (x, y) para las cuales la expresión $f(x, y)$ está definida. ■

Como en el caso de una función de una variable, una función de dos variables $f(x, y)$ puede ser considerada como una "máquina" en la que hay una "salida" única $f(x, y)$ para cada "(entrada" (x, y), como se ilustra en la figura 7.1. El dominio de f

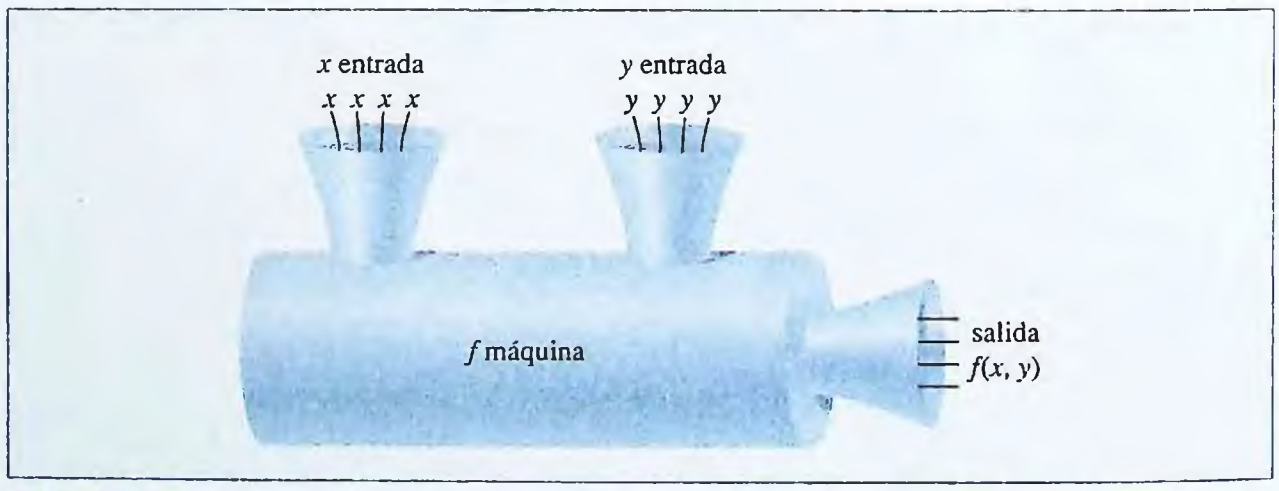


FIGURA 7.1 Función de dos variables como "máquina."

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Las calculadoras graficadoras naturalmente pueden representar funciones de una sola variable independiente, pero requieren de características adicionales para describir funciones de varias variables como son las funciones tridimensionales. Un método sencillo para trabajar con funciones de varias variables es graficar los valores de una variable para valores específicos de las otras variables. Por ejemplo, guarde $f(x, y) = x^3 - x^2y^2 - xy^3 - y^4$ en Y1 como X^3 – X^2*L1^2 – X*L1^3 – L1^4, donde L1 es la lista de valores {0,1.5, 2.0, 2.25, 2.5}. Grafique usando la ventana decimal modificada [−9.4, 9.4]1 por [−150, 100]20. ¿Cómo es que la variación de los valores de y en L1 afecta la forma de la gráfica?

es el conjunto de todas las (entradas posibles, y el conjunto de todas las salidas posibles correspondientes es el **rango** de f. Se pueden definir de modo semejante las funciones de tres variables independientes $f(x, y, z)$ o cuatro variables independientes $f(x, y, z, t)$, etcétera.

EJEMPLO | 7.1.1

Suponga $f(x, y) = \dfrac{3x^2 + 5y}{x - y}$.

a) Encuentre el dominio de f.

b) Calcule $f(1,-2)$.

Solución

a) Como se puede dividir entre cualquier número real excepto cero, la expresión $f(x, y)$ se puede evaluar para todos los pares ordenados (x, y) con $x - y \neq 0$ o $x \neq y$. Geométricamente éste es el conjunto de todos los puntos del plano xy excepto los que están sobre la recta $y = x$.

b) $f(1, -2) = \dfrac{3(1)^2 + 5(-2)}{1 - (-2)} = \dfrac{3 - 10}{1 + 2} = -\dfrac{7}{3}$.

EJEMPLO | 7.1.2

Suponga $f(x, y) = xe^y + \ln x$.

a) Encuentre el dominio de f.

b) Calcule $f(e^2, \ln 2)$

Solución

a) Como xe^y está definida para todos los números reales x y y, y como $\ln x$ está definido sólo para $x > 0$, el dominio de f está formado por todos los pares ordenados de números reales (x, y) para los cuales $x > 0$.

b) $f(e^2, \ln 2) = e^2e^{\ln 2} + \ln e^2 = 2e^2 + 2 = 2(e^2 + 1) \approx 16.78$

EJEMPLO | 7.1.3

Dada la función de tres variables $f(x, y, z) = xy + xz + yz$, evalúe $f(-1, 2, 5)$.

Solución

Sustituyendo $x = -1, y = 2, z = 5$ en la fórmula para $f(x, y, z)$, obtenemos

$$f(-1, 2, 5) = (-1)(2) + (-1)(5) + (2)(5) = 3$$

Aplicaciones

A continuación se muestran dos aplicaciones elementales de funciones de dos variables a los negocios y la economía.

EJEMPLO | 7.1.4

Una tienda de deportes en St. Louis vende dos clases de raquetas de tenis, las marcas autografiadas son Serena Williams y la Jennifer Capriati. La demanda de los consumido-

www.FreeLibros.com

res por cada marca depende no sólo de su propio precio, sino también del precio de la marca competidora. Las cifras de ventas indican que si la marca Williams se vende en x dólares por raqueta y la marca Capriati se vende en y dólares por raqueta, la demanda de raquetas Williams será $D_1 = 300 - 20x + 30y$ raquetas por año y la demanda de raquetas Capriati será $D_2 = 200 + 40x - 10y$ raquetas por año. Exprese el ingreso total anual de la tienda por la venta de estas raquetas como función de los precios x y y.

Solución

Denote por R el ingreso total anual. Entonces

R = (número de raquetas Williams vendido)(precio por raqueta Williams)
+ (número de raquetas Capriati vendidas)(precio por raqueta Capriati)

Por tanto,

$$R(x, y) = (300 - 20x + 30y)(x) + (200 + 40x - 10y)(y)$$
$$= 300x + 200y + 70xy - 20x^2 - 10y^2$$

Es frecuente considerar la producción Q de una fábrica como una función de la cantidad de inversión de capital, K, y del tamaño de la fuerza laboral, L. Las funciones de producción de la forma

$$Q(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

donde A, α y β son constantes positivas con $\alpha + \beta = 1$, han resultado especialmente útiles en el análisis económico y se conocen como **funciones de producción Cobb-Douglas.**[1] A continuación se muestra un ejemplo donde aparece este tipo de función.

¡EXPLORE!

Consulte el ejemplo 7.1.5. Guarde la ecuación

```
0 = Q – 60K^(1/3)*L^(2/3)
```

en el editor de ecuaciones de su calculadora graficadora. Calcule el valor de Q para $K = 512$ y $L = 1\,000$. ¿Qué ocurre con Q si la fuerza laboral L se duplica?

EJEMPLO | 7.1.5

Suponga que en cierta fábrica, la producción está dada por la función de producción Cobb-Douglas $Q(K, L) = 60K^{1/3}L^{2/3}$ unidades, donde K es la inversión de capital medida en unidades de \$1 000 y L es el tamaño de la fuerza laboral, medida en horas-trabajador.

a) Calcule la producción si la inversión de capital es de \$512 000 y se usa una fuerza laboral de 1 000 horas-trabajador.

b) Demuestre que la producción en el inciso *a*) se duplicará si se duplican la inversión de capital y el tamaño de la fuerza laboral.

Solución

a) Evalúe $Q(K, L)$ con $K = 512$ (miles) y $L = 1\,000$ para obtener

$$Q(512, 1\,000) = 60(512)^{1/3}(1\,000)^{2/3}$$
$$= 60(8)(100) = 48\,000 \text{ unidades}$$

b) Evalúe $Q(K, L)$ con $K = 2(512)$ y $L = 2(1\,000)$ como sigue para obtener

$$Q[2(512), 2(1\,000)] = 60[2(512)]^{1/3}[2(1\,000)]^{2/3}$$
$$= 60(2)^{1/3}(512)^{1/3}(2)^{2/3}(1\,000)^{2/3} = 96\,000 \text{ unidades}$$

Que es el doble de producción cuando $K = 512$ y $L = 1\,000$.

[1] Por ejemplo, vea Dominick Salvatore, *Managerial Economics*, McGraw-Hill, Inc., Nueva York, 1989, pp. 332-336.

www.FreeLibros.com

Gráficas de funciones de dos variables

La **gráfica** de una función de dos variables $f(x, y)$ es el conjunto de todas las ternas (x, y, z) tales que (x, y) está en el dominio de f y $z = f(x, y)$. Para "fotografiar" estas gráficas, se necesita construir un sistema **tridimensional** de coordenadas. El primer paso en esta construcción es añadir un tercer eje de coordenadas (el eje z) perpendicular al conocido plano de coordenadas xy, como se ve en la figura 7.2. Note que el plano xy se toma como horizontal, y el eje positivo z es "hacia arriba."

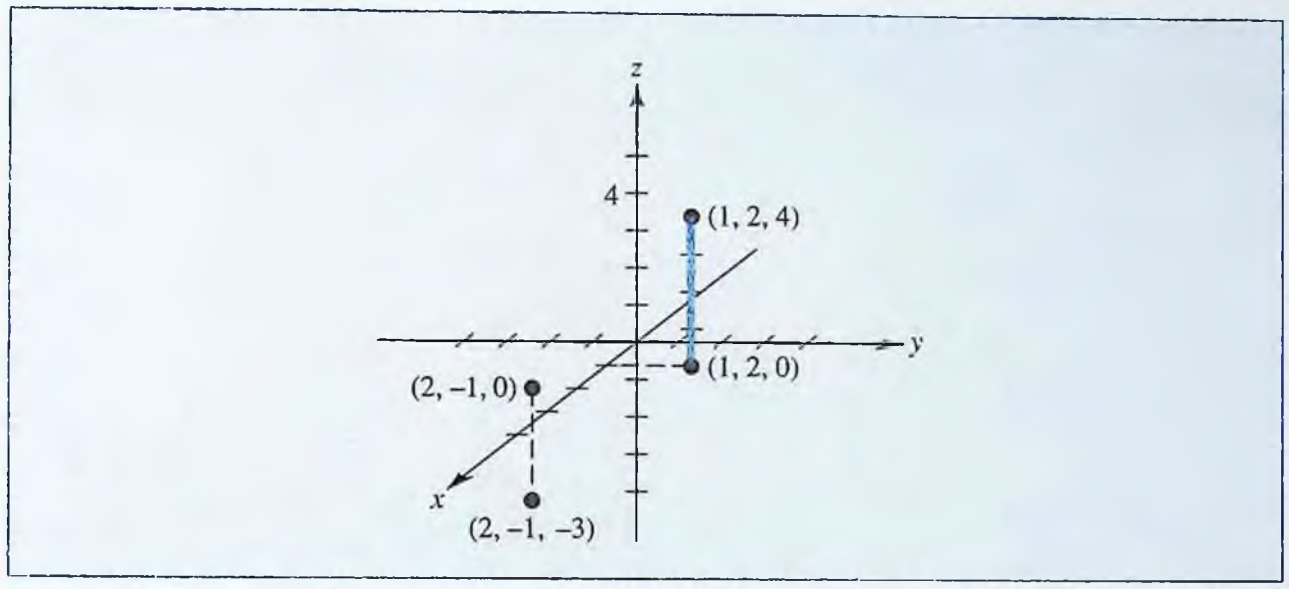


FIGURA 7.2 Sistema tridimensional de coordenadas.

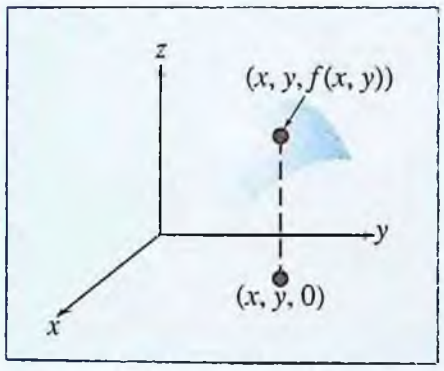


FIGURA 7.3 Gráfica de $z = f(x, y)$.

Es posible describir la ubicación de un punto en espacio tridimensional especificando sus tres coordenadas. Por ejemplo, el punto que está 4 unidades arriba del plano xy y se encuentra directamente encima del punto con coordenadas xy $(x, y) = (1, 2)$ está representado por la terna ordenada $(x, y, z) = (1, 2, 4)$. Del mismo modo, la terna ordenada $(2,-1,-3)$ representa el punto que está 3 unidades directamente debajo del punto $(2,-1)$ en el plano xy. Estos puntos se muestran en la figura 7.2.

Para graficar una función $f(x, y)$ de las variables independientes x e y, se acostumbra introducir la letra z para representar la variable dependiente y escribir $z = f(x, y)$ (figura 7.3). Los pares ordenados (x, y) en el dominio de f son considerados como puntos en el plano xy, y la función f asigna una "altura" z a cada uno de estos puntos ("profundidad" si z es negativa). Así, si $f(1, 2) = 4$, se expresa este dato geométricamente localizando el punto $(1, 2, 4)$ en un espacio tridimensional de coordenadas. La función puede asignar diferentes alturas a puntos distintos de su dominio y, en general, su gráfica es una superficie en espacio tridimensional.

En la figura 7.4 se muestran cuatro de estas superficies. La superficie de la figura 7.4*a* es un **cono,** la figura 7.4*b* muestra un **paraboloide,** la figura 7.4*c* muestra un **elipsoide,** y la figura 7.4*d* muestra lo que comúnmente se llama una **superficie de silla.** Superficies como éstas desempeñan un importante papel en ejemplos y ejercicios de este capítulo.

Curvas de nivel

Por lo general, no es fácil trazar la gráfica de una función de dos variables. En la figura 7.5 se muestra una forma de visualizar una superficie. Note que cuando el plano $z = C$ corta la superficie $z = f(x, y)$, el resultado es una curva en el espacio. El correspondiente conjunto de puntos (x, y) del plano xy que satisface $f(x, y) = C$ se llama **curva de nivel** de f en C, y cuando C varía sobre un conjunto de números se genera toda una familia de curvas de nivel. Trazando diferentes miembros de esta familia en el plano xy, el estudiante puede obtener una útil representación de la superficie $z = f(x, y)$.

www.FreeLibros.com

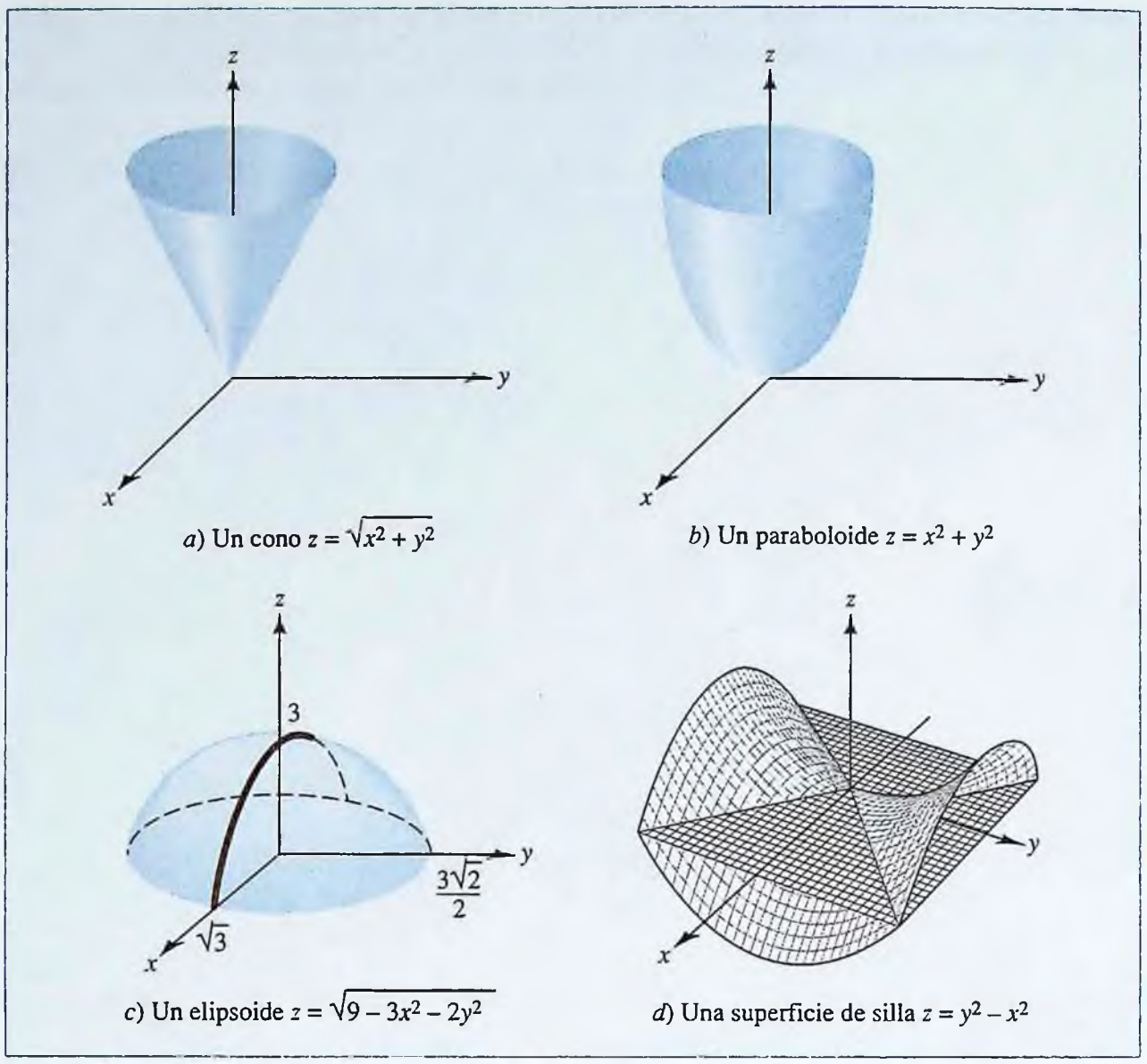


FIGURA 7.4 Varias superficies en espacio tridimensional.

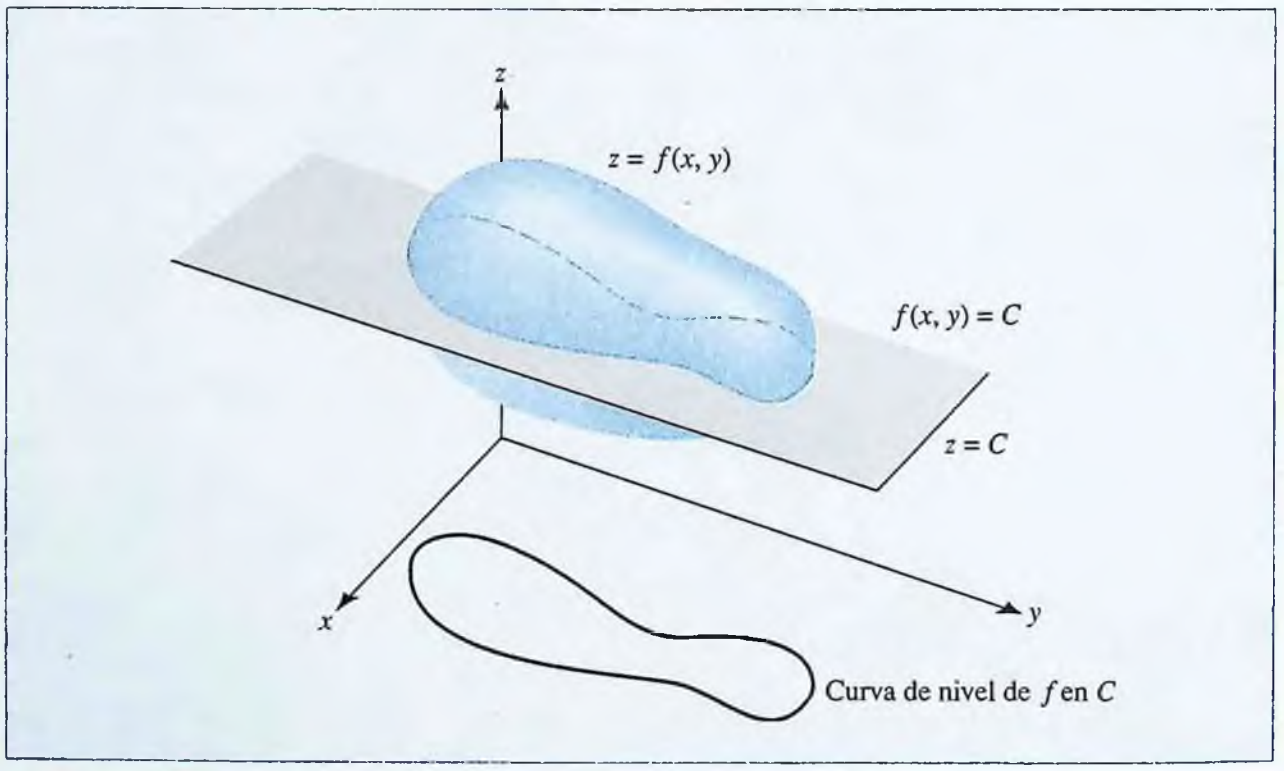


FIGURA 7.5 Una curva de nivel de la superficie $z = f(x, y)$.

www.FreeLibros.com

Por ejemplo, imagine que la superficie $z = f(x, y)$ es una "montaña", cuya "elevación" en el punto (x, y) está dada por $f(x, y)$, como se ve en la figura 7.6*a*. La curva de nivel $f(x, y) = C$ se encuentra directamente debajo de una trayectoria en la montaña donde la elevación es siempre C. Para graficar la montaña, se pueden indicar las trayectorias de elevación constante trazando la familia de curvas de nivel en el plano, y poniendo una "bandera" a cada curva para mostrar la elevación a la que corresponde (figura 7.6*b*). Esta figura "plana" se denomina **mapa topográfico** de la superficie $z = f(x, y)$.

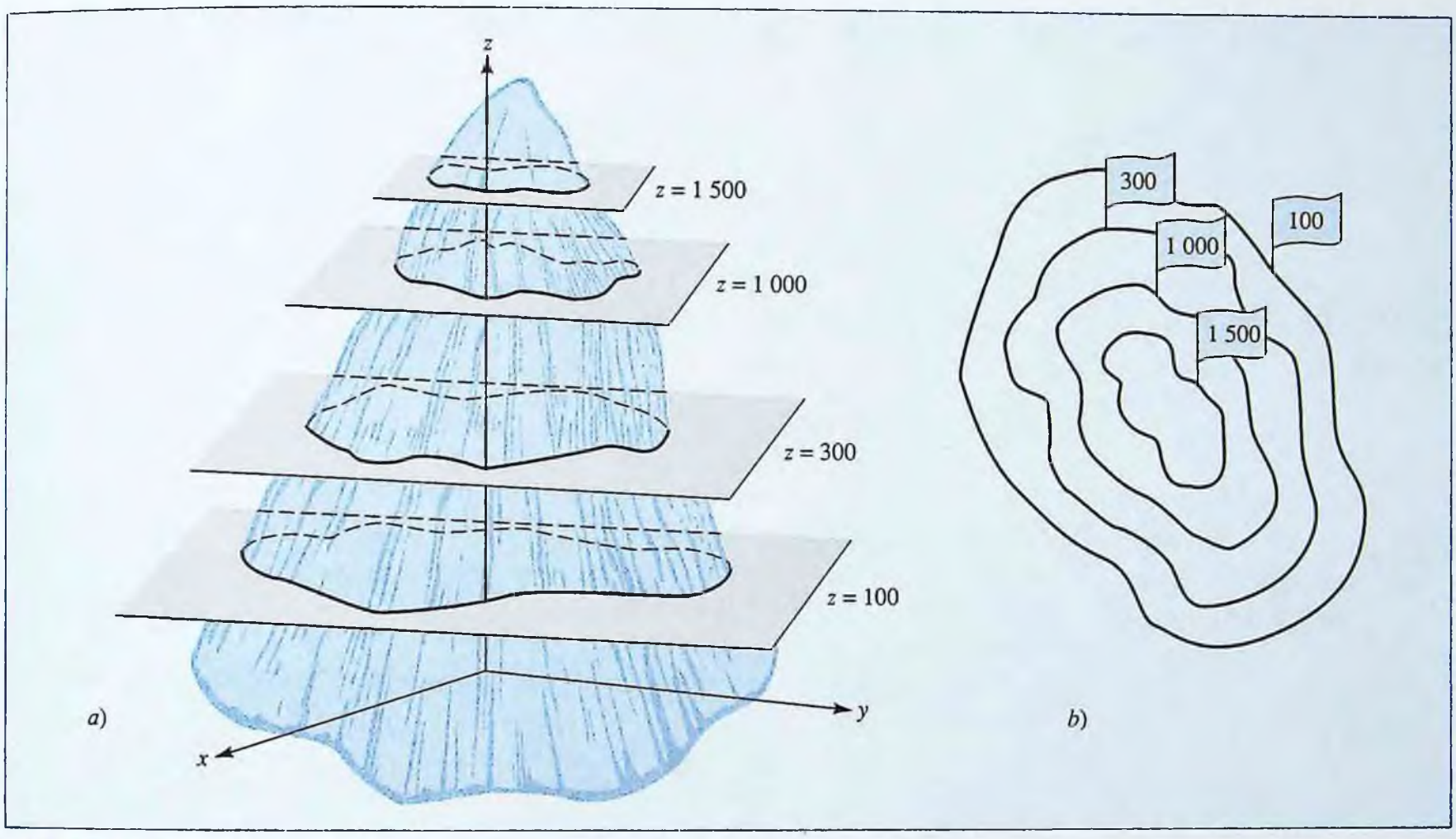


FIGURA 7.6 *a*) La superficie $z = f(x, y)$ como montaña y *b*) las curvas de nivel dan un mapa topográfico de $z = f(x, y)$.

EJEMPLO 7.1.6

Analice las curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Solución

La curva de nivel $f(x, y) = C$ tiene ecuación $x^2 + y^2 = C$. Si $C = 0$, éste es el punto (0,0), y si $C > 0$, es un círculo de radio $\sqrt{C}$. Si $C < 0$, no hay puntos que satisfagan $x^2 + y^2 = C$.

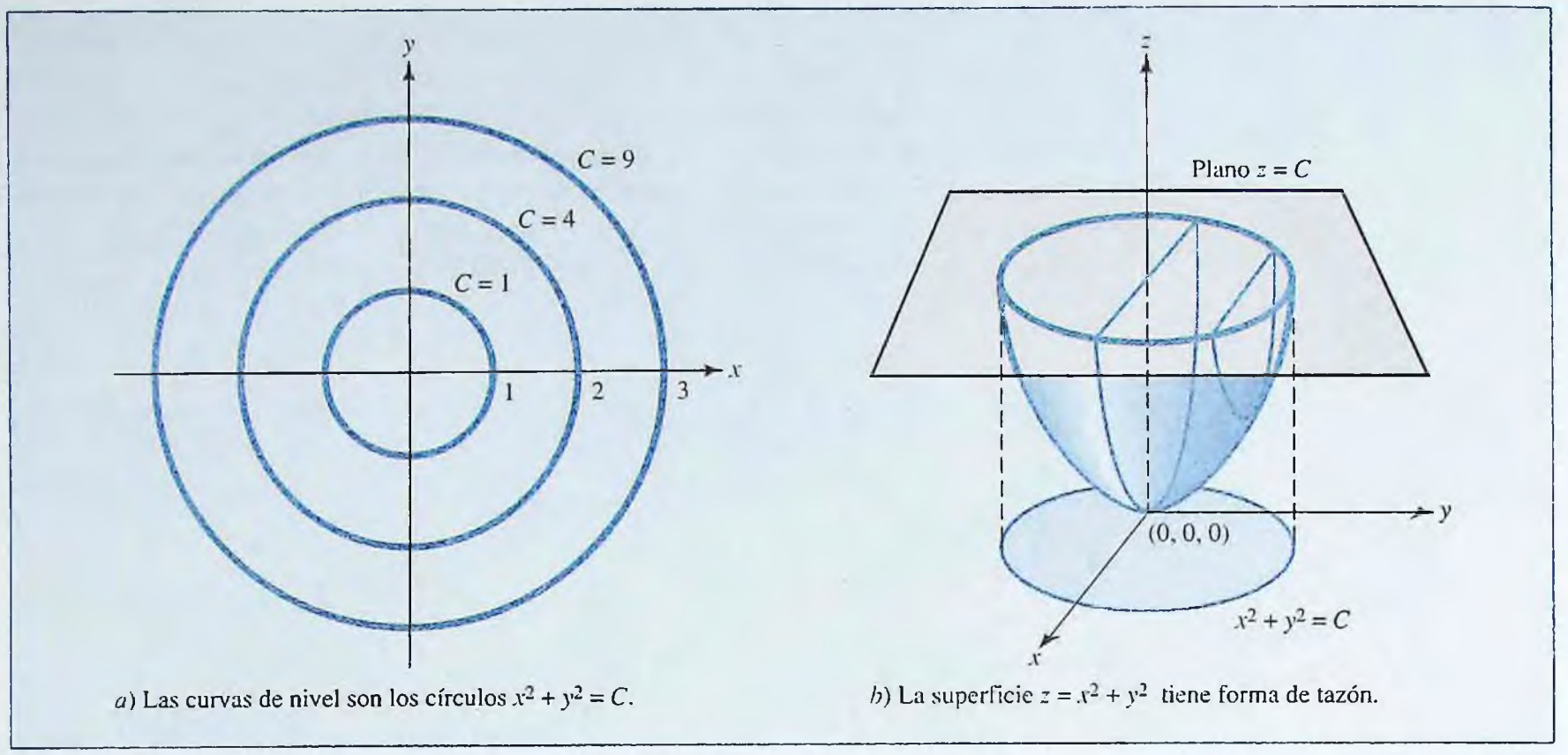
REPASO

Justo-a-tiempo

Recuerde que $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ representa el círculo de radio r y centro (h, k). En consecuencia, la ecuación $x^2 + y^2 = C$ representa el círculo de radio $C^{1/2} = \sqrt{C}$ con centro en el origen (0, 0).

La gráfica de la superficie $z = x^2 + y^2$ se muestra en la figura 7.7. Las curvas de nivel que acabamos de encontrar corresponden a secciones transversales perpendiculares al eje z. Se puede demostrar que las secciones transversales perpendiculares al eje x y al eje y son parábolas. (Trate de ver por qué es esto cierto.) Por esta razón, la superficie tiene forma de tazón y se denomina **paraboloide circular** o **paraboloide de revolución.**

www.FreeLibros.com



a) Las curvas de nivel son los círculos $x^2 + y^2 = C$.

b) La superficie $z = x^2 + y^2$ tiene forma de tazón.

FIGURA 7.7 Las curvas de nivel ayudan a visualizar la forma de una superficie.

Curvas de nivel en economía: isocuantas y curvas de indiferencia

Las curvas de nivel aparecen en numerosas aplicaciones diferentes. Por ejemplo, en economía, si la salida $Q(x, y)$ de un proceso de producción está determinada por dos entradas x y y (digamos horas de fuerza laboral e inversión de capital), entonces la curva de nivel $Q(x, y) = C$ se llama **curva de producción constante** C o, más brevemente, **isocuanta** ("iso" significa "igual").

Otra aplicación de curvas de nivel en economía comprende el concepto de curvas de indiferencia. Un consumidor que esté considerando la compra de varias unidades de cada una de dos mercancías está asociado con una **función de utilidad** $U(x, y)$, que mide la satisfacción total (o **utilidad**) que el consumidor obtiene por tener x unidades de la primera mercancía, así como y unidades de la segunda. Una curva de nivel $U(x, y) = C$ de la función de utilidad se llama **curva de indiferencia** y da todas las combinaciones de x y y que conducen al mismo nivel de satisfacción del consumidor. Estos términos se ilustran en el ejemplo 7.1.7.

¡EXPLORE!

En referencia al ejemplo 7.1.7. Represente las curvas de indiferencia $U(x, y) = x^{3/2}y = C$ despejando y para obtener $y = Cx^{-3/2}$. Introduzca X^(−3/2)*L1 en Y1 del editor de ecuaciones, donde L1 = {800, 1 280, 2 000, 3 000} es una lista de diferentes niveles de utilidad constante C. Grafique con una pantalla [0, 37.6]5 por [0, 150]10. ¿Qué efecto tiene sobre la gráfica el cambio de C? Localice el punto (16, 20) en la curva de indiferencia $x^{3/2}y = 1\,280$.

EJEMPLO | 7.1.7

Suponga que la utilidad obtenida por un consumidor por x unidades de una mercancía y y unidades de una segunda mercancía, está dada por la función de utilidad $U(x, y) = x^{3/2}y$. Si el consumidor actualmente posee $x = 16$ unidades de la primera mercancía y $y = 20$ unidades de la segunda, encuentre el nivel actual de utilidad del consumidor y trace la correspondiente curva de indiferencia.

Solución

El nivel actual de utilidad es

$$U(16, 20) = (16)^{3/2}(20) = 1\,280$$

www.FreeLibros.com

y la correspondiente curva de indiferencia es

$$x^{3/2}y = 1\,280$$

o sea $y = 1\,280x^{-3/2}$. Esta curva está formada por todos los puntos (x, y) donde el nivel de utilidad $U(x, y)$ es 1 280. La curva $x^{3/2}y = 1\,280$ y varias otras curvas de la familia $x^{3/2}y = C$ se muestran en la figura 7.8.

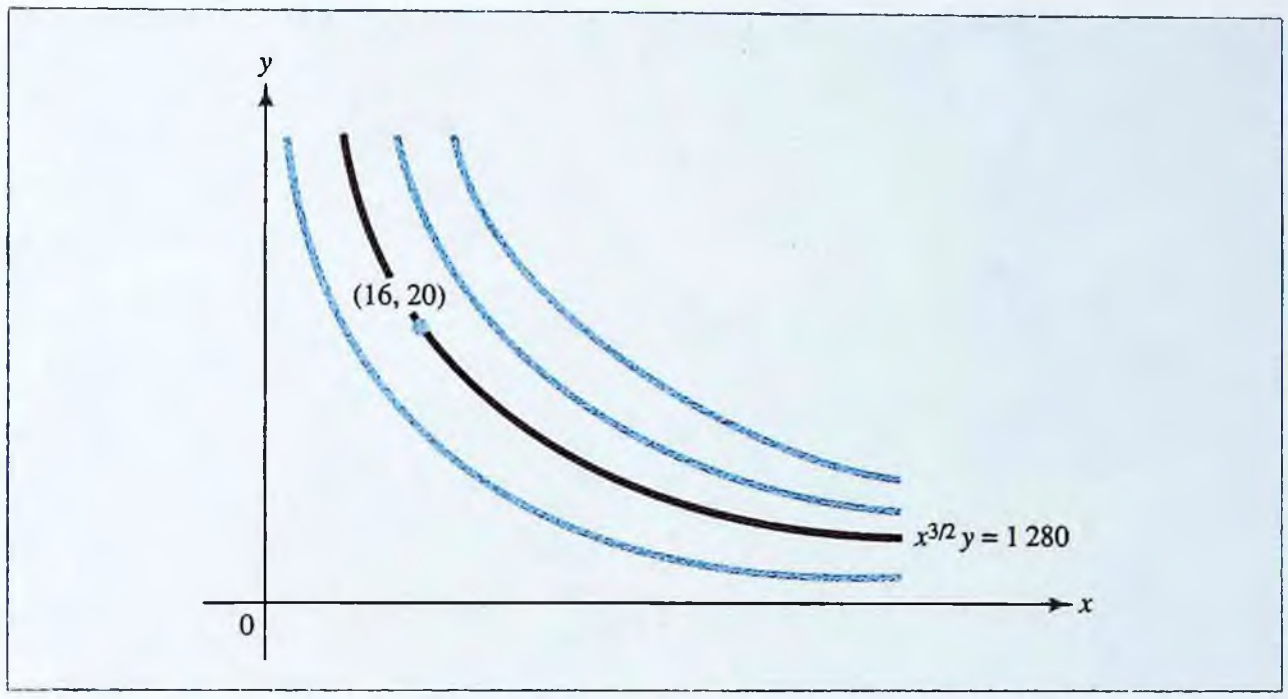


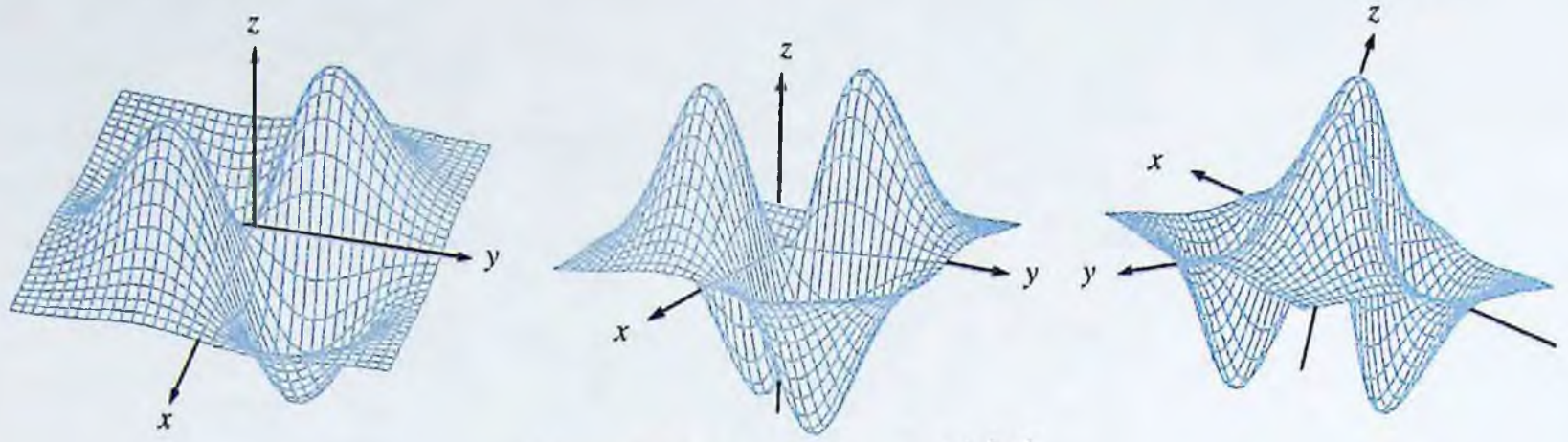
FIGURA 7.8 Curvas de indiferencia para la función de utilidad $U(x, y) = x^{3/2}y$.

Gráficas de computadora

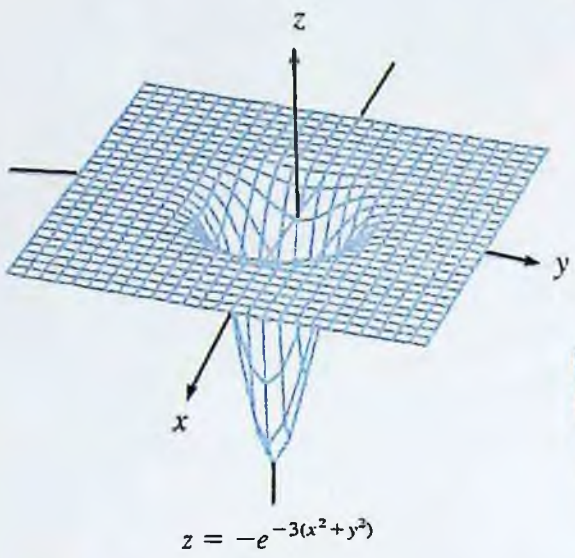
En trabajos prácticos de ciencias sociales, administrativas y biológicas, usted pocas veces (si acaso) tendrá que graficar una función de dos variables. Por tanto, no usaremos más tiempo desarrollando procedimientos de gráficas para estas funciones.

Ahora existen software para graficar funciones de dos variables. Estos software con frecuencia permiten escoger diferentes escalas a lo largo de cada eje de coordenadas y hacen posible visualizar una superficie determinada desde diferentes puntos de vista. En la figura 7.9 de la página 504 se muestra una variedad de gráficas generadas por computadora.

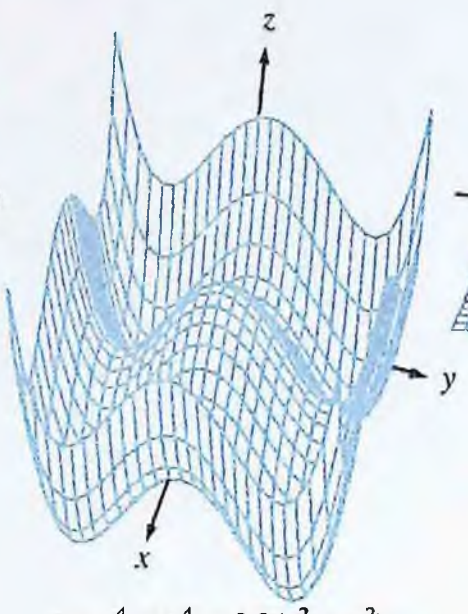
www.FreeLibros.com



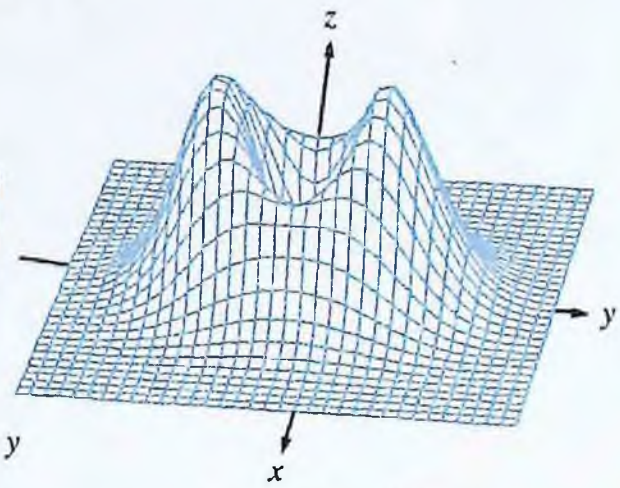
Tres vistas de la superficie $z = -xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$



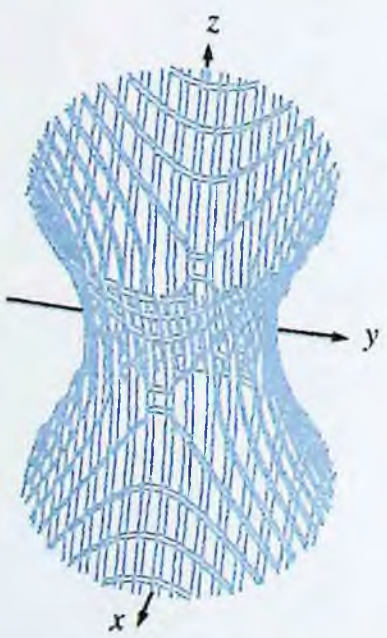
$z = -e^{-3(x^2+y^2)}$



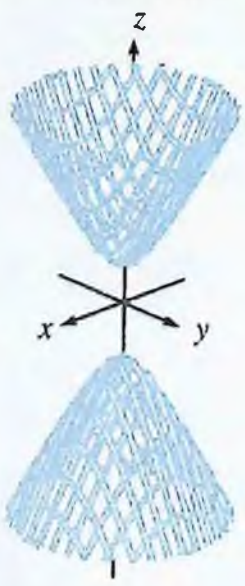
$z = x^4 + y^4 - 2.3(x^2 + y^2)$



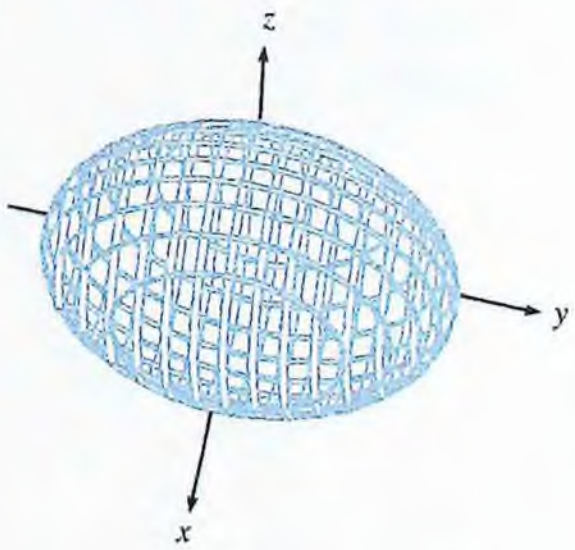
$z = (0.8x^2 + y^2)e^{(1-1.4x^2-y^2)}$



Hiperboloide de una hoja
$x^2 + y^2 - 0.2z^2 = 1$



Hiperboloide de dos hojas
$-10x^2 - 10y^2 + 5z^2 = 1$



Elipsoide
$3x^2 + y^2 + z^2 = 1$

FIGURA 7.9 Algunas superficies generadas por computadora.

www.FreeLibros.com

PROBLEMAS | 7.1

En los problemas del 1 al 12 calcule los valores de la función indicada.

1. $f(x, y) = (x - 1)^2 + 2xy^3; f(2, -1), f(1, 2)$

2. $f(x, y) = \dfrac{3x + 2y}{2x + 3y}; f(1, 2), f(-4, 6)$

3. $g(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}; g(4, 5), g(-1, 2)$

4. $g(u, v) = 10u^{1/2}v^{2/3}; g(16, 27), g(4, -1331)$

5. $f(r, s) = \dfrac{s}{\ln r}; f(e^2, 3), f(\ln 9, e^3)$

6. $f(x, y) = xye^{xy}; f(1, \ln 2), f(\ln 3, \ln 4)$

7. $g(x, y) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}; g(1, 2), g(2, -3)$

8. $f(s, t) = \dfrac{e^{st}}{2 - e^{st}}; f(1, 0), f(\ln 2, 2)$

9. $f(x, y, z) = xyz; f(1, 2, 3), f(3, 2, 1)$

10. $g(x, y, z) = (x + y)e^{yz}; g(1, 0, -1), g(1, 1, 2)$

11. $F(r, s, t) = \dfrac{\ln(r + t)}{r + s + t}; F(1, 1, 1), F(0, e^2, 3e^2)$

12. $f(x, y, z) = xye^z + xze^y + yze^x;$
$f(1, 1, 1), f(\ln 2, \ln 3, \ln 4)$

En los problemas del 13 al 18 describa el dominio de la función dada.

13. $f(x, y) = \dfrac{5x + 2y}{4x + 3y}$

14. $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

15. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$

16. $f(x, y) = \dfrac{x}{\ln(x + y)}$

17. $f(x, y) = \ln(x + y - 4)$

18. $f(x, y) = \dfrac{e^{xy}}{\sqrt{x - 2y}}$

En los problemas del 19 al 26 trace la curva de nivel indicada $f(x, y) = C$ para cada opción de la constante C.)

19. $f(x, y) = x + 2y; C = 1, C = 2, C = -3$

20. $f(x, y) = x^2 + y; C = 0, C = 4, C = 9$

21. $f(x, y) = x^2 - 4x - y; C = -4, C = 5$

22. $f(x, y) = \dfrac{x}{y}; C = -2, C = 2$

23. $f(x, y) = xy; C = 1, C = -1, C = 2, C = -2$

24. $f(x, y) = ye^x; C = 0, C = 1$

25. $f(x, y) = xe^y; C = 1, C = e$

26. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2); C = 4, C = \ln 4$

27. PRODUCCIÓN Empleando x trabajadores calificados y y trabajadores no calificados, un fabricante puede producir $Q(x, y) = 10x^2y$ unidades por día. Actualmente hay 20 trabajadores calificados y 40 no calificados en el trabajo.

a) ¿Cuántas unidades se producen actualmente cada día?

b) ¿Cuánto cambiará el nivel de producción diaria si se agrega 1 trabajador calificado más a la actual fuerza laboral?

c) ¿Cuánto cambiará el nivel de producción diaria si se agrega 1 trabajador no calificado a la actual fuerza laboral?

d) ¿Cuánto cambiará el nivel de producción diaria si se agrega 1 trabajador calificado *y además* 1 trabajador no calificado a la actual fuerza laboral?

28. COSTO DE PRODUCCIÓN Un fabricante puede producir calculadoras científicas graficadoras a un costo de $40 cada una, así como calculadoras financieras a $20 cada una.

a) Exprese el costo total de producción mensual del fabricante como función del número de calculadoras graficadoras y del número de calculadoras financieras producidas.

b) Calcule el costo total mensual si se producen 500 calculadoras científicas y 800 financieras.

c) El fabricante desea aumentar la producción de calculadoras científicas en 50 al mes a partir el nivel indicado en *b*). ¿Qué cambio debe hacerse en la producción mensual de calculadoras financieras para que el costo total mensual no cambie?

www.FreeLibros.com

29. VENTAS AL MENUDEO Una tienda de pinturas vende dos marcas de pintura de látex. El comportamiento de las ventas indica que si la primera marca se vende en x_1 dólares por galón y la segunda en x_2 dólares por galón, la demanda de la primera marca será $D_1(x_1,x_2) = 200 - 10x_1 + 20x_2$ galones por mes y la demanda por la segunda marca será $D_2(x_1,x_2) = 100 + 5x_1 - 10x_2$ galones por mes.

a) Exprese el ingreso total mensual de la tienda de pinturas por la venta de la pintura como función de los precios de x_1 y x_2.

b) Calcule el ingreso del inciso *a*) si la primera marca se vende en \$6 por galón y la segunda en \$5 por galón.

30. PRODUCCIÓN La producción de cierta fábrica es $Q(K, L) = 120K^{2/3}L^{1/3}$ unidades, donde K es la inversión de capital, medida en unidades de \$1 000, y L es la fuerza laboral medida en horas-trabajador.

a) Calcule la producción si la inversión de capital es de \$125 000 y la fuerza laboral es de 1 331 horas-trabajador.

b) ¿Qué ocurrirá a la producción del inciso *a*) si tanto el nivel de la inversión de capital y la fuerza laboral se reducen a la mitad?

31. PRODUCCIÓN La compañía agrícola Easy-Gro estima que cuando emplean una fuerza laboral de $100x$ horas-trabajador en y acres de tierras, el número de bushels de trigo producidos es $f(x, y) = Ax^a y^b$, donde A, a y b son constantes positivas. Suponga que la compañía decide duplicar los factores de producción x y y. Determine la forma en que esta decisión afecta la producción de trigo en cada uno de estos casos:

a) $a + b > 1$

b) $a + b < 1$

c) $a + b = 1$

32. PRODUCCIÓN Suponga que cuando se emplean x máquinas y y horas-trabajador cada día, cierta fábrica producirá $Q(x, y) = 10xy$ teléfonos celulares. Describa la relación entre las entradas x y y que de cómo resultado una producción de 1 000 teléfonos por día. (Nótese que se busca una curva de nivel de Q.)

32. VENTAS AL MENUDEO Un fabricante con derechos exclusivos para una nueva y avanzada máquina industrial está planeando vender un número limitado de esas máquinas a empresas extranjeras y del país. El precio que el fabricante puede recibir por las máquinas dependerá del número de máquinas de que disponga. Se estima que si el fabricante suministra x máquinas al mercado nacional y y máquinas al mercado extranjero, las máquinas se venderán en $60 - \frac{x}{5} + \frac{y}{20}$ miles de dólares por unidad en el país, y $50 - \frac{y}{10} + \frac{x}{20}$ miles de dólares por unidad en el extranjero.
Exprese el ingreso R como función de x y y.

34. VENTAS AL MENUDEO Un fabricante está planeando vender un nuevo producto al precio de A dólares por unidad y estima que si x miles de dólares se gastan en su perfeccionamiento y y dólares en su promoción, los consumidores comprarán aproximadamente $\frac{320y}{y+2} + \frac{160x}{x+4}$ unidades del producto. Si los costos de fabricación son \$50 por unidad, exprese la utilidad en términos de x y y.

35. ÁREA SUPERFICIAL DEL CUERPO HUMANO Pediatras e investigadores médicos usan a veces la siguiente fórmula empírica[2] que relaciona el área de la superficie corporal $S(\text{m}^2)$ de una persona con el peso W de la persona (en kg) y con la estatura H en (cm):

$$S(W, H) = 0.0072W^{0.425}H^{0.725}$$

a) Encuentre $S(15.83, 87.11)$. Trace la curva de nivel de $S(W, H)$ que pasa por (15.83, 87.11). Trace varias curvas de nivel adicionales de $S(W, H)$. ¿Qué representan estas curvas de nivel?

b) Si Marc pesa 18.37 kg y tiene un área superficial de 0.648 m^2, ¿aproximadamente qué estatura se espera que tenga?

c) Suponga que en algún momento en su vida, Jenny pesa seis veces y mide el doble de estatura que cuando nació. ¿Cuál es el cambio correspondiente en porcentaje en el área superficial de su cuerpo?

d) Pregunte a sus padres cuánto pesaba usted al nacer y cuánto media (¡de seguro lo saben!). Luego hágase de una muñeca que mida aproximadamente la misma longitud que usted tenía al nacer y mida su área superficial. La fórmula empírica, ¿pronostica con exactitud el resultado que usted obtuvo? Escriba un párrafo sobre cualquier conclusión que saque de este "experimento".

36. PSICOLOGÍA El coeficiente de inteligencia (IQ) de una persona se mide con la función

$$I(m, a) = \frac{100m}{a}$$

donde a es la edad real de la persona y m es su edad mental.

a) Encuentre $I(12, 11)$ e $I(16, 17)$.

b) Trace las gráficas de varias curvas de nivel de $I(m, a)$. ¿Cómo describiría usted estas curvas?

---

[2] J. Routh, *Mathematical Preparation for Laboratory Technicians*, Saunders Co., Filadelfia, PA, 1971, pág. 92.

www.FreeLibros.com

37. CURVAS DE PRODUCCIÓN CONSTANTE Con el empleo de x trabajadores calificados y y no calificados, un fabricante puede producir $Q(x, y) = 3x + 2y$ unidades por día. Actualmente la fuerza laboral está formada por 10 trabajadores calificados y 20 trabajadores no calificados.

a) Calcule la producción diaria actual.

b) Encuentre una ecuación que relacione los niveles de fuerza laboral calificada y no calificada, si la producción diaria debe permanecer en su nivel actual.

c) En un sistema bidimensional de coordenadas, trace una curva de producción constante que corresponda al actual nivel de producción.

d) ¿Qué cambio debe hacerse en el nivel de la fuerza laboral no calificada, y, para compensar un aumento de dos trabajadores en la fuerza laboral calificada, x, con el fin de que la producción permanezca en su nivel actual?

38. CURVAS DE INDIFERENCIA Suponga que la utilidad obtenida por un consumidor por x unidades de una mercancía, así como y unidades de una segunda mercancía, está dada por la función de utilidad $U(x, y) = 2x^3y^2$. El consumidor posee actualmente $x = 5$ unidades de la primera mercancía y $y = 4$ unidades de la segunda. Encuentre el nivel actual de utilidad del consumidor y trace la correspondiente curva de indiferencia.

39. CURVAS DE INDIFERENCIA La utilidad obtenida por un consumidor por x unidades de una mercancía, así como y unidades de una segunda, está dada por la función de utilidad $U(x, y) = (x + 1)(y + 2)$. El consumidor posee actualmente $x = 25$ unidades de la primera mercancía y $y = 8$ unidades de la segunda. Encuentre el nivel actual de utilidad del consumidor y trace la correspondiente curva de indiferencia.

40. CONTAMINACIÓN DEL AIRE La descarga de basura en tiraderos, así como otras operaciones de manipulación de materiales cerca de un basurero, puede ocasionar que partículas contaminadas se emitan al aire circundante. Para estimar estas emisiones de partículas, se puede usar la siguiente fórmula empírica:[3]

$$E(V, M) = k(0.0032)\left(\frac{V}{5}\right)^{1.3}\left(\frac{M}{2}\right)^{-1.4}$$

donde E es el factor de emisión (libras de partículas emitidas al aire por tonelada de suelo movido), V es la rapidez media del viento (mph), M es el contenido de humedad del material (dado como porcentaje), y k es una constante que depende del tamaño de las partículas.

a) Para una partícula pequeña (5 mm de diámetro), resulta que $k = 0.2$. Encuentre $E(10, 13)$.

b) El factor de emisión E se puede multiplicar por el número de toneladas de material manipulado, para alcanzar una medida del total de emisiones. Suponga que se manipulan 19 toneladas del material en el inciso *a*). ¿Cuántas toneladas de una segunda clase de material con $k = 0.48$ (diámetro 15 mm) y contenido de humedad 27% deben manipularse para lograr el mismo nivel total de emisiones, si la velocidad del viento permanece igual?

c) Trace varias curvas de nivel de $E(V, M)$, suponiendo que el tamaño de las partículas es fijo. ¿Qué representan estas curvas?

41. CIRCULACIÓN SANGUÍNEA Una de las leyes de Poiseuille[4] dice que la rapidez de circulación V de la sangre (cm/s), a una distancia r (cm) del eje de un vaso sanguíneo de radio R (cm) y longitud L (cm) está dada por

$$V(P, L, R, r) = \frac{9.3P}{L}(R^2 - r^2)$$

donde P (dinas/cm^2) es la presión en el vaso. Suponga que un vaso en particular tiene un radio de 0.0075 cm y mide 1.675 cm de largo.

a) ¿Con qué rapidez circula la sangre a una distancia de 0.004 cm del eje de este vaso, si la presión en el vaso es de 3 875 dinas/cm^2?

b) Como R y L son fijas para este vaso, V es una función de P y r únicamente. Trace varias curvas de nivel de $V(P, r)$. Explique lo que representan.

42. RETORNOS CONSTANTES A ESCALA Suponga que la producción Q está dada por la función de producción de Cobb-Douglas $Q(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, donde A y α son constantes positivas y $0 < \alpha$ 1. Demuestre que si K y L se multiplican ambas por el mismo número positivo m, entonces la producción Q también estará multiplicada por m; esto es, demuestre que $Q(mK, mL) = mQ(K, L)$.

43. QUÍMICA La **ecuación de estado de Van der Waals** dice que 1 mol de un gas encerrado satisface la ecuación

$$T(P, V) = 0.0122\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) - 273.15$$

donde T (°C) es la temperatura del gas, V (cm^3) es su volumen, P (atmósferas) es la presión del gas en las paredes de su recipiente, y a y b son constantes que dependen de la naturaleza del gas.

a) Trace las gráficas de varias curvas de nivel de T. Estas curvas se denominan **curvas de temperatura constante** o **isotermas.**

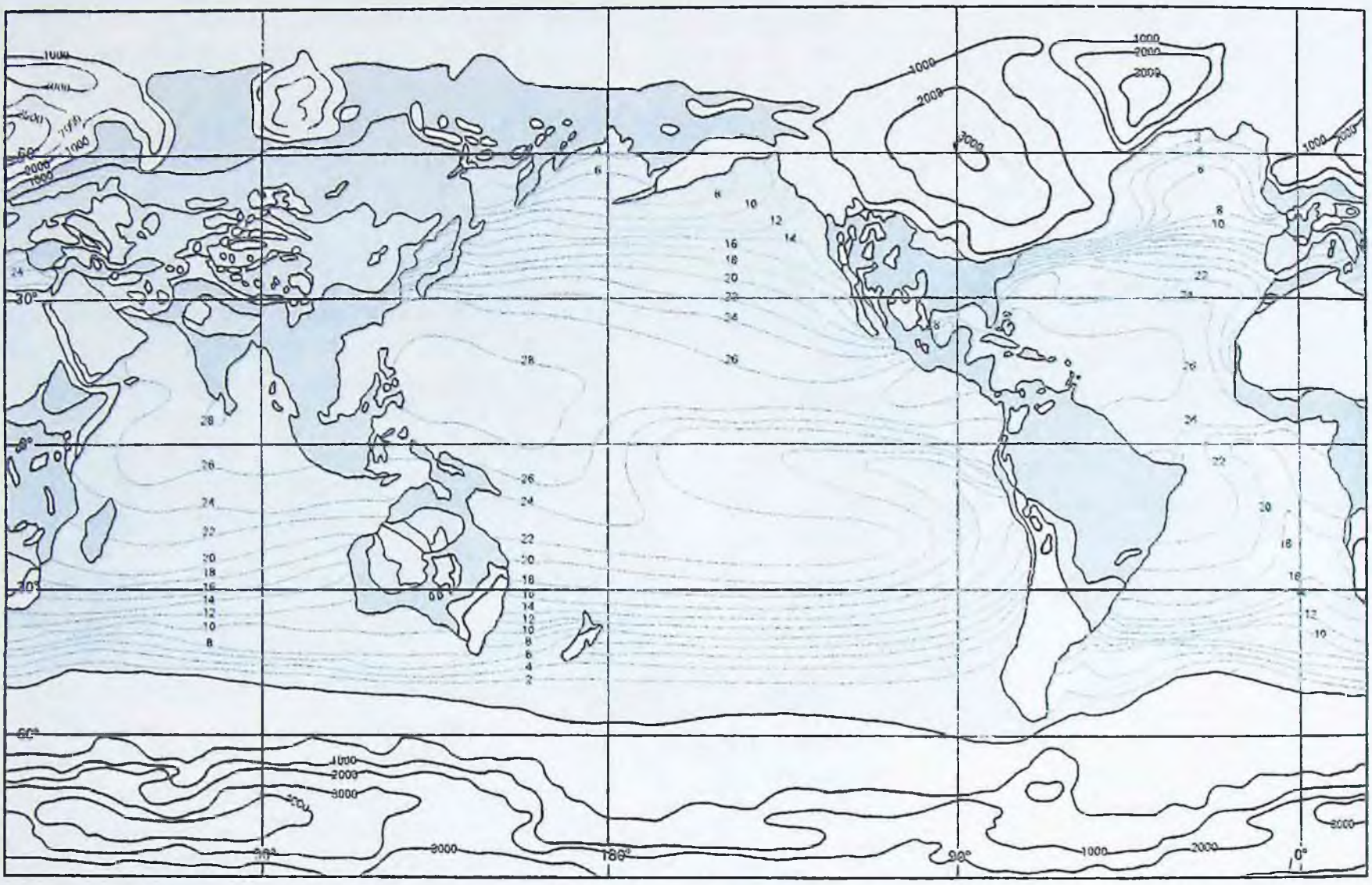
b) Si el gas encerrado es cloro, los experimentos demuestran que $a = 6.49 \times 10^6$ y $b = 56.2$. Encuentre $T(1.13, 31.275 \times 10^3)$; esto es, la temperatura que corresponde a 31 275 cm^3 de cloro bajo 1.13 atmósferas de presión.

[3] M. D. LaGrega, P. L. Buckingham, y J. C. Evans, *Hazardous Waste Management*, McGraw-Hill, Inc., Nueva York, 1994, p. 140.

[4] E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 2a. ed., Springer-Verlag, Nueva York, 1976, pp. 102-103.

www.FreeLibros.com

44. CURVAS DE HIELO Y TEMPERATURA DE LA ERA DE HIELO Las curvas de nivel en zonas terrestres de la siguiente figura indican elevaciones del hielo sobre el nivel del mar (en metros), durante la última gran era glacial (hace aproximadamente 18 000 años). Las curvas de nivel en regiones del mar indican temperatura de la superficie del mar. Por ejemplo, el hielo tenía 1 000 metros de grueso sobre la ciudad de Nueva York, y la temperatura del mar cerca de las islas de Hawai era de unos 24°C. ¿En dónde era más gruesa la capa de hielo? ¿Cuál zona en tierra, limitada por hielos, estaba adyacente al mar más cálido?



FUENTE: *The Cambridge Encyclopedia of Earth Sciences*, Cron/Cambridge Press, 1981, página 302.

45. GASTO DIARIO DE ENERGÍA Suponga que una persona de edad A años tiene un peso de w kilogramos (kg) y una estatura h en centímetros (cm). Entonces las *ecuaciones de Harris-Benedict* dicen que el gasto diario de energía basal en kilocalorías es

$$B_m(w, h, A) = 66.47 + 13.75w + 5.00h - 6.77A$$

para un hombre y

$$B_f(w, h, A) = 655.10 + 9.60w + 1.85h - 4.68A$$

para una mujer.

a) Encuentre el gasto de energía basal de un hombre que pesa 90 kg, mide 190 cm de estatura, y tiene 22 años de edad.

b) Encuentre el gasto de energía basal de una mujer que pesa 61 kg, mide 170 cm de estatura y tiene 27 años de edad.

c) Un hombre mantiene un peso de 85 kg y una estatura de 193 cm en toda su edad adulta. ¿A qué edad es que su gasto diario de energía basal será de 2 018 kilocalorías?

d) Una mujer mantiene un peso de 67 kg y una estatura de 173 cm en toda su edad adulta. ¿A qué edad es que su gasto diario de energía basal será de 1 504 kilocalorías?

www.FreeLibros.com

46. ENERGÍA EÓLICA Una máquina basada en energía eólica por lo general convierte la energía cinética del viento en movimiento en energía mecánica por medio de un aparato que gira, como un molino de viento. Suponga que un viento de velocidad v pasa a través de una máquina colectora de viento con área de sección transversal A. Entonces, en física se demuestra que la potencia total generada por el viento está dada por una fórmula[5] de la forma

$$P(v, A) = abAv^3$$

donde $b = 1.2$ kg/m^3 es la densidad del aire, y a es una constante positiva.

a) Si una máquina de viento fuera perfectamente eficiente, entonces $a = \frac{1}{2}$ en la fórmula para $P(v, A)$. ¿Cuánta potencia sería producida por este molino de viento ideal con un radio de paletas de 15 metros si la rapidez del viento es de 22 m/s?

b) Ninguna máquina eólica es perfectamente eficiente. De hecho, se ha demostrado que lo mejor que podemos esperar es alrededor de 59% de eficiencia ideal, y una buena fórmula empírica para la potencia se obtiene haciendo $a = \frac{8}{27}$. Calcule $P(v, A)$ usando este valor de a si el radio de las paletas del molino de viento del inciso *a*) se duplica y la velocidad del viento se reduce a la mitad.

c) El hombre ha estado tratando de aprovechar el viento por lo menos desde hace 4 000 años, a veces con resultados interesantes o extraños. Por ejemplo, en la fuente citada al pie de página, el autor hace notar que durante la Segunda Guerra Mundial se construyó un molino de viento en Vermont con un radio de paletas de 175 pies. Lea un artículo sobre molinos de viento y otros aparatos que usan la fuerza del viento. ¿Cree que estos aparatos tienen algún lugar en el mundo tecnológico moderno? Explique.

47. ÓSMOSIS INVERSA En la manufactura de semiconductores, es necesario usar agua con un contenido mineral extremadamente bajo, y para separar agua de contaminantes es práctica común usar un proceso de membrana llamado **ósmosis inversa.** Una clave para la efectividad de este proceso es la **presión osmótica,** que puede estar determinada por la **ecuación de Van't Hoff.**[6]

$$P(N, C, T) = 0.075NC(273.15 + T)$$

donde P es la presión osmótica (en atmósferas), N es el número de iones en cada molécula de soluto, C es la concentración de soluto (gramos-mol/litro), y T es la temperatura del soluto (°C). Encuentre la presión osmótica para una solución de cloruro de sodio con una concentración de 0.53 g-mol/litro, a una temperatura de 23°C. (Es necesario saber que cada molécula de cloruro de sodio contiene dos iones: $NaCl = Na^+ + Cl^-$.)

48. La producción en cierta fábrica está dada por la función de producción de Cobb-Douglas $Q(K, L) = 57K^{1/4}L^{3/4}$, donde K es el capital en \$1 000 y L es la fuerza laboral, medida en horas-trabajador.

a) Utilice su calculadora para obtener $Q(K, L)$ para los valores de K y L que se dan en la tabla:

K(\$1 000)	277	311	493	554	718
L	743	823	1 221	1 486	3 197
$Q(K, L)$					

b) Observe que en la tabla, la producción $Q(277, 743)$ se duplica cuando K se duplica de 277 a 554 y L se duplica de 743 a 1 486. De igual modo, verifique que la producción se triplica cuando K y L se triplican ambas, y que la producción se reduce a la mitad cuando K y L se reducen a la mitad ambas. ¿Ocurre algo interesante si K se duplica y L se reduce a la mitad? Verifique su respuesta con su calculadora.

49. Repita el Problema 48 con la función de producción

$$Q(K, L) = 83K^{2/5}L^{3/5}$$

[5] Raymond A. Serway, *Physics*, 3a. ed., Saunders, Filadelfia, PA, 1992, pp. 408-410.

[6] M. D. LaGrega, P. L. Buckingham y J. C. Evans, *Hazardous Waste Management*, McGraw-Hill, Inc., Nueva York, 1994, pp. 530-543.

www.FreeLibros.com

SECCIÓN 7.2 | Derivadas parciales

En numerosos problemas donde aparecen funciones de dos variables, el objetivo es hallar la rapidez de cambio de la función con respecto a una de sus variables, cuando la otra se mantiene constante. Esto es, el objetivo es derivar la función con respecto a la variable particular en cuestión mientras se mantiene fija la otra variable. Este proceso se conoce como **derivación parcial,** y se dice que la derivada resultante es una **derivada parcial** de la función.

Por ejemplo, suponga que un fabricante encuentra que

$$Q(x, y) = 5x^2 + 7xy$$

unidades de cierta mercancía se producirán cuando se emplean x trabajadores calificados y y no calificados. Entonces, si el número de trabajadores no calificados permanece fijo, la razón de cambio de la producción con respecto al número de trabajadores calificados se encuentra derivando $Q(x, y)$ con respecto a x, mientras y se mantiene constante. Esto recibe el nombre de **derivada parcial de Q con respecto a x** y se denota por $Q_x(x, y)$; entonces,

$$Q_x(x, y) = 5(2x) + 7(1)y = 10x + 7y$$

Del mismo modo, si el número de trabajadores calificados permanece fijo, la razón de cambio de la producción con respecto al número de trabajadores no calificados está dada por **la derivada parcial de Q con respecto a y,** que se obtiene al derivar $Q(x, y)$ con respecto a y, manteniendo x constante; esto es, por

$$Q_y(x, y) = 0 + 7x(1) = 7x$$

Veamos a continuación una definición general de derivadas parciales y una notación alternativa.

Derivadas parciales ▪ Suponga $z = f(x, y)$. La derivada parcial de f con respecto a x se denota por

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{o} \quad f_x(x, y)$$

y es la función obtenida al derivar f con respecto a x, tratando a y como una constante. La derivada parcial de f con respecto a y se denota por

$$\frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{o} \quad f_y(x, y)$$

y es la función obtenida al derivar f con respecto a y, tratando a x como constante.

NOTA Recuerde, del capítulo 2, que la derivada de una función de una variable $f(x)$ se define como el límite del cociente incremental, es decir,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Con esta definición en mente, la derivada parcial $f_x(x, y)$ está dada por

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

www.FreeLibros.com

y la derivada parcial $f_y(x, y)$ por

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Computación de derivadas parciales

No se necesitan reglas para el cálculo de derivadas parciales. Para calcular f_x, simplemente se deriva f con respecto a la variable x, suponiendo que y es una constante. Para calcular f_y, derivamos f con respecto a y, suponiendo que x es una constante. A continuación se presentan algunos ejemplos.

¡EXPLORE!

La calculadora graficadora puede ser usada para calcular y visualizar derivadas parciales en puntos específicos. Siguiendo el ejemplo 7.2.1, sea $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + 2y/(3x)$ e introduzca en Y1 la expresión correspondiente X^2 + 2X * L1^2 + 2L1/(3X). Suponga que deseamos calcular la derivada parcial $f_x(-2, -1)$. Asigne el valor -1 de y en L1. Grafique Y1 empleando una pantalla decimal y determine el valor de $f_x(-2, -1)$ usando la función de cálculo de derivadas de su calculadora graficadora. Confirme este resultado analíticamente y trate de desplegar la recta tangente a $f(x, y)$ en la dirección x, en el punto $(-2, -1)$.

EJEMPLO 7.2.1

Encuentre las derivadas parciales f_x y f_y si $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + \frac{2y}{3x}$.

Solución

Para simplificar el cálculo, empiece por reescribir la función como

$$f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + \frac{2}{3}yx^{-1}$$

Para calcular f_x, considere f como una función de x y derive la suma término por término, tratando y como constante para obtener

$$f_x(x, y) = 2x + 2(1)y^2 + \frac{2}{3}y(-x^{-2}) = 2x + 2y^2 - \frac{2y}{3x^2}$$

Para calcular f_y, considere f como una función de y y derive término por término, tratando x como constante para obtener

$$f_y(x, y) = 0 + 2x(2y) + \frac{2}{3}(1)x^{-1} = 4xy + \frac{2}{3x}$$

EJEMPLO 7.2.2

Encuentre las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ si $z = (x^2 + xy + y)^5$.

Solución

Manteniendo y fija y usando la regla de la cadena para derivar z con respecto a x, se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5(x^2 + xy + y)^4 \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy + y)$$
$$= 5(x^2 + xy + y)^4(2x + y)$$

Manteniendo x fija y usando la regla de la cadena para derivar z con respecto a y, se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5(x^2 + xy + y)^4 \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy + y)$$
$$= 5(x^2 + xy + y)^4(x + 1)$$

www.FreeLibros.com

EJEMPLO 7.2.3

Encuentre las derivadas parciales f_x y f_y si $f(x, y) = xe^{-2xy}$

Solución

De la regla del producto,

$$f_x(x, y) = x(-2ye^{-2xy}) + e^{-2xy} = (-2xy + 1)e^{-2xy}$$

y de la regla del factor constante,

$$f_y(x, y) = x(-2xe^{-2xy}) = -2x^2e^{-2xy}$$

Interpretación geométrica de las derivadas parciales

Recuerde, de la sección 7.1, que las funciones de dos variables se pueden representar gráficamente como superficies trazadas en un sistema de coordenadas tridimensional. En particular, si $z = f(x, y)$, se puede identificar un par ordenado (x, y) en el dominio de f con un punto en el plano xy, y el correspondiente valor de la función $z = f(x, y)$ se puede considerar como la "altura" asignada a este punto. La gráfica de f es la superficie formada por todos los puntos (x, y, z) del espacio tridimensional cuya altura z es igual a $f(x, y)$.

Las derivadas parciales de una función de dos variables se pueden interpretar geométricamente como sigue. Para cada número fijo y_0, los puntos (x, y_0, z) forman un plano vertical cuya ecuación es $y = y_0$. Si $z = f(x, y)$ y si y se mantiene fija en $y = y_0$, entonces los puntos correspondientes $(x, y_0, f(x, y_0))$ forman una curva en un espacio tridimensional, que es la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = y_0$. En cada punto sobre esta curva, la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}$ es simplemente la pendiente de la recta del plano $y = y_0$ que es tangente a la curva en el punto en cuestión. Esto es, $\frac{\partial z}{\partial x}$ es la pendiente de la recta tangente "en la dirección x." La situación se ilustra en la figura 7.10*a*.

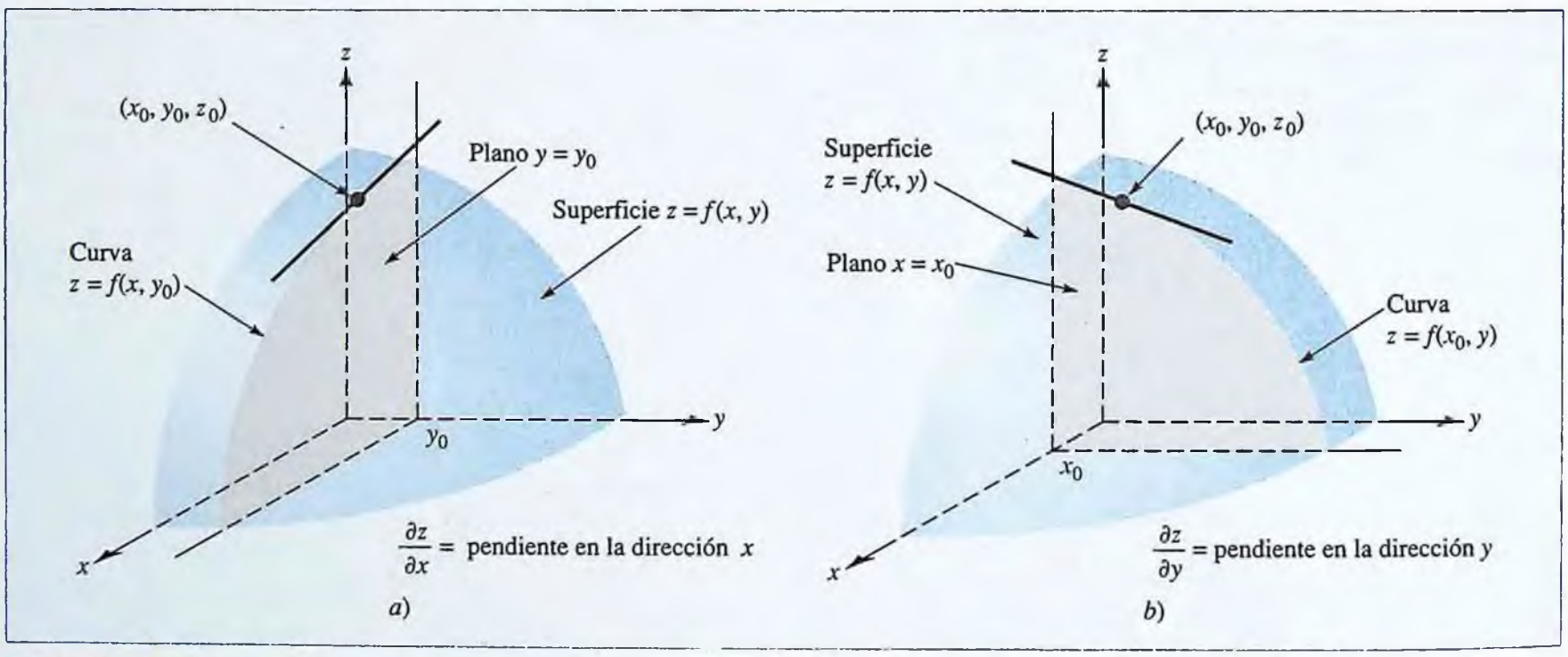


FIGURA 7.10 Interpretación geométrica de las derivadas parciales.

Análogamente, si x se mantiene fija en $x = x_0$, los puntos correspondientes $(x_0, y, f(x_0, y))$ forman una curva que es la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano vertical $x = x_0$. En cada punto sobre esta curva, la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial y}$ es la

www.FreeLibros.com

pendiente de la recta tangente en el plano $x = x_0$. Esto es, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ es la pendiente de la recta tangente "en la dirección y". La situación se ilustra en la figura 7.10*b*.

Análisis marginal

En economía, el término **análisis marginal** se refiere a la práctica de usar una derivada para calcular el cambio que ocurre en el valor de una función como resultado del aumento en una unidad de una de sus variables. En la sección 2.5 se vieron algunos ejemplos de análisis marginal, en donde aparecían derivadas ordinarias de funciones de una variable. A continuación veamos un ejemplo de la forma en que las derivadas parciales se pueden usar de una manera semejante.

EJEMPLO 7.2.4

Se estima que la producción semanal de cierta planta está dada por la función $Q(x, y) = 1\,200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$ unidades, donde x es el número de trabajadores calificados y y el de trabajadores no calificados que se emplean en la planta. Actualmente, la fuerza laboral está formada por 30 trabajadores calificados y 60 no calificados. Utilice análisis marginal para estimar el cambio en la producción semanal que resultará de la adición de 1 trabajador calificado más, si el número de trabajadores no calificados no cambia.

Solución

La derivada parcial

$$Q_x(x, y) = 1\,200 + 2xy - 3x^2$$

es la razón de cambio de la producción con respecto al número de trabajadores calificados. Para cualesquiera valores de x y y, ésta es una aproximación del número de unidades adicionales que se producirán cada semana si el número de trabajadores calificados se aumenta de x a $x + 1$, mientras que el número de trabajadores no calificados se mantiene fijo en y. En particular, si la fuerza laboral se aumenta de 30 trabajadores calificados y 60 no calificados a 31 calificados y 60 no calificados, el cambio resultante en la producción es aproximadamente

$$Q_x(30, 60) = 1\,200 + 2(30)(60) - 3(30)^2 = 2\,100 \text{ unidades}$$

Como práctica, calcule el cambio exacto $Q(31, 60) - Q(30, 60)$. ¿Es buena la aproximación?

Recuerde que en la sección 7.1 introdujimos la *función de producción de Cobb-Douglas*

$$Q(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}$$

donde Q es la salida de un proceso de producción en el que la inversión de capital es K miles de dólares, y se emplean L horas-trabajador. En este contexto, la derivada parcial $Q_K(K, L)$ se llama **productividad marginal del capital,** y mide la razón a la que cambia la producción Q con respecto al capital, cuando la fuerza laboral se mantiene constante. Del mismo modo, $Q_L(K, L)$ recibe el nombre de **productividad marginal del trabajo** y mide la razón de cambio de la producción con respecto al nivel de la fuerza laboral, cuando el capital se mantiene constante. El siguiente ejemplo ilustra una forma en que estas derivadas parciales se pueden usar en el análisis económico.

EJEMPLO 7.2.5

Un fabricante estima que la producción mensual de cierta fábrica está dada por la función de Cobb-Douglas

$$Q(K, L) = 50K^{0.4}L^{0.6}$$

www.FreeLibros.com

donde K es el capital en unidades de \$1 000 y L es la fuerza laboral medida en horas-trabajador.

a) Encuentre la productividad marginal del capital, Q_K, y la productividad marginal del trabajo, Q_L, cuando el capital es \$750 000 y el nivel de la fuerza laboral es 991 horas-trabajador.

b) ¿El fabricante debe considerar invertir capital o aumentar el nivel de la fuerza laboral para aumentar la producción?

Solución

a)
$$Q_K(K, L) = 50(0.4K^{-0.6})L^{0.6} = 20K^{-0.6}L^{0.6}$$

y

$$Q_L(K, L) = 50K^{0.4}(0.6L^{-0.4}) = 30K^{0.4}L^{-0.4}$$

de modo que con $K = 750$ (\$750 000) y $L = 991$

$$Q_K(750, 991) = 20(750)^{-0.6}(991)^{0.6} \approx 23.64$$

y

$$Q_L(750, 991) = 30(750)^{0.4}(991)^{-0.4} \approx 26.84$$

b) Del inciso *a*), se ve que un aumento de capital de 1 unidad (esto es, \$1 000) resulta en un aumento de la producción en 23.64 unidades, lo cual es menos que el aumento de 26.84 unidades que resulta del aumento en 1 unidad del nivel de la fuerza laboral. Por lo tanto, el fabricante debe aumentar el nivel de la fuerza laboral en 1 hora-trabajador (de 991 hora-trabajador a 992) para aumentar la producción tan rápidamente como sea posible desde el nivel actual.

Artículos sustitutos y complementarios

Se dice que dos artículos son **sustitutos** si un aumento de la demanda de cualquiera de ellos provoca una disminución de la demanda del otro. Los artículos sustitutos son competitivos, como la mantequilla y la margarina.

Por otra parte, se dice que dos artículos son **complementarios** si una disminución de la demanda de cualquiera de ellos provoca una disminución de la demanda del otro. Un ejemplo se ve con cámaras y rollos de película. Si los consumidores compran menos cámaras, es probable que también compren menos rollos de película.

Las derivadas parciales pueden ser usadas para obtener un criterio que permita determinar si dos artículos son sustitutos o complementarios. Suponga que la demanda de un artículo es $D_1(p_1, p_2)$ y que la demanda de otro es $D_2(p_1, p_2)$, cuando los precios unitarios de los artículos son p_1 y p_2, respectivamente. Es razonable esperar que la demanda disminuya cuando el precio crece, de modo que

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_1} < 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial D_2}{\partial p_2} < 0$$

Para artículos sustitutos, la demanda de cada uno aumenta con respecto al precio del otro, por lo cual

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_2} > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial D_2}{\partial p_1} > 0$$

Sin embargo, para artículos complementarios, la demanda de cada uno disminuye con respecto al precio del otro.y

www.FreeLibros.com

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_2} < 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial D_2}{\partial p_1} < 0$$

El ejemplo 7.2.6 ilustra la forma en que se pueden usar estos criterios para determinar si un par de artículos determinados son complementarios, sustitutos o ninguna de ellos.

EJEMPLO 7.2.6

Suponga que la función de demanda de harina en cierta comunidad está dada por

$$D_1(p_1, p_2) = 500 + \frac{10}{p_1 + 2} - 5p_2$$

mientras que la demanda correspondiente de pan está dada por

$$D_2(p_1, p_2) = 400 - 2p_1 + \frac{7}{p_2 + 3}$$

donde p_1 es el precio en dólares de una libra de harina y p_2 es el precio de una pieza de pan. Determine si harina y pan son artículos sustitutos, complementarios, o ninguno de éstos.

Solución

Se calcula que

$$\frac{\partial D_1}{\partial p_2} = -5 < 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial D_2}{\partial p_1} = -2 < 0$$

Como ambas derivadas parciales son negativas para todas las p_1 y p_2, se deduce que harina y pan son artículos complementarios.

Derivadas parciales de segundo orden

Las derivadas parciales a su vez pueden ser derivadas. Las funciones resultantes se llaman **derivadas parciales de segundo orden.** A continuación se muestra un resumen de la definición y notación para las cuatro posibles derivadas parciales de segundo orden de una función de dos variables.

Derivadas parciales de segundo orden ■ Si $z = f(x, y)$, la derivada parcial de fx con respecto a x es

$$f_{xx} = (f_x)_x \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

La derivada parcial de f_x con respecto a y es

$$f_{xy} = (f_x)_y \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

La derivada parcial de f_y con respecto a x es

$$f_{yx} = (f_y)_x \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

La derivada parcial de f_y con respecto a y es

$$f_{yy} = (f_y)_y \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

www.FreeLibros.com

El cálculo de derivadas parciales de segundo orden se ilustra en el ejemplo 7.2.7.

EJEMPLO 7.2.7

Calcule las cuatro derivadas parciales de segundo orden de la función

$$f(x, y) = xy^3 + 5xy^2 + 2x + 1$$

Solución

Como $$f_x = y^3 + 5y^2 + 2$$

se deduce que

$$f_{xx} = 0 \qquad \text{y} \qquad f_{xy} = 3y^2 + 10y$$

Como $$f_y = 3xy^2 + 10xy$$

tenemos que

$$f_{yy} = 6xy + 10x \qquad \text{y} \qquad f_{yx} = 3y^2 + 10y$$

NOTA Las dos derivadas parciales f_{xy} y f_{yx} frecuentemente se denominan **derivadas parciales mixtas de segundo orden** de f. Note que las derivadas parciales mixtas del ejemplo 7.2.7 son iguales. Esto no es accidental. Resulta que para prácticamente todas las funciones $f(x, y)$ que se encuentran en la práctica, las derivadas parciales mixtas son iguales; esto es,

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Ello significa que se obtiene la misma respuesta si primero se deriva $f(x, y)$ con respecto a x y luego se deriva la función resultante con respecto a y, que si se hace la derivación en el orden inverso. ■

El ejemplo 7.2.8 ilustra la forma en que una derivada parcial de segundo orden puede llevar información útil en una situación práctica.

EJEMPLO 7.2.8

Suponga que la producción Q en una fábrica depende de la cantidad K de capital invertido en la planta y equipo, y también del tamaño L de la fuerza laboral, medida en horas-trabajador. Dé una interpretación económica del signo de la derivada parcial de segundo orden $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial L^2}$.

Solución

Si $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial L^2}$ es negativa, el producto marginal de la fuerza laboral $\dfrac{\partial Q}{\partial L}$ disminuye cuando L aumenta. Esto implica que, para un nivel fijo de inversión de capital, el efecto en la producción de una hora-trabajador adicional es mayor cuando la fuerza laboral es pequeña que cuando es grande.

www.FreeLibros.com

Análogamente, si $\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}$ es positiva, se deduce que para un nivel fijo de inversión de capital, el efecto en la producción de una hora-trabajador adicional es mayor cuando la fuerza laboral es grande que cuando es pequeña.

Por lo general, para una fábrica que opera con la fuerza laboral adecuada, la derivada $\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}$ será negativa. ¿Puede dar una explicación económica de este hecho?

PROBLEMAS | 7.2

En los problemas del 1 al 16 calcule todas las derivadas parciales de primer orden de la función dada.

1. $f(x, y) = 2xy^5 + 3x^2y + x^2$
2. $z = 5x^2y + 2xy^3 + 3y^2$
3. $z = (3x + 2y)^5$
4. $f(x, y) = (x + xy + y)^3$
5. $f(s, t) = \dfrac{3t}{2s}$
6. $z = \dfrac{t^2}{s^3}$
7. $z = xe^{xy}$
8. $f(x, y) = xye^x$
9. $f(x, y) = \dfrac{e^{2-x}}{y^2}$
10. $f(x, y) = xe^{x+2y}$
11. $f(x, y) = \dfrac{2x + 3y}{y - x}$
12. $z = \dfrac{xy^2}{x^2y^3 + 1}$
13. $z = u \ln v$
14. $f(u, v) = u \ln uv$
15. $f(x, y) = \dfrac{\ln (x + 2y)}{y^2}$
16. $z = \ln\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)$

En los problemas del 17 al 20 evalúe las derivadas parciales $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ en el punto dado $P_0(x_0, y_0)$.

17. $f(x, y) = 3x^2 - 7xy + 5y^3 - 3(x + y) - 1$; en $P_0(-2, 1)$
18. $f(x, y) = (x - 2y)^2 + (y - 3x)^2 + 5$; en $P_0(0, -1)$
19. $f(x, y) = xe^{-2y} + ye^{-x} + xy^2$; en $P_0(0, 0)$
20. $f(x, y) = xy \ln\left(\dfrac{y}{x}\right) + \ln (2x - 3y)^2$; en $P_0(1, 1)$

En los problemas del 21 al 26 encuentre las segundas derivadas parciales (incluyendo las derivadas parciales mixtas).

21. $f(x, y) = 5x^4y^3 + 2xy$
22. $f(x, y) = \dfrac{x + 1}{y - 1}$
23. $f(x, y) = e^{x^2y}$
24. $f(u, v) = \ln (u^2 + v^2)$
25. $f(s, t) = \sqrt{s^2 + t^2}$
26. $f(x, y) = x^2ye^x$

27. ANÁLISIS MARGINAL En cierta fábrica, la producción diaria es $Q(K, L) = 60K^{1/2}L^{1/3}$ unidades, donde K denota la inversión de capital medido en unidades de \$1 000 y L es la fuerza laboral medida en horas-trabajador. Suponga que la actual inversión de capital es \$900 000 y que todos los días se emplea una fuerza laboral de 1 000 horas−trabajador. Utilice el análisis marginal para estimar el efecto de una inversión de capital adicional de \$1 000 en la producción diaria, si la fuerza laboral no cambia.

28. PRODUCTIVIDAD MARGINAL Un fabricante estima que la producción anual en cierta fábrica está dada por

$$Q(K, L) = 30K^{0.3}L^{0.7}$$

www.FreeLibros.com

unidades, donde K es el capital en unidades de \$1 000 y L es la fuerza laboral en horas-trabajador.

a) Encuentre la productividad marginal del capital Q_K y la productividad marginal del trabajo Q_L cuando el capital es \$630 000 y el nivel de la fuerza laboral es 830 horas-trabajador.

b) ¿Debe el fabricante considerar agregar una unidad de capital o una unidad de trabajo para aumentar más rápidamente la producción?

29. PRODUCTIVIDAD MARGINAL La productividad de cierto país está dada por

$$Q(K, L) = 90K^{1/3}L^{2/3}$$

unidades, donde K es el capital en unidades de \$1 millón y L es la fuerza laboral en miles de horas-trabajador.

a) Encuentre la productividad marginal del capital Q_K y la productividad marginal del trabajo Q_L, cuando el capital es 5.495 miles de millones de dólares ($K = 5\,495$) y el nivel de la fuerza laboral es 4 587 000 horas-trabajador ($L = 4\,587$).

b) ¿Debe el gobierno del país estimular la inversión de capital o el incremento de la fuerza laboral para aumentar la productividad tan rápidamente como sea posible?

30. ANÁLISIS MARGINAL La utilidad diarias de un abarrotero por la venta de dos marcas de jugo de manzana es

$$P(x, y) = (x - 30)(70 - 5x + 4y) + (y - 40)(80 + 6x - 7y)$$

centavos, donde x es el precio por lata de la primera marca y y es el precio por lata de la segunda. Actualmente, la primera marca se vende en 50 centavos por lata y la segunda en 52 centavos por lata. Utilice el análisis marginal para estimar el cambio en la utilidad diaria que resultará si el abarrotero sube en un centavo por lata el precio de la segunda marca, pero mantiene sin cambio el precio de la primera marca.

31. CIRCULACIÓN SANGUÍNEA Mientras menor es la resistencia que presenta un vaso a la circulación sanguínea, menor es la energía que gasta el corazón. Una de las leyes de Poiseuille[7] dice que la resistencia a la circulación sanguínea en un vaso satisface la ecuación

$$F(L, r) = \frac{kL}{r^4}$$

donde L es la longitud del vaso, r es su radio y k es una constante que depende de la viscosidad de la sangre.

a) Encuentre F, $\frac{\partial F}{\partial L}$ y $\frac{\partial F}{\partial r}$ en el caso donde $L = 3.17$ cm. Deje su respuesta en términos de K.

b) Suponga que el vaso del inciso *a*) está restringido y alargado, de modo que su nuevo radio es 20% menor que antes y su nueva longitud es 20% mayor. ¿Cómo afectan estos cambios a la circulación $F(L, r)$? ¿Cómo afectan a los valores de $\frac{\partial F}{\partial L}$ y $\frac{\partial F}{\partial r}$?

32. DEMANDA DEL CONSUMIDOR La demanda mensual de cierta marca de tostadores está dada por una función $f(x, y)$, donde x es la cantidad de dinero (medido en unidades de \$1 000) gastados en publicidad y y es el precio de venta (en dólares) de los tostadores. Dé interpretaciones económicas de las derivadas parciales f_x y f_y. Bajo condiciones económicas normales, ¿cuál será el signo de cada una de estas derivadas?

33. DEMANDA DEL CONSUMIDOR Un distribuidor de bicicletas ha encontrado que si se venden bicicletas de 10 velocidades en x dólares cada una, y el precio de la gasolina es y centavos por galón, se venderán aproximadamente $F(x, y)$ bicicletas al mes, donde

$$F(x, y) = 200 - 24\sqrt{x} + 40(0.1y + 7)^{3/2}$$

Actualmente, las bicicletas se venden a \$324 cada una y la gasolina se vende a \$1.80. Utilice el análisis marginal para estimar el cambio en la demanda de bicicletas cuando el precio de las bicicletas se mantiene fijo, pero el precio de la gasolina disminuye en un centavo por galón.

34. ÁREA SUPERFICIAL DEL CUERPO HUMANO Recuerde del problema 35 de la sección 7.1, que el área de la superficie corporal de una persona puede ser medido por la fórmula empírica

$$S(W, H) = 0.0072W^{0.425}H^{0.725}$$

donde W (kg) y H (cm) son el peso y la estatura de la persona, respectivamente. En la actualidad, una niña pesa 34 kg y mide 120 cm de estatura.

a) Calcule las derivadas parciales S_W (34, 120) y S_H(34, 120), e interprete cada una como una razón de cambio.

b) Estime el cambio en área superficial que resulta si la estatura de la niña permanece constante pero su peso aumenta en un kilogramo.

[7] E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 2a. ed., Springer-Verlag, Nueva York, 1976, p. 279.

www.FreeLibros.com

35. ENVASE Una lata de bebida gaseosa es un cilindro de altura H con un radio de R centímetros. Su volumen está dado por la fórmula $V = \pi R^2 H$. Una lata en particular mide 12 cm de alto con radio de 3 centímetros. Utilice cálculo para estimar el cambio de volumen que resulta si el radio aumenta en 1 cm mientras que la altura permanece en 12 centímetros.

36. ENVASE Para la bebida gaseosa del problema 35, el área superficial está dada por $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH$. Utilice cálculo para estimar el cambio en la superficie que resulta si:

a) El radio se aumenta de 3 cm a 4 cm, mientras que la altura continúa en 12 centímetros.

b) La altura se reduce de 12 a 11 cm, mientras que el radio continúa en 3 centímetros.

ARTÍCULOS SUSTITUTOS O COMPLEMENTARIOS *En los problemas del 37 al 42 se dan las funciones de demanda para un par de artículos. Utilice derivadas parciales para determinar si los artículos son sustitutos, complementarios o ninguno de éstos.*

37. $D_1 = 500 - 6p_1 + 5p_2$;
$D_2 = 200 + 2p_1 - 5p_2$

38. $D_1 = 1\,000 - 0.02p_1^2 - 0.05p_2^2$;
$D_2 = 800 - 0.001p_1^2 - p_1p_2$

39. $D_1 = 3\,000 + \dfrac{400}{p_1 + 3} + 50p_2$;
$D_2 = 2\,000 - 100p_1 + \dfrac{500}{p_2 + 4}$

40. $D_1 = 2\,000 + \dfrac{100}{p_1 + 2} - 25p_2$;
$D_2 = 1\,500 - \dfrac{p_2}{p_1 + 7}$

41. $D_1 = \dfrac{7p_2}{1 + p_1^2}$; $D_2 = \dfrac{p_1}{1 + p_2^2}$

42. $D_1 = 200{p_1}^{-1/2}{p_2}^{-1/2}$; $D_2 = 300{p_1}^{-1/2}{p_2}^{-3/2}$

ECUACIÓN DE LAPLACE *Se dice que la función $z = f(x, y)$ satisface la* ***ecuación de Laplace*** *si $zxx + zyy = 0$. Las funciones que satisfacen esta ecuación desempeñan un importante papel en varias aplicaciones de las ciencias físicas, en especial en la teoría de electricidad y magnetismo. En los problemas del 43 al 46, determine si la función dada satisface la ecuación de Laplace.*

43. $z = x^2 - y^2$

44. $z = xy$

45. $z = xe^y - ye^x$

46. $z = [(x - 1)^2 + (y + 3)^2]^{-1/2}$

47. DEMANDA DEL CONSUMIDOR Dos marcas competidoras de podadoras eléctricas se venden en la misma población. El precio de la primera marca es x dólares cada una, y el precio de la segunda marca es y dólares cada una. La demanda local de la primera marca de podadora está dada por la función $D(x, y)$.

a) ¿Cómo se espera que resulte afectada la demanda de la primera marca de podadora por un aumento en x? ¿Y por un aumento en y?

b) Traduzca su respuesta del inciso *a*) en términos de los signos de las derivadas parciales de D.

c) Si $D(x, y) = a + bx + cy$, ¿qué se puede decir sobre los signos de los coeficientes b y c para que se cumplan sus afirmaciones en los incisos *a*) y *b*)?

48. QUÍMICA La **ley de un gas ideal** dice que para n moles de un gas ideal, $PV = nRT$, donde P es la presión ejercida por el gas, V es el volumen del gas, T es la temperatura del gas, y R es una constante (la **constante de los gases**). Calcule el producto

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V}$$

49. CARDIOLOGÍA Para estimar la cantidad de sangre que circula por el pulmón de un paciente, los cardiólogos usan la fórmula empírica

$$P(x, y, u, v) = \frac{100xy}{xy + uv}$$

donde P es un porcentaje de la circulación sanguínea total, x es el dióxido de carbono que sale del pulmón, y es la diferencia arteriovenosa de dióxido de carbono en el pulmón, u es la salida de dióxido de carbono del pulmón, y v es la diferencia arteriovenosa de dióxido de carbono en el otro pulmón.

Se sabe que la sangre circula hacia los pulmones para recoger oxígeno y descargar dióxido de carbono, de modo que la diferencia arteriovenosa de dióxido de carbono mide la magnitud a la que se logra este intercambio.

www.FreeLibros.com

(La medición real se logra mediante un aparato llamado **desviador cardiaco.**) El dióxido de carbono se exhala entonces de los pulmones de modo que se pueda inhalar aire portador de oxígeno.

Calcule las derivadas parciales P_x, P_y, P_u y P_v, y dé una interpretación fisiológica de cada derivada.

50. CIRCUITO ELÉCTRICO En un circuito eléctrico con dos resistores de resistencia R_1 y R_2, conectados en paralelo, la resistencia total R está dada por la fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Demuestre que

$$R_1 \frac{\partial R}{\partial R_1} + R_2 \frac{\partial R}{\partial R_2} = R$$

51. CIRCULACIÓN SANGUÍNEA El flujo de sangre de una arteria hacia un pequeño capilar está dado por la fórmula

$$F(x, y, z) = \frac{c\pi x^2}{4}\sqrt{y - z} \quad \text{cm}^3/\text{s}$$

donde c es una constante positiva, x es el diámetro del capilar, y es la presión en la arteria y z es la presión en el capilar. ¿Qué función da la razón de cambio del flujo sanguíneo con respecto a la presión capilar, suponiendo una presión arterial y un diámetro capilar fijos? ¿Es creciente o decreciente esta razón?

52. PRODUCTIVIDAD MARGINAL Suponga que la producción Q de una fábrica depende de la cantidad K de inversión de capital medido en unidades de \$1 000 y L es la fuerza laboral medida en horas-trabajador. Dé una interpretación económica de la derivada parcial de segundo orden $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial K^2}$.

53. PRODUCTIVIDAD MARGINAL En cierta fábrica, la producción es $Q = 120K^{1/2}L^{1/3}$ unidades, donde K denota la inversión de capital medida en unidades de \$1 000 y L es la fuerza laboral medida en horas-trabajador.

a) Determine el signo de la derivada parcial de segundo orden $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial L^2}$ y dé una interpretación económica.

b) Determine el signo de la derivada parcial de segundo orden $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial K^2}$ y dé una interpretación económica.

54. LEY DE LOS RENDIMIENTOS DECRECIENTES Suponga que la producción diaria Q de una fábrica depende de la cantidad K de inversión de capital y de la fuerza laboral L. Una **ley de los rendimientos decrecientes** expresa que, en ciertas circunstancias, hay un valor L_0 tal que el producto marginal del trabajo será creciente para $L < L_0$ y decreciente para $L > L_0$.

a) Traduzca esta ley de rendimientos decrecientes en términos del signo de cierta derivada parcial de segundo orden.

b) Lea respecto al principio de rendimientos decrecientes en un texto de economía. Luego escriba un párrafo que analice los factores económicos que pudieran explicar este fenómeno.

55. Se estima que la producción semanal de cierta planta está dada por

$$Q(x, y) = 1\,175x + 483y + 3.1x^2y - 1.2x^3 - 2.7y^2$$

unidades, donde x es el número de trabajadores calificados y y el de no calificados empleados en la planta. Actualmente la fuerza laboral está formada por 37 trabajadores calificados y 71 no calificados.

a) En su calculadora introduzca la función de producción como

```
1 175X + 483Y + 3.1(X^2)*Y
       − 1.2(X^3) − 2.7(Y^2)
```

Asigne 37 como X y 71 como Y y evalúe para obtener $Q(37, 71)$. Repita para $Q(38, 71)$ y $Q(37, 72)$.

b) Introduzca la derivada parcial $Q_x(x, y)$ en su calculadora y evalúe $Q_x(37, 71)$. Use el resultado para estimar el cambio que resulta en la producción si la fuerza laboral se aumenta de 37 trabajadores calificados a 38 y los no calificados permanecen fijos en 71. Luego compare con el cambio real de la producción, dado por la diferencia $Q(38, 71) - Q(37, 71)$.

c) Use la derivada parcial $Q_y(x, y)$ para estimar el cambio que resulta en la producción si el número de trabajadores no calificados se aumenta de 71 a 72, mientras que el de calificados permanece en 37. Compare con el cambio real $Q(37, 72) - Q(37, 71)$.

56. Repita el problema 55 con la función de producción

$$Q(x, y) = 1\,731x + 925y + x^2y - 2.7x^2 - 1.3y^{3/2}$$

y niveles de empleo iniciales de $x = 43$ y $y = 85$.

www.FreeLibros.com

SECCIÓN 7.3 | Funciones de optimización de dos variables

Suponga que un fabricante produce dos modelos de reproductores de DVD, el de lujo y el estándar, y que el costo total de producir x unidades del de lujo y y unidades del estándar está dado por la función $C(x, y)$. ¿Cómo encontrar el nivel de producción $x = a$ y $y = b$ que dé como resultado el costo mínimo? O quizá la salida de cierto proceso de producción está dada por $Q(K, L)$, donde K y L miden el capital y la fuerza laboral, respectivamente. ¿Qué niveles de K_0 y L_0 dan como resultado la máxima producción?

En la sección 3.4 usted aprendió a usar la derivada $f'(x)$ para hallar los valores máximo y mínimo de una función de una sola variable $f(x)$, y el objetivo de esta sección es ampliar esos métodos a funciones de dos variables $f(x, y)$. Comencemos con una definición.

Extremos relativos ■ Se dice que la función $f(x, y)$ tiene un **máximo relativo** en un punto $P(a, b)$ del dominio de f si $f(a, b) \geq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) en un disco circular con centro en P. Análogamente, si $f(c, d) \leq f(x, y)$ para todos los puntos (x, y) en un disco circular con centro en Q, entonces $f(x, y)$ tiene un **mínimo relativo** en $Q(c, d)$.

En términos geométricos, hay un máximo relativo de $f(x, y)$ en $P(a, b)$ si la superficie $z = f(x, y)$ tiene una "cima" en el punto $(a, b, f(a, b))$; esto es, si $(a, b, f(a, b))$ está al menos tan alto como cualquier punto cercano de la superficie. Del mismo modo, se tiene un mínimo relativo de $f(x, y)$ en $Q(c, d)$ si el punto $(c, d, f(c, d))$ está en el fondo de un "valle," de modo que $(c, d, f(c, d)$ está al menos tan bajo como cualquier punto cercano de la superficie. Por ejemplo, en la figura 7.11, la función $f(x, y)$ tiene un máximo relativo en $P(a, b)$ y un mínimo relativo en $Q(c, d)$.

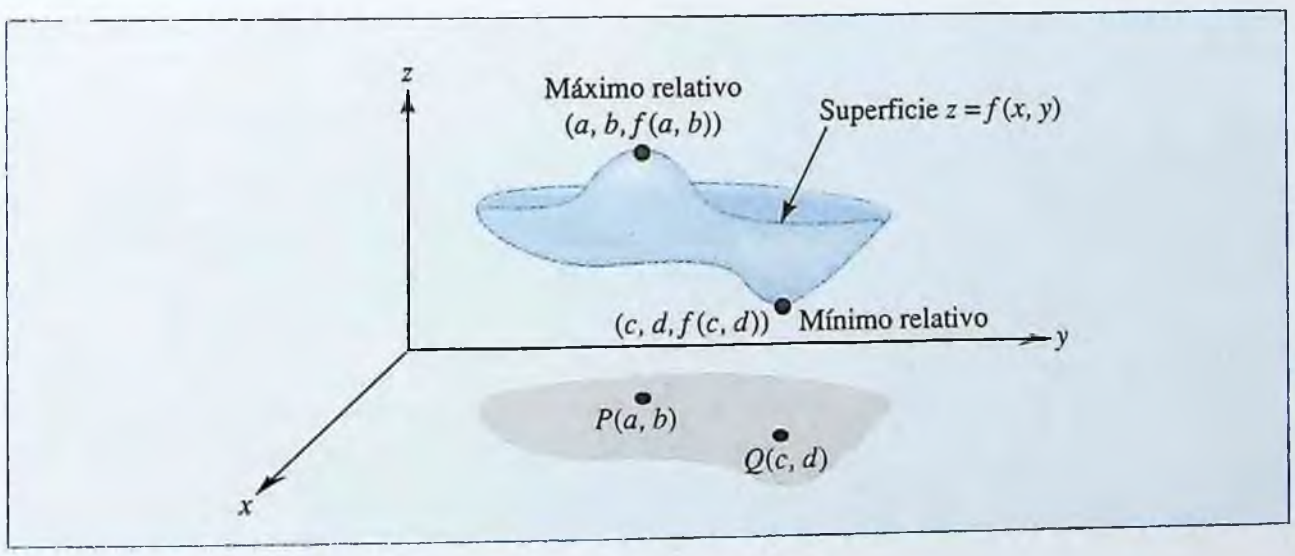


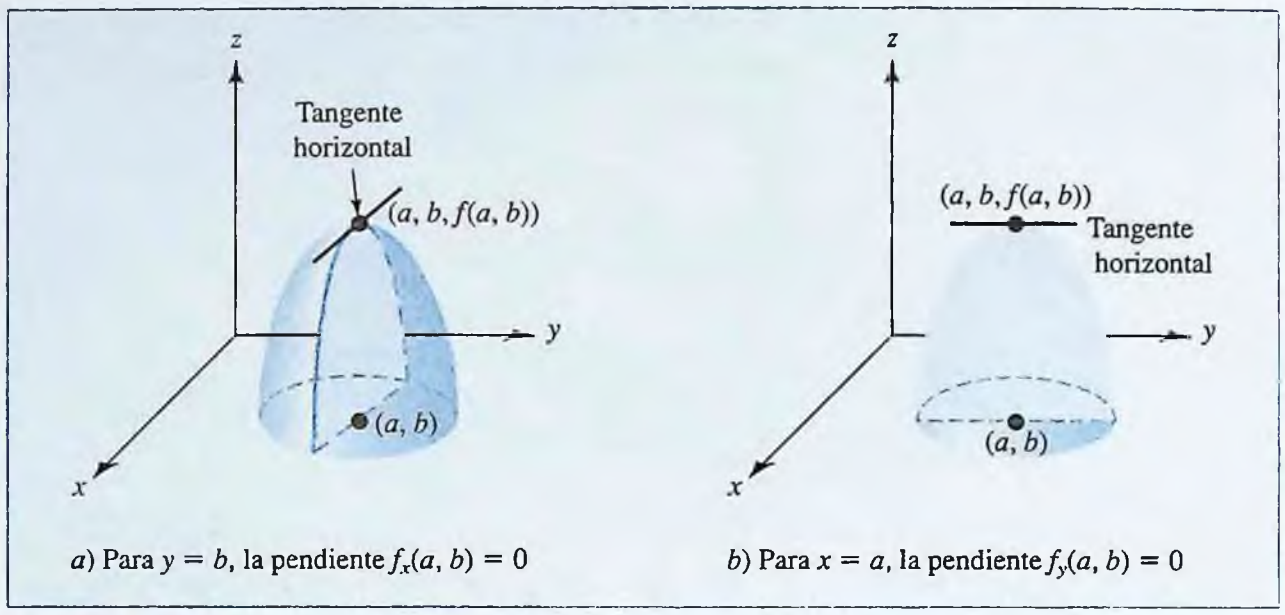
FIGURA 7.11 Extremos relativos de la función $f(x, y)$.

Puntos críticos Los puntos (a, b) del dominio de $f(x, y)$ para los que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$ se dice que son **puntos críticos** de f. Al igual que los números críticos para funciones de una variable, estos puntos críticos desempeñan un importante papel en el estudio de máximos y mínimos relativos.

Para ver la conexión entre puntos críticos y extremos relativos, suponga que $f(x, y)$ tiene un máximo relativo en (a, b). Entonces la curva formada por la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano vertical $y = b$ tiene un máximo relativo y por tanto

www.FreeLibros.com

una recta tangente horizontal cuando $x = a$ (vea la figura 7.12*a*). Como la derivada parcial $f_x(a, b)$ es la pendiente de esta recta tangente, se deduce que $f_x(a, b) = 0$. Del mismo modo, la curva formada por la intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $x = a$ tiene un máximo relativo cuando $y = b$ (vea la figura 7.12*b*), y por tanto $f_y(a, b) = 0$. Esto indica que un punto en el que una función de dos variables tiene un máximo relativo debe ser un punto crítico. Un argumento semejante muestra que un punto en el que una función de dos variables tiene un mínimo relativo también debe ser un punto crítico.



a) Para $y = b$, la pendiente $f_x(a, b) = 0$

b) Para $x = a$, la pendiente $f_y(a, b) = 0$

FIGURA 7.12 Las derivadas parciales son cero en un extremo relativo.

A continuación veamos un planteamiento más preciso de la situación.

Puntos críticos y extremos relativos ■ Un punto (a, b) del dominio de $f(x, y)$ para el cual las derivadas parciales f_x y f_y existen se denomina *punto crítico* de f si

$$f_x(a, b) = 0 \qquad \text{y} \qquad f_y(a, b) = 0$$

Si las derivadas parciales de primer orden de f existen en todos los puntos de alguna región R del plano xy, entonces los extremos relativos de f en R pueden estar sólo en puntos críticos.

Puntos de silla

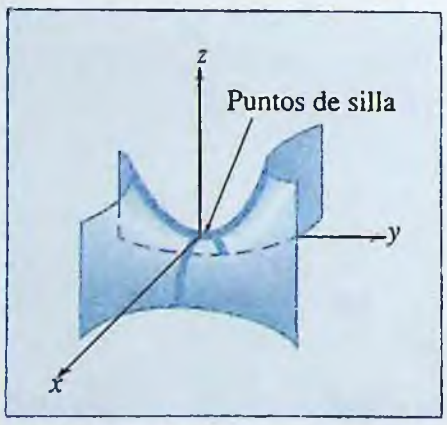


FIGURA 7.13 Superficie de silla $z = y^2 - x^2$.

Aún cuando todos los extremos relativos de una función deben ocurrir en puntos críticos, no todo punto crítico de una función corresponde a un extremo relativo. Por ejemplo, si $f(x, y) = y^2 - x^2$, entonces

$$f_x(x, y) = -2x \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = 2y$$

y $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Así, el origen $(0, 0)$ es un punto crítico para $f(x, y)$, y la superficie $z = y^2 - x^2$ tiene tangentes horizontales en el origen a lo largo del eje x y del eje y. No obstante, en el plano xz (donde $y = 0$) la superficie tiene la ecuación $z = -x^2$, que es una parábola que abre hacia abajo, mientras que en el plano yz (donde $x = 0$), tenemos la parábola $z = y^2$ que abre hacia arriba. Esto significa que, en el origen, la superficie $z = y^2 - x^2$ tiene un *máximo relativo* cuando se observa en la "dirección x", y un *mínimo relativo* cuando se observa en la "dirección y."

En lugar de tener una "cima" o un "valle" sobre el punto crítico $(0, 0)$, la superficie $z = y^2 - x^2$ tiene forma de "silla de montar" como se muestra en la figura 7.13,

www.FreeLibros.com

y por esta razón se llama **superficie de silla.** Para que un punto crítico corresponda a un extremo relativo, el mismo comportamiento extremo (máximo o mínimo) debe ocurrir en *todas direcciones*. Cualquier punto crítico (como el origen en este ejemplo) donde hay un máximo relativo en una dirección y un mínimo relativo en otra dirección se llama **punto de silla**.

Prueba de segundas parciales

A continuación se verá un procedimiento en el que se usan las derivadas parciales de segundo orden para determinar si cierto punto crítico es un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto de silla. Este procedimiento es la versión para dos variables de la prueba de la segunda derivada para funciones de una sola variable, que estudiamos en la sección 3.2.

Prueba de segundas parciales

Sea $f(x, y)$ una función de x y y cuyas derivadas parciales f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy} y f_{xy} existen todas, y sea $D(x, y)$ la función

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)\, f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$$

Paso 1. Encuentre todos los puntos críticos de $f(x, y)$; esto es, todos los puntos (a, b) donde

$$f_x(a, b) = 0 \qquad \text{y} \qquad f_y(a, b) = 0$$

Paso 2. Para cada punto crítico (a, b) encontrado en el paso 1, evalúe $D(a, b)$.

Paso 3. Si $D(a, b) < 0$, hay un **punto de silla** en (a, b).

Paso 4. Si $D(a, b) > 0$, considere $f_{xx}(a, b)$

Si $f_{xx}(a, b) > 0$, hay un **mínimo relativo** en (a, b).

Si $f_{xx}(a, b) < 0$, hay un **máximo relativo** en (a, b).

Si $D = 0$, la prueba no es concluyente y f puede tener ya sea un extremo relativo o un punto de silla en (a, b).

Nótese que hay un punto de silla en el punto crítico (a, b) sólo cuando la cantidad D en la prueba de las segundas derivadas parciales es negativa. Si D es positiva, existe ya sea un máximo relativo o un mínimo relativo *en todas direcciones*. Para determinar cuál, se puede restringir la atención en cualquier dirección (la dirección x, por ejemplo) y usar el signo de la segunda derivada parcial f_{xx} en exactamente la misma forma en que la derivada segunda de una sola variable se usó en la prueba de segunda derivada vista en el capítulo 3; es decir,

un máximo relativo si $f_{xx}(a, b) > 0$
un mínimo relativo si $f_{xx}(a, b) < 0$

Se puede ver que el siguiente resumen tabular es una forma cómoda de recordar las conclusiones de la prueba de segundas parciales:

Signo de D	Signo de f_{xx}	Comportamiento en (a, b)
+	+	Mínimo relativo
+	−	Máximo relativo
−		Punto de silla

La prueba de las segundas derivadas parciales comprende ideas que están fuera del alcance de este libro y son omitidas. Los ejemplos del 7.3.1 al 7.3.3 ilustran la forma en que se puede usar la prueba.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

En referencia al ejemplo 7.3.1. Introduzca $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el editor de ecuaciones como $Y1 = X^2 + L1^2$, donde $L1 = \{-1, -0.6, 0, 0.8, 1.2\}$. Grafique usando el estilo que muestre una pelota con aro. Ponga mucha atención en el orden de las curvas porque representan secciones transversales de la función en valores y especificados, que aparecen en L1. Describa lo que observa.

EJEMPLO 7.3.1

Encuentre todos los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ y clasifique cada uno como un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto de silla.

Solución

Como

$$f_x = 2x \quad \text{y} \quad f_y = 2y$$

el único punto crítico de f es $(0, 0)$. Para poner a prueba este punto, use las derivadas parciales de segundo orden

$$f_{xx} = 2 \quad f_{yy} = 2 \quad \text{y} \quad f_{xy} = 0$$

y obtenga

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (2)(2) - 0^2 = 4$$

Esto es, $D(x, y) = 4$ para *todos* los puntos (x, y) y, en particular,

$$D(0, 0) = 4 > 0$$

Por tanto, f tiene un extremo relativo en $(0, 0)$. Además, como

$$f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$$

se deduce que el extremo relativo en $(0, 0)$ es un mínimo relativo. Como referencia, la gráfica de f aparece en la figura 7.14.

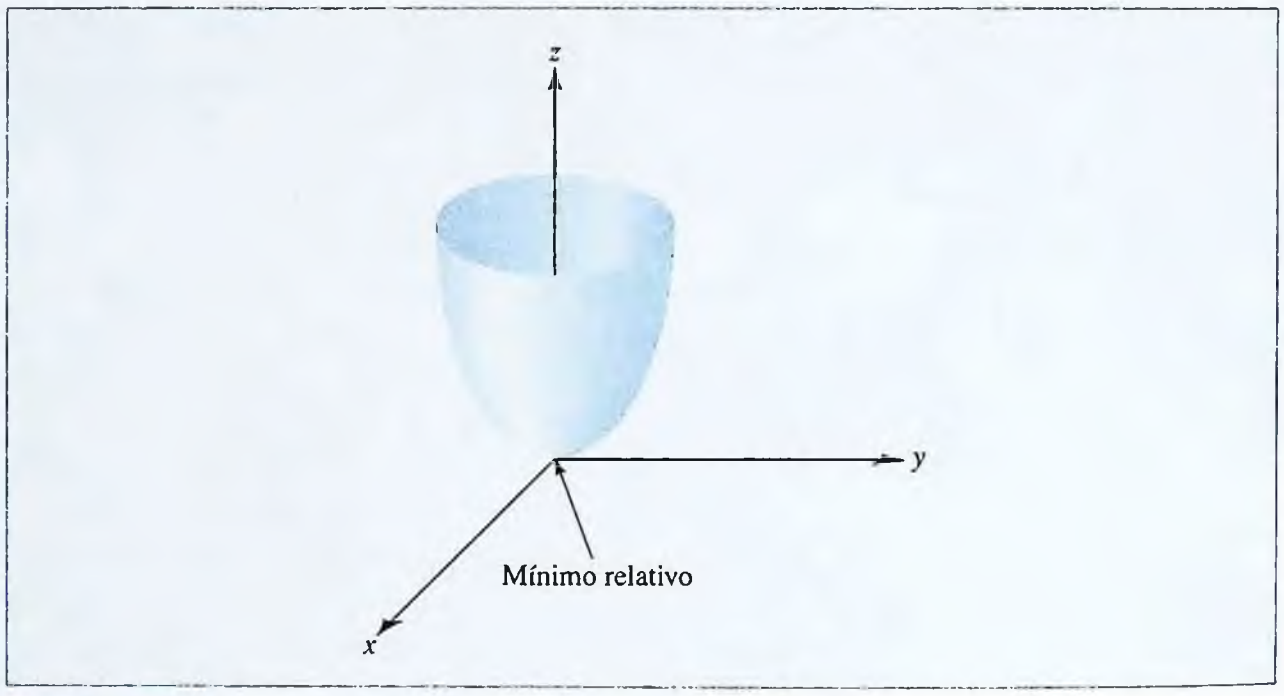


FIGURA 7.14 Superficie $z = x^2 + y^2$ con un mínimo relativo en $(0, 0)$.

EJEMPLO 7.3.2

Encuentre todos los puntos críticos de la función $f(x, y) = 12x - x^3 - 4y^2$ y clasifique cada uno como un máximo relativo, un mínimo relativo o punto de silla.

Solución

Como

$$f_x = 12 - 3x^2 \quad \text{y} \quad f_y = -8y$$

www.FreeLibros.com

los puntos críticos se encuentran resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones

$$12 - 3x^2 = 0$$
$$-8y = 0$$

De la segunda ecuación obtenemos $y = 0$ y, de la primera,

$$3x^2 = 12$$
$$x = 2 \text{ o } -2$$

Por tanto, hay dos puntos críticos, $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.

Para determinar la naturaleza de estos puntos, primero se calcula

$$f_{xx} = -6x \qquad f_{yy} = -8 \qquad \text{y} \qquad f_{xy} = 0$$

y luego se forma la función

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-6x)(-8) - 0 = 48x$$

Al aplicar la prueba de las segundas derivadas parciales a los dos puntos críticos, se obtiene

$$D(2, 0) = 48(2) = 96 > 0 \qquad \text{y} \qquad f_{xx}(2, 0) = -6(2) = -12 < 0$$

y

$$D(-2, 0) = 48(-2) = -96 < 0$$

de modo que hay un máximo relativo en $(2, 0)$ y un punto de silla en $(-2, 0)$. Estos resultados se resumen en la siguiente tabla.

Punto crítico (a, b)	Signo de $D(a, b)$	Signo de $f_{xx}(a, b)$	Comportamiento en (a, b)
$(2, 0)$	$+$	$-$	Máximo relativo
$(-2, 0)$	$-$		Punto de silla

Pocas veces la resolución simultánea de las ecuaciones $f_x = 0$ y $f_y = 0$ para hallar los puntos críticos de una función de dos variables resulta tan sencillo como en los ejemplos 7.3.1 y 7.3.2. El álgebra del siguiente ejemplo es más típica. Antes de continuar, se puede consultar el Repaso de Álgebra que se encuentra al final de este libro, en el que se estudian técnicas para resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

EJEMPLO 7.3.3

Encuentre todos los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^3 - y^3 + 6xy$ y clasifique cada uno como máximo relativo, mínimo relativo o punto de silla.

Solución

Como

$$f_x = 3x^2 + 6y \qquad \text{y} \qquad f_y = -3y^2 + 6x$$

los puntos críticos de f se encuentran resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones

$$3x^2 + 6y = 0 \qquad \text{y} \qquad -3y^2 + 6x = 0$$

www.FreeLibros.com

REPASO

Justo-a-tiempo

Recuerde que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ de modo que $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$. Como $x^2 + 2x + 4 = 0$ no tiene soluciones reales (como se puede ver usando la ecuación cuadrática), la única solución real de $x^3 - 8 = 0$ es $x = 2$.

De la primera ecuación, se obtiene $y = -\frac{x^2}{2}$ que se puede sustituir en la segunda ecuación para encontrar

$$-3\left(\frac{-x^2}{2}\right)^2 + 6x = 0$$

$$-\frac{3x^4}{4} + 6x = 0$$

$$-x(x^3 - 8) = 0$$

Las soluciones de dicha ecuación son $x = 0$ y $x = 2$. Éstas son las coordenadas x de los puntos críticos de f. Para obtener las coordenadas y correspondientes, sustituya estos valores de x en la ecuación $y = -\frac{x^2}{2}$ (o en cualquiera de las dos ecuaciones originales). Así encontrará que $y = 0$ cuando $x = 0$ y $y = -2$ cuando $x = 2$. De ahí se deduce que los puntos críticos de f son $(0, 0)$ y $(2, -2)$.

Las derivadas parciales de segundo orden de f son

$$f_{xx} = 6x \qquad f_{yy} = -6y \qquad \text{y} \qquad f_{xy} = 6$$

Por tanto,

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = -36xy - 36 = -36(xy + 1)$$

Como

$$D(0, 0) = -36[(0)(0) + 1] = -36 < 0$$

se deduce que f tiene un punto de silla en $(0, 0)$. Como

$$D(2, -2) = -36[2(-2) + 1] = 108 > 0$$

y

$$f_{xx}(2, -2) = 6(2) = 12 > 0$$

se ve que f tiene un mínimo relativo en $(2, -2)$. Para resumir:

Punto crítico (a, b)	$D(a, b)$	$f_{xx}(a, b)$	Comportamiento en (a, b)
$(0, 0)$	$-$		Punto de silla
$(2, -2)$	$+$	$+$	Mínimo relativo

Problemas prácticos de optimización

En el ejemplo 7.3.4 se usará la teoría de extremos relativos para resolver un problema de optimización de economía. En realidad, se trata de hallar el máximo *absoluto* de cierta función, el que coincide con el máximo *relativo* de la función. Esto es típico de problemas de optimización de dos variables en ciencias sociales y biológicas, y *en este texto, usted puede suponer que un extremo relativo que se halla como la solución de un problema práctico de optimización es en realidad el extremo absoluto.*

EJEMPLO 7.3.4

La única tienda de abarrotes en una pequeña comunidad rural vende dos marcas de jugo congelado de manzana: una marca local, que obtiene a un costo de 30 centavos por lata, y una bien conocida marca nacional que obtiene a un costo de 40 centavos por la-

www.FreeLibros.com

ta. El abarrotero estima que si la marca local se vende a x centavos por lata y la marca nacional a y centavos por lata, entonces todos los días se venderán aproximadamente $70 - 5x + 4y$ latas de la marca local y $80 + 6x - 7y$ latas de la marca nacional. ¿Qué precio debe aplicar el abarrotero a cada marca para maximizar la utilidad por la venta del jugo?

Solución

Como

$$\begin{pmatrix}\text{Utilidad}\\ \text{total}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{utilidad por la venta}\\ \text{de la marca local}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{utilidad por la venta}\\ \text{de la marca nacional}\end{pmatrix}$$

se deduce que la utilidad diaria total por la venta del jugo está dada por la función

$$f(x, y) = (70 - 5x + 4y) \cdot (x - 30) + (80 + 6x - 7y) \cdot (y - 40)$$

artículos vendidos *utilidad por artículo* *artículos vendidos* *utilidad por artículo*
marca local *marca nacional*

$$= -5x^2 + 10xy - 20x - 7y^2 + 240y - 5\,300$$

Calcule las derivadas parciales

$$f_x = -10x + 10y - 20 \quad \text{y} \quad f_y = 10x - 14y + 240$$

e iguálelas a cero para obtener

$$-10x + 10y - 20 = 0 \quad \text{y} \quad 10x - 14y + 240 = 0$$

o bien,

$$-x + y = 2 \quad \text{y} \quad 5x - 7y = -120$$

A continuación, resuelva simultáneamente estas ecuaciones para obtener

$$x = 53 \quad \text{y} \quad y = 55$$

Se deduce que (53, 55) es el único punto crítico de f.

A continuación aplique la prueba de segundas derivadas parciales. Como

$$f_{xx} = -10 \quad f_{yy} = -14 \quad \text{y} \quad f_{xy} = 10$$

se tiene

$$D(x, y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (-10)(-14) - (10)^2 = 40$$

Pero como

$$D(53, 55) = 40 > 0 \quad \text{y} \quad f_{xx}(53, 55) = -10 < 0$$

se deduce que f tiene un máximo (relativo) cuando $x = 53$ y $y = 55$. Esto es, el abarrotero puede maximizar sus utilidades al vender la marca local de jugo en 53 centavos por lata y la marca nacional en 55 centavos por lata.

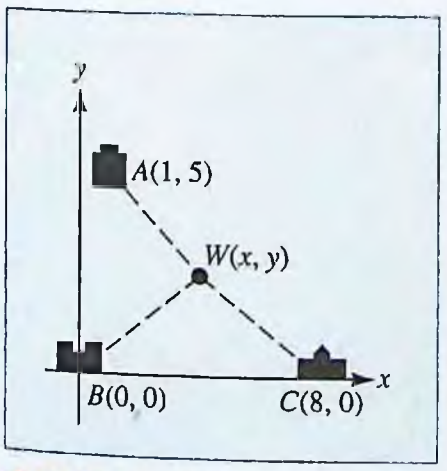


FIGURA 7.15 Ubicaciones de los negocios A, B y C, y del almacén W.

EJEMPLO 7.3.5

El gerente comercial de Acme Corporation traza una red en un mapa de la región a la que Acme presta servicio, y determina que los tres clientes más importantes de la compañía están situados en los puntos $A(1,5)$, $B(0, 0)$ y $C(8, 0)$, donde las unidades están en millas. ¿En qué punto $W(x, y)$ debe situarse un almacén para minimizar la suma de los cuadrados de las distancias desde W a A, B y C (vea la figura 7.15)?

www.FreeLibros.com

Solución

La suma de los cuadrados de las distancias de W a A, B y C está dada por la función

$$S(x, y) = [(x-1)^2 + (y-5)^2] + (x^2 + y^2) + [(x-8)^2 + y^2]$$

suma de cuadrados de las distancias — *cuadrado de la distancia de W a A* — *cuadrado de la distancia de W a B* — *cuadrado de la distancia de W a C*

Para minimizar $S(x, y)$, se comienza calculando las derivadas parciales

$$S_x = 2(x-1) + 2x + 2(x-8) = 6x - 18$$
$$S_y = 2(y-5) + 2y + 2y = 6y - 10$$

Entonces $S_x = 0$ y $S_y = 0$ cuando

$$6x - 18 = 0$$
$$6y - 10 = 0$$

o $x = 3$ y $y = \frac{5}{3}$. Como $S_{xx} = 6$, $S_{xy} = 0$ y $S_{yy} = 6$, se obtiene

$$D = S_{xx}S_{yy} - (S_{xy})^2 = (6)(6) - 0^2 = 36 > 0$$

y

$$S_{xx}\left(3, \frac{5}{3}\right) = 6 > 0$$

Por tanto, la suma de cuadrados se minimiza en el punto $W\left(3, \frac{5}{3}\right)$ del mapa.

PROBLEMAS | 7.3

En los problemas del 1 al 20 encuentre los puntos críticos de la función dada y clasifique cada uno como máximo relativo, mínimo relativo o punto de silla.

1. $f(x, y) = 5 - x^2 - y^2$
2. $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2$
3. $f(x, y) = xy$
4. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy + 14y$
5. $f(x, y) = \frac{16}{x} + \frac{6}{y} + x^2 - 3y^2$
6. $f(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$
7. $f(x, y) = 2x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y - 12x - 4$
8. $f(x, y) = (x-1)^2 + y^3 - 3y^2 - 9y + 5$
9. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 9x + 5y + 2$
10. $f(x, y) = -x^4 - 32x + y^3 - 12y + 7$
11. $f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{1-x^2-y^2}$
12. $f(x, y) = (x-4)\ln(xy)$
13. $f(x, y) = x^3 - 4xy + y^3$
14. $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2 + 4}$
15. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2-6y)}$
16. $f(x, y) = 2x^4 + x^2 + 2xy + 3x + y^2 + 2y + 5$
17. $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 3x - 2y + 1}$
18. $f(x, y) = xye^{-\left(\frac{16x^2+9y^2}{288}\right)}$
19. $f(x, y) = x\ln\left(\frac{y^2}{x}\right) + 3x - xy^2$
20. $f(x, y) = 4xy - 2x^4 - y^2 + 4x - 2y$

www.FreeLibros.com

21. VENTAS AL MENUDEO Una tienda vende dos marcas de camisas competidoras, una de ellas apoyada por Tim Duncan y la otra por Shaq O'Neal. El propietario de la tienda puede obtener ambos tipos a un costo de $2 por camisa y estima que si las camisas Duncan se venden en x dólares por pieza, y las camisas O'Neal en y dólares por pieza, los consumidores comprarán aproximadamente $40 - 50x + 40y$ camisas Duncan y $20 + 60x - 70y$ camisas O'Neal todos los días. ¿A qué precio debe vender el propietario las camisas para generar la máxima utilidad posible?

22. PRECIOS Una compañía telefónica está planeando introducir dos nuevos tipos de sistemas ejecutivos de comunicación que espera vender a sus clientes comerciales más importantes. Se estima que si al primer tipo de sistema se aplica un precio de x cientos de dólares por sistema, y al segundo tipo, de y cientos de dólares por sistema, aproximadamente $40 - 8x + 5y$ consumidores comprarán el primer tipo y $50 + 9x - 7y$ comprarán el segundo tipo. Si el costo de fabricación del primer tipo es $1 000 por sistema y el costo de fabricar el segundo tipo es $3 000 por sistema, ¿qué precio debe aplicar la compañía telefónica a sus sistemas para generar la máxima utilidad posible?

23. CONSTRUCCIÓN Suponga que usted desea construir una caja rectangular con un volumen de 32 pies^3, en cuya construcción se utilizarán tres materiales diferentes. El material para los lados cuesta $1 por pie cuadrado, el material para el fondo cuesta $3 por pie cuadrado y el de la tapa cuesta $5 por pie cuadrado. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja menos costosa?

24. CONSTRUCCIÓN Un agricultor desea cercar un campo rectangular a lo largo de la orilla de un río. El área de pasto debe ser de 6 400 yd^2 y no se necesita cerca a lo largo de la orilla del río. Encuentre las dimensiones del campo que requiere la mínima cantidad de cerca.

25. VENTAS AL MENUDEO Una compañía produce x unidades de la mercancía A y y unidades de la mercancía B. Todas las unidades se pueden vender en $p = 100 - x$ dólares por unidad de A y $q = 100 - y$ dólares por unidad de B. El costo (en dólares) de producir estas unidades está dado por la función de costo conjunto $C(x, y) = x^2 + xy + y^2$. ¿Qué valor deben tener x y y para maximizar la utilidad?

26. VENTAS AL MENUDEO Repita el problema 25 para el caso donde $p = 20 - 5x$, $q = 4 - 2y$, y $C = 2xy + 4$.

27. RESPUESTA A ESTÍMULOS Considere un experimento en el que un sujeto realiza un trabajo mientras está expuesto a dos estímulos diferentes (por ejemplo, sonido y luz). Para niveles bajos de los estímulos, el rendimiento del sujeto puede realmente mejorar, pero cuando los estímulos aumentan, en última instancia se convierten en distracción y el rendimiento empieza a deteriorarse. Suponga un cierto experimento en el que se aplican x unidades del estímulo A y y unidades del estímulo B, y el rendimiento de un sujeto está medido por la función

$$f(x, y) = C + xye^{1-x^2-y^2}$$

donde C es una constante positiva. ¿Cuántas unidades de cada estímulo dan como resultado el máximo rendimiento?

28. OPCIONES SOCIALES Es frecuente que el atractivo social de una empresa consista en hacer una selección entre la ventaja comercial de la empresa y la pérdida social o ecológica que pueda resultar. Por ejemplo, la industria maderera suministra productos de papel a la sociedad, e ingreso a muchos trabajadores y empresarios; pero, la ganancia puede ser desviada de la destrucción de territorio habitable para lechuzas manchadas y otras especies en peligro de extinción. Suponga que el atractivo social de una empresa en particular está medido por la función

$$D(x, y) = (16 - 6x)x - (y^2 - 4xy + 40)$$

donde x mide la ventaja comercial (utilidad y trabajos) y y mide la desventaja ecológica (desplazamiento de especies, como porcentaje) con $x \geq 0$ y $y \geq 0$. La empresa es considerada deseable si $D \geq 0$ e indeseable si $D < 0$.

a) ¿Qué valores de x y y maximizan el atractivo social? Interprete su resultado. ¿Es posible que esta empresa sea deseable?

b) La función dada en este ejercicio es artificial, no así las ideas. Investigue el tema de la ética en industrias y escriba un párrafo acerca de cómo piensa usted que deben ser estas opciones.[8]

29. FÍSICA DE PARTÍCULAS Una partícula de masa m en una caja rectangular con dimensiones x, y y z tiene energía en estado fundamental

$$E(x, y, z) = \frac{k^2}{8m}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$$

donde k es una constante física. Si el volumen de la caja satisface $xyz = V_0$ para un volumen V_0 constante, encuentre los valores de x, y y z que minimicen la energía en estado fundamental.

[8] Empiece con el artículo de K. R. Stollery, "Environmental Controls in Extractive Industries", *Land Economics*, Vol. 61, 1985, p. 169.

www.FreeLibros.com

30. ASIGNACIÓN DE FONDOS Un fabricante está planeando vender un nuevo producto a un precio de \$150 por unidad, y estima que si x miles de dólares se gastan en desarrollo y y miles de dólares en promoción, los consumidores comprarán aproximadamente $\frac{320y}{y+2} + \frac{160x}{x+4}$ unidades del producto. Si los costos de manufactura para este producto son \$50 por unidad, ¿cuánto debe gastar el fabricante en desarrollo y cuánto en promoción para generar la máxima utilidad posible por la venta de este producto? [*Sugerencia:* Utilidad = (número de unidades)(precio por unidad − costo por unidad) − cantidad total gastada en desarrollo y promoción.]

31. UTILIDAD EN UN MONOPOLIO Un fabricante con derechos exclusivos sobre una nueva máquina industrial de diseño avanzado está planeando vender un número limitado de las máquinas a empresas extranjeras y nacionales. El precio que el fabricante espera recibir por las máquinas dependerá del número de máquinas de que se pueda disponer. (Por ejemplo, si sólo unas pocas máquinas se ponen en el mercado, la cotización competitiva entre compradores potenciales tenderá a subir el precio.) Se estima que si el fabricante oferta x máquinas al mercado nacional y y máquinas al mercado extranjero, las máquinas se venderán en $60 - \frac{x}{5} + \frac{y}{20}$ miles de dólares cada una en el mercado nacional, y en $50 - \frac{y}{10} + \frac{x}{20}$ miles de dólares cada una en el extranjero. Si el fabricante puede producir máquinas a un costo de \$10 000 cada una, ¿cuántas debe ofertar a cada mercado para generar la máxima utilidad posible?

32. UTILIDAD EN UN MONOPOLIO Un fabricante con derechos exclusivos sobre una nueva máquina industrial está planeando vender un número limitado de ellas y estima que si se ofertan x máquinas al mercado nacional y y al mercado extranjero, las máquinas se venderán en $150 - \frac{x}{6}$ miles de dólares cada una en el mercado nacional y en $100 - \frac{y}{20}$ miles de dólares cada una en el extranjero.

a) ¿Cuántas máquinas debe ofertar el fabricante al mercado nacional para generar la máxima utilidad posible en el país?

b) ¿Cuántas máquinas debe ofertar el fabricante al mercado extranjero para generar la máxima utilidad posible en el extranjero?

c) ¿Cuántas máquinas debe ofertar el fabricante a cada uno de estos mercados para generar la máxima utilidad *total* posible?

d) ¿Es accidental la relación entre las respuestas en las partes *a*), *b*) y *c*)? Explique. ¿Se cumple una relación semejante en el problema 31? ¿Qué explica la diferencia entre los resultados de estos dos problemas?

33. PLANEACIÓN URBANA Cuatro poblaciones pequeñas en una zona rural desean poner en un fondo común sus recursos para construir una estación de televisión. Si las poblaciones están ubicadas en los puntos $(-5, 0)$,$(1, 7)$, $(9, 0)$ y $(0, -8)$ de un mapa cuadriculado, en donde las unidades están en millas, ¿en qué punto $S(a, b)$ debe construirse la estación para minimizar la suma de cuadrados de las distancias desde las poblaciones?

34. MANTENIMIENTO Sobre un mapa cuadriculado se han ubicado cuatro torres de perforación petrolera en los puntos $(-300, 0)$, $(-100, 500)$, $(0, 0)$ y $(400, 300)$, donde las unidades están en pies. ¿En que punto $M(a, b)$ debe construirse un taller de mantenimiento para minimizar la suma de cuadrados de las distancias desde las torres?

35. GENÉTICA Las formas alternativas de un gen se denominan *alelos*. Tres alelos, designados como A, B y O, determinan los cuatro tipos de sangre humana A, B, O y AB. Suponga que p, q y r son las proporciones de A, B y O en cierta población, de modo que $p + q + r = 1$. Entonces, de acuerdo con la ley genética de Ardy-Weinberg , la proporción de individuos en la población que son portadores de dos alelos diferentes, está dada por $P = 2pq + 2pr + 2rq$. ¿Cuál es el máximo valor de P?

36. APRENDIZAJE En un experimento de aprendizaje, a un sujeto se le dan primero x minutos para examinar una lista de datos. La hoja de información se retira entonces y al sujeto se le permiten y minutos para prepararse mentalmente para un examen basado en la hoja de información. Suponga que se encuentra que la calificación alcanzada por un sujeto en particular está relacionada con x y y por la fórmula

$$S(x, y) = -x^2 + xy + 10x - y^2 + y + 15$$

a) ¿Qué calificación obtiene el sujeto si toma la prueba "en frío" (sin estudio ni contemplación)?

b) ¿Cuánto tiempo debe pasar el sujeto en estudio y en contemplación para maximizar su calificación? ¿Cuál es la calificación máxima?

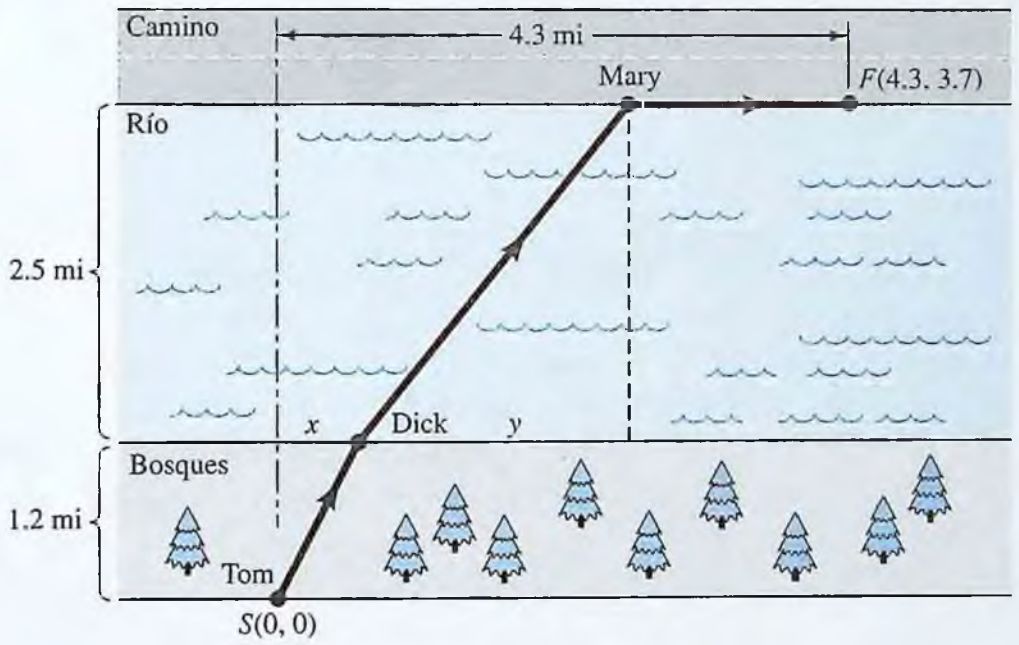
www.FreeLibros.com

37. Tom, Dick y Mary participan en una carrera de relevos a campo traviesa. Tom avanzará tan rápido como pueda por espesos bosques al borde de un río, luego Dick lo relevará y remará a la orilla opuesta. Por último, Mary tomará la estafeta y correrá a lo largo del camino del río hasta la línea de meta. La pista se muestra en la siguiente figura. Los equipos deben salir del punto S y llegar al punto F, pero pueden posicionar uno de sus miembros en cualquier punto a lo largo de la orilla del río y otro a lo largo del camino del río.

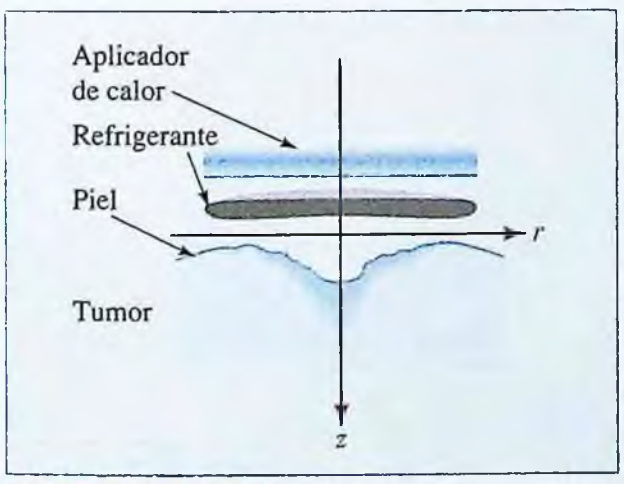
a) Suponga que Tom puede avanzar a 2 mph, Dick puede remar a 4 mph y Mary puede correr a 6 mph. ¿Dónde deben esperar Dick y Mary para recibir la estafeta de forma que el equipo llegue a la meta lo más rápido posible?

b) La competencia principal para Tom, Dick y Mary es el equipo de Ann, Jan y Phineas. Si Ann puede avanzar a 1.7 mph, Jan puede remar a 3.5 mph y Phineas puede correr a 6.3 mph, ¿cuál equipo debe ganar? ¿Por qué diferencia?

c) ¿Le recuerda este problema al lector el caso del espía del problema 20 de la sección 3.5? Cree su propio relato de espías basado en las ideas matemáticas de este problema.



PROBLEMA 37



PROBLEMA 38

38. TERAPIA CONTRA EL CÁNCER Ciertos tumores malignos que no responden a métodos convencionales de tratamiento como la cirugía o quimioterapia pueden ser tratados con **hipertermia,** que significa la aplicación de calor extremo en tumores usando transmisiones de microondas.[9] Una clase particular de aplicador de microondas empleado en este tipo de terapia produce una densidad de energía absorbida que disminuye en forma exponencial. Específicamente, la temperatura en cada punto localizado r unidades desde el eje central de un tumor, y z unidades dentro del tumor, está dada por una fórmula del tipo

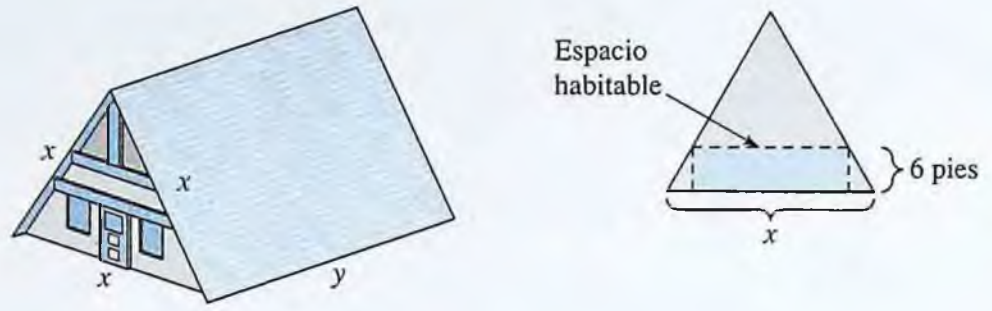
$$T(r, z) = Ae^{-pr^2}(e^{-qz} - e^{-sz})$$

donde A, p, q y s son constantes positivas que dependen de propiedades de la sangre y del aparato de calentamiento. ¿A qué profundidad dentro del tumor se presenta la máxima temperatura? Exprese su respuesta en términos de A, p, q y s.

[9] Las ideas de este ensayo están basadas en el artículo de Leah Edelstein-Keshet, "Heat Therapy for Tumors", *UMAP Modules 1991: Tools por Teaching*, Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., Lexington, MA, 1992, pp. 73-101.

www.FreeLibros.com

39. ESPACIO HABITABLE Defina el *espacio habitable* de un edificio como el volumen de espacio en el edificio donde una persona de 6 pies de estatura pueda caminar (erguido). Una cabaña de estructura en forma de A mide y pies de largo y tiene forma de triángulo equilátero de x pies de lado, como se muestra en la figura siguiente. Si el área superficial de la cabaña (techo y dos extremos) es de 500 pies^2, ¿qué dimensiones x y y maximizan el espacio habitable?



PROBLEMA 39

40. FIGURAS EN LAS ALAS DE LAS MARIPOSA Las hermosas figuras de las alas de las mariposas han sido durante mucho tiempo objeto de curiosidad y estudio científico. Modelos matemáticos empleados para estudiar estas figuras a veces se concentran en determinar el nivel de morfógeno (sustancia química que efectúa cambios.) En un modelo que se relaciona con patrones de manchas oculares,[10] una cantidad de morfógeno se libera desde una mancha ocular y la concentración de morfógeno t días después está dada por

$$S(r, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\left(\gamma k t + \frac{r^2}{4t}\right)} \qquad t > 0$$

donde r mide el radio de la región en el ala afectada por el morfógeno, y k y g son constantes positivas.

a) Encuentre t_m para que $\dfrac{\partial S}{\partial t} = 0$. Demuestre que la función $S_m(t)$ formada a partir de $S(r, t)$ al fijar r tiene un máximo relativo en t_m. ¿Es esto lo mismo que decir que la función de dos variables $S(r, t)$ tiene un máximo relativo?

b) Denote por $M(r)$ el máximo encontrado en el inciso *a*); esto es, $M(r) = S(r, t_m)$. Encuentre una expresión para M en términos de $z = (1 + 4\gamma k r^{-2})^{1/2}$.

c) Resulta que $M(z)$ es lo realmente necesario para analizar la figura de mancha ocular en el ala. Lea las páginas 461-468 del texto citado con este problema y escriba un párrafo de cómo la biología, genética y matemáticas se mezclan en el estudio de las figuras en las alas de las mariposas.

41. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4xy$. Demuestre que f *no tiene* un mínimo relativo en su punto crítico (0, 0), aun cuando tiene un mínimo relativo en (0, 0) en ambas direcciones, x y y. [*Sugerencia:* Considere la dirección definida por la recta $y = x$. Esto es, sustituya x por y en la fórmula para f y analice la función resultante de x.]

[10] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, 2a. ed., Springer-Verlag, Nueva York, 1993, pp. 461-468.

www.FreeLibros.com

En los problemas del 42 al 45 encuentre las derivadas parciales f_x y f_y y luego use la función de gráficas de su calculadora para determinar los puntos críticos de cada función.

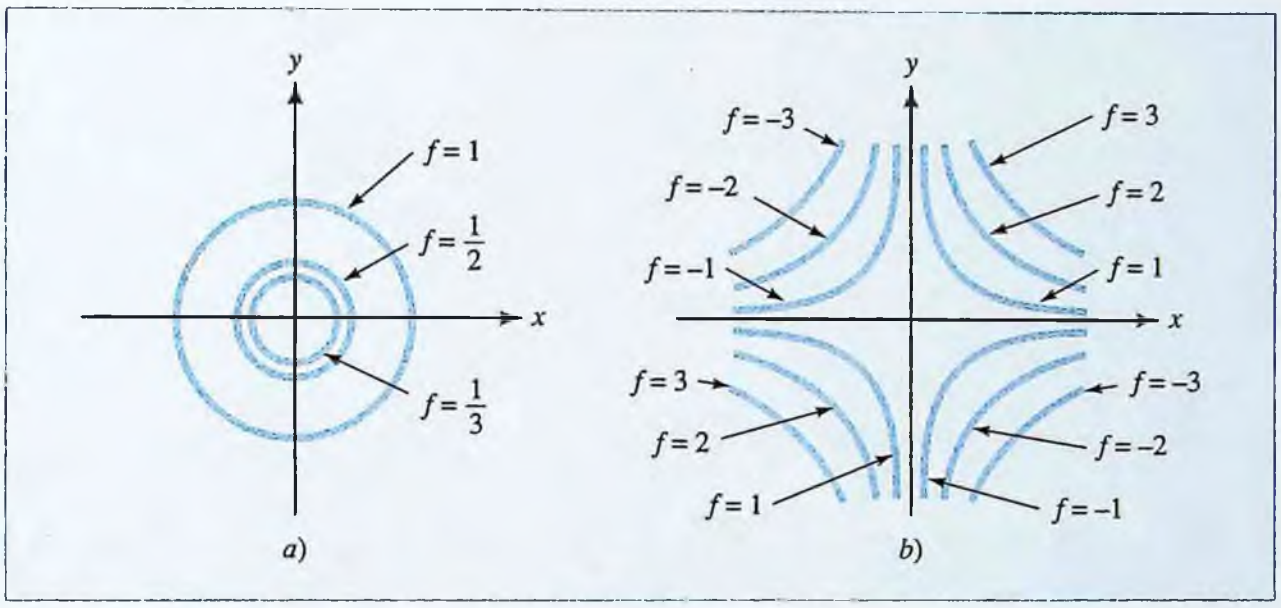
42. $f(x, y) = (x^2 + 3y - 5)e^{-x^2-2y^2}$

43. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + xy + 7y^2}{x \ln y}$

44. $f(x, y) = 6x^2 + 12xy + y^4 + x - 16y - 3$

45. $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2(11y - 18)$

46. CURVAS DE NIVEL A veces se pueden clasificar los puntos críticos de una función si se inspeccionan sus curvas de nivel. En cada caso mostrado en la figura siguiente, determine la naturaleza del punto crítico de f en (0, 0).



PROBLEMA 46

SECCIÓN 7.4 | El método de mínimos cuadrados

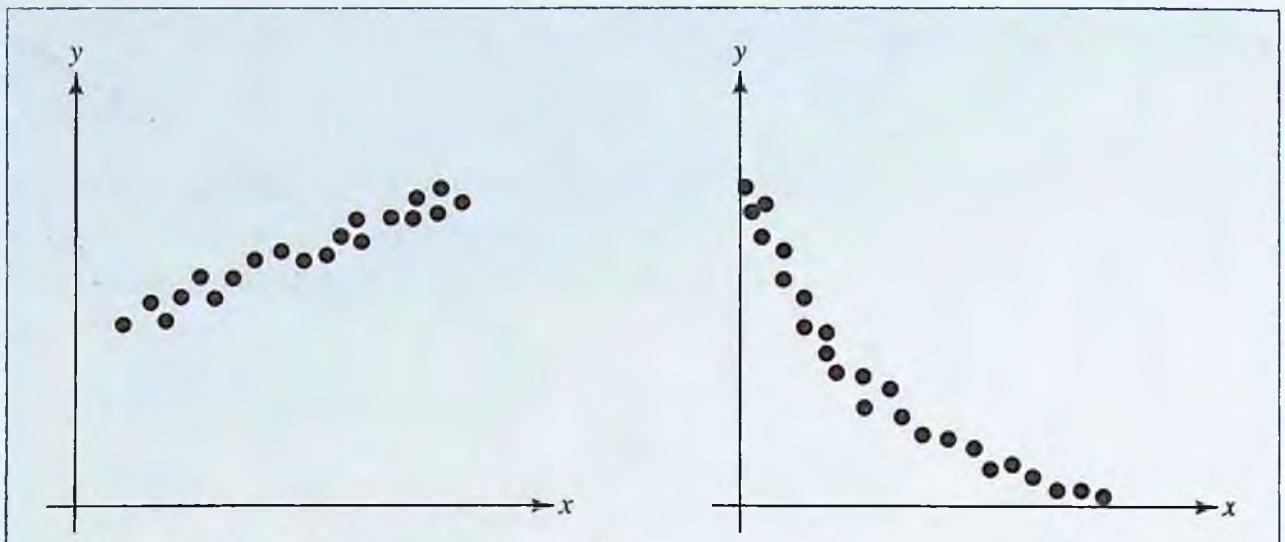
En todo este texto se han visto funciones aplicadas, muchas de las cuales han sido obtenidas de investigaciones publicadas, y puede ser sorprendente la forma en la que los investigadores llegan a estas funciones. Un procedimiento común para asociar una función con un fenómeno físico observado es reunir datos, trazarlos en una gráfica y luego hallar una función cuya gráfica "ajuste mejor" los datos de alguna forma matemáticamente significativa. A continuación se va a desarrollar un procedimiento, llamado **método de mínimos cuadrados** o **análisis de regresión**, que ya fue mencionado en el ejemplo 1.3.7 de la sección 1.3, en relación con el ajuste de una línea a los datos de desempleo.

El procedimiento de mínimos cuadrados

Suponga que usted desea hallar una función $y = f(x)$ que ajusta razonablemente bien un conjunto particular de datos. El primer paso es determinar con qué tipo de función intentarlo. A veces esto se puede hacer con un análisis teórico del fenómeno observado y a veces inspeccionando los datos graficados. En la figura 7.16 se grafican dos conjuntos de datos. Esas gráficas reciben el nombre de **diagramas de dispersión.** En la figura 7.16*a*, los puntos se encuentran aproximadamente a lo largo de una recta, lo cual sugiere que se use una función lineal $y = mx + b$. Sin embargo, en la figura 7.16*b*, los pun-

www.FreeLibros.com

tos parecen seguir una curva exponencial, y sería más apropiado usar una función de la forma $y = Ae^{-kx}$.



a) Distribución aproximadamente lineal de datos.

b) Distribución aproximadamente exponencial de datos.

FIGURA 7.16 Dos diagramas de dispersión.

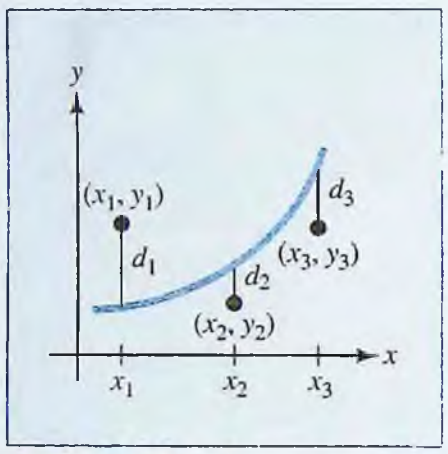


FIGURA 7.17 Suma de cuadrados de las distancias verticales $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$.

Una vez seleccionado el tipo de función, el siguiente paso es determinar la función particular de este tipo, cuya gráfica sea "más cercana" al conjunto dado de puntos. Una forma conveniente para medir lo cercano de una curva a un conjunto de datos es calcular la suma de los cuadrados de las distancias verticales desde los puntos a la curva. En la figura 7.17, por ejemplo, esto es la suma $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$. Cuanto más cercana está la curva a los puntos, menor será esta suma y la curva para la cual esta suma es más pequeña se dice que ajusta mejor los datos según el **criterio de mínimos cuadrados.**

El uso del criterio de mínimos cuadrados para ajustar una función lineal a un conjunto de puntos se ilustra en el ejemplo 7.4.1. El cálculo comprende la técnica de la sección 7.3 para minimizar una función de dos variables.

EJEMPLO 7.4.1

Use el criterio de mínimos cuadrados para hallar la ecuación de la recta más cercana a los tres puntos (1, 1), (2, 3) y (4, 3).

Solución

Como se indica en la figura 7.18, la suma de los cuadrados de las distancias verticales desde los tres puntos dados a la recta $y = mx + b$ es

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = (m + b - 1)^2 + (2m + b - 3)^2 + (4m + b - 3)^2$$

Esta suma depende de los coeficientes m y b que definen la recta, y por tanto la suma puede ser considerada como una función $S(m, b)$ de las dos variables m y b. El objetivo, por tanto, es hallar los valores de m y b que minimizan la función

$$S(m, b) = (m + b - 1)^2 + (2m + b - 3)^2 + (4m + b - 3)^2$$

www.FreeLibros.com

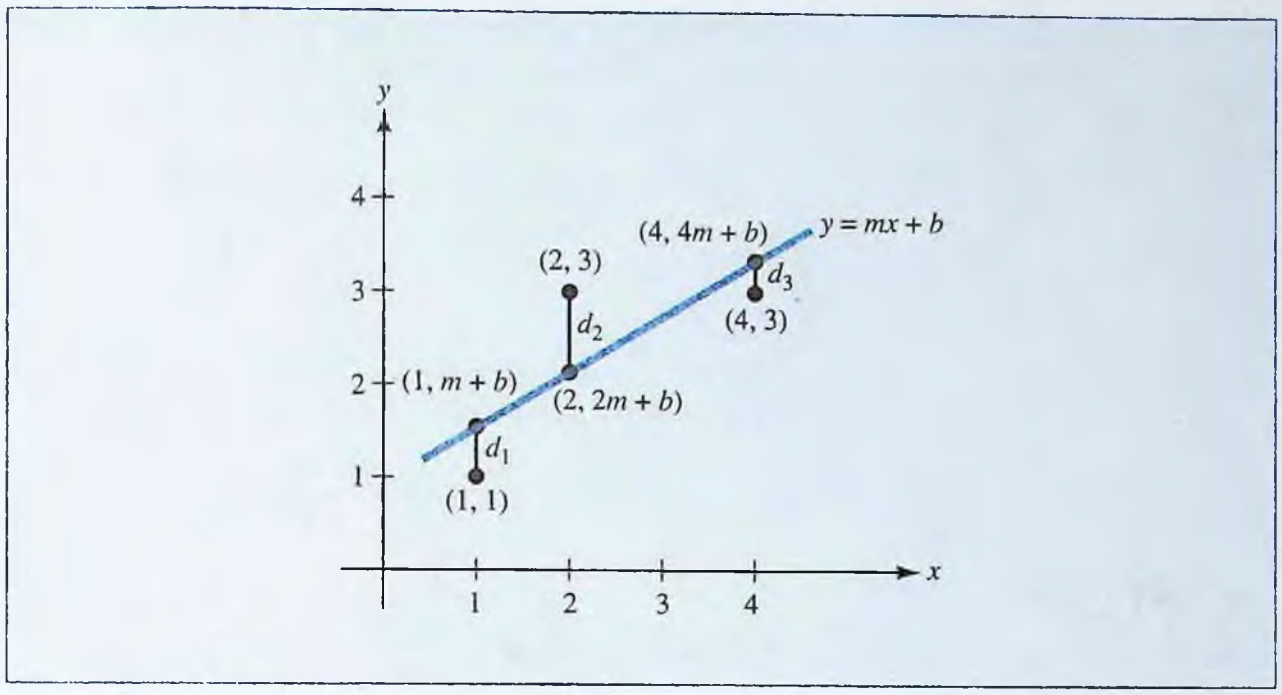


FIGURA 7.18 Minimice la suma $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$.

Esto se hace igualando a cero las derivadas parciales $\dfrac{\partial S}{\partial m}$ y $\dfrac{\partial S}{\partial b}$ para obtener

$$\frac{\partial S}{\partial m} = 2(m + b - 1) + 4(2m + b - 3) + 8(4m + b - 3)$$
$$= 42m + 14b - 38 = 0$$

y
$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2(m + b - 1) + 2(2m + b - 3) + 2(4m + b - 3)$$
$$= 14m + 6b - 14 = 0$$

Al resolver las ecuaciones resultantes

$$42m + 14b = 38$$
$$14m + 6b = 14$$

simultáneamente para m y b se concluye que

$$m = \frac{4}{7} \qquad \text{y} \qquad b = 1$$

Se puede demostrar que el punto crítico $(m, b) = \left(\dfrac{4}{7}, 1\right)$ minimiza realmente la función $S(m, b)$ y por tanto se deduce que

$$y = \frac{4}{7}x + 1$$

es la ecuación de la recta que es más cercana a los tres puntos dados.

La recta de mínimos cuadrados

La recta que es más cercana a un conjunto de puntos según el criterio de mínimos cuadrados se llama **recta de mínimos cuadrados** para los puntos. (También se usa el término **recta de regresión**, en especial en trabajos de estadística.) El procedimiento empleado en el ejemplo 7.4.1 se puede generalizar para obtener fórmulas para hallar la

www.FreeLibros.com

pendiente m y la intersección b con el eje y de la recta de mínimos cuadrados, para un conjunto arbitrario de n puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Las fórmulas comprenden sumas de los valores de x y y. Todas las sumas van de $j = 1$ a $j = n$ y para simplificar la notación se omiten los índices. Por ejemplo, Σx se usa en lugar de $\sum_{j=1}^{n} x_j$.

La recta de mínimos cuadrados ▪ La ecuación de la recta de mínimos cuadrados para los n puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ es $y = mx + b$, donde

$$m = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{\Sigma x^2 \Sigma y - \Sigma x \Sigma xy}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

¡EXPLORE!

Una calculadora graficadora puede fácilmente ayudar a producir y mostrar las listas y sumas necesarias para calcular los coeficientes de la ecuación de mínimos cuadrados. Usando los datos del ejemplo 7.4.2, ponga los valores x en L1 y los valores y en L2, y escriba L3 = L1*L2 y L4 = L1^2. Use la función de suma de su calculadora para obtener los totales por columna necesarios para calcular las fórmulas de la pendiente y de la intersección con el eje y mostradas en esta página antes del ejemplo 7.4.2.

EJEMPLO 7.4.2

Use las fórmulas para hallar la recta de mínimos cuadrados para los puntos (1, 1),(2, 3) y (4, 3) del ejemplo 7.4.1.

Solución

Organice sus cálculos como sigue:

x	y	xy	x^2
1	1	1	1
2	3	6	4
4	3	12	16
$\Sigma x = 7$	$\Sigma y = 7$	$\Sigma xy = 19$	$\Sigma x^2 = 21$

Luego use las fórmulas con $n = 3$ para obtener

$$m = \frac{3(19) - 7(7)}{3(21) - (7)^2} = \frac{4}{7} \qquad \text{y} \qquad b = \frac{21(7) - 7(19)}{3(21) - (7)^2} = 1$$

de las cuales se deduce que la ecuación de la recta de mínimos cuadrados es

$$y = \frac{4}{7}x + 1$$

Predicción de mínimos cuadrados

La recta (o curva) de mínimos cuadrados que mejor ajusta los datos recolectados en el pasado puede ser usada para hacer predicciones aproximadas sobre el futuro. Esto se ilustra en el ejemplo 7.4.3.

EJEMPLO 7.4.3

Un oficial de admisiones de una universidad ha recolectado estos datos relativos a los promedios de calificaciones (PC) de estudiantes de preparatoria y de universidad:

PC de preparatoria	**2.0**	**2.5**	**3.0**	**3.0**	**3.5**	**3.5**	**4.0**	**4.0**
PC de universidad	1.5	2.0	2.5	3.5	2.5	3.0	3.0	3.5

Encuentre la ecuación de la recta de mínimos cuadrados para estos datos y use esa recta para pronosticar el PC en la universidad para un estudiante cuyo PC de preparatoria es 3.7.

Solución

Denotemos por x el PC de preparatoria y por y el PC de la universidad, y acomodemos los cálculos como sigue:

www.FreeLibros.com

x	y	xy	x^2
2.0	1.5	3.0	4.0
2.5	2.0	5.0	6.25
3.0	2.5	7.5	9.0
3.0	3.5	10.5	9.0
3.5	2.5	8.75	12.25
3.5	3.0	10.5	12.25
4.0	3.0	12.0	16.0
4.0	3.5	14.0	16.0
$\Sigma x = 25.5$	$\Sigma y = 21.5$	$\Sigma xy = 71.25$	$\Sigma x^2 = 84.75$

Use la fórmula de mínimos cuadrados con $n = 8$ para obtener

$$m = \frac{8(71.25) - 25.5(21.5)}{8(84.75) - (25.5)^2} \approx 0.78$$

y

$$b = \frac{84.75(21.5) - 25.5(71.25)}{8(84.75) - (25.5)^2} \approx 0.19$$

La ecuación de la recta de mínimos cuadrados es entonces

$$y = 0.78x + 0.19$$

Para pronosticar el PC en la universidad y de un estudiante cuyo PC x es de 3.7, sustituya $x = 3.7$ en la ecuación de la recta de mínimos cuadrados. Esto da

$$y = 0.78(3.7) + 0.19 \approx 3.08$$

lo que sugiere que el promedio de calificaciones (PC) en la universidad del estudiante es alrededor de 3.1.

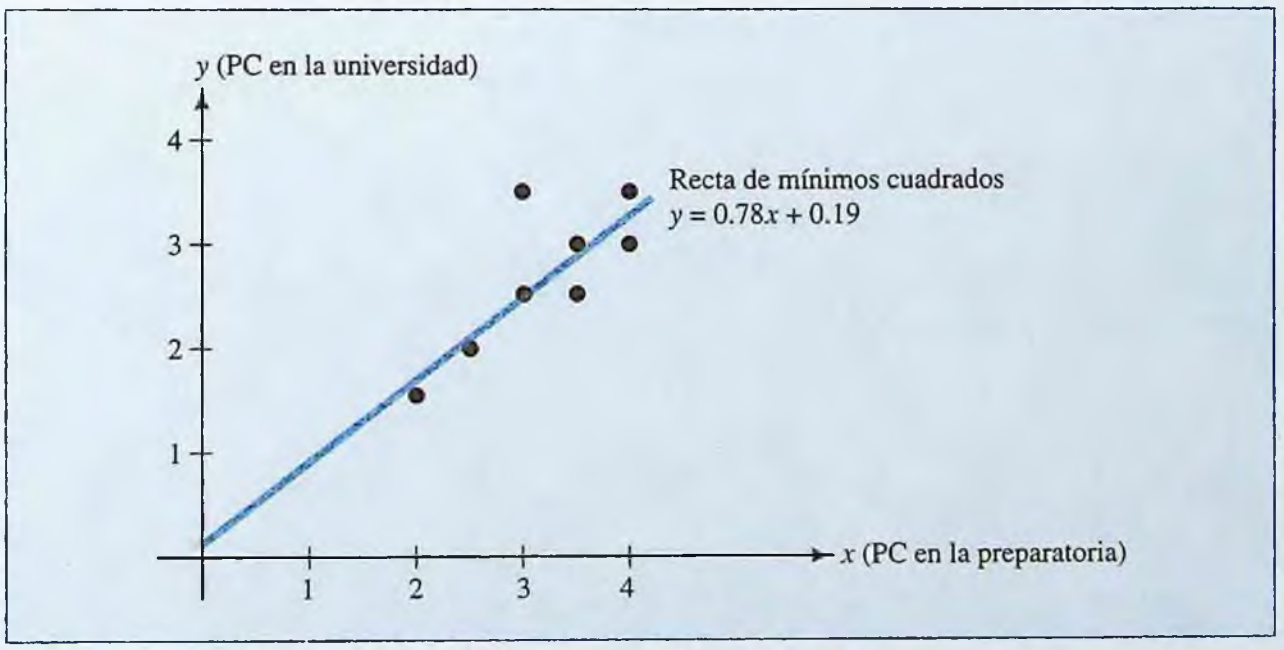


FIGURA 7.19 Recta de mínimos cuadrados para los promedios de calificaciones (PC) de preparatoria y universidad.

Los datos originales se grafican en la figura 7.19, junto con la recta de mínimos cuadrados $y = 0.78x + 0.19$. En realidad, en la práctica, es buena idea graficar los datos antes de proceder con los cálculos. Al observar la gráfica se verá que por lo general se puede decir si la aproximación por una recta es apropiada o si es posible un mejor ajuste con una curva de algún otro tipo.

www.FreeLibros.com

Ajuste no lineal de curvas

En cada uno de los ejemplos 7.4.1, 7.4.2 y 7.4.3, se utilizó el criterio de mínimos cuadrados para ajustar una función lineal a un conjunto de datos. Con modificaciones apropiadas el procedimiento también puede ser usado para ajustar funciones no lineales a los datos. Una clase de procedimiento modificado de ajuste de curvas se ilustra en el ejemplo 7.4.4.

¡EXPLORE!

Algunas calculadoras graficadoras pueden hallar ecuaciones de mejor ajuste para datos no lineales. Siguiendo el ejemplo 7.4.4, introduzca los datos de producción y precio de demanda en las listas L1 y L2, respectivamente. A continuación encuentre y grafique la ecuación no lineal que mejor ajusta estos datos, usando las técnicas Regression y Stat Plot explicadas en la "Introducción a la calculadora" al principio de este libro.

EJEMPLO 7.4.4

Un fabricante reúne estos datos que relacionan el nivel de producción x (cien unidades) de un artículo en particular con el precio p (dólares por unidad) al que se venderán todas las x unidades:

k	Producción x (cien unidades)	Precio de demanda p (dólares por unidad)
1	6	743
2	10	539
3	17	308
4	22	207
5	28	128
6	35	73

a) Trace un diagrama de dispersión para los datos en una gráfica, con el nivel de producción en el eje x y el precio de demanda en el eje y.

b) Note que el diagrama de dispersión del inciso a) sugiere que la función de demanda es exponencial. Modifique el procedimiento de mínimos cuadrados para hallar una curva de la forma $p = Ae^{mx}$ que mejor ajusta los datos de la tabla.

c) Utilice la función exponencial de demanda encontrada del inciso b) para pronosticar el ingreso que el fabricante debe esperar si se producen 4 000 ($x = 40$) unidades.

Solución

a) En la figura 7.20 aparece el diagrama de dispersión.

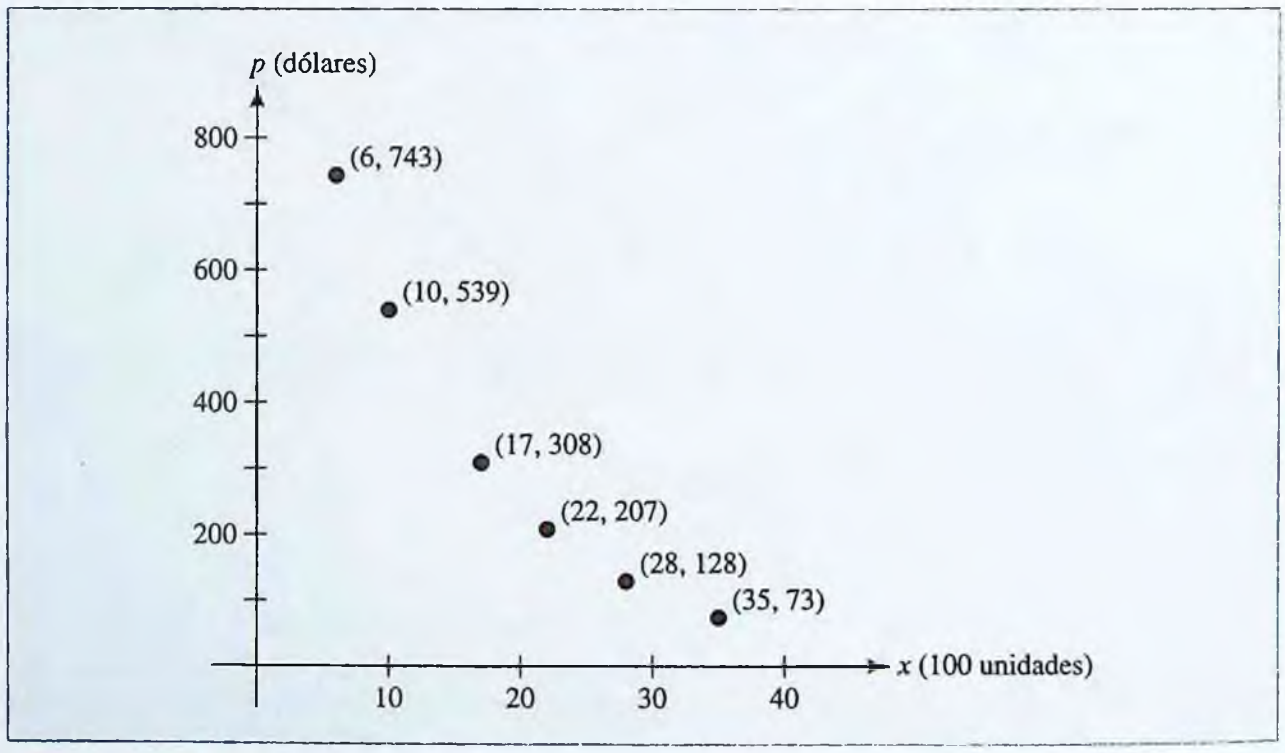


FIGURA 7.20 Diagrama de dispersión para los datos de demanda del ejemplo 7.4.4.

www.FreeLibros.com

REPASO

Justo-a-tiempo

Recuerde que
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

b) Aplicando logaritmos a ambos miembros de la ecuación $p = Ae^{mx}$, encontramos que

$$\begin{aligned} \ln p &= \ln(Ae^{mx}) \\ &= \ln A + \ln(e^{mx}) && \textit{regla del producto para logaritmos} \\ &= \ln A + mx && \textit{ln } e^u = u \end{aligned}$$

o, lo que es igual, $y = mx + b$, donde $y = \ln p$ y $b = \ln A$. Por tanto, para hallar la curva de la forma $p = Ae^{mx}$ que mejor ajuste los puntos de datos (x_k, p_k) dados para $k = 1, \ldots, 6$, primero encuentre la recta de mínimos cuadrados $y = mx + b$ para los puntos datos $(x_k, \ln p_k)$. Escriba los cálculos como sigue:

k	x_k	p_k	$y_k = \ln p_k$	$x_k y_k$	x_k^2
1	6	743	6.61	39.66	36
2	10	539	6.29	62.90	100
3	17	308	5.73	97.41	289
4	22	207	5.33	117.26	484
5	28	128	4.85	135.80	784
6	35	73	4.29	150.15	1 225
	$\Sigma x = 118$		$\Sigma y = 33.10$	$\Sigma xy = 603.18$	$\Sigma x^2 = 2\,918$

Utilice la fórmula de mínimos cuadrados con $n = 6$ para obtener

$$m = \frac{6(603.18) - (118)(33.10)}{6(2\,918) - (118)^2} = -0.08$$

y

$$b = \frac{2\,918(33.10) - (118)(603.18)}{6(2\,918) - (118)^2} = 7.09$$

lo que significa que la recta de mínimos cuadrados tiene la ecuación

$$y = -0.08x + 7.09$$

Por último, regresando a la curva exponencial $p = Ae^{mx}$, recuerde que $\ln A = b$, de modo que

$$\begin{aligned} \ln A &= b = 7.09 \\ A &= e^{7.09} = 1\,200 \end{aligned}$$

Así, la función exponencial que mejor ajusta los datos de demanda dados es

$$p = Ae^{mx} = 1\,200e^{-0.08x}$$

c. Usando la función exponencial de demanda $p = 1\,200e^{-0.08x}$ hallada en el inciso *b*), encuentre que cuando se producen $x = 40$ (cientos) de unidades, todas se pueden vender a un precio unitario de

$$p = 1\,200e^{-0.08(40)} = \$48.91$$

Por tanto, cuando se producen 4 000 ($x = 40$) unidades, se espera que el ingreso generado sea aproximadamente de

$$\begin{aligned} R = xp(x) &= (4\,000 \text{ unidades})(\$48.91 \text{ por unidad}) \\ &= \$195\,640 \end{aligned}$$

www.FreeLibros.com

El procedimiento ilustrado en el ejemplo 7.4.4 recibe a veces el nombre de **regresión log-lineal**. Una curva de la forma $y = Ax^k$ que mejor ajusta los datos dados también se puede hallar por regresión log-lineal. El procedimiento específico se indica en el problema 32, donde se usa para verificar una fórmula alométrica que fue mencionada antes en el ensayo "Reflexione acerca de..." al final del capítulo 1.

El procedimiento de mínimos cuadrados también se puede usar para ajustar otras funciones no lineales a los datos. Por ejemplo, para hallar la función cuadrática $y = Ax^2 + Bx + C$, cuya gráfica (una parábola) se ajusta mejor a un conjunto particular de datos, se procedería como en el ejemplo 7.4.1, minimizando la suma de cuadrados de las distancias verticales desde los puntos de datos a la gráfica. Estos cálculos son algebraicamente complicados y por lo general requieren del uso de una computadora o de una calculadora graficadora.

PROBLEMAS | 7.4

En los problemas del 1 al 4 trace los puntos dados y use el método del ejemplo 7.4.1 para hallar la recta de mínimos cuadrados correspondiente.

1. (0, 1), (2, 3), (4, 2)

2. (1, 1), (2, 2), (6, 0)

3. (1, 2), (2, 4), (4, 4), (5, 2)

4. (1, 5), (2, 4), (3, 2), (6, 0)

En los problemas del 5 al 12 trace los puntos dados y use la fórmula para hallar la recta de mínimos cuadrados correspondiente.

5. (1, 2), (2, 2), (2, 3), (5, 5)

6. (−4, −1), (−3, 0), (−1, 0), (0, 1), (1, 2)

7. (−2, 5), (0, 4), (2, 3), (4, 2), (6, 1)

8. (−6, 2), (−3, 1), (0, 0), (0, −3), (1, −1), (3, −2)

9. (0, 1), (1, 1.6), (2.2, 3), (3.1, 3.9), (4, 5)

10. (3, 5.72), (4, 5.31), (6.2, 5.12), (7.52, 5.32), (8.03, 5.67)

11. (−2.1, 3.5), (−1.3, 2.7), (1.5, 1.3), (2.7, −1.5)

12. (−1.73, −4.33), (0.03, −2.19), (0.93, 0.15), (3.82, 1.61)

En los problemas del 13 al 16 modifique el procedimiento de mínimos cuadrados como se ilustra en el ejemplo 7.4.4 para hallar una curva de la forma $y = Ae^{mx}$ que mejor ajuste los datos dados.

13. (1, 15.6), (3, 17), (5, 18.3), (7, 20), (10, 22.4)

14. (5, 9.3), (10, 10.8), (15, 12.5), (20, 14.6), (25, 17)

15. (2, 13.4), (4, 9), (6, 6), (8, 4), (10, 2.7)

16. (5, 33.5), (10, 22.5), (15, 15), (20, 10), (25, 6.8), (30, 4.5)

17. ADMISIONES EN UNIVERSIDAD En los últimos 4 años, un empleado de admisiones de una universidad ha compilado los siguientes datos (medidos en unidades de 1 000) que relacionan el número de catálogos de la universidad, solicitados por estudiantes de preparatoria antes del 1 de diciembre, con el número de solicitudes recibidas antes del 1 de marzo:

Catálogos solicitados	4.5	3.5	4.0	5.0
Solicitudes recibidas	1.0	0.8	1.0	1.5

a) Trace estos datos en una gráfica.

b) Encuentre la ecuación de la recta de mínimos cuadrados.

c) Utilice la recta de mínimos cuadrados para pronosticar cuántas solicitudes se recibirán antes del 1 de marzo, si antes del 1 de diciembre se solicitaron 4 800 catálogos.

www.FreeLibros.com

18. VENTAS Las ventas anuales de una compañía (en unidades de mil millones de dólares) durante sus primeros 5 años de operación se muestran en la siguiente tabla:

Año	1	2	3	4	5
Ventas	0.9	1.5	1.9	2.4	3.0

a) Trace estos datos en una gráfica.
b) Encuentre la ecuación de la recta de mínimos cuadrados.
c) Utilice la recta de mínimos cuadrados para pronosticar las ventas de la compañía en el sexto año.

19. DEMANDA E INGRESO Un fabricante reúne los datos que aparecen en la siguiente tabla, que relacionan el nivel de producción x (cien unidades) de una mercancía en particular con el precio p de demanda (dólares por unidad) al que se venderán todas las unidades:

Producción x (cientos de unidades)	5	10	15	20	25	30	35
Precio p de demanda (dólares por unidad)	44	38	32	25	18	12	6

a) Trace estos datos en una gráfica.
b) Encuentre la ecuación de la recta de mínimos cuadrados para los datos.
c) Use la ecuación lineal de demanda hallada en el inciso *b*) para pronosticar el ingreso que el fabricante puede esperar si se producen 4 000 unidades ($x = 40$).

20. ABUSO DE DROGAS Para cada uno de cinco años diferentes, la tabla siguiente da el porcentaje de estudiantes de preparatoria que han utilizado cocaína al menos una vez en la vida hasta ese año:

Año	1991	1993	1995	1997	1999
Porcentaje que ha consumido cocaína al menos una vez	6.0	4.9	7.0	8.2	9.5

FUENTE: The White House Office of National Drug Control Policy, "2002 National Drug Control Strategy" (http://www.whitehousedrugpolicy.gov).

a) Trace estos datos en una gráfica, con el número de años después de 1991 en el eje x y el porcentaje de consumidores de cocaína en el eje y.
b) Encuentre la ecuación de la recta de mínimos cuadrados para los datos.
c) Use la recta de mínimos cuadrados para pronosticar el porcentaje de estudiantes de preparatoria que usaron cocaína al menos una vez antes del año 2003.

21. CONCURRENCIA DE VOTANTES El día de las elecciones, las votaciones en cierto estado abren a las 8:00 A.M. Cada 2 horas después, un empleado de las elecciones determina qué porcentaje de los votantes registrados han depositado su voto. Los datos hasta las 6:00 P.M. aparecen aquí:

Hora	10:00	12:00	2:00	4:00	6:00
Porcentaje de votantes	12	19	24	30	37

a) Trace estos datos en una gráfica.
b) Encuentre la ecuación de la recta de mínimos cuadrados. (Denote por x el número de horas después de las 8:00 A.M.)
c) Use la recta de mínimos cuadrados para pronosticar qué porcentaje de los votantes registrados habrá depositado su voto al momento del cierre de las casillas, a las 8:00 P.M.)

www.FreeLibros.com

22. PREDICCIÓN DE LA POBLACIÓN La siguiente tabla da las cifras del censo que se efectúa cada diez años de Estados Unidos (en millones) para el periodo 1950-2000:

Año	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Población	150.7	179.3	203.2	226.5	248.7	291.4

FUENTE: U.S. Census Bureau (http://www.census.gov).

a) Encuentre la recta de mínimos cuadrados $y = mx + b$ para estos datos, donde y es la población de Estados Unidos t décadas después de 1950.

b) Use la recta de mínimos cuadrados hallada en el inciso *a*) para pronosticar la población de Estados Unidos para el año 2005.

23. PREDICCIÓN DE LA POBLACIÓN Modifique el procedimiento de mínimos cuadrados, como se ilustra en el ejemplo 7.4.4, para hallar una función de la forma $P(t) = Ae^{rt}$ cuya gráfica ajuste mejor los datos de población del problema 22, donde $P(t)$ es la población de Estados Unidos t décadas después de 1950.

a) Aproximadamente ¿a qué ritmo crece la población en Estados Unidos?

b) Con base en su función de población, ¿cuál esperaría usted que sea la población en Estados Unidos en 2005?

24. SALUD PÚBLICA En un estudio de cinco zonas industriales, un investigador obtuvo estos datos que relacionan el número promedio de unidades de cierto contaminante en el aire y la incidencia (por 100 000 personas) de cierta enfermedad:

Unidades de contaminante	3.4	4.6	5.2	8.0	10.7
Incidencia de enfermedad	48	52	58	76	96

a) Trace estos datos en una gráfica.

b) Encuentre la ecuación de la recta de mínimos cuadrados.

c) Use la recta de mínimos cuadrados para estimar la incidencia de la enfermedad en una zona con un nivel promedio de contaminación de 7.3 unidades.

25. ANÁLISIS DE INVERSIÓN Jennifer tiene varias clases diferentes de inversiones, cuyo valor total $V(t)$ (en miles de dólares) al principio del t-ésimo año después que ella empezó a invertir está dado en esta tabla, para $1 \leq t \leq 10$:

Año t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor $V(t)$ de todas las inversiones	57	60	62	65	62	65	70	75	79	85

a) Modifique el procedimiento de mínimos cuadrados, como se ilustra en el ejemplo 7.4.4, para hallar una función de la forma $V(t) = Ae^{rt}$ cuya gráfica ajusta mejor estos datos. Aproximadamente, ¿a qué tasa anual, capitalizada continuamente, está creciendo su cuenta?

b) Use la función hallada en el inciso *a*) para pronosticar el valor total de las inversiones de Jennifer al principio del vigésimo año después que ella empezó a invertir.

c) Jennifer estima que necesitará \$300 000 para retirarse. Use la función del inciso *a*) para determinar cuánto tiempo le llevará alcanzar esta meta.

d) Un amigo de Jennifer, Frank Kornerkutter, examina el análisis de inversión de ella y dice furioso: "¡Qué desperdicio de tiempo! Puedes hallar A y r en tu función $V(t) = Ae^{rt}$ con sólo usar $V(1) = 57$ y $V(10) = 85$ y un poco de álgebra" . Encuentre A y r usando el método de Frank y comente sobre los méritos relativos de los dos métodos.

www.FreeLibros.com

26. INGRESO DISPONIBLE Y CONSUMO La siguiente tabla muestra el gasto personal de consumo y el correspondiente ingreso disponible (en miles de millones de dólares) para Estados Unidos en el periodo 1995-2000:

Año	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Ingreso disponible	5 422.6	5 677.7	5 968.2	6 355.6	6 627.4	7 120.0
Consumo personal	4 969.0	5 237.5	5 529.3	5 856.0	6 246.5	6 683.7

FUENTE: U.S. Department of Commerce, Bureau of Economic Analysis, "Personal Consumption Expenditures by Major Type of Product" (http://www.dea.doc.gov).

a) Trace estos datos en una gráfica, con el ingreso disponible en el eje x y el gasto de consumo en el eje y.

b) Encuentre la ecuación de la recta de mínimos cuadrados para los datos.

c) Use la recta de mínimos cuadrados para pronosticar el consumo que correspondería a 8 000 miles de millones de dólares de ingreso disponible.

d) Escriba un párrafo sobre la relación entre ingreso disponible y consumo.

27. PROMEDIO DE MERCADO ACCIONARIO La tabla siguiente da el promedio industrial Dow Jones (DJIA, por sus siglas en inglés) al cierre el primer día de operaciones de compra-venta del año mostrado:

Año	1990	1992	1996	1998	2001	2002
DJIA	2 810	3 172	5 177	7 965	10 646	10 073

FUENTE: Dow Jones (http://www.djindexes.com).

a) Trace estos datos en una gráfica, con el número de años después de 1990 en el eje x y el DJIA en el eje y.

b) Encuentre la ecuación de la recta de mínimos cuadrados para los datos.

c) ¿Qué pronostica la recta de mínimos cuadrados para el primer día de 2003? Use Internet para encontrar dónde cerró realmente ese día (2 de enero, 2003) el DJIA, y compárelo con el valor pronosticado.

d) Escriba un párrafo sobre si usted piensa que es posible hallar una curva que ajuste el DJIA de modo suficientemente bueno como para que sea útil en la predicción del comportamiento del mercado en el futuro.

28. PRECIOS DE GASOLINA El precio promedio de venta al menudeo (en centavos) del galón de gasolina regular sin plomo, a intervalos de 5 años, desde 1976, está dado en esta tabla:

Año	1976	1981	1986	1991	1996	2001
Precio por galón (centavos)	61.4	137.8	92.7	114	123.1	146.1

FUENTE: U.S. Department of Energy (http://www.eia.doe.gov).

a) Trace estos datos en una gráfica, con el número de años después de 1976 en el eje x y el precio promedio de gasolina en el eje y.

b) Encuentre la ecuación de la recta de mínimos cuadrados para los datos.

c) ¿Qué precio por galón pronostica la recta de mínimos cuadrados para la gasolina regular sin plomo en 2005?

29. PRODUCTO INTERNO BRUTO Esta tabla muestra las cifras del producto interno bruto (PIB) de China (miles de millones de yuanes) para el periodo 1996-2001:

Año	1996	1997	1998	1999	2000	2001
PIB	6 788	7 446	7 835	8 191	8 940	9 593

FUENTE: Chinese government website (http://www.china.org.cn).

www.FreeLibros.com

a) Encuentre la recta de mínimos cuadrados $y = mx + b$ para estos datos, donde y es el PIB de China t años después de 1996.

b) Use la recta de mínimos cuadrados hallada en el inciso *a*) para pronosticar el PIB de China para el año 2005.

30. CRECIMIENTO DE BACTERIAS Un biólogo que estudia una colonia de bacterias mide su población cada hora y registra estos datos:

Tiempo t (horas)	1	2	3	4	5	6	7	8
Población $P(t)$ (miles)	280	286	292	297	304	310	316	323

a) Trace estos datos en una gráfica. ¿Sugiere el diagrama de dispersión que el crecimiento poblacional es lineal o exponencial?

b) Si usted piensa que el diagrama de dispersión del inciso *a*) sugiere crecimiento lineal, encuentre una función de población de la forma $P(t) = mt + b$ que mejor ajuste los datos. No obstante, si usted piensa que el diagrama de dispersión sugiere crecimiento exponencial, modifique el procedimiento de mínimos cuadrados, como se ilustra en el ejemplo 7.4.4, para obtener una función de población de mejor ajuste de la forma $P(t) = Ae^{kt}$.

c) Use la función de población obtenida en el inciso *b*) para pronosticar cuánto tardará la población en llegar a 400 000. ¿Cuánto tardará en duplicarse la población?

31. PROPAGACIÓN DEL SIDA El número de casos de sida reportados en Estados Unidos por año, a intervalos de 4 años desde 1980, está dado en esta tabla:

Año	1980	1984	1988	1992	1996	2000
Casos de SIDA reportados	99	6 360	36 064	79 477	61 109	42 156

FUENTE: World Health Organization and the United Nations (http://www.unaids.org).

a) Trace estos datos en una gráfica con el tiempo t (años después de 1980) en el eje x.

b) Encuentre la ecuación de la recta de mínimos cuadrados para los datos dados.

c) ¿Cuántos casos de sida pronostica la recta de mínimos cuadrados del inciso *b*) que se reportarán en 2005?

d) ¿Piensa usted que la recta de mínimos cuadrados ajusta bien los datos dados? Si no es así, escriba un párrafo que explique cuál (si lo hay) de los siguientes cuatro tipos de curva ajustaría mejor los datos:

1. (cuadrática) $y = At^2 + Bt + C$
2. (cúbica) $y = At^3 + Bt^2 + Ct + D$
3. (exponencial) $y = Ae^{kt}$
4. (potencia-exponencial) $y = Ate^{kt}$

(Puede ser útil repasar el ensayo Reflexione acerca de... al final del capítulo 3, que contiene un análisis semejante del número de muertes debidas al sida.)

32. ALOMETRÍA La determinación de relaciones entre mediciones de varias partes de un organismo particular es un tema de interés en la rama de biología llamada *alometría*.[11] (Recuerde el ensayo Reflexione acerca de... del final del capítulo 1.) Suponga que un biólogo observa que la altura h del lomo y el tamaño w de la

[11] Roger V. Jean, "Differential Growth, Huxley's Allometric Formula, and Sigmoid Growth", *UMAP Modules 1983: Tools for Teaching*, Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., Lexington, MA, 1984.

www.FreeLibros.com

cornamenta de un reno, ambos en centímetros (cm), están relacionados como se indica en la tabla siguiente:

Altura del lomo h (cm)	Tamaño w de cornamenta (cm)
87.9	52.4
95.3	60.3
106.7	73.1
115.4	83.7
127.2	98.0
135.8	110.2

a) Por cada punto de datos (h, w) de la tabla, localice el punto $(\ln h, \ln w)$ en una gráfica. Nótese que el diagrama de dispersión sugiere que $y = \ln w$ y $x = \ln h$ están linealmente relacionadas.

b) Encuentre la recta de mínimos cuadrados $y = mx + b$ para los datos $(\ln h, \ln w)$ obtenidos en el inciso *a*).

c) Encuentre los números a y c de modo que $w = ah^c$. [*Sugerencia:* Sustituya $y = \ln w$ y $x = \ln h$ del inciso *a*) en la ecuación de mínimos cuadrados hallada en el inciso *b*).]

33. ALOMETRÍA La siguiente tabla relaciona el peso C de la pinza grande de un cangrejo barrilete con el peso W del resto del cuerpo del cangrejo, ambos medidos en miligramos (mg).

Peso W (mg) del cuerpo	57.6	109.2	199.7	300.2	355.2	420.1	535.7	743.3
Peso C (mg) de la pinza	5.3	13.7	38.3	78.1	104.5	135.0	195.6	319.2

a) Para cada punto de datos (W, C) de la tabla, trace el punto $(\ln W, \ln C)$ en una gráfica. Note que el diagrama de dispersión sugiere que $y = \ln C$ y $x = \ln W$ están linealmente relacionados.

b) Encuentre la recta de mínimos cuadrados $y = mx + b$ para los datos $(\ln W, \ln C)$ obtenidos en el inciso *a*).

c) Encuentre números positivos a y k de modo que $C = aW^k$. [*Sugerencia:* Sustituya $y = \ln C$ y $x = \ln W$ del inciso *a*) en la ecuación de mínimos cuadrados del inciso *b*).]

SECCIÓN 7.5 | Optimización con restricciones: método de los multiplicadores de Lagrange

En numerosos problemas aplicados, una función de dos variables debe ser optimizada sujeta a una **restricción** de las variables. Por ejemplo, un editor, restringido a permanecer dentro de un presupuesto fijo de \$60 000, desearía determinar cómo dividir este dinero entre desarrollo y promoción para maximizar las ventas futuras de un nuevo libro. Si x denota la cantidad de dinero asignado al desarrollo, y la cantidad asignada a promoción, y $f(x, y)$ es el número correspondiente de libros que se venderán, al editor le gustaría maximizar la función de ventas $f(x, y)$, sujeta a la restricción presupuestal de $x + y = 60\,000$.

Para una interpretación geométrica del proceso de optimización de una función de dos variables, sujeta a una restricción, considere la función misma como una superficie en el espacio tridimensional, y la restricción (que es una ecuación con x y y) como una curva en el plano xy. Cuando se encuentra el máximo o el mínimo de la función

www.FreeLibros.com

sujeta a la restricción dada, se restringe la atención a la parte de la superficie que se encuentra directamente encima de la curva de las restricciones. El punto más alto de esta parte de la superficie es el máximo restringido, y el punto más bajo es el mínimo restringido. La situación se ilustra en la figura 7.21.

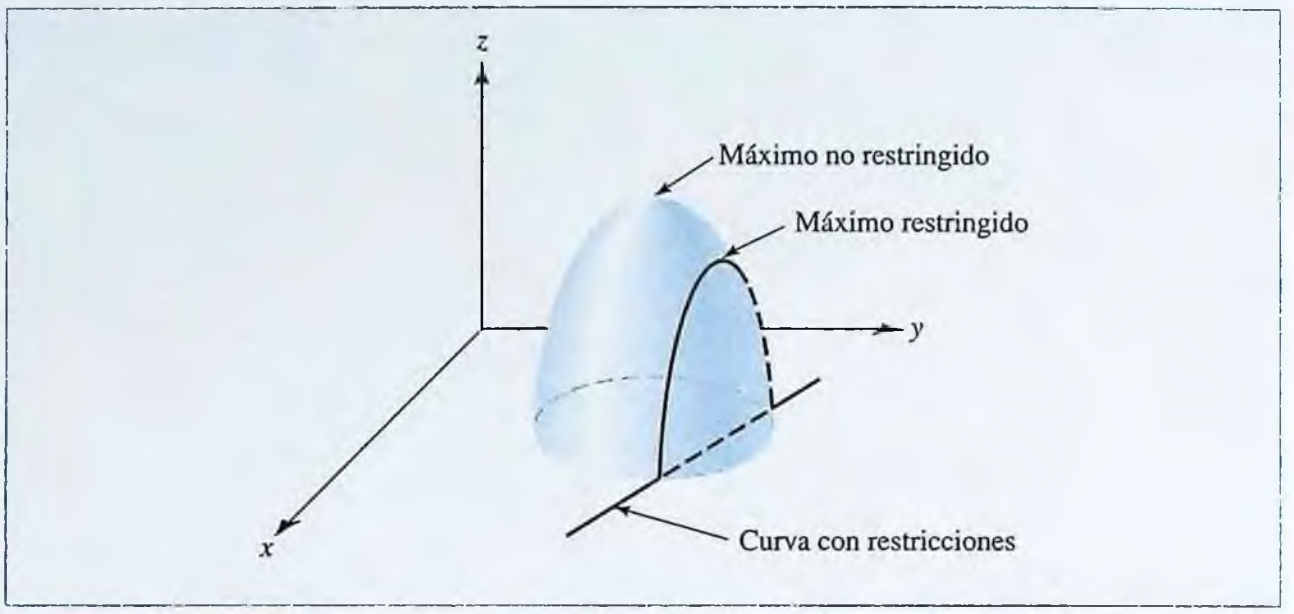


FIGURA 7.21 Extremo restringido y no restringido.

Ya en el capítulo 3 se vieron algunos problemas de optimización con restricciones. (Por ejemplo, recuerde el ejemplo 3.5.1 de la sección 3.5.) La técnica empleada en el capítulo 3 para resolver ese problema consistió en reducirlo a un problema de una sola variable, resolviendo la ecuación de la restricción con respecto a una de las variables, y luego sustituyendo la expresión resultante en la función a optimizar. El éxito de esta técnica dependió del despeje de una de las variables en la ecuación de restricción, lo que con frecuencia es difícil o hasta imposible de hacer en la práctica. En esta sección, veremos una técnica más versátil llamada **método de los multiplicadores de Lagrange**, en la que la introducción de una *tercera* variable (el multiplicador) hace posible la resolución de problemas de optimización con restricciones sin tener que despejar primero una de las variables en la ecuación de la restricción.

Más específicamente, el método de los multiplicadores de Lagrange utiliza el hecho de que cualquier extremo relativo de la función $f(x, y)$ sujeta a la restricción $g(x, y) = k$ debe ocurrir en un punto crítico (a, b) de la función

$$F(x, y) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - k]$$

donde λ es una nueva variable (el **multiplicador de Lagrange**). Para hallar los puntos críticos de F, calcule las derivadas parciales

$$F_x = f_x - \lambda g_x \qquad F_y = f_y - \lambda g_y \qquad F_\lambda = -(g - k)$$

y resuelva las ecuaciones $F_x = 0$, $F_y = 0$ y $F_\lambda = 0$ simultáneamente, como sigue:

$$\begin{aligned} F_x = f_x - \lambda g_x = 0 \quad &\text{o} \quad f_x = \lambda g_x \\ F_y = f_y - \lambda g_y = 0 \quad &\text{o} \quad f_y = \lambda g_y \\ F_\lambda = -(g - k) = 0 \quad &\text{o} \quad g = k \end{aligned}$$

Por último, evalúe $f(a, b)$ en cada punto crítico (a, b) de F.

Hay una versión de la prueba de segundas derivadas parciales que se puede usar para determinar qué clase de extremo relativo restringido corresponde a cada punto crítico (a, b) de F. Las técnicas requeridas para realizar este análisis se estudian en

www.FreeLibros.com

textos más avanzados pero, en este libro, supondremos que si f tiene un máximo (mínimo) restringido, éste se encontrará en el máximo (mínimos) de los valores críticos de $f(a, b)$. A continuación veamos un resumen del procedimiento empleado en el método de los multiplicadores de Lagrange.

Procedimiento para aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange

Paso 1. Escriba el problema en la forma:

$$\text{Maximizar (minimizar) } f(x, y) \text{ sujeto a } g(x, y) = k.$$

Paso 2. Resuelva simultáneamente las ecuaciones

$$f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y)$$
$$f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y)$$
$$g(x, y) = k$$

Paso 3. Evalúe f en todos los puntos hallados en el paso 2. Si existe el máximo (mínimo) requerido, será el máximo (mínimo) de estos valores.

Una justificación geométrica del método de multiplicadores se da al final de esta sección. En el Ejemplo 7.5.1, el método se usa para resolver el problema del ejemplo 3.5.1 de la sección 3.5.

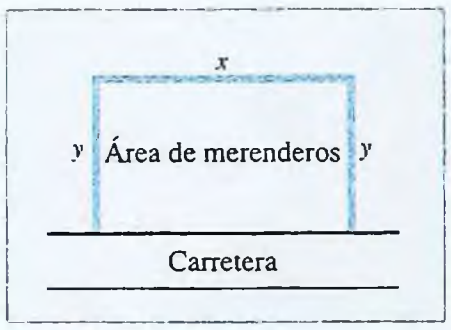


FIGURA 7.22 Área rectangular de merenderos.

EJEMPLO 7.5.1

El departamento de carreteras está planeando construir un área de merenderos para automovilistas a lo largo de una carretera principal. Debe ser rectangular con un área de 5 000 yardas cuadradas y debe estar cercado en los tres lados no adyacentes a la carretera. ¿Cuál es la cantidad mínima de cercado que será necesaria para completar el trabajo?

Solución

Marque los lados del área de merenderos como se indica en la figura 7.22 y denote con f la cantidad de cercado requerida. Entonces,

$$f(x, y) = x + 2y$$

El objetivo es minimizar f dado el requisito de que el área debe ser de 5 000 yardas cuadradas; esto es, sujeto a la restricción

$$g(x, y) = xy = 5\,000$$

Encuentre las derivadas parciales

$$f_x = 1 \qquad f_y = 2 \qquad g_x = y \qquad \text{y} \qquad g_y = x$$

y obtenga las tres ecuaciones de Lagrange

$$1 = \lambda y \qquad 2 = \lambda x \qquad \text{y} \qquad xy = 5\,000$$

De las ecuaciones primera y segunda se obtiene

$$\lambda = \frac{1}{y} \qquad \text{y} \qquad \lambda = \frac{2}{x}$$

(como $y \neq 0$ y $x \neq 0$), que implica que

$$\frac{1}{y} = \frac{2}{x} \quad \text{o sea} \quad x = 2y$$

www.FreeLibros.com

Ahora sustituya $x = 2y$ en la tercera ecuación de Lagrange para obtener

$$2y^2 = 5\,000 \qquad \text{o sea} \qquad y = \pm 50$$

y use $y = 50$ en la ecuación $x = 2y$ para obtener $x = 100$. Por tanto, $x = 100$ y $y = 50$ son los valores que minimizan la función $f(x, y) = x + 2y$ sujeta a la restricción $xy = 5\,000$. El área óptima de merenderos es 100 yardas de ancho (a lo largo de la carretera), y 50 yardas hacia atrás desde la carretera, y requiere $100 + 50 + 50 = 200$ yardas de cercado.

EJEMPLO | 7.5.2

Encuentre los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = xy$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = 8$.

Solución

Introduzca $g(x, y) = x^2 + y^2$ y use las derivadas parciales

$$f_x = y \qquad f_y = x \qquad g_x = 2x \qquad \text{y} \qquad g_y = 2y$$

para obtener las tres ecuaciones de Lagrange

$$y = 2\lambda x \qquad x = 2\lambda y \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 = 8$$

Ni x ni y pueden ser cero si estas tres ecuaciones se satisfacen (¿puede ver por qué?), por lo cual las primeras dos ecuaciones se pueden rescribir como

$$2\lambda = \frac{y}{x} \qquad \text{y} \qquad 2\lambda = \frac{x}{y}$$

lo cual implica que $\dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{y}$ o sea $x^2 = y^2$

Ahora sustituya $x^2 = y^2$ en la tercera ecuación y obtenga

$$2x^2 = 8 \qquad \text{o sea} \qquad x = \pm 2$$

Si $x = 2$, de la ecuación $x^2 = y^2$ se deduce que $y = 2$ o $y = -2$. Del mismo modo, si $x = -2$, se deduce que $y = 2$ o $y = -2$. Por tanto, los cuatro puntos en los que se pueden alcanzar los extremos restringidos son $(2, 2)$,$(2, -2)$,$(-2, 2)$ y $(-2, -2)$. Dado que

$$f(2, 2) = f(-2, -2) = 4 \qquad \text{y} \qquad f(2, -2) = f(-2, 2) = -4$$

se deduce que cuando $x^2 + y^2 = 8$, el valor máximo de $f(x, y)$ es 4, que se alocanza en los puntos $(2, 2)$ y $(-2, -2)$, y el valor mínimo es –4, que se alcanza en $(2, -2)$ y $(-2, 2)$.

Como práctica, compruebe estas respuestas resolviendo el problema de optimización usando los métodos del capítulo 3.

NOTA En los ejemplos 7.5.1 y 7.5.2, las primeras dos ecuaciones de Lagrange se usaron para eliminar la nueva variable λ, y a continuación la expresión resultante que relaciona x y y fue sustituida en la ecuación de la restricción. Para la mayor parte de los problemas de optimización con restricciones que el lector se encontrará, esta secuencia particular de pasos llevará con frecuencia rápidamente a la solución deseada. ■

www.FreeLibros.com

Multiplicadores de Lagrange para funciones de tres variables

El método de los multiplicadores de Lagrange se puede extender a problemas de optimización con restricciones que involucran a funciones de más de dos variables y más de una restricción. Por ejemplo, para optimizar $f(x, y, z)$ sujeto a la restricción $g(x, y, z) = k$, se resuelve

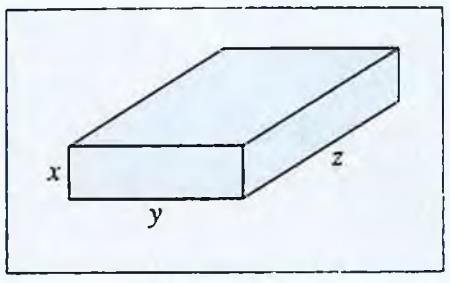
$$f_x = \lambda g_x \qquad f_x = \lambda g_y \qquad f_z = \lambda g_z \qquad \text{y} \qquad g = k$$

A continuación veamos un ejemplo de un problema donde interviene esta clase de optimización con restricciones.

EJEMPLO | 7.5.3

Una caja de joyas ha de construirse de materiales que cuestan \$1 por pulgada cuadrada para el fondo, \$2 por pulgada cuadrada para los costados, y \$5 por pulgada cuadrada para la tapa. Si el volumen total debe ser 96 pulg^2, ¿qué dimensiones minimizarán el costo total de construcción?

Solución



Sea x pulgadas la profundidad de la caja, y el largo y z el ancho, donde x, y y z son todas positivas, como se indica en la siguiente figura. Entonces el volumen de la caja es $V = xyz$ y el costo total de construcción está dado por

$$C = \underbrace{1yz}_{\text{Fondo}} + \underbrace{2(2xy + 2xz)}_{\text{Costados}} + \underbrace{5yz}_{\text{Tapa}} = 6yz + 4xy + 4xz$$

Se desea minimizar $C = 6yz + 4xy + 4xz$ sujeto a $V = xyz = 96$. Las ecuaciones de Lagrange son

$$C_x = \lambda V_x \quad \text{o} \quad 4y + 4z = \lambda(yz)$$
$$C_y = \lambda V_y \quad \text{o} \quad 6z + 4x = \lambda(xz)$$
$$C_z = \lambda V_z \quad \text{o} \quad 6y + 4x = \lambda(xy)$$

y $xyz = 96$. Al despejar λ de cada una de las primeras tres ecuaciones, se obtiene

$$\frac{4y + 4z}{yz} = \frac{6z + 4x}{xz} = \frac{6y + 4x}{xy} = \lambda$$

Multiplicando por xyz cada una de estas expresiones, resulta

$$4xy + 4xz = 6yz + 4yx$$
$$4xy + 4xz = 6yz + 4xz$$
$$6yz + 4yx = 6yz + 4xz$$

que pueden ser simplificadas si se cancelan términos comunes de ambos lados de cada ecuación para obtener

$$4xz = 6yz$$
$$4xy = 6yz$$
$$4yx = 4xz$$

Dividiendo entre z ambos lados de la primera ecuación, entre y ambos lados de la segunda y entre x ambos lados de la tercera, se obtiene

$$4x = 6y \qquad \text{y} \qquad 4x = 6z \qquad \text{y} \qquad 4y = 4z$$

www.FreeLibros.com

de modo que $y = \frac{2}{3}x$ y $z = \frac{2}{3}x$. Sustituyendo estos valores en la ecuación de la restricción $xyz = 96$, se encuentra primero que

$$x\left(\frac{2}{3}x\right)\left(\frac{2}{3}x\right) = 96$$

$$\frac{4}{9}x^3 = 96$$

$$x^3 = 216 \quad \text{por lo cual} \quad x = 6$$

y entonces $$y = z = \frac{2}{3}(6) = 4$$

Por tanto, el costo mínimo se alcanza cuando la caja de joyas mide 6 pulgadas de profundidad con una base cuadrada de 4 pulgadas por lado.

Maximización de una utilidad

Una *función utilidad* $U(x, y)$ mide la satisfacción total o *utilidad* que un consumidor recibe por tener x unidades de una mercancía en particular, y y unidades de otra. El ejemplo 7.5.4 ilustra la forma en que los multiplicadores de Lagrange pueden ser usados para determinar cuántas unidades de cada mercancía, debe comprar el consumidor para maximizar la utilidad, sin salirse de un presupuesto fijo.

EJEMPLO | 7.5.4

Un consumidor tiene \$600 para gastar en dos mercancías, la primera de las cuales cuesta \$20 por unidad y, la segunda, \$30 por unidad. Suponga que la utilidad obtenida por el consumidor con x unidades de la primera mercancía y y unidades de la segunda mercancía, está dada por la **función de utilidad de Cobb-Douglas** $U(x, y) = 10x^{0.6}y^{0.4}$. ¿Cuántas unidades de cada mercancía debe comprar el consumidor para maximizar la utilidad?

Solución

El costo total de comprar x unidades de la primera mercancía a \$20 por unidad, y y unidades de la segunda mercancía a \$30 por unidad, es $20x + 30y$. Como el consumidor tiene sólo \$600 para gastar, la meta es maximizar la utilidad $U(x, y)$ sujeta a la restricción presupuestal $20x + 30y = 600$.

Las tres ecuaciones de Lagrange son

$$6x^{-0.4}y^{0.4} = 20\lambda \qquad 4x^{0.6}y^{-0.6} = 30\lambda \qquad \text{y} \qquad 20x + 30y = 600$$

De las primeras dos ecuaciones obtenemos

$$\frac{6x^{-0.4}y^{0.4}}{20} = \frac{4x^{0.6}y^{-0.6}}{30} = \lambda$$

$$9x^{-0.4}y^{0.4} = 4x^{0.6}y^{-0.6}$$

$$9y = 4x \quad \text{o sea} \quad y = \frac{4}{9}x$$

www.FreeLibros.com

Sustituyendo $y = \frac{4x}{9}$ en la tercera ecuación de Lagrange, resulta

$$20x + 30\left(\frac{4}{9}x\right) = 600$$

$$\left(\frac{100}{3}\right)x = 600$$

de modo que

$$x = 18 \qquad \text{y} \qquad y = \frac{4}{9}(18) = 8$$

Esto es, para maximizar la utilidad, el comprador debe comprar 18 unidades de la primera mercancía y 8 unidades de la segunda.

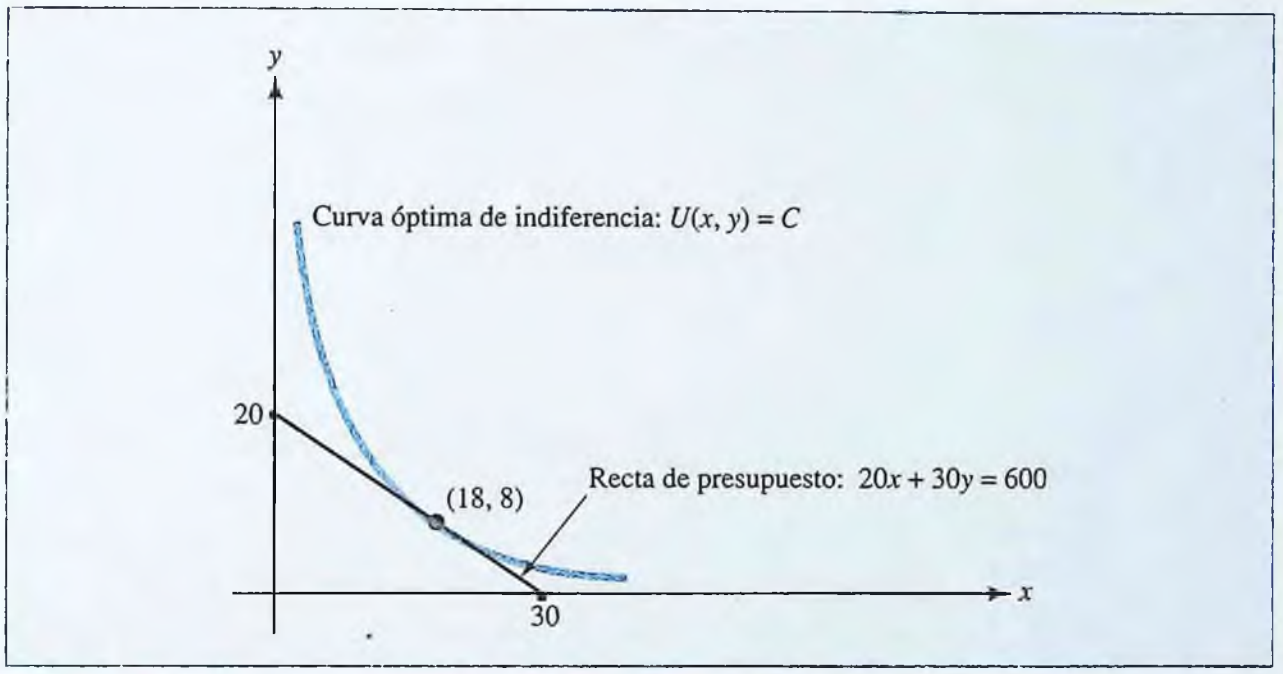


FIGURA 7.23 Restricción presupuestal y curva óptima de indiferencia

Recuerde de la sección 7.1 que las curvas de nivel de una función de utilidad se conocen como *curvas de indiferencia*. En la figura 7.23 se ilustra una gráfica que muestra la relación entre la curva óptima de indiferencia $U(x, y) = C$, donde $C = U(18, 8)$ y la restricción presupuestal $20x + 30y = 600$.

Asignación de recursos

Una clase importante de problemas en finanzas y economía comprende la determinación de una asignación óptima de recursos sujeta a una restricción sobre esos recursos. A continuación se muestra un ejemplo en el que las ventas se maximizan sujetas a una restricción del presupuesto.

EJEMPLO | 7.5.5

A un editor se le han asignado \$60 000 para gastar en el desarrollo y promoción de un nuevo libro. Se estima que si x miles de dólares se gastan en el desarrollo y y miles en la promoción, se venderán aproximadamente $f(x, y) = 20x^{3/2}y$ ejemplares del libro. ¿Cuánto dinero debe asignar el editor al desarrollo y cuánto a la promoción para maximizar las ventas?

www.FreeLibros.com

Solución

La meta es maximizar la función $f(x, y) = 20x^{3/2}y$ sujeta a la restricción $g(x, y) = 60$, donde $g(x, y) = x + y$. Las ecuaciones de Lagrange correspondientes son

$$30x^{1/2}y = \lambda \qquad 20x^{3/2} = \lambda \qquad \text{y} \qquad x + y = 60$$

De las primeras dos ecuaciones resulta

$$30x^{1/2}y = 20x^{3/2}$$

Queda claro que el valor máximo de f no se alcanza cuando $x = 0$, por lo que se puede suponer que $x \neq 0$ y se puede dividir ambos lados de esta ecuación entre $30x^{1/2}$ para obtener

$$y = \frac{2}{3}x$$

Sustituyendo esta expresión en la tercera ecuación de Lagrange, se tiene

$$x + \frac{2}{3}x = 60 \quad \text{o sea} \quad \frac{5}{3}x = 60$$

de donde se deduce que

$$x = 36 \qquad \text{y} \qquad y = \frac{2}{3}(36) = 24$$

Esto es, para maximizar las ventas, el editor debe gastar \$36 000 en desarrollo y \$24 000 en promoción. Si se hace esto, se venderán aproximadamente $f(36, 24) = 103\,680$ ejemplares del libro.

En la figura 7.24 se ve una gráfica que muestra la relación entre la restricción presupuestal y la curva de nivel para ventas óptimas.

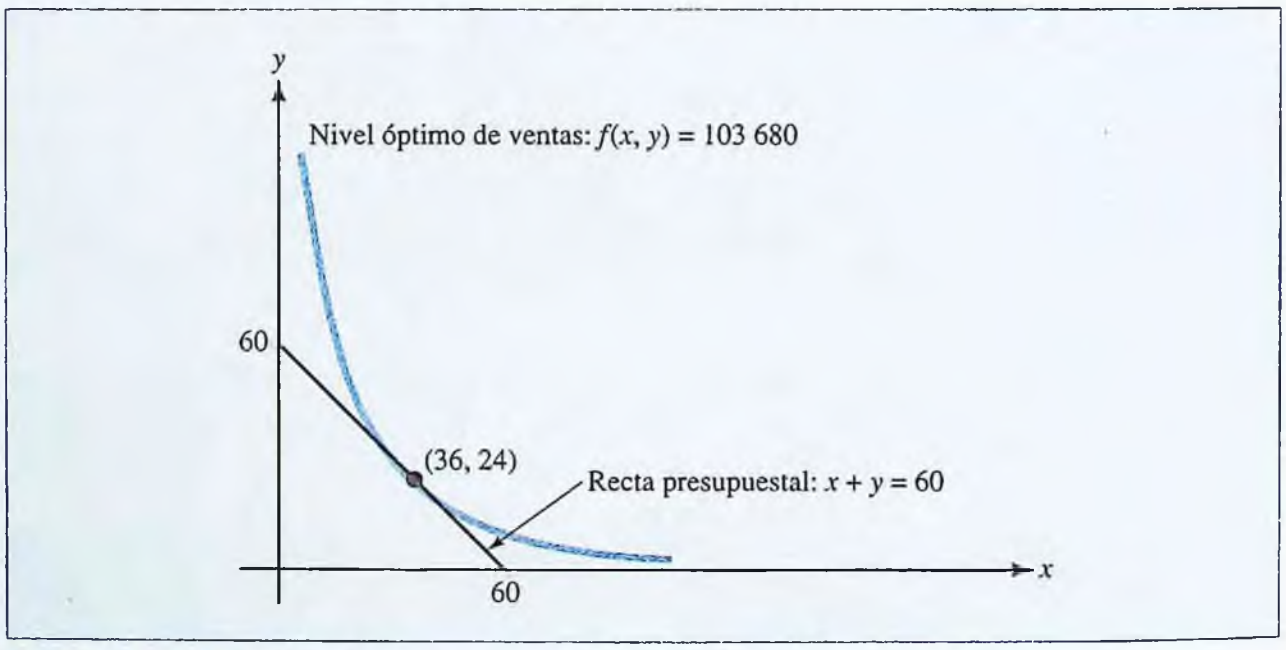


FIGURA 7.24 Restricción presupuestal y nivel óptimo de ventas.

Relevancia del multiplicador de Lagrange λ

Por lo general, la resolución de un problema de optimización con restricciones por el método de multiplicadores de Lagrange no requiere encontrar un valor numérico para el *multiplicador* λ *de Lagrange*. No obstante, en algunos problemas se desea calcular λ, que tiene esta útil representación.

www.FreeLibros.com

Multiplicador de Lagrange ■ Suponga que M es el valor máximo (o mínimo) de $f(x, y)$, sujeto a la restricción $g(x, y) = k$. El multiplicador de Lagrange λ es la razón de cambio de M con respecto a k. Esto es,

$$\lambda = \frac{dM}{dk}$$

Por tanto,

$$\lambda \approx \text{cambio que sufre } M \text{ por el aumento de 1 unidad en } k$$

EJEMPLO | 7.5.6

Suponga que al editor del ejemplo 7.5.5 se le asignan \$61 000 en lugar de \$60 000 para gastar en el desarrollo y promoción del nuevo libro. Estime la forma en que los \$1 000 adicionales afectarán el máximo nivel de ventas.

Solución

En el ejemplo 7.5.5, para hallar el valor máximo M de $f(x, y) = 20x^{3/2}y$ sujeta a la restricción $x + y = 60$, se resolvieron las tres ecuaciones de Lagrange

$$30x^{1/2}y = \lambda \qquad 20x^{3/2} = \lambda \qquad \text{y} \qquad x + y = 60$$

obteniendo $x = 36$ y $y = 24$. El multiplicador λ se puede hallar entonces sustituyendo estos valores de x y y en la primera o segunda ecuación de Lagrange. Con el uso de la segunda ecuación, se obtiene

$$\lambda = 20(36)^{3/2} = 4\,320$$

que significa que el máximo de ventas aumentará en aproximadamente 4 320 ejemplares (de 103 680 a 108 000) si el presupuesto se aumenta en 1 unidad, de 60 a 61 mil dólares.

Por qué funciona el método de los multiplicadores de Lagrange

A pesar de que una explicación rigurosa de cómo funciona el método de los multiplicadores de Lagrange contiene ideas avanzadas que están fuera del alcance de este texto, hay un argumento geométrico bastante sencillo que usted encontrará convincente. Este argumento depende del hecho de que para la curva de nivel $F(x, y) = C$, la pendiente en cada punto (x, y) está dada por

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

Este resultado es verdadero para cualquier curva de nivel de una función F cuyas derivadas parciales existen (siempre que $F_y \neq 0$). En el problema 48 se señala un ejemplo que justifica la fórmula.

A continuación, considere el problema de optimización con restricciones:

$$\text{Maximizar } f(x, y) \text{ sujeto a } g(x, y) = k$$

Geométricamente, esto significa que se debe hallar la curva de nivel más alta de f que corte a la curva de la restricción $g(x, y) = k$. Como lo sugiere la figura 7.25, la intersección crítica se presentará en un punto donde la curva de restricción sea tangente a la curva de nivel; esto es, donde la pendiente de la curva de restricción $g(x, y) = k$ sea igual a la pendiente de la curva de nivel $f(x, y) = C$.

www.FreeLibros.com

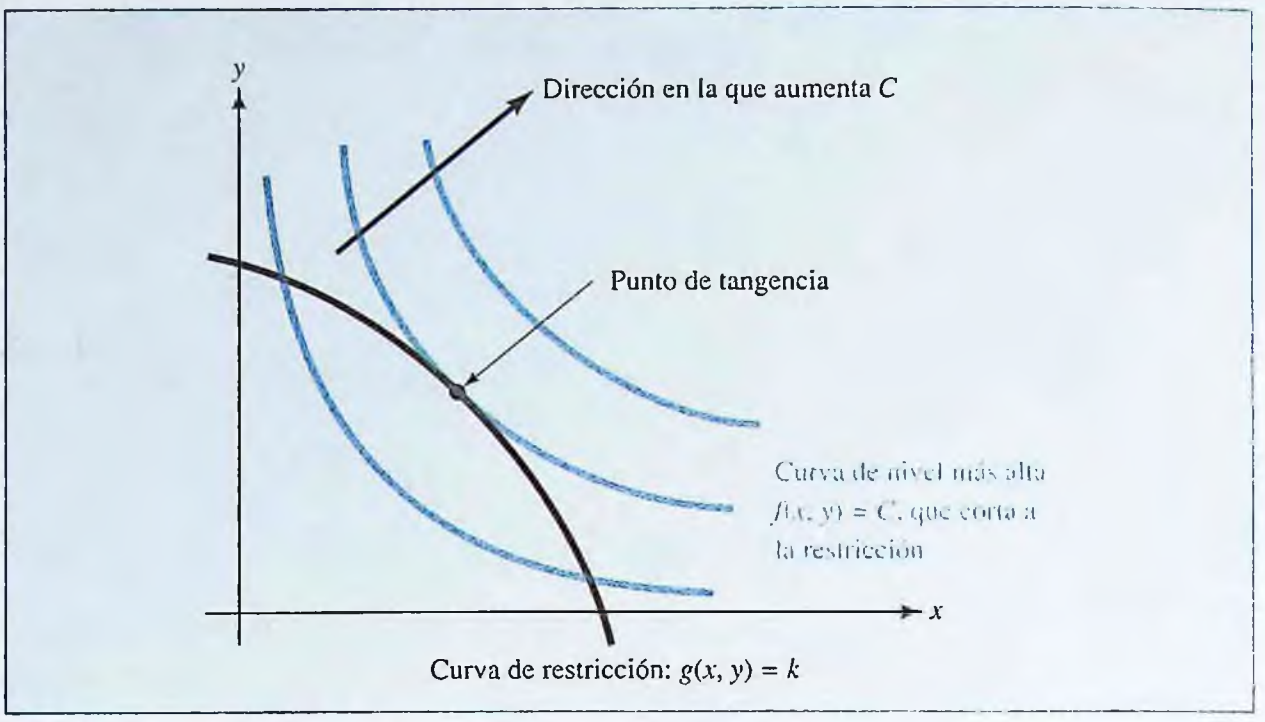


FIGURA 7.25 Curvas de nivel creciente y la curva de restricción.

De acuerdo con la fórmula indicada al principio de este análisis, se tiene

$$\text{Pendiente de la curva de la restricción} = \text{Pendiente de la curva de nivel}$$

$$-\frac{g_x}{g_y} = -\frac{f_x}{f_y}$$

o, lo que es equivalente,

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}$$

Si se denota por λ esta razón común, entonces

$$\frac{f_x}{g_x} = \lambda \qquad \text{y} \qquad \frac{f_y}{g_y} = \lambda$$

de la cual se obtienen las primeras dos ecuaciones de Lagrange

$$f_x = \lambda g_x \qquad \text{y} \qquad f_y = \lambda g_y$$

La tercera ecuación de Lagrange

$$g(x, y) = k$$

simplemente corresponde al hecho de que el punto de tangencia en realidad se encuentra sobre la curva de restricción.

PROBLEMAS | 7.5

En los problemas del 1 al 16 use el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar el extremo indicado. Se puede suponer que tal extremo existe.

1. Encuentre el valor máximo de $f(x, y) = xy$ sujeto a la restricción $x + y = 1$.
2. Encuentre los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = xy$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = 1$.
3. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$. Encuentre el valor mínimo de $f(x, y)$ sujeto a la restricción $xy = 1$.
4. Sea $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$. Encuentre el valor mínimo de $f(x, y)$ sujeto a la restricción $2x + y = 22$.

www.FreeLibros.com

5. Encuentre el valor mínimo de $f(x, y) = x^2 - y^2$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = 4$.

6. Sea $f(x, y) = 8x^2 - 24xy + y^2$. Encuentre los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y)$ sujeto a la restricción $8x^2 + y^2 = 1$.

7. Sea $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2y$. Encuentre los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y)$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 = 1$.

8. Encuentre el valor máximo de $f(x, y) = xy^2$ sujeto a la restricción $x + y = 1$.

9. Sea $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 3xy - 2x - 23y + 3$. Encuentre el valor mínimo de la función $f(x, y)$ sujeto a la restricción $x + y = 15$.

10. Sea $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 2xy + 4x + 2y + 7$. Encuentre el valor mínimo de la función $f(x, y)$ sujeto a la restricción $4x^2 + 4xy = 1$.

11. Encuentre los valores máximo y mínimo de $f(x, y) = e^{xy}$ sujeto a $x^2 + y^2 = 4$.

12. Encuentre el valor máximo de $f(x, y) = \ln(xy^2)$ sujeto a $2x^2 + 3y^2 = 8$ para $x > 0$ y $y > 0$.

13. Encuentre el valor máximo de $f(x, y, z) = xyz$ sujeto a $x + 2y + 3z = 24$, para $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

14. Encuentre los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z) = x + 3y - z$ sujeto a $z = 2x^2 + y^2$.

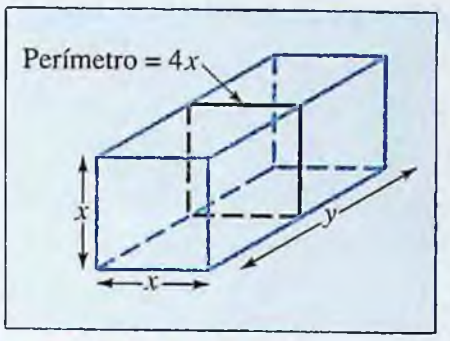
15. Sea $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$. Encuentre los valores máximo y mínimo de $f(x, y, z)$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.

16. Encuentre el valor mínimo de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$.

17. CONSTRUCCIÓN Un agricultor desea cercar un terreno rectangular a lo largo de la orilla de un río. El área del terreno debe medir 3 200 metros cuadrados y no se necesita cercado a lo largo de la orilla del río. Encuentre las dimensiones del terreno que requerirá la cantidad mínima de cercado.

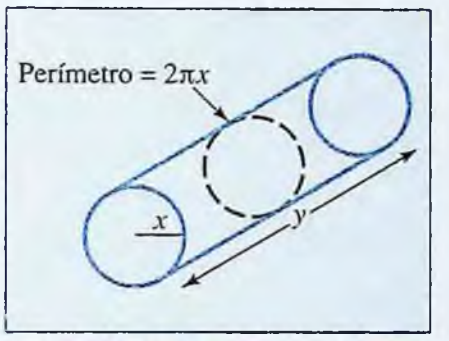
18. CONSTRUCCIÓN Se cuenta con 320 metros de cercado para encerrar un campo rectangular. ¿Cómo debe usarse la cerca para que el área encerrada sea tan grande como sea posible?

19. EMPAQUE POSTAL De acuerdo con el reglamento postal, el perímetro más la longitud de un paquete enviado por correo de cuarta clase no pueden exceder de 108 pulgadas. ¿Cuál es el máximo volumen posible de un paquete rectangular con dos lados cuadrados que se puedan enviar por correo de cuarta clase? (Consulte la siguiente figura.)



PROBLEMA 19

20. EMPAQUE POSTAL De acuerdo con el reglamento postal dado en el problema 19, ¿cuál es el máximo volumen de una lata cilíndrica que se pueda enviar por correo de cuarta clase? (Un cilindro de radio R y longitud H tiene volumen $\pi R^2 H$.)



PROBLEMA 20

21. EMPAQUE Sabiendo que 12 onzas líquidas son aproximadamente 6.89π pulgadas cúbicas, halle las dimensiones de la lata de refresco de 12 onzas que se puede construir usando la cantidad mínima de metal. (Recuerde que el volumen de un cilindro de radio R y altura H es $\pi R^2 H$, y que un círculo de radio R tiene área πR^2 y circunferencia $2\pi R$.)

22. EMPAQUE Una lata cilíndrica debe contener 4π pulgadas cúbicas de jugo de naranja congelado. El costo por pulgada cuadrada para construir la tapa y el fondo de metal es el doble del costo por pulgada cuadrada para construir los lados de cartón. ¿Cuáles son las dimensiones de la lata menos costosa? (Vea la información de mediciones en el problema 21.)

23. ASIGNACIÓN DE FONDOS Un fabricante tiene \$8 000 para gastar en el desarrollo y promoción de un nuevo producto. Se estima que si x miles de dólares se gastan en el desarrollo y y miles de dólares se gastan en promoción, las ventas serán aproximadamente de $f(x, y) = 50x^{1/2}y^{3/2}$ unidades. ¿Cuánto dinero debe asignar el fabricante a desarrollo y cuánto a promoción para maximizar ventas?

www.FreeLibros.com

24. ASIGNACIÓN DE FONDOS Si se gastan x miles de dólares en mano de obra y se gastan y miles de dólares en equipo, la producción de cierta fábrica será $Q(x, y) = 60x^{1/3}y^{2/3}$ unidades. Si se dispone de \$120 000, ¿cuánto debe asignarse a mano de obra y cuánto a equipo para generar la máxima producción posible?

25. ANÁLISIS MARGINAL Utilice el multiplicador de Lagrange, λ, para estimar el cambio que se producirá en el máximo de producción de la fábrica del problema 24, si el dinero disponible para mano de obra y equipo aumenta en \$1 000.

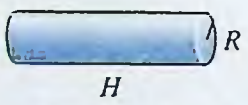
26. ÁREA SUPERFICIAL DEL CUERPO HUMANO Recuerde del problema 35 de la sección 7.1 que una fórmula empírica para hallar el área de la superficie corporal de una persona es

$$S(W, H) = 0.0072W^{0.425}H^{0.725}$$

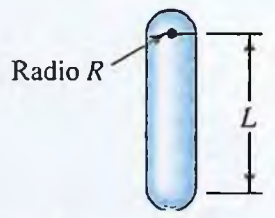
donde W (kg) es el peso de la persona y H (cm) es su estatura. Suponga que por un corto tiempo, el peso de María se ajusta a medida que ella crece, de modo que $W + H = 160$. Con esta restricción, ¿qué estatura y peso maximizan el área de la superficie corporal de María?

En los problemas 27 y 28 necesitará saber que un cilindro cerrado de radio R y longitud L tiene volumen $V = \pi R^2 L$ y área superficial $S = 2\pi RL + 2\pi R^2$. El volumen de una semisesfera de radio R es $V = \frac{2}{3}\pi R^3$ y su área superficial es $S = 2\pi R^2$.

27. MICROBIOLOGÍA Una bacteria tiene forma de barra cilíndrica. Si el volumen de la bacteria es fijo, ¿qué relación entre el radio R y la longitud H corresponde al área superficial mínima ?



PROBLEMA 27



PROBLEMA 28

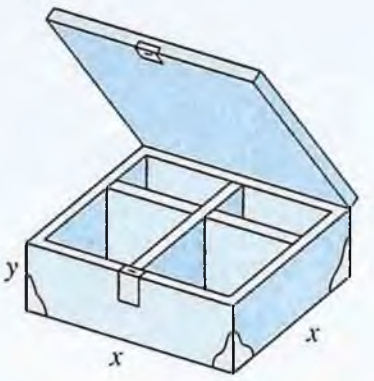
28. MICROBIOLOBÍA Una bacteria tiene forma de barra cilíndrica con dos "tapas" semiesféricas en los extremos. Si el volumen de la bacteria es fijo, ¿qué relación se debe cumplir entre su radio R y su longitud L para que su área superficial sea mínima?

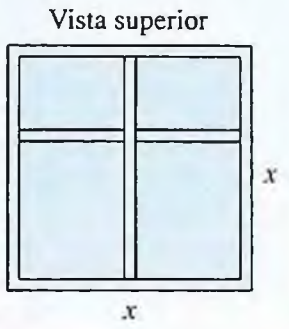
29. ÓPTICA En óptica, la fórmula de una lente delgada dice que la longitud focal L de una lente delgada está relacionada con la distancia d_o desde el objeto, y la distancia d_i desde la imagen, por la ecuación

$$\frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i} = \frac{1}{L}$$

Si L permanece constante cuando d_o y d_i varían, ¿cuál es la máxima distancia posible, $s = d_o + d_i$, entre el objeto y la imagen?

30. CONSTRUCCIÓN Se construye una caja para joyas con compartimientos, como se muestra en la figura siguiente. Si el volumen debe ser de 800 cm^3, ¿qué dimensiones debe tener la caja para minimizar su área superficial total (tapa, fondo, costados y divisiones interiores)? Nótese que no se ha dicho nada acerca de dónde situar las divisiones. ¿Tiene esto importancia?





31. CONSTRUCCIÓN Suponga que la caja para joyas del problema 30 se diseña de modo que el material de la tapa cuesta el doble que el material del fondo y de los costados, y tres veces más que el material de las divisiones interiores. Encuentre las dimensiones que minimizan el costo total de construir la caja.

32. RELATO DE ESPÍAS Habiéndose desecho de los pistoleros de Scélérat (problema 34 de la sección 6.2), el espía va en busca del líder de ellos. Entra a un cuarto y la puerta se cierra de pronto tras él. De inmediato, empieza a sentir calor y, demasiado tarde, se entera que está atrapado dentro de la temida sala del asadero de Scélérat. Buscando desesperadamente un modo de salvarse, observa que el cuarto tiene la forma del círculo $x^2 + y^2 = 60$ y que él está de pie en el centro $(0, 0)$. Presiona el botón de su reloj de pulsera especial para detectar calor y ve que la temperatura en cada punto (x, y) del cuarto está dada por

$$T(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy + 5x + 15y + 130$$

Del reporte de un informante, él sabe que en algún lugar en las paredes de este cuarto hay una trampa que lleva a las afueras del castillo, y piensa que debe estar situada en el punto más fresco. ¿En dónde está? ¿Qué tan fresco estará el espía cuando llegue ahí?

www.FreeLibros.com

33. FÍSICA DE PARTÍCULAS Una partícula de masa m en una caja rectangular con dimensiones x, y y z tiene energía fundamental

$$E(x, y, z) = \frac{k^2}{8m}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$$

donde k es una constante física. En el problema 29, sección 7.3, se pidió minimizar la energía fundamental sujeta a la restricción de volumen fijo $V_0 = xyz$ usando una sustitución. Resuelva el mismo problema de optimización con restricciones usando el método de los multiplicadores de Lagrange.

34. CONSTRUCCIÓN Se debe construir un edificio rectangular con un material para el techo que cuesta \$31 por pie cuadrado, otro material para los costados y la parte trasera que cuesta \$27 por pie cuadrado, mientras que el revestimiento y el vidrio empleado en la construcción del frente cuestan \$55 por pie cuadrado. Si el edificio debe tener un volumen de 16 000 pies cúbicos, ¿qué dimensiones minimizan el costo total de construcción?

35. CONSTRUCCIÓN Se va a construir un cobertizo para bodega con material que cuesta \$15 por pie cuadrado para el techo, \$12 por pie cuadrado para los dos costados y la parte trasera, y \$20 por pie cuadrado para el frente. ¿Cuáles son las dimensiones del cobertizo más grande (en volumen) que puede construirse con \$8 000?

36. ASIGNACIÓN DE FONDOS Un fabricante está planeando vender un nuevo producto al precio de \$150 por unidad, y estima que si x miles de dólares se gastan en desarrollo y y miles de dólares en promoción, se venderán aproximadamente

$$\frac{320y}{y+2} + \frac{160x}{x+4}$$ unidades del producto. El costo de manufacturar el producto es \$50 por unidad. Si el fabricante tiene un total de \$8 000 para gastar en desarrollo y promoción, ¿cómo debe asignarse este dinero para generar la máxima utilidad posible?
[*Sugerencia:* Utilidad = (número de unidades)(Precio por unidad − costo por unidad) − cantidad gastada en desarrollo y producción.]

37. ANÁLISIS MARGINAL Suponga que el fabricante del problema 36 decide gastar \$8 100 en lugar de \$8 000 en el desarrollo y promoción del nuevo producto. Use el multiplicador de Lagrange, λ, para estimar la forma en que este cambio afectará la máxima utilidad posible.

38. ASIGNACIÓN DE FONDOS NO RESTRINGIDOS

a) Si el fabricante del problema 36 dispone de fondos ilimitados, ¿cuánto debe gastar en desarrollo y cuánto en promoción para generar la máxima utilidad posible?
[*Sugerencia*: Use los métodos de la sección 7.3.]

b) Suponga que el problema de asignación de fondos del inciso *a*) se resuelve por el método de los multiplicadores de Lagrange. ¿Cuál es el valor de l que corresponde al presupuesto óptimo? Interprete su respuesta en términos de dM/dk.

c) Su respuesta al inciso *b*) debe sugerir otro método para resolver el problema del inciso *a*). Resuelva el problema con el uso de este nuevo método.

39. UTILIDAD Un consumidor tiene \$280 para gastar en dos mercancías, la primera de las cuales cuesta \$2 por unidad y la segunda \$5 por unidad. Suponga que la utilidad obtenida por el consumidor por x unidades de la primera mercancía, y y unidades de la segunda, está dada por

$U(x, y) = 100x^{0.25}y^{0.75}$.

a) ¿Cuántas unidades de cada mercancía debe comprar el consumidor para maximizar la utilidad?

b) Calcule el multiplicador de Lagrange, λ, e interprételo en términos económicos. (En el contexto de maximizar la utilidad, λ se llama **utilidad marginal del dinero.**)

40. UTILIDAD Un consumidor tiene k dólares para gastar en dos mercancías, la primera de las cuales cuesta a dólares por unidad y la segunda cuesta b dólares por unidad. Suponga que la utilidad obtenida por el consumidor por x unidades de la primera mercancía, y y unidades de la segunda mercancía, está dada por la función de utilidad de Cobb-Douglas $U(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}$, donde $0 < \alpha < 1$ y $\alpha + \beta = 1$. Demuestre que la utilidad se maximiza cuando

$$x = \frac{k\alpha}{a} \text{ y } y = \frac{k\beta}{b}.$$

41. En el problema 40, ¿cómo cambia la utilidad máxima si k se aumenta en 1 dólar?

En los problemas del 42 al 44, sea $Q(x, y)$ una función de producción, donde x y y representan unidades de mano de obra y capital, respectivamente. Si los costos unitarios de mano de obra y capital están dados por p y q, respectivamente, entonces $px + qy$ representa el costo total de producción.

42. COSTO MÍNIMO Use los multiplicadores de Lagrange para demostrar que, sujeto a un nivel fijo de producción c, el costo total se minimiza cuando

$$\frac{Q_x}{p} = \frac{Q_y}{q} \qquad \text{y} \qquad Q(x, y) = c$$

siempre que Q_x y Q_y no sean cero simultáneamente y $p \neq 0$ y $q \neq 0$. (Con frecuencia, esto se conoce como el **problema del costo mínimo,** y su solución se llama **costo mínimo de la combinación de insumos.**)

www.FreeLibros.com

43. PRESUPUESTO FIJO Demuestre que las entradas x y y, que maximizan el nivel de producción $Q(x, y)$, sujetas a un costo fijo k satisfacen

$$\frac{Q_x}{p} = \frac{Q_y}{q} \qquad \text{con } px + qy = k$$

(Suponga que ni p ni q son 0.) Esto se llama **problema con presupuesto fijo.**

44. COSTO MÍNIMO Demuestre que, sujeto al nivel fijo de producción $Ax^{\alpha}y^{\beta} = k$, donde k es una constante y α y β son positivas con $\alpha + \beta = 1$, la función de costo conjunto $C(x, y) = px + qy$ se minimiza cuando

$$x = \frac{k}{A}\left(\frac{\alpha q}{\beta p}\right)^{\beta}, y = \frac{k}{A}\left(\frac{\beta p}{\alpha q}\right)^{\alpha}$$

45. Use los multiplicadores de Lagrange para hallar los posibles puntos máximo o mínimo en la parte de la superficie $z = x - y$ para la cual $y = x^5 + x - 2$. A continuación utilice su calculadora para trazar la curva $y = x^5 + x - 2$ y las curvas de nivel a la superficie $f(x, y) = x - y$, y demuestre que los puntos que acaba de hallar no representan máximos o mínimos relativos. ¿Qué concluye de esta observación?

46. MANEJO DE DESECHOS PELIGROSOS Un estudio realizado en un sitio para tirar desechos deja ver la contaminación del suelo en una región que se puede describir, aproximadamente, como el interior de la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

donde x y y están en millas. El administrador del sitio planea colocar una cerca circular que contenga todo el territorio contaminado.

a) Si la oficina en el sitio está en el punto $S(1,1)$, ¿cuál es el radio del círculo más pequeño con centro en S que contiene toda la región contaminada? [*Sugerencia:* La función $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2$ mide el cuadrado de la distancia desde $S(1, 1)$ al punto $P(x, y)$. El radio requerido se puede hallar maximizando $f(x, y)$, sujeta a cierta restricción.]

b) Lea un artículo sobre el manejo de desechos y escriba un párrafo sobre la forma en que las administraciones toman decisiones con respecto a rellenos y otros basureros.[12]

47. ANÁLISIS MARGINAL Sea $P(K, L)$ una función de producción, donde K y L representan el capital y la fuerza laboral requeridos para cierto procedimiento de manufactura. Suponga que se desea maximizar $P(K, L)$, sujeta a una restricción de costo, $C(K, L) = A$, para A constante. Use el método de los multiplicadores de Lagrange para demostrar que la producción óptima se logra cuando

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial K}}{\dfrac{\partial C}{\partial K}} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial L}}{\dfrac{\partial C}{\partial L}}$$

esto es, cuando la razón entre la producción marginal del capital y el costo marginal del capital es igual a la razón entre la producción marginal del trabajo y el costo marginal del trabajo.

48. Sea $F(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$.

a) Si $F(x, y) = k$ para constante k, use el método de derivación implícita desarrollado en el capítulo 2 para hallar $\dfrac{dy}{dx}$.

b) Encuentre las derivadas parciales F_x y F_y y verifique que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

49. Repita el problema 48 para la función

$$F(x, y) = xe^{xy^2} + \frac{y}{x} + x \ln (x + y)$$

En los problemas del 50 al 53 use el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar el máximo o el mínimo indicado. Necesitará usar la instrucción de graficación o la función resolver de su calculadora.

50. Maximice $f(x, y) = e^{x+y} - x \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$ sujeta a $x + y = 4$.

51. Minimice $f(x, y) = \ln (x + 2y)$ sujeta a $xy + y = 5$.

52. Minimice $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{xy} + \dfrac{1}{y^2}$ sujeta a $x + 2y = 7$.

53. Maximice $f(x, y) = xe^{x^2-y}$ sujeta a $x^2 + 2y^2 = 1$.

[12] Un excelente caso práctico se puede hallar en M. D. LaGrega, P. L. Buckingham y J. C. Evans, *Hazardous Waste Management*, McGraw-Hill, Inc., Nueva York, 1994, pp. 946-955.

www.FreeLibros.com

SECCIÓN 7.6 | Integrales dobles

Esta sección trata sobre integrales definidas de funciones de dos variables, que se conocen como integrales dobles. Recuerde que la integral de una función $f(x)$ sobre un intervalo $a \leq x \leq b$ es denotada por $\int_a^b f(x)\,dx$, y la notación análoga para la integral doble de $f(x, y)$ sobre la región R es $\iint_R f(x, y)\,dA$.

En los capítulos 5 y 6, se integró una función de una variable invirtiendo el proceso de derivación. Aquí se usará un proceso semejante para evaluar integrales dobles. Sin embargo, como en la integración de $f(x, y)$ intervienen dos variables, esta integración se realizará manteniendo fija una variable e integrando con respecto a la otra.

Por ejemplo, para calcular la integral parcial $\int_1^2 xy^2\,dx$ se integra con respecto a x, usando el teorema fundamental de cálculo, manteniendo y constante:

$$\int_1^2 xy^2\,dx = \frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{x=1}^{x=2}$$
$$= \left[\frac{1}{2}(2)^2y^2\right] - \left[\frac{1}{2}(1)^2y^2\right] = \frac{3}{2}y^2$$

Análogamente, para evaluar $\int_{-1}^1 xy^2\,dy$, se integra con respecto a y, manteniendo x constante:

$$\int_{-1}^1 xy^2\,dy = x\left(\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{y=-1}^{y=1}$$
$$= \left[x\left(\frac{1}{3}(1)^3\right)\right] - \left[x\left(\frac{1}{3}(-1)^3\right)\right] = \frac{2}{3}x$$

En general, la integración parcial de una función $f(x, y)$ con respecto a x da como resultado una función sólo de y, que se puede integrar entonces como función de una sola variable, produciendo así lo que llamamos una **integral iterada** $\int\left[\int f(x, y)\,dx\right]dy$. Del mismo modo, la integral iterada $\int\left[\int f(x, y)\,dy\right]dx$ se obtiene integrando primero con respecto a y, manteniendo x constante, y luego con respecto a x. Regresando a nuestro ejemplo, se tiene

$$\int_{-1}^1\left(\int_1^2 xy^2\,dx\right)dy = \int_{-1}^1 \frac{3}{2}y^2\,dy = \frac{1}{2}y^3\Big|_{y=-1}^{y=1} = 1$$

y

$$\int_1^2\left(\int_{-1}^1 xy^2\,dy\right)dx = \int_1^2 \frac{2}{3}x\,dx = \frac{1}{3}x^2\Big|_{x=1}^{x=2} = 1$$

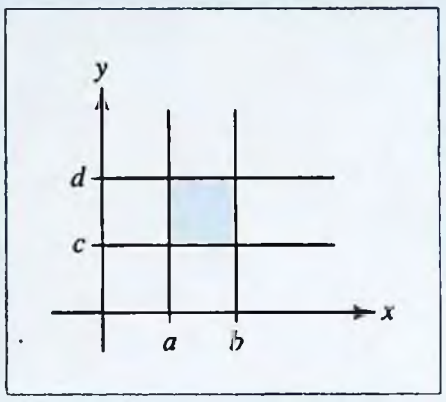
En este ejemplo, las dos integrales iteradas tienen el mismo valor. Se puede suponer que esto será verdadero para todas las integrales iteradas consideradas en este texto. La integral doble de $f(x, y)$ sobre una región rectangular en el plano xy tiene la siguiente definición, en términos de integrales iteradas.

www.FreeLibros.com

La integral doble sobre una región rectangular

La integral doble $\iint_R f(x, y)\,dA$ sobre la región rectangular mostrada en esta gráfica

R: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$



está dada por el valor común de las dos integrales iteradas

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx \quad \text{y} \quad \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy; \text{ esto es,}$$

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right] dy$$

El ejemplo 7.6.1 ilustra el cálculo de esta clase de integrales dobles.

EJEMPLO 7.6.1

Evalúe la integral doble

$$\iint_R xe^{-y}\,dA$$

donde R es la región rectangular $-2 \le x \le 1$, $0 \le y \le 5$ usando:

a) primero integración respecto a x

b) primero integración respecto a y

Solución

a) Integrando primero respecto a x:

$$\iint_R xe^{-y}\,dA = \int_0^5 \left(\int_{-2}^1 xe^{-y}\,dx\right) dy$$

$$= \int_0^5 \frac{1}{2}x^2 e^{-y}\Big|_{x=-2}^{x=1} dy$$

$$= \int_0^5 \frac{1}{2}e^{-y}[(1)^2 - (-2)^2]\,dy = \int_0^5 \left(-\frac{3}{2}e^{-y}\right) dy$$

$$= -\frac{3}{2}(-e^{-y})\Big|_{y=0}^{y=5} = \frac{3}{2}(e^{-5} - e^0) = \frac{3}{2}(e^{-5} - 1)$$

www.FreeLibros.com

b) Integrando primero con respecto a y, resulta

$$\iint_R xe^{-y}\,dA = \int_{-2}^{1}\left(\int_0^5 xe^{-y}\,dy\right)dx$$

$$= \int_{-2}^{1} x(-e^{-y})\Big|_{y=0}^{y=5} dx = \int_{-2}^{1}[-x(e^{-5}-e^0)]\,dx$$

$$= \left[-(e^{-5}-1)\left(\frac{1}{2}x^2\right)\right]\Bigg|_{x=-2}^{x=1}$$

$$= -\frac{1}{2}(e^{-5}-1)[(1)^2-(-2)^2] = \frac{3}{2}(e^{-5}-1)$$

En el ejemplo 7.6.1, no hubo diferencia en el orden de integración. Los cálculos no sólo dan el mismo resultado, sino que las integraciones son en esencia del mismo nivel de dificultad. Sin embargo, a veces el orden sí es importante, como se ilustra en el ejemplo 7.6.2.

EJEMPLO 7.6.2

Evalúe la integral doble

$$\iint_R xe^{xy}\,dA$$

donde R es la región rectangular $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1$.

Solución

Si se evalúa la integral en el orden

$$\int_0^1\left(\int_0^2 xe^{xy}\,dx\right)dy$$

será necesario usar integración por partes para la integración interior:

$$u = x \qquad dv = e^{xy}\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{1}{y}e^{xy}$$

$$\int_0^2 xe^{xy}\,dx = \frac{x}{y}e^{xy}\Big|_{x=0}^{x=2} - \int_0^2 \frac{1}{y}e^{xy}\,dx$$

$$= \left(\frac{x}{y}-\frac{1}{y^2}\right)e^{xy}\Big|_{x=0}^{x=2} = \left(\frac{2}{y}-\frac{1}{y^2}\right)e^{2y} - \left(\frac{-1}{y^2}\right)$$

Entonces la integración exterior se convierte en

$$\int_0^1\left[\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{y^2}\right)e^{2y}+\frac{1}{y^2}\right]dy$$

¿Ahora qué? ¿Tiene alguna idea?

www.FreeLibros.com

Por otra parte, si se integra primero respecto a y, ambos cálculos son fáciles:

$$\int_0^2 \left(\int_0^1 xe^{xy}\, dy \right) dx = \int_0^2 \left. \frac{xe^{xy}}{x} \right|_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^2 (e^x - 1)\, dx = (e^x - x) \Big|_{x=0}^{x=2}$$

$$= (e^2 - 2) - e^0 = e^2 - 3$$

Integrales dobles sobre regiones no rectangulares

En cada uno de los ejemplos precedentes, la región de integración es un rectángulo, pero también se pueden definir integrales dobles sobre regiones no rectangulares. Sin embargo, antes de hacerlo, vamos a introducir un procedimiento eficiente para describir regiones como ésta en términos de desigualdades.

Secciones transversales verticales

La región R que se ilustra en la figura 7.26 está limitada abajo por la curva $y = g_1(x)$, arriba por la curva $y = g_2(x)$, y en los costados por las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Esta región se puede describir con las desigualdades

$$R\text{: } a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)$$

La primera desigualdad especifica el intervalo en el que se debe encontrar x, mientras que la segunda indica los límites inferior y superior de la sección transversal vertical de R para cada una de las x de este intervalo. En palabras:

R es la región tal que para cada x entre a y b, y varía de $g_1(x)$ a $g_2(x)$.

Este método para describir una región se ilustra en el ejemplo 7.6.3.

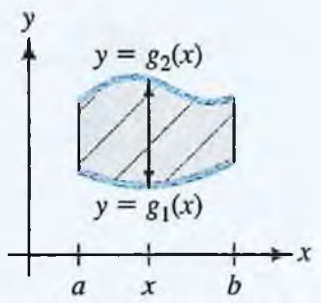


FIGURA 7.26 Secciones transversales verticales. La región

$$R\text{: } a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)$$

EJEMPLO 7.6.3

Sea R la región limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 2x$. Use desigualdades para describir R en términos de sus secciones transversales verticales.

Solución

Comience dibujando la curva y la recta, como se muestra en la figura 7.27. Identifique la región R, y para tener una referencia, trace una sección transversal vertical. Resuelva las ecuaciones $y = x^2$ y $y = 2x$ simultáneamente para hallar los puntos de intersección, $(0, 0)$ y $(2, 4)$. Observe que en la región R, la variable x toma todos los valores desde $x = 0$ hasta $x = 2$ y que para cada uno de estos valores de x, la sección transversal vertical está limitada abajo por $y = x^2$ y arriba por $y = 2x$. Por tanto, R puede ser descrita por las desigualdades

$$0 \le x \le 2 \quad \text{y} \quad x^2 \le y \le 2x$$

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Grafique la región sobre la cual la integral doble del ejemplo 7.6.3 está siendo evaluada. Introduzca $y = x^2$ en Y1 y $y = 2x$ en Y2 del editor de ecuaciones y grafique usando la pantalla [−0.15, 2.2]1 por [−0.5, 4.5]1. Use la función TRACE o la función de cálculo de intersecciones de su calculadora para localizar los puntos de intersección de Y1 y Y2. Use la función de recta vertical de su calculadora para exhibir las secciones transversales verticales sobre las que se realizará la integración.

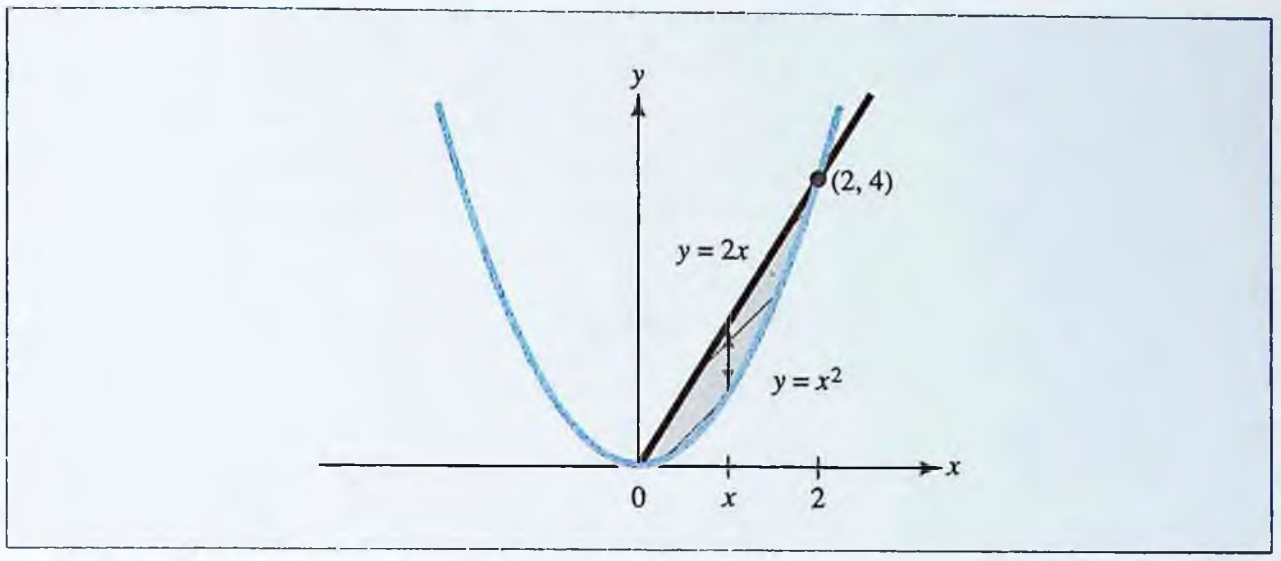


FIGURA 7.27 Región R entre $y = x^2$ y $y = 2x$ descrita por las secciones transversales verticales como R: $0 \le x \le 2$, $x \le y \le 2x$.

Secciones transversales horizontales

La región R de la figura 7.28 está limitada a la izquierda por la curva $x = h_1(y)$, a la derecha por $x = h_2(y)$, abajo por la recta horizontal $y = c$, y arriba por $y = d$. Esta región puede ser descrita por el par de desigualdades

$$R\text{: } c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)$$

La primera desigualdad especifica el intervalo en el que se halla y, y la segunda indica los límites izquierdo ("trasero") y derecho ("delantero") de una sección transversal horizontal. En palabras:

R es la región tal que para cada y entre c y d,
x varía de $h_1(y)$ a $h_2(y)$.

Este método de descripción está ilustrado en el ejemplo 7.6.4 para la misma región descrita en el ejemplo 7.6.3 usando secciones transversales verticales.

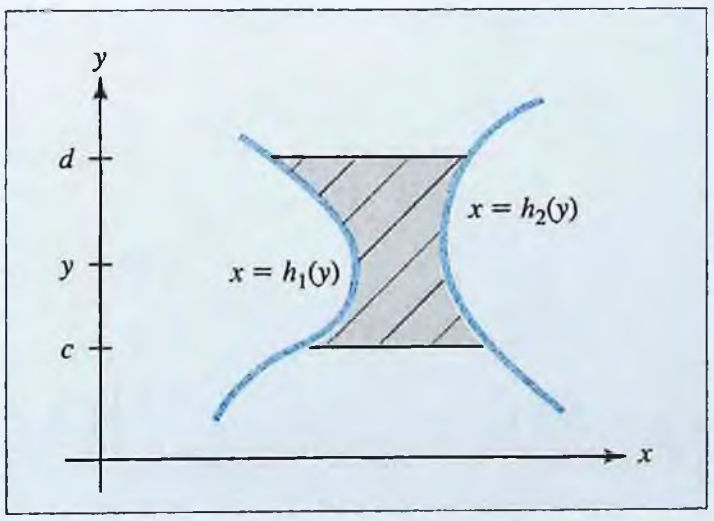


FIGURA 7.28 Secciones transversales horizontales: La región

$$R\text{: } c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)$$

EJEMPLO 7.6.4

Describa la región R limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 2x$ en términos de desigualdades usando secciones transversales horizontales.

www.FreeLibros.com

Solución

Igual que en el ejemplo 7.6.3, dibuje la región y encuentre los puntos de intersección de la recta y la curva, pero esta vez trace una sección transversal horizontal (Figura 7.29).

En la región R, la variable y toma todos los valores desde $y = 0$ hasta $y = 4$. Para cada uno de estos valores de y, la sección transversal horizontal se extiende de la recta $y = 2x$, a la izquierda, a la curva $y = x^2$, a la derecha. Como la ecuación de la recta se puede rescribir como $x = \frac{1}{2}y$ y la ecuación de la curva como $x = \sqrt{y}$, las desigualdades que describen R en términos de sus secciones transversales horizontales son

$$0 \le y \le 4 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2}y \le x \le \sqrt{y}$$

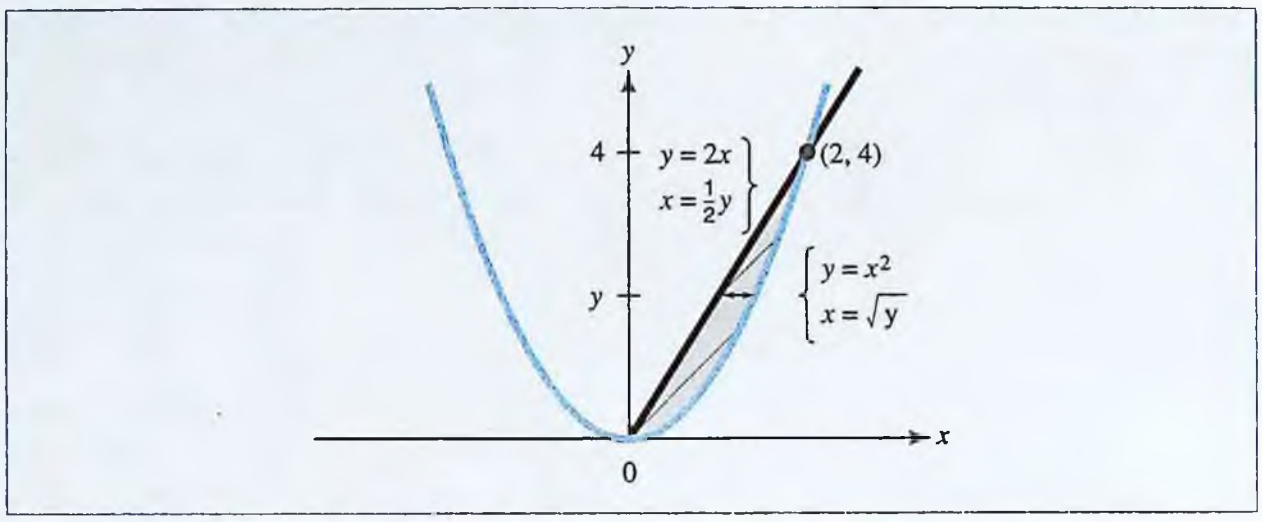


FIGURA 7.29 Región R entre $y = x^2$ y $y = 2x$ descrita mediante secciones transversales horizontales como R: $0 \le y \le 4$, $\frac{1}{2}y \le x \le \sqrt{y}$.

Para evaluar una integral doble sobre una región R descrita mediante secciones ya sean verticales u horizontales, se usa una integral iterada cuyos límites de integración provienen de las desigualdades que describen la región. A continuación se da una descripción precisa de cómo se determinan los límites de integración.

Límites de integración para integrales dobles ■ Si R puede ser descrita por las desigualdades

$$a \le x \le b \qquad \text{y} \qquad g_1(x) \le y \le g_2(x)$$

entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$$

Si R puede ser descrita por las desigualdades

$$c \le y \le d \qquad \text{y} \qquad h_1(y) \le x \le h_2(y)$$

entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

www.FreeLibros.com

EJEMPLO 7.6.5

Sea I la integral doble

$$I = \int_0^1 \int_0^y y^2 e^{xy}\, dx\, dy$$

a) Dibuje la región de integración y rescriba la integral con el orden de integración invertido.

b) Evalúe I usando cualquiera de los órdenes de integración.

Solución

a) Al comparar I con la forma general para el orden $dx\, dy$, se ve que la región de integración es

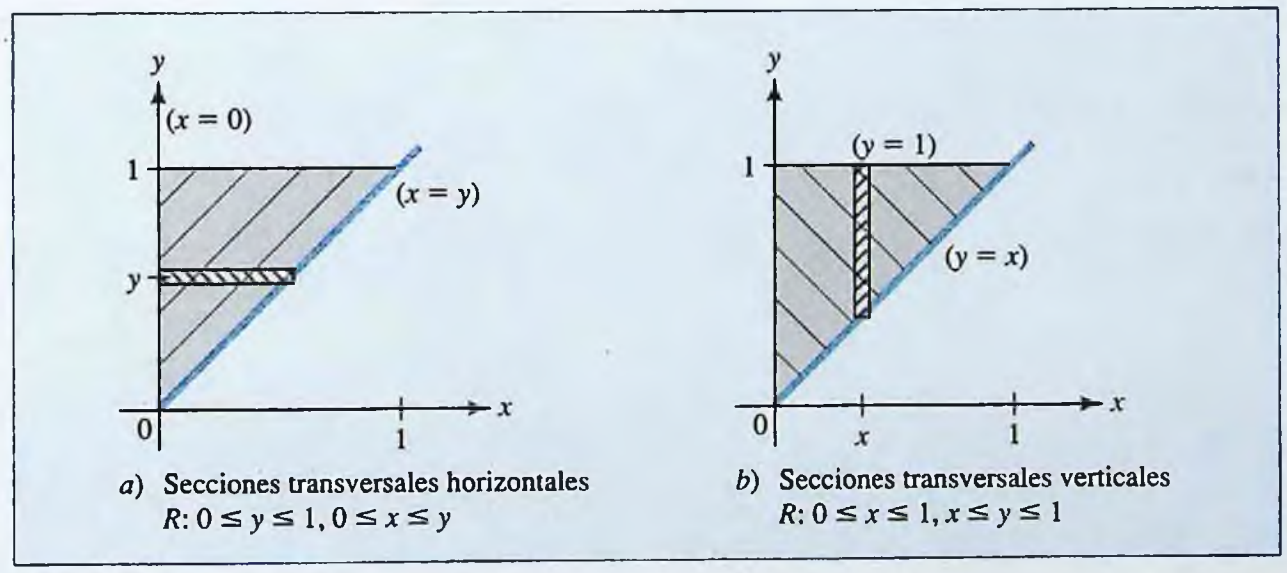
$$R: \underbrace{0 \le y \le 1}_{\text{límites exteriores de integración}} , \underbrace{0 \le x \le y}_{\text{límites interiores de integración}}$$

Por tanto, si y es un número en el intervalo $0 \le y \le 1$, la sección transversal horizontal de R en y va de $x = 0$, a la izquierda, hasta $x = y$ a la derecha. La región es el triángulo que se muestra en la figura 7.30*a*. Como se ve en la figura 7.30*b*, la misma región R puede ser descrita tomando secciones transversales verticales para cada número x en el intervalo $0 \le y \le 1$. Éstas quedarán limitadas abajo por $y = x$, y arriba por $y = 1$. Expresado en términos de desigualdades, esto significa que

$$R: 0 \le x \le 1 , x \le y \le 1$$

de modo que la integral también se puede escribir como

$$I = \int_0^1 \int_x^1 y^2 e^{xy}\, dy\, dx$$



a) Secciones transversales horizontales
$R: 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y$

b) Secciones transversales verticales
$R: 0 \le x \le 1, x \le y \le 1$

FIGURA 7.30 Región de integración para $I = \int_0^1 \int_0^y y^2 e^{xy}\, dx\, dy$.

b) A continuación se muestra la evaluación de I usando el orden de integración dado. Para practicar, calcule I invirtiendo el orden de integración.

www.FreeLibros.com

$$\int_0^1 \int_0^y y^2 e^{xy}\, dx\, dy = \int_0^1 \left(ye^{xy} \Big|_{x=0}^{x=y} \right) dy \quad \text{desde} \int e^{xy}\, dx = \frac{1}{y} e^{xy}$$

$$= \int_0^1 (ye^{y^2} - y)\, dy$$

$$= \left(\frac{1}{2} e^{y^2} - \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2} e - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - 0 \right) = \frac{1}{2} e - 1$$

Aplicaciones

A continuación, se verán unas cuantas aplicaciones de las integrales dobles, todas las cuales son generalizaciones de aplicaciones conocidas de integrales definidas de funciones de una variable. Específicamente, se muestra la forma en que la integración doble se puede usar para calcular área, volumen y valor promedio.

El área de una región del plano

El área de la región R del plano xy se puede calcular como la integral doble sobre R de la función constante $f(x, y) = 1$.

Fórmula de área ■ El área de una región R en el plano xy está dada por la fórmula

$$\text{Área de } R = \iint_R 1\, dA$$

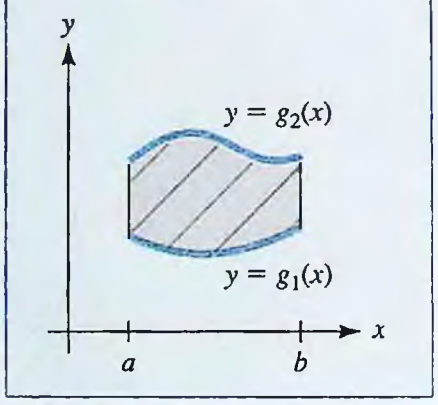


FIGURA 7.31 Área de

$$R = \iint_R 1\, dA.$$

Para tener idea de por qué se cumple la fórmula del área, considere la región elemental R que se ve en la figura 7.31, que está limitada arriba por la curva $y = g_2(x)$ y abajo por la curva $y = g_1(x)$, y que se extiende de $x = a$ hasta $x = b$.

De acuerdo con la fórmula de integral doble para área,

$$\text{Área de } R = \iint_R 1\, dA$$

$$= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1\, dy\, dx$$

$$= \int_a^b \left[y \Big|_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \right] dx$$

$$= \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\, dx$$

que es precisamente la fórmula para el área entre dos curvas que se vio en la sección 5.4. A continuación se muestra un ejemplo que ilustra el uso de la fórmula del área.

EJEMPLO 7.6.6

Encuentre el área de la región R limitada por las curvas $y = x^3$ y $y = x^2$.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Encuentre el área de la región R usando la función de integración numérica de su calculadora para evaluar $\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$. Explique por qué esto da la misma respuesta que el método empleado en la solución del ejemplo 7.6.6.

Solución

La región se muestra en la figura 7.32. Usando la fórmula del área, se obtiene

$$\text{Área de } R = \iint_R 1\,dA = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} 1\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(y \Big|_{y=x^3}^{y=x^2} \right) dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{12}$$

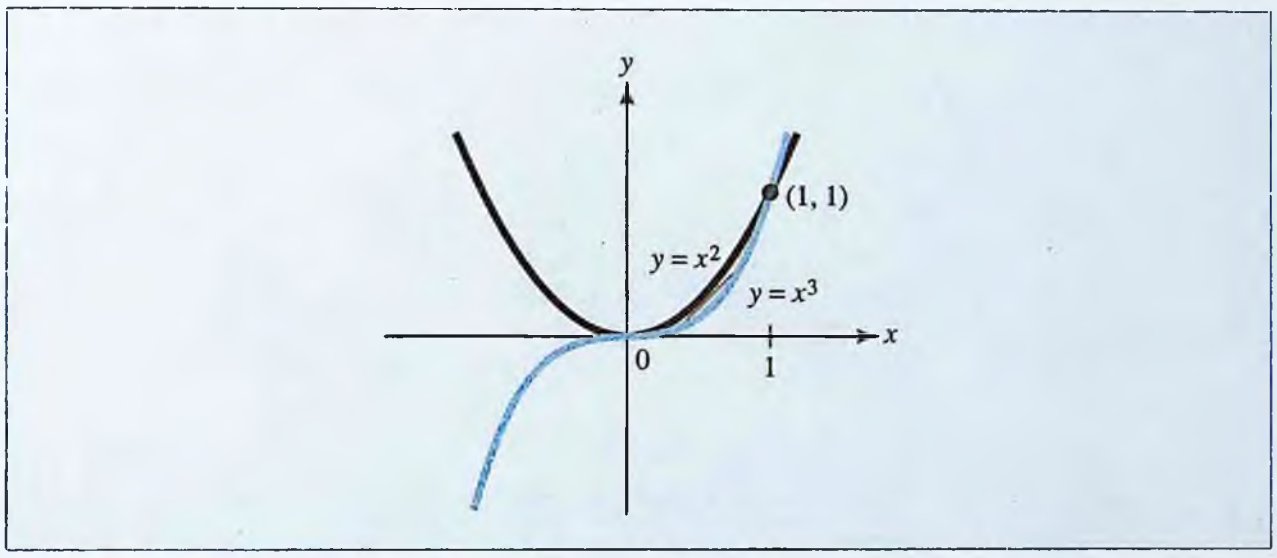


FIGURA 7.32 Región limitada por $y = x^2$ y $y = x^3$.

Volumen como una integral doble

Recuerde de la sección 5.3 que la región bajo la curva $y = f(x)$ sobre un intervalo $a \le x \le b$, donde $f(x)$ es continua y $f(x) \ge 0$, tiene área dada por la integral definida $A = \int_a^b f(x)\,dx$. Un argumento análogo para una función continua, no negativa, de dos variables $f(x, y)$, da la fórmula para volumen como una integral doble.

Volumen como una integral doble ▣ Si $f(x, y)$ es continua y $f(x, y) \ge 0$ en la región rectangular R, entonces la región sólida bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre la región R tiene volumen dado por

$$V = \iint_R f(x, y)\,dA$$

www.FreeLibros.com

EJEMPLO 7.6.7

Una biomasa cubre el fondo triangular de un recipiente con vértices (0, 0), (6, 0) y (3, 3) a una profundidad $h(x, y) = \dfrac{x}{(y + 2)}$ en cada punto (x, y) de la región, donde todas las dimensiones son en centímetros. ¿Cuál es el volumen total de la biomasa?

Solución

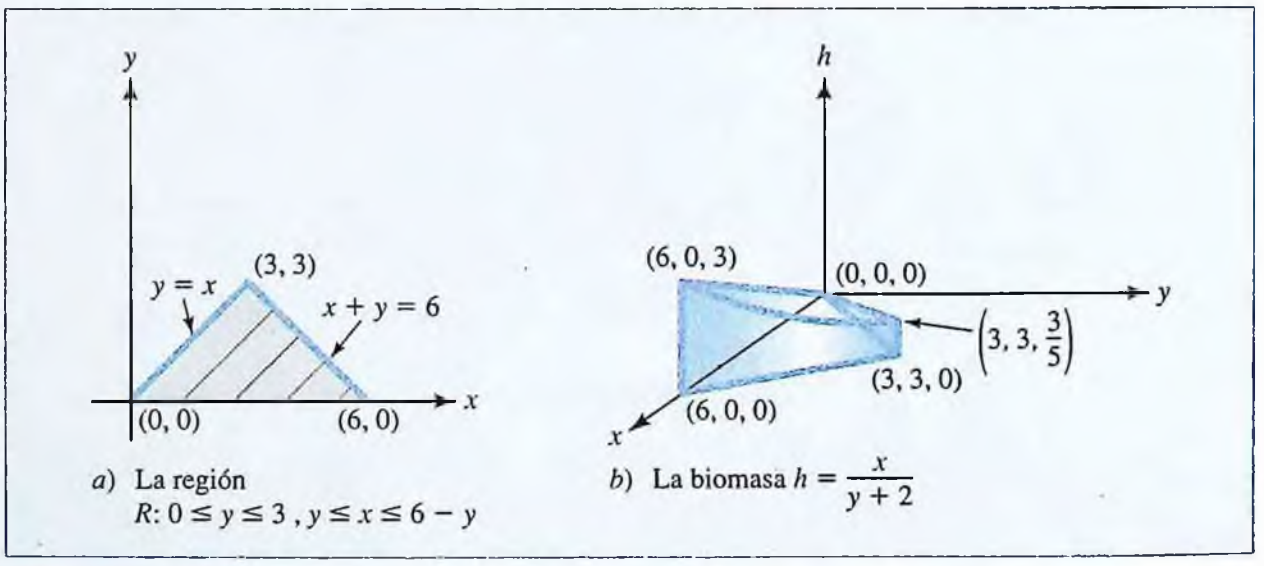
El volumen está dado por la integral doble $V = \iint_R h(x, y)\, dA$, donde R es la región triangular R mostrada en la figura 7.33. Nótese que esta región está limitada por el eje x ($y = 0$), y por las rectas $x = y$ y $x + y = 6$, de modo que se puede describir como

$$R\colon\ 0 \le y \le 3,\ y \le x \le 6 - y$$

Por tanto, el volumen de la biomasa está dado por

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^3 \int_y^{6-y} \frac{x}{y+2}\, dx\, dy \\
&= \int_0^3 \frac{1}{y+2} \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_y^{6-y} dy \\
&= \int_0^3 \frac{1}{2(y+2)} [(6-y)^2 - y^2]\, dy = \int_0^3 \frac{1}{2(y+2)} [36 - 12y]\, dy \\
&= \int_0^3 -6 + \left(\frac{60}{2y+4}\right) dy \qquad \text{dividiendo } -12y + 36 \text{ entre } 2y + 4 \\
&= -6y + 30 \ln |2y + 4| \Big|_0^3 \\
&= [-6(3) + 30 \ln(2(3) + 4)] - [-6(0) + 30 \ln(0 + 4)] \\
&\approx 9.489
\end{aligned}$$

Se concluye que el volumen de la biomasa es aproximadamente 9.5 cm^3.



a) La región $R\colon 0 \le y \le 3,\ y \le x \le 6 - y$

b) La biomasa $h = \dfrac{x}{y + 2}$

FIGURA 7.33 Volumen de una biomasa

Valor promedio de una función $f(x, y)$

En la sección 5.4 vimos que el valor promedio de una función $f(x)$ sobre un intervalo $a \le x \le b$ está dado por la fórmula integral

$$VP = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx$$

www.FreeLibros.com

Esto es, para hallar el valor promedio de una función de una variable sobre un intervalo, se integra la función sobre el intervalo y se divide entre la longitud del intervalo. El procedimiento para dos variables es semejante. En particular, para hallar el valor promedio de una función $f(x, y)$ sobre una región rectangular R, se integra la función sobre R y se divide entre el área de R.

Fórmula del valor promedio ■ El valor promedio de la función $f(x, y)$ sobre la región rectangular R está dado por la fórmula

$$VP = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R f(x, y)\, dA$$

EJEMPLO 7.6.8

En cierta fábrica, la producción la proporciona la función de producción de Cobb-Douglas

$$Q(K, L) = 50K^{3/5}L^{2/5}$$

donde K es la inversión de capital en unidades de \$1 000 y L es el tamaño de la fuerza laboral medida en horas-trabajador. Suponga que la inversión mensual de capital varía entre \$10 000 y \$12 000, mientras que la fuerza laboral mensual varía entre 2 800 y 3 200 horas-trabajador. Encuentre la producción promedio mensual para la fábrica.

Solución

Es razonable estimar la producción promedio mensual a través del valor promedio de $Q(K, L)$ sobre la región rectangular R: $10 \le K \le 12$, $2\,800 \le L \le 3\,200$. La región tiene área

$$\begin{aligned} A = \text{área de } R &= (12 - 10) \times (3\,200 - 2\,800) \\ &= 800 \end{aligned}$$

de modo que la producción promedio es

$$\begin{aligned} VP &= \frac{1}{800}\iint_R 50K^{3/5}L^{2/5}dA \\ &= \frac{1}{800}\int_{2,800}^{3,200}\left(\int_{10}^{12} 50K^{3/5}L^{2/5}dK\right) dL \\ &= \frac{1}{800}\int_{2,800}^{3,200} 50L^{2/5}\left(\frac{5}{8}K^{8/5}\right)\Big|_{K=10}^{K=12} dL \\ &= \frac{1}{800}(50)\left(\frac{5}{8}\right)\int_{2,800}^{3,200} L^{2/5}(12^{8/5} - 10^{8/5})\, dL \\ &= \frac{1}{800}(50)\left(\frac{5}{8}\right)(12^{8/5} - 10^{8/5})\left(\frac{5}{7}L^{7/5}\right)\Big|_{L=2\,800}^{L=3\,200} \\ &= \frac{1}{800}(50)\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{5}{7}\right)(12^{8/5} - 10^{8/5})[(3\,200)^{7/5} - (2\,800)^{7/5}] \\ &\approx 5\,181.23 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la producción promedio mensual es aproximadamente de 5 181 unidades.

www.FreeLibros.com

PROBLEMAS | 7.6

Evalúe estas integrales dobles.

1. $\int_0^1 \int_1^2 x^2 y \, dx \, dy$

2. $\int_1^2 \int_0^1 x^2 y \, dy \, dx$

3. $\int_0^{\ln 2} \int_{-1}^0 2xe^y \, dx \, dy$

4. $\int_2^3 \int_{-1}^1 (x + 2y) \, dy \, dx$

5. $\int_1^3 \int_0^1 \frac{2xy}{x^2 + 1} \, dx \, dy$

6. $\int_0^1 \int_0^1 x^2 e^{xy} \, dy \, dx$

7. $\int_0^4 \int_{-1}^1 x^2 y \, dy \, dx$

8. $\int_0^1 \int_1^5 y\sqrt{1 - y^2} \, dx \, dy$

9. $\int_2^3 \int_1^2 \frac{x + y}{xy} \, dy \, dx$

10. $\int_1^2 \int_2^3 \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) dy \, dx$

11. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} x^2 y \, dy \, dx$

12. $\int_0^1 \int_1^5 y\sqrt{1 - y^2} \, dx \, dy$

13. $\int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} (2x + y) \, dx \, dy$

14. $\int_0^1 \int_{x^2}^x 2xy \, dy \, dx$

15. $\int_0^1 \int_0^4 \sqrt{xy} \, dy \, dx$

16. $\int_0^1 \int_x^{2x} e^{y-x} \, dy \, dx$

17. $\int_1^e \int_0^{\ln x} xy \, dy \, dx$

18. $\int_0^3 \int_{y^2/4}^{\sqrt{10-y^2}} xy \, dx \, dy$

En los problemas del 19 al 24 use desigualdades para describir R en términos de sus secciones transversales verticales y horizontales.

19. R es la región limitada por $y = x^2$ y $y = 3x$.

20. R es la región limitada por $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$.

21. R es el rectángulo con vértices $(-1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ y $(-1, 2)$.

22. R es el triángulo con vértices $(1, 0)$, $(1, 1)$, y $(2, 0)$.

23. R es la región limitada por $y = \ln x$, $y = 0$, y $x = e$.

24. R es la región limitada por $y = e^x$, $y = 2$, y $x = 0$.

En los problemas del 25 al 36 evalúe la integral doble dada para la región R indicada.

25. $\iint_R 3xy^2 \, dA$, donde R es el rectángulo limitado por las rectas $x = -1, x = 2, y = -1$, y $y = 0$.

26. $\iint_R (x + 2y) \, dA$, donde R es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 2)$.

27. $\iint_R xe^y \, dA$, donde R es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$.

www.FreeLibros.com

28. $\iint_R 48xy\,dA$, donde R es la región limitada por $y = x^3$ y $y = \sqrt{x}$.

29. $\iint_R (2y - x)\,dA$, donde R es la región limitada por $y = x^2$ y $y = 2x$.

30. $\iint_R 12x\,dA$, donde R es la región limitada por $y = x^2$ y $y = 6 - x$.

31. $\iint_R (2x + 1)\,dA$, donde R es el triángulo con vértices $(-1, 0)$, $(1, 0)$, y $(0, 1)$.

32. $\iint_R 2x\,dA$, donde R es la región limitada por $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = x$, y $x = 2$.

33. $\iint_R \dfrac{1}{y^2 + 1}\,dA$, donde R es el triángulo limitado por las rectas $y = \dfrac{1}{2}x$, $y = -x$, y $y = 2$.

34. $\iint_R e^{y^3}\,dA$, donde R es la región limitada por $y = \sqrt{x}$, $y = 1$, y $x = 0$.

35. $\iint_R 12x^2e^{y^2}\,dA$, donde R es la región del primer cuadrante limitada por $y = x^3$ y $y = x$.

36. $\iint_R y\,dA$, donde R es la región limitada por $y = \ln x$, $y = 0$, y $x = e$.

En los problemas del 37 al 44, dibuje la región de integración para la integral dada y plantee una integral equivalente con el orden de integración invertido.

37. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{4-x^2} f(x, y)\,dy\,dx$

38. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{2y} f(x, y)\,dx\,dy$

39. $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy\,dx$

40. $\displaystyle\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx\,dy$

41. $\displaystyle\int_1^{e^2} \int_{\ln x}^{2} f(x, y)\,dy\,dx$

42. $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \int_{e^x}^{3} f(x, y)\,dy\,dx$

43. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{x^2+1}^{2} f(x, y)\,dy\,dx$

44. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x, y)\,dx\,dy$

En los problemas del 45 al 54 use una integral doble para hallar el área de R.

45. R es el triángulo con vértices $(-4, 0)$, $(2, 0)$, y $(2, 6)$.

46. R es el triángulo con vértices $(0, -1)$, $(-2, 1)$, y $(2, 1)$.

47. R es la región limitada por $y = \dfrac{1}{2}x^2$ y $y = 2x$.

48. R es la región limitada por $y = \sqrt{x}$ y $y = x^2$.

www.FreeLibros.com

49. R es la región limitada por $y = x^2 - 4x + 3$ y el eje x.

50. R es la región limitada por $y = x^2 + 6x + 5$ y el eje x.

51. R es la región limitada por $y = \ln x$, $y = 0$ y $x = e$.

52. R es la región limitada por $y = x$, y $= \ln x$, $y = 0$ y $y = 1$.

53. R es la región del primer cuadrante limitada por $y = 4 - x^2$, $y = 3x$ y $y = 0$.

54. R es la región limitada por $y = \dfrac{16}{x}$, $y = x$, y $x = 8$.

En los problemas del 55 al 64 encuentre el volumen del sólido bajo la superficie $z = f(x, y)$ y sobre la región R dada.

55. $f(x, y) = 6 - 2x - 2y$;
R: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$

56. $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$;
R: $-1 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$

57. $f(x, y) = \dfrac{1}{xy}$;
R: $1 \le x \le 2$, $1 \le y \le 3$

58. $f(x, y) = e^{x+y}$;
R: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le \ln 2$

59. $f(x, y) = xe^{-y}$;
R: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$

60. $f(x, y) = (1 - x)(4 - y)$;
R: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 4$

61. $f(x, y) = 2x + y$; R está limitada por $y = x$, $y = 2 - x$, y $y = 0$.

62. $f(x, y) = e^{y^2}$; R está limitada por $x = 2y$, $x = 0$, y $y = 1$.

63. $f(x, y) = x + 1$; R está limitada por $y = 8 - x^2$ y $y = x^2$.

64. $f(x, y) = 4xe^y$; R está limitada por $y = 2x$, $y = 2$, y $x = 0$.

En los problemas del 65 al 72 encuentre el valor promedio de la función $f(x, y)$ sobre la región R dada.

65. $f(x, y) = xy(x - 2y)$;
R: $-2 \le x \le 3$, $-1 \le y \le 2$

66. $f(x, y) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$;
R: $1 \le x \le 4$, $1 \le y \le 3$

67. $f(x, y) = xye^{x^2y}$;
R: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$

68. $f(x, y) = \dfrac{\ln x}{xy}$;
R: $1 \le x \le 2$, $2 \le y \le 3$

69. $f(x, y) = 6xy$; R es el triángulo con vértices (0, 0), (0, 1), (3, 1).

70. $f(x, y) = e^{x^2}$; R es el triángulo con vértices (0, 0), (1, 0), (1, 1).

71. $f(x, y) = x$; R es la región limitada por $y = 4 - x^2$ y $y = 0$.

72. $f(x, y) = e^x y^{-1/2}$; R es la región limitada por $x = \sqrt{y}$, $y = 0$, y $x = 1$.

En los problemas del 73 al 76 evalúe la integral doble sobre la región R indicada. Escoja cuidadosamente el orden de integración.

73. $\displaystyle\iint_R \frac{\ln (xy)}{y}\, dA$; R: $1 \le x \le 3$, $2 \le y \le 5$

74. $\displaystyle\iint_R ye^{xy}\, dA$; R: $-1 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$

75. $\displaystyle\iint_R x^3 e^{x^2y}\, dA$; R: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$

76. $\displaystyle\iint_R e^{x^3}\, dA$; R: $\sqrt{y} \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$

www.FreeLibros.com

77. PRODUCCIÓN En cierta fábrica, la producción Q está relacionada con las entradas x y y por la expresión $Q(x, y) = 2x^3 + 3x^2y + y^3$

Si $0 \le x \le 5$ y $0 \le y \le 7$, ¿cuál es el promedio de producción de la fábrica?

78. PRODUCCIÓN Un vendedor de bicicletas ha encontrado que si las bicicletas de 10 velocidades se venden en x dólares cada una, y el precio de la gasolina es y centavos por galón, entonces se venderán aproximadamente

$$Q(x, y) = 200 - 24\sqrt{x} + 4(0.1y + 5)^{3/2}$$

bicicletas por mes. Si el precio de las bicicletas varía entre \$287 y \$312 durante un mes típico, y el precio de la gasolina varía entre \$1.70 y \$1.82, ¿aproximadamente cuántas bicicletas se venderán cada mes?

79. PROMEDIO DE UTILIDAD Un fabricante estima que cuando se venden x unidades de cierta mercancía en el país, y y unidades en mercados extranjeros, la utilidad está dada por

$$P(x, y) = (x - 30)(70 + 5x - 4y) + (y - 40)(80 - 6x + 7y)$$

cientos de dólares. Si las ventas nacionales varían entre 100 y 125 unidades y las ventas en el extranjero entre 70 y 89 unidades, ¿cuál es la utilidad mensual promedio ?

80. PROMEDIO DE RESPUESTA A ESTÍMULOS En un experimento psicológico se aplican x unidades de estímulo A y y unidades del estímulo B a un sujeto cuyo rendimiento en cierto trabajo es medido a continuación por la función

$$P(x, y) = 10 + xye^{1-x^2-y^2}$$

Suponga que x varía entre 0 y 1 mientras que y varía entre 0 y 3. ¿Cuál es la respuesta promedio del sujeto a los estímulos?

81. PROMEDIO DE ELEVACIÓN Un mapa de un pequeño parque regional es un rectángulo cuadriculado, limitado por las rectas $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$ y $y = 3$, donde las unidades están en millas. Se encuentra que la elevación sobre el nivel del mar en cada punto (x, y) del parque está dada por

$$E(x, y) = 90(2x + y^2) \text{ pies}$$

Encuentre la elevación promedio del parque. (Recuerde, 1 milla = 5 280 pies.)

82. VALOR DE UNA PROPIEDAD Una comunidad está trazada como un rectángulo cuadriculado respecto a dos calles principales que se cruzan en el centro de la ciudad. Cada punto de la comunidad tiene coordenadas (x, y) en esta cuadrícula, para $-10 \le x \le 10$, $-8 \le y \le 8$ con x y y medidas en millas. Suponga que el valor del terreno situado en el punto (x, y) es V mil dólares, donde

$$V(x, y) = (250 + 17x)e^{-0.01x-0.05y}$$

Estime el valor de la manzana de terrenos que ocupa la región rectangular $1 \le x \le 3$, $0 \le y \le 2$.

83. VALOR DE UNA PROPIEDAD Repita el problema 82 para

$$V(x, y) = (300 + x + y)e^{-0.01x}$$

y la región $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$.

84. VALOR DE UNA PROPIEDAD Repita el problema 82 para

$$V(x, y) = 400xe^{-y}$$

y la región R: $0 \le y \le x$, $0 \le x \le 1$.

85. PROMEDIO DE ÁREA SUPERFICIAL DEL CUERPO HUMANO Recuerde, del problema 35 de la sección 7.1, que el área de la superficie corporal de una persona puede estimarse a través de la fórmula empírica

$$S(W, H) = 0.0072\, W^{0.425}H^{0.725}$$

Donde W es el peso de la persona en kilogramos, H es la estatura de la persona en centímetros, y el área de la superficie corporal S se mide en metros cuadrados.

a) Encuentre el valor promedio de la función $S(W, H)$ sobre la región

R: $3.2 \le W \le 80$, $38 \le H \le 180$

b) Un niño pesa 3.2 kg y mide 38 cm de estatura al nacer y, como adulto, tiene un peso estable de 80 kg y estatura de 180 cm. ¿Puede el valor promedio del inciso *a*) interpretarse como el promedio del área de la superficie corporal de la persona para toda la vida? Explique.

86. DISEÑO ARQUITECTÓNICO Un edificio tendrá un techo curvo sobre una base rectangular. En un rectángulo cuadriculado, la base es la región rectangular $-30 \le x \le 30$, $-20 \le y \le 20$, donde x y y se miden en metros. La altura del techo sobre cada punto (x, y) de la base está dada por

$$h(x, y) = 12 - 0.003x^2 - 0.005y^2$$

a) Encuentre el volumen del edificio.

b) Encuentre la altura promedio del techo.

87. EXPOSICIÓN A UNA ENFERMEDAD La probabilidad de que una persona con una enfermedad contagiosa infecte a otros, en situación social, se puede suponer que es una función $f(s)$ de la distancia s entre los individuos. Suponga que los individuos contagiosos están uniformemente

www.FreeLibros.com

distribuidos en una región rectangular R del plano xy. Entonces la probabilidad de infección para alguien en el origen (0, 0) es proporcional al índice de exposición E, dado por la integral doble

$$E = \iint_R f(s)\, dA$$

donde $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia entre (0, 0) y (x, y). Encuentre E para el caso donde

$$f(s) = 1 - s^2/9$$

y R es el cuadrado

$$R\colon -2 \le x \le 2\,,\ -2 \le y \le 2$$

En los problemas 88 y 89 use la integración doble para calcular la cantidad requerida. Escoja cuidadosamente su orden de integración.

88. Encuentre el volumen del sólido limitado arriba por la gráfica de $f(x, y) = x^2e^{-xy}$ y abajo por la región rectangular $R\colon 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3$.

89. Encuentre el valor promedio de $f(x, y) = xy \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ sobre la región rectangular limitada por las rectas $x = 1, x = 2, y = 1$ y $y = 3$.

www.FreeLibros.com

Términos importantes, símbolos y fórmulas

Función de dos variables: $z = f(x, y)$ (496)

Convención de dominio (496)

Función de producción de Cobb-Douglas (498)

Sistema tridimensional de coordenadas (499)

Curva de nivel: $f(x, y) = C$ (499)

Mapa topográfico (501)

Utilidad (502)

Curva de indiferencia (502)

Derivadas parciales de $z = f(x, y)$: (510)

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x} \qquad f_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Productividad marginal (513)

Artículos complementarios y sustitutos (514)

Derivadas parciales de segundo orden: (515)

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Igualdad de derivadas parciales mixtas de segundo orden:

$$f_{xy} = f_{yx} \quad (516)$$

Máximo relativo; mínimo relativo; punto de silla (521) y (523)

Punto crítico: $f_x = f_y = 0$ (522)

Prueba de las segundas derivadas parciales en un punto crítico (a, b):

Sea $D(a, b) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$.

Si $D < 0$, f tiene un punto de silla en (a, b)

Si $D > 0$, y $f_{xx} < 0$, f tiene un máximo relativo en (a, b)

Si $D > 0$, y $f_{xx} > 0$, f tiene un mínimo relativo en (a, b)

Si $D = 0$, la prueba es no concluyente

Diagrama de dispersión (533)

Criterio de mínimos cuadrados (534)

Recta de mínimos cuadrados: $y = mx + b$, donde

$$m = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \quad \text{y} \quad b = \frac{\Sigma x^2 \Sigma y - \Sigma x \Sigma xy}{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \quad (536)$$

Regresión log-lineal (540)

Método de los multiplicadores de Lagrange: (547)

Para hallar valores extremos de $f(x, y)$ sujeto a $g(x, y) = k$, resuelva las ecuaciones

$$f_x = \lambda g_x \qquad f_y = \lambda g_y \qquad \text{y} \qquad g = k$$

El multiplicador de Lagrange: (553)

$\lambda = \dfrac{dM}{dk}$, donde M es el valor óptimo de $f(x, y)$ sujeto a $g(x, y) = k$.

Integral doble (562)

sobre la región R: $a \le x \le b$, $g_1(x) \le y \le g_2(x)$

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy\right] dx$$

sobre la región R: $c \le y \le d$, $h_1(y) \le x \le h_2(y)$

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,dx\right] dy$$

El área de la región R del plano xy es

$$A = \iint_R 1\,dA \quad (566)$$

El volumen bajo $z = f(x, y)$ sobre un rectángulo R donde $f(x, y) \ge 0$ es $V = \iint_R f(x, y)\,dA$ (567)

Valor promedio de $f(x, y)$ sobre el rectángulo R: (569)

$$VP = \frac{1}{\text{área de } R} \iint_R f(x, y)\,dA$$

Revisión del capítulo 7

1. En cada caso, primero describa el dominio de la función dada y luego encuentre las derivadas parciales f_x, f_y, f_{xx}, y f_{yx}.

a) $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - 3y^4$

b) $f(x, y) = \dfrac{2x + y}{x - y}$

c) $f(x, y) = e^{2x-y} + \ln(y^2 - 2x)$

2. Describa las curvas de nivel de cada una de estas funciones:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

b) $f(x, y) = x + y^2$

3. En cada caso, encuentre todos los puntos críticos de la función dada $f(x, y)$, y use la prueba de las segun-

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

das derivadas parciales para clasificar cada punto crítico como máximo relativo, mínimo relativo o punto de silla.

a) $f(x, y) = 4x^3 + y^3 - 6x^2 - 6y^2 + 5$

b) $f(x, y) = x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 4y$

c) $f(x, y) = xy - \frac{1}{y} - \frac{1}{x}$

4. Use el método de multiplicadores de Lagrange para hallar estos extremos restringidos:

a) El mínimo valor de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeto a $x + 2y = 4$.

b) Los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = xy^2$ sujeto a $2x^2 + y^2 = 6$.

5. Evalúe cada una de estas integrales dobles:

a) $\int_{-1}^{3}\int_{0}^{2} x^3 y\,dx\,dy$ *b)* $\int_{0}^{2}\int_{-1}^{1} x^2 e^{xy}\,dx\,dy$

c) $\int_{1}^{2}\int_{1}^{y} \frac{y}{x}\,dx\,dy$ *d)* $\int_{0}^{2}\int_{0}^{2-x} xe^{-y}\,dy\,dx$

6. PRODUCTIVIDAD MARGINAL Una compañía producirá $Q(K, L) = 120K^{3/4}L^{1/4}$ cientos de unidades de cierta mercancía cuando el gasto de capital es K miles de dólares y la fuerza laboral es L horas-trabajador. Encuentre la productividad marginal del capital Q_K y la productividad marginal del trabajo Q_L cuando el capital es $1 296 000 dólares y el nivel de la fuerza laboral es 20 736 horas-trabajador.

7. UTILIDAD Everett acaba de recibir $300 como regalo de cumpleaños y ha decidido gastarlos en discos DVD y juegos de video de computadora. Él ha determinado que la utilidad (satisfacción) obtenida por la compra de x discos DVD y y juegos de video es

$$U(x, y) = \ln(x^2\sqrt{y})$$

Si cada DVD cuesta $20 y cada juego de video cuesta $30, ¿cuántos DVD y juegos de video debe comprar para maximizar la utilidad?

8. MEDICINA Cierta enfermedad puede ser tratada administrando al menos 70 unidades del medicamento C, pero ese nivel de medicación a veces provoca graves efectos colaterales. En busca de un método más seguro y en lugar de C, un médico decide usar los medicamentos A y B, que no tienen efectos colaterales mientras su dosis combinada sea menor de 60 unidades. Además, el médico determina que cuando x unidades del medicamento A y y unidades del B se administran a un paciente, el efecto es equivalente a administrar E unidades del medicamento C, donde

$$E = 0.05(xy - 2x^2 - y^2 + 95x + 20y)$$

¿Qué dosis de los medicamentos A y B maximizan el nivel equivalente a E del medicamento C? Si el médico administra las dosis óptimas de A y B, ¿el efecto combinado será suficiente para ayudar al paciente sin correr el riesgo de sufrir efectos colaterales?

9. PROMEDIO DE TEMPERATURA Una placa metálica plana que se encuentra en el plano xy se calienta de tal forma que la temperatura en el punto (x, y) es T °C, donde

$$T(x, y) = 10ye^{-xy}$$

Encuentre la temperatura promedio sobre la parte de la placa para la que $1 \le y \le 2$ y $0 \le x \le 1/y$.

10. APROXIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS DE DATOS DE UTILIDAD La utilidad anual de una compañía (en millones de dólares) para los primeros 5 años de operación se muestra en esta tabla:

Año	1	2	3	4	5
Utilidad (millones de dólares)	1.03	1.52	2.03	2.41	2.84

a) Trace estos datos en una gráfica.

b) Encuentre la ecuación de la recta de mínimos cuadrados para estos datos.

c) Use la recta de mínimos cuadrados para pronosticar la utilidad de la compañía en el sexto año.

Problemas de repaso

En los problemas del 1 al 5 encuentre las derivadas parciales fx y fy.

1. $f(x, y) = 2x^3y + 3xy^2 + \frac{y}{x}$

2. $f(x, y) = (xy^2 + 1)^5$

3. $f(x, y) = xye^{xy}$

4. $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2x + y}$

5. $f(x, y) = \ln\left(\frac{xy}{x + 3y}\right)$

www.FreeLibros.com

6. Para cada una de estas funciones, calcule las derivadas parciales de segundo orden f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} y f_{yx}.
   a) $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy^2$
   b) $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$
   c) $f(x, y) = x \ln y$
7. En cierta fábrica, la producción diaria es aproximadamente $40K^{1/3}L^{1/2}$ unidades, donde K denota la inversión de capital, medida en unidades de \$1 000, y L denota la fuerza laboral medida en horas-trabajador. Suponga que la inversión actual de capital es \$125 000 y que a diario se emplean 900 horas-trabajador. Use el análisis marginal para estimar el efecto que tendrá sobre la producción diaria una inversión de capital adicional de \$1 000, si la fuerza laboral permanece constante.
8. En economía, el *producto marginal del trabajo* es la razón de cambio de la producción Q, con respecto a la fuerza laboral L, para un nivel fijo de inversión de capital K. Una ley económica expresa que, bajo determinadas circunstancias, el producto marginal del trabajo aumenta cuando aumenta el nivel de inversión de capital. Traduzca esta ley a una expresión matemática que contenga una derivada parcial de segundo orden.
9. Para cada una de estas funciones, dibuje las curvas de nivel $f(x, y) = c$:
   a) $f(x, y) = x^2 - y$; $c = 2, c = -2$
   b) $f(x, y) = 6x + 2y$; $c = 0, c = 1, c = 2$
10. Para cada una de estas funciones, encuentre la pendiente de la curva de nivel indicada para el valor específico de x:
    a) $f(x, y) = x^2 - y^3$; $c = 2$; $x = 1$
    b) $f(x, y) = xe^y$; $c = 2$; $x = 2$
11. ANÁLISIS MARGINAL Empleando a x trabajadores calificados y a y no calificados, un fabricante produce $Q(x, y) = 60x^{1/3}y^{2/3}$ unidades por día. Actualmente el fabricante emplea 10 trabajadores calificados y 40 no calificados y está planeando contratar 1 trabajador calificado más. Use el cálculo para estimar el cambio correspondiente que el fabricante debe hacer en el nivel de la fuerza laboral no calificada, de modo que la producción total no cambie.

En los problemas del 12 al 15 encuentre todos los puntos críticos de la función dada y use la prueba de las segundas derivadas parciales para clasificar cada punto crítico como un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto de silla.

12. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 18y^2 + 81y + 5$
13. $f(x, y) = x^2 + y^3 + 6xy - 7x - 6y$
14. $f(x, y) = 3x^2y + 2xy^2 - 10xy - 8y^2$
15. $f(x, y) = xe^{2x^2+5xy+2y^2}$
16. Use el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar los valores máximo y mínimo de la función

    $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 2x + 3$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 4$.
17. Use el método de los multiplicadores de Lagrange para demostrar que de todos los rectángulos con un perímetro dado, el cuadrado tiene el área máxima.
18. ASIGNACIÓN DE FONDOS Un fabricante está planeando vender un nuevo producto a un precio de \$350 por unidad, y estima que si se gastan en desarrollo x miles de dólares y se gastan en promoción y miles de dólares los consumidores comprarán aproximadamente $\frac{250y}{y+2} + \frac{100x}{x+5}$ unidades del producto. Si los costos de fabricación para el producto son \$150 por unidad, ¿cuánto debe gastar el fabricante en desarrollo y cuánto en promoción para generar la máxima utilidad posible, si dispone de fondos ilimitados?
19. ASIGNACIÓN DE FONDOS Suponga que el fabricante del problema 18 tiene sólo \$11 000 para gastar en desarrollo y promoción del nuevo producto. ¿Cómo debe asignarse este dinero para generar la máxima utilidad posible?
20. ASIGNACIÓN DE FONDOS Suponga que el fabricante del problema 19 decide gastar \$12 000 en lugar de \$11 000 en desarrollo y promoción del nuevo producto. Use el multiplicador l de Lagrange para estimar la forma en que este cambio afectará la máxima utilidad posible.
21. Sea $f(x, y) = \frac{12}{x} + \frac{18}{y} + xy$, donde $x > 0, y > 0$.

    ¿Por qué se sabe que f debe tener un mínimo en la región $x > 0, y > 0$? Encuentre el mínimo.

En los problemas del 22 al 29 evalúe la integral doble. Quizá sea necesario intercambiar el orden de integración.

22. $\int_0^1 \int_{-2}^0 (2x + 3y)\,dy\,dx$
23. $\int_0^1 \int_0^2 e^{-x-y}\,dy\,dx$
24. $\int_0^1 \int_0^2 x\sqrt{1-y}\,dx\,dy$
25. $\int_0^1 \int_{-1}^1 xe^{2y}\,dy\,dx$
26. $\int_0^2 \int_{-1}^1 \frac{6xy^2}{x^2+1}\,dy\,dx$
27. $\int_1^e \int_1^e \ln(xy)\,dy\,dx$

RESUMEN DEL CAPÍTULO

www.FreeLibros.com

28. $\int_0^1 \int_0^{1-x} x(y-1)^2 dy\, dx$ **29.** $\int_1^2 \int_0^x e^{y/x} dy\, dx$

En los problemas 30 y 31 evalúe la integral doble para la región R indicada.

30. $\iint_R 6x^2 y\, dA$, donde R es el rectángulo con vértices $(-1, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 3)$, y $(-1, 3)$.

31. $\iint_R (x + 2y)\, dA$, donde R es la región rectangular limitada por $x = 0, x = 1, y = -2$ y $y = 2$.

32. Encuentre el volumen bajo la superficie $z = 2xy$ y sobre el rectángulo con vértices (0, 0), (2, 0), (0, 3) y (2, 3).

33. Encuentre el volumen bajo la superficie $z = xe^{-y}$ y sobre el rectángulo limitado por las rectas $x = 1, x = 2, y = 2$ y $y = 3$.

34. Encuentre el valor promedio de $f(x, y) = xy^2$ sobre la región rectangular con vértices en $(-1, 3)$, $(-1, 5)$, $(2, 3)$ y $(2, 5)$.

35. Encuentre tres números positivos x, y y z tales que $x + y + z = 20$ y el producto $P = xyz$ sea máximo. [*Sugerencia:* Use el hecho de que $z = 20 - x - y$ para expresar P como función de sólo dos variables.]

36. Encuentre tres números positivos x, y y z tales que $2x + 3y + z = 60$ y la suma $S = x^2 + y^2 + z^2$ sea mínima. (Vea la sugerencia al problema 35.)

37. Encuentre la distancia más corta del origen a la superficie $y^2 - z^2 = 10$. [*Sugerencia:* Exprese la distancia $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ del origen al punto (x, y, z) de la superficie en términos de las dos variables x y y, y minimice el *cuadrado* de la función de distancia que resulte.]

38. Trace los puntos (1, 1), (1, 2), (3,2) y (4, 3) y use las derivadas parciales para hallar la correspondiente recta de mínimos cuadrados.

39. VENTAS El gerente de ventas de cierta compañía ha recolectado estos datos que relacionan el gasto mensual en publicidad y las ventas mensuales (ambos medidos en unidades de $1 000):

Publicidad	3	4	7	9	10
Ventas	78	86	138	145	156

a) Trace estos datos en una gráfica.

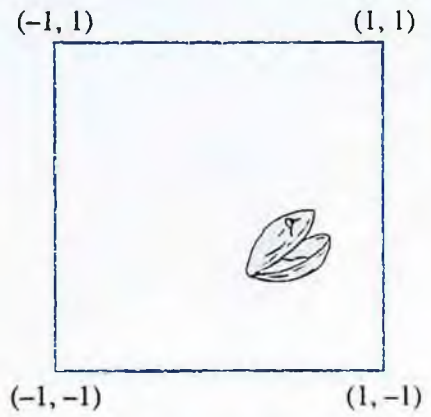
b) Encuentre la recta de mínimos cuadrados.

c) Use la recta de mínimos cuadrados para pronosticar las ventas mensuales si el gasto mensual en publicidad es de $5 000.

40. Arnold, el mejillón buscador de calor, es el molusco más inteligente del mundo. A Arnold le gusta estar caliente, y usando el sistema de coordenadas de los crustáceos, que aprendió de un cangrejo que por ahí pasaba, ha determinado que, en cada punto cercano (x, y) del lecho marino, la temperatura (°C) es

$$T(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 - 2y + 1$$

El mundo de Arnold está formado por una parte rectangular de lecho marino con vértices $(-1, -1)$, $(-1,1)$, $(1, -1)$ y $(1, 1)$ y como le es muy difícil moverse, piensa estar en donde está mientras la temperatura promedio de esta región sea al menos 5°C. ¿ Arnold se moverá o se quedará donde está?



PROBLEMA 40

41. INVESTIGACIÓN SOBRE EL CÁNCER En el problema 53 de la sección 4.4, se consideró un modelo dinámico para enfermedades en el que la producción de células está dada por una función de la forma $p(x) = Ax^s e^{-sx/r}$, donde x es el número de células sanguíneas presentes, y r y s son parámetros que dependen de la enfermedad. Se encontró que $p(x)$ se maximiza cuando $x = r$, y que la producción máxima está dada por

$$M(r, s) = Ar^s e^{-s}$$

Los parámetros r y s pueden variar mientras se cumpla que $r > 0$ y $s \geq 0$.

a) Encuentre $\dfrac{\partial M}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial M}{\partial s}$.

[Nota: Usted necesitará usar la técnica de derivación logarítmica desarrollada en la sección 4.3.]

b) La función $M(r, s)$ tiene un punto crítico. Encuéntrelo y clasifíquelo como un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto de silla.

www.FreeLibros.com

c) Lea el artículo[13] citado con este problema y luego escriba un párrafo que interprete el resultado del inciso *b*). En particular, ¿tiene sentido dejar que r y s varíen?

42. CÓMO ENFRIAR EL CUERPO DE UN ANIMAL La diferencia entre la temperatura superficial de un animal y la del aire circundante ocasiona una transferencia de energía por convección. El coeficiente de convección h está dado por

$$h = \frac{kV^{1/3}}{D^{2/3}}$$

donde V (cm/s) es la velocidad del viento, D (cm) es el diámetro del cuerpo del animal, y k es una constante. Encuentre la relación entre la razón de cambio del coeficiente de convección, con respecto al viento, y la razón de cambio del coeficiente de convección con respecto al diámetro del cuerpo del animal; esto es, encuentre $\frac{h_V}{h_D}$.

43. PRODUCCIÓN Para la función de producción dada por $Q = x^a y^b$, donde $a > 0$ y $b > 0$, demuestre que

$$x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} = (a + b)Q$$

En particular, si $b = 1 - a$ y $0 < a < 1$, entonces

$$x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} = Q$$

44. ELIMINACIÓN DE DESECHOS NUCLEARES Es frecuente que los desechos nucleares se eliminen introduciéndolos en recipientes que después se depositan en el mar. Es importante descargar los recipientes en aguas suficientemente poco profundas para asegurar que no se rompan cuando lleguen al fondo. Suponga que cuando un recipiente cae en el agua, hay una fuerza de retardo que es proporcional a la velocidad del recipiente. Entonces, se puede demostrar que la profundidad $s(W, t)$ de un recipiente de peso W newtons en t segundos está dada por la fórmula

$$s(W, t) = \left(\frac{W - B}{k}\right)t + \frac{W(W - B)}{k^2 g}[e^{-(kgt/W)} - 1]$$

donde B es una fuerza de flotabilidad (constante), k es la constante de retardo y $g = 9.8$ m/s^2 es la aceleración constante debida a la gravedad.

a) Encuentre $\frac{\partial s}{\partial W}$ y $\frac{\partial s}{\partial t}$. Interprete estas derivadas como razones de cambio. ¿Piensa usted que es posible que cualquiera de estas derivadas parciales sea cero alguna vez?

b) Para un peso fijo, la velocidad del recipiente es $\frac{\partial s}{\partial t}$. Suponga que el recipiente se rompe si su velocidad en el momento del impacto con el lecho marino es mayor a 10 m/s. Si $B = 1\,983$ newtons, $k = 0.597$ kg/s, ¿cuál es la máxima profundidad para descargar con seguridad un recipiente de peso $W = 2\,417$ newtons?

c) Investigue el tema de la eliminación de desechos nucleares y escriba un párrafo sobre si usted piensa que se hace mejor en tierra o en el mar.



PROBLEMA 44

[13] W. B. Gearhart y M. Martelli, "A Blood Cell Population Model, Dynamical Deseases, and Chaos", *UMAP Modules, 1990: Tools for Teaching*, Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., Lexington, MA, 1991.

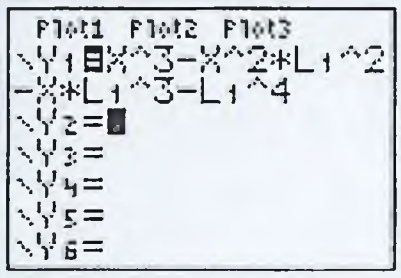
www.FreeLibros.com

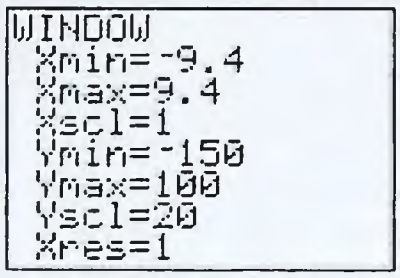
¡EXPLORE! ACTUALIZACIÓN

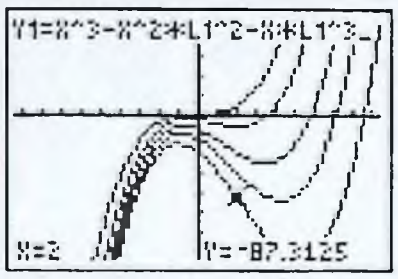
Las soluciones completas de todas las secciones ¡Explore! del texto están disponibles en el sitio específico del libro web www.mhhe.com/hoffmann

Solución al ¡Explore! de la página 497

Introduzca $f(x, y) = x^3 - x^2y^2 - xy^3 - y^4$ en Y1 como X^3 − X^2*L1^2 − X*L1^3 − L1^4, donde L1 es la lista de valores {0, 1.5, 2.0, 2.25, 2.5}. Grafique usando la pantalla [−9.4, 9.4]1 por [−150, 100]20. Presione la tecla **TRACE** y la flecha derecha hasta $x = 2$ para observar los diferentes valores de $Y = f(x, L1)$ que se presentan para valores variables de L1. Para valores mayores de L1 las curvas toman inclinaciones cúbicas mayores en el dominio de las x positivas.

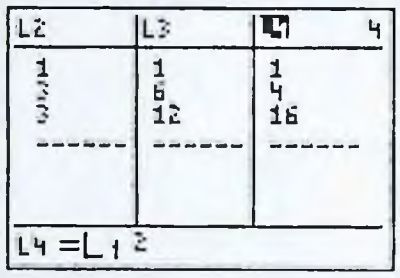


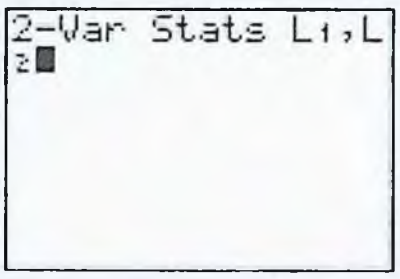


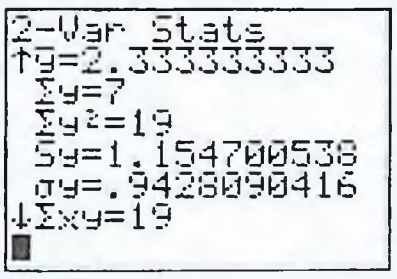


Solución al ¡Explore! de la página 536

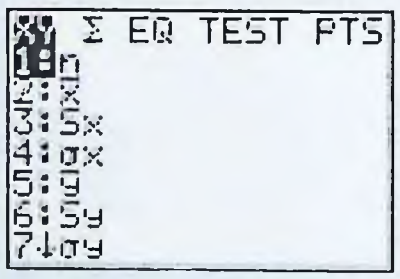
Usando los datos del ejemplo 7.4.2, introduzca los valores x en L1 y los valores y en L2. Puede escribir L3 =L1*L2 y L4 = $L1^2$ si desea duplicar la lista de valores. Para obtener todas las sumas necesarias para calcular manualmente fórmulas para la pendiente m y la intersección b en el eje y, presione la tecla **STAT**, flecha derecha a **CALC**, seleccione la opción **2:2-Var Stats**, e inserte los símbolos para lista L1 y L2, mostrados a continuación en la pantalla de en medio. Presionando **ENTER** y con flecha arriba o abajo esta pantalla da todas las expresiones de de sumas, como se ve en la pantalla de la extrema derecha.

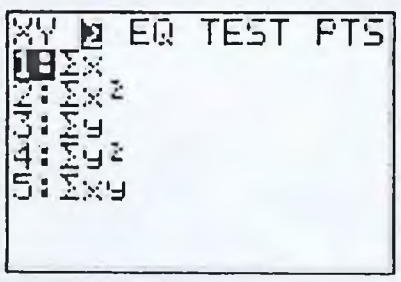


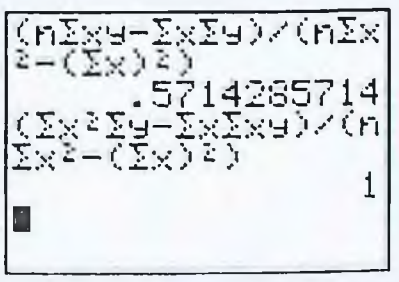




No obstante, un método más simbólico y cómodo en su calculadora es usar los símbolos estadísticos disponibles por medio de la tecla **VARS, 5:Statistics,** usando los menús **XY** y **Σ,** mostrados a continuación en las pantallas de la izquierda y en medio. Las fórmulas para la pendiente m y para la intersección b con el eje y se calculan en la pantalla siguiente a la derecha, y son $m = 0.5714 = 4/7$ y $b = 1$.



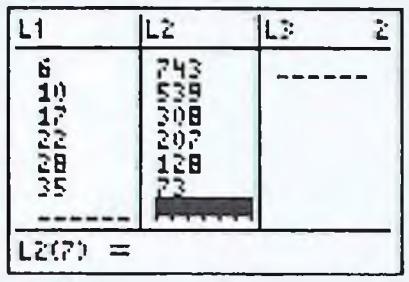


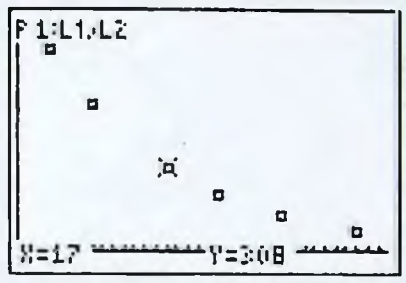


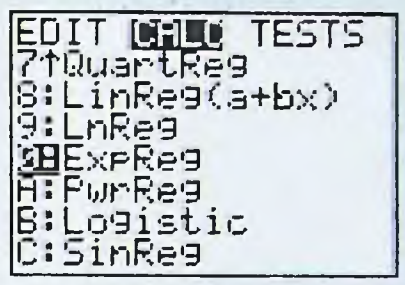
www.FreeLibros.com

Solución al ¡Explore! de la página 538

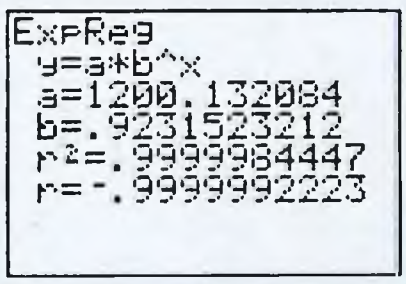
Siguiendo el ejemplo 7.4.4, guarde los datos de producción y precio de demanda en las listas L1 y L2, respectivamente. Usando el procedimiento **STAT PLOT** explicado en la Introducción a la calculadora, obtenga el diagrama de dispersión (siguiente pantalla de en medio), que muestra una curva decreciente de precio en una forma no lineal. Esto sugiere una curva exponencial con exponente negativo. Presione **STAT,** flecha derecha a **CALC**, y flecha abajo a **0:ExpReg,** asegurándose de indicar las listas deseadas y la ubicación de la función; esto es, escribiendo **ExpReg L1, L2, Y1** antes de completar el tecleo final. Recuerde que el símbolo **Y1** se encuentra con la secuencia de tecleo **VARS, Y-VARS, 1:Function, 1:Y1.**

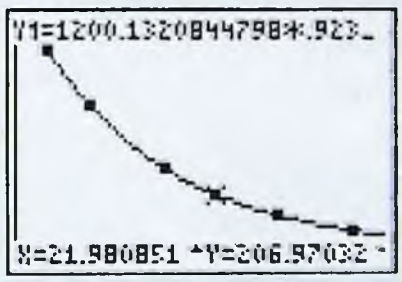






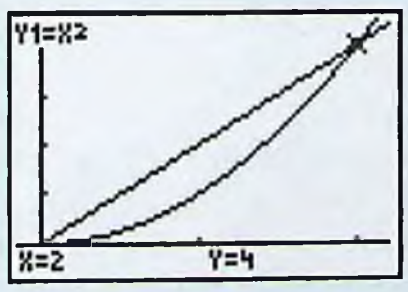
La forma de la ecuación exponencial es $Y = a*b^x$, y se encuentra que $a = 1\,200$, con base, $b = 0.92315$. Si escribimos $b^x = e^{mx}$, se encontraría que $m = -0.079961$; esto es, $0.92315 = e^{-0.079961}$. Presionando **ZOOM, 9:ZoomStat,** da la siguiente pantalla derecha, que muestra un ajuste casi perfecto a los datos para una curva exponencial, con una ecuación $Y = 1\,200(0.92315)^x = 1\,200e^{(-0.079961)x}$. Esta ecuación coincide con la solución mostrada en la página 539. Al seleccionar directamente el modelo de Regresión Exponencial, se ha calculado una regresión log-lineal sin tener que tomar logaritmos de las variables producción y precio de demanda.

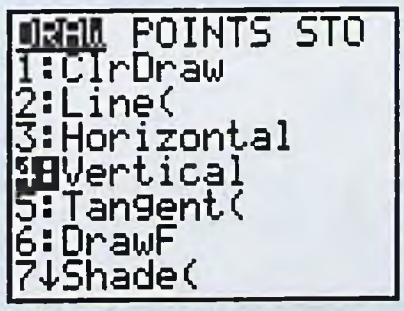


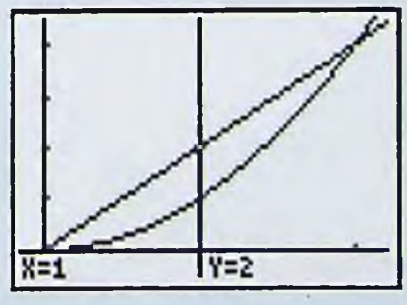


Solución al ¡Explore! de la página 563

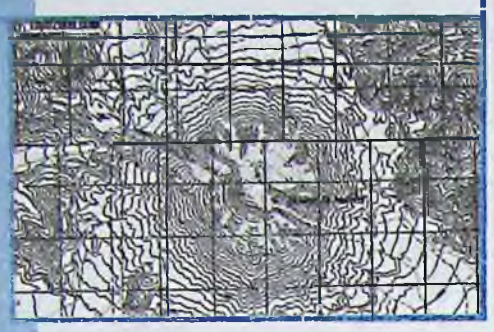
Consulte el ejemplo 7.6.3. Guarde $y = x^2$ en Y1 y $y = 2x$ en Y2 del editor de ecuaciones y grafique usando la pantalla $[-0.15, 2.2]1$ por $[-0.5, 4.5]1$. Los puntos de intersección de Y1 y Y2 se localizan fácilmente por rastreo. La función de recta vertical se puede hallar usando la tecla **DRAW (2nd PRGM), 4:Vertical.** Con flechas a izquierda o derecha se pueden construir secciones transversales Y1 y Y2, sobre las cuales se realiza la integración.







www.FreeLibros.com



REFLEXIONE ACERCA DE...

PARA MODELAR LA DIFUSIÓN DE POBLACIÓN

En 1905 accidentalmente se escaparon cinco ratas almizcleras cerca de Praga en la actual República Checa. Después de 1905, la zona de distribución de la población de ratas almizcleras se expandió y el frente (límite exterior de la población) se movió como se indica en la figura 7.34. En la figura, las curvas cerradas marcadas con fechas son contornos de igual población; esto es, curvas constantes de población mínima detectable. Por ejemplo, la curva marcada 1920 indica que la población de ratas almizcleras se había expandido de Praga a las puertas de Viena 15 años después de que se escaparon. Una dispersión de población como ésta se puede estudiar usando modelos matemáticos con base en *ecuaciones diferenciales parciales;* esto es, ecuaciones que contienen funciones de dos o más variables así como sus derivadas parciales. Primero se examinará este modelo y luego se regresará a la ilustración para ver qué tan bien se puede usar el modelo para describir la dispersión de las ratas almizcleras.

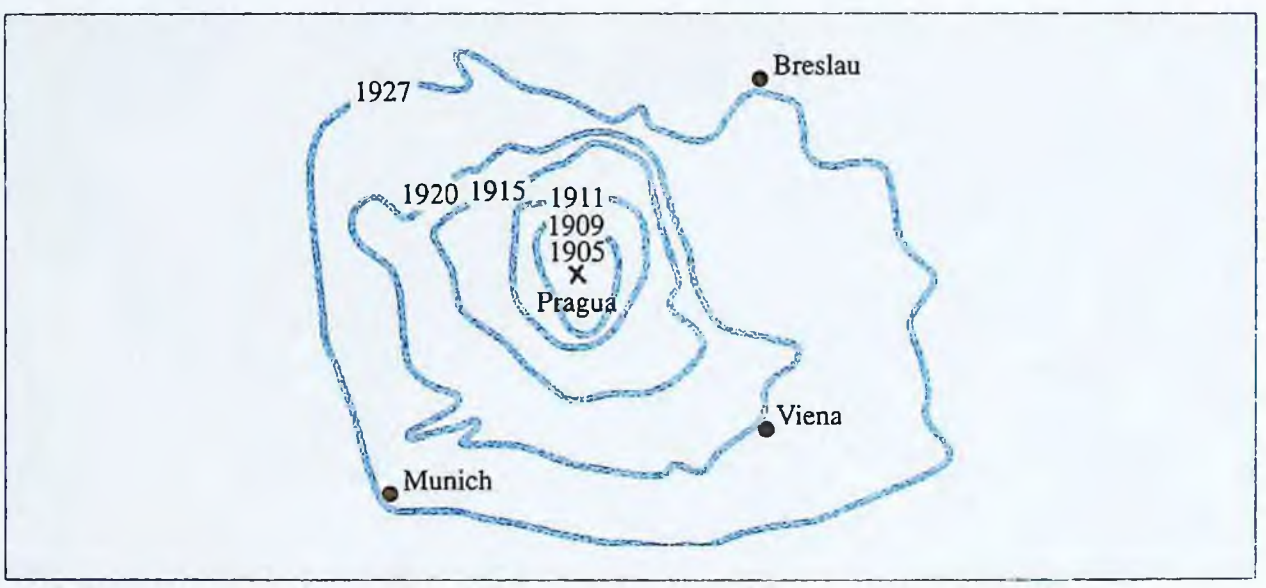


FIGURA 7.34 Curvas de igual población para una población de ratas almizcleras en Europa.

FUENTE: *Mathematical Models in Biology* por Leah Edelstein-Keshet, McGraw-Hill, Boston, 1988, p. 439.

El modelo que se estudia está basado en la **ecuación de difusión,** que es una ecuación diferencial parcial extremadamente versátil con aplicaciones importantes en ciencias físicas y biológicas así como en economía. *Difusión* es el nombre empleado para el proceso en el que las partículas se dispersan al chocar continua y aleatoriamente cambiando de dirección, después de salir de una fuente. Suponga que las partículas pueden moverse sólo en una dirección espacial (por ejemplo, a lo largo de una varilla delgada o un tubo). Entonces $C(x, t)$, la concentración de partículas situadas a x unidades de la fuente (punto de inserción) en el momento t, satisface la ecuación de difusión unidimensional

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

www.FreeLibros.com

donde α es una constante positiva llamada *coeficiente de difusión*. Del mismo modo, la ecuación bidimensional de difusión

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right)$$

se utiliza para modelar la dispersión de partículas que se mueven al azar en un plano, donde $C(x, y, t)$ es la concentración de partículas en el punto (x, y) en el momento t.

Biólogos matemáticos han adaptado la ecuación de difusión para modelar la dispersión de organismos vivos, incluyendo plantas y animales. Vamos a examinar un modelo de este tipo, debido a J. G. Skellam. Primero, suponga que en un momento particular ($t = 0$), se introduce un organismo en un punto (llamado "fuente"), donde éste organismo no había estado presente previamente. Skellam supuso que la población del organismo se dispersa desde la fuente en dos formas:

a) Al crecer exponencialmente a un ritmo de reproducción continuo r.

b) Al moverse al azar en un plano de coordenadas xy, con la fuente en el origen.

Con base en estas suposiciones, Skellam modeló la dispersión de la población con la ecuación de difusión bidimensional modificada

$$(1) \quad \frac{\partial N}{\partial t} = \underbrace{D\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\right)}_{\substack{\text{expansión por} \\ \text{movimiento} \\ \text{al azar}}} + \underbrace{rN}_{\substack{\text{crecimiento por} \\ \text{reproducción} \\ \text{exponencial}}}$$

donde $N(x, y, t)$ es la densidad de población en el punto (x, y) en el momento t, y D es una constante positiva, llamada *coeficiente de dispersión*, que es análoga al coeficiente de difusión.

Se puede demostrar que una solución a la ecuación de Skellam es

$$(2) \quad N(x, y, t) = \frac{M}{4\pi Dt} e^{rt - (x^2 + y^2)/(4Dt)}$$

donde M es el número de individuos inicialmente introducidos en la fuente (vea la Pregunta 5). El *ritmo asintótico de expansión poblacional*, V, es la distancia entre lugares con iguales densidades de población en años sucesivos, y el modelo de Skellam se puede usar para demostrar que

$$(3) \quad V = \sqrt{4rD}$$

(véase la pregunta 4). Del mismo modo, el *ritmo intrínseco de crecimiento*, r, se puede estimar usando datos del crecimiento de poblaciones existentes, y el coeficiente de dispersión, D, se puede estimar usando la fórmula

$$(4) \quad D \approx \frac{2A^2(t)}{\pi t}$$

donde $A(t)$ es la distancia promedio que los organismos han recorrido en el tiempo t.

El modelo de Skellam se ha empleado para estudiar la dispersión de varios organismos, incluyendo robles, escarabajos de hojas de cereal, mariposas de repollos, y otros. Como ilustración de la forma en que se puede aplicar el modelo, se regresará a la población de ratas almizcleras de Europa Central, introducida en el párrafo inicial, y a la figura 7.34. Estudios de población indican que r, el ritmo intrínseco de aumento de la población de ratas almizcleras, no era de más de 1.1 por año, y que D, el coeficiente de dispersión, no era mayor a 230 km^2/año. En consecuencia, la solución al modelo de Skellam expresado en la ecuación (2) pronostica que la distribu-

www.FreeLibros.com

ción de ratas almizcleras, bajo las mejores circunstancias para la especie, está dada por

$$(5)\quad N(x, y, t) = \frac{5}{4\pi(230)t} e^{1.1t-(x^2+y^2)/(920t)}$$

donde (x, y) es el punto x km al este y y km al norte del punto en que se escaparon las ratas, cerca de Praga, y t es el tiempo en años (después de 1905). La fórmula (3) pronostica que el máximo ritmo de expansión poblacional es

$$V = \sqrt{4rD} = \sqrt{4(1.1)(230)} \approx 31.8 \text{ km/año}$$

que es un poco mayor que el ritmo observado de 25.4 km/año.

La deducción de la ecuación de difusión se puede hallar en numerosos textos de ecuaciones diferenciales, o vea la *Introduction to Mathematics por Life Scientists*, 3rd ed., de Edward Batschelet, Springer-Verlag, New York, páginas 392-395. El modelo de Skellam y diversas variaciones se estudian en *Mathematical Models in Biology* de Leah Edelstein-Keshet, McGraw-Hill, Boston, 1988, páginas 436-441. Es importante resaltar que la ecuación modificada de difusión de Skellam, dada en la fórmula (1), tiene soluciones diferentes a la fórmula (2). En general, la resolución de ecuaciones diferenciales parciales es muy difícil, y a veces la mejor opción es concentrarse en hallar soluciones con ciertas características específicas. Estas soluciones se pueden usar entonces para analizar situaciones prácticas, como hicimos con el problema de las ratas almizcleras.

Preguntas

1. Verifique que $C(x, t) = \dfrac{M}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\left(\frac{x^2}{4Dt}\right)}$ satisfaga la ecuación de difusión

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Haga esto calculando las derivadas parciales e insertándolas en la ecuación.

2. ¿Qué relación debe cumplirse entre los coeficientes a y b para que $C(x, t) = e^{ax+bt}$ sea una solución de la ecuación de difusión

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

3. Suponga que una población de organismos se dispersa a lo largo de una recta unidimensional según la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + rN$$

Demuestre que la función $N(x, t) = \dfrac{M}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{rt-\left(\frac{x^2}{4Dt}\right)}$ es una solución de esta ecuación diferencial parcial, donde M es la población inicial de organismos localizada en el punto $x = 0$ cuando $t = 0$.

4. Demuestre que en los contornos de igual densidad de población, es decir, en las curvas de la forma $N(x, t) = A$, donde A es una constante, el cociente x/t es igual a

$$\frac{x}{t} = \pm\left[4rD - \frac{2D}{t}\ln t - \frac{4D}{t}\ln\left(\sqrt{2\pi D}\, A/M\right)\right]^{1/2}$$

www.FreeLibros.com

Con el uso de esta fórmula, se puede demostrar que el cociente x/t se puede aproximar con $\frac{x}{t} \approx \pm 2\sqrt{rD}$, que da una fórmula para el ritmo de expansión de población.

5. Verifique que $N(x, y, t) = \frac{M}{4\pi Dt} e^{rt-(x^2+y^2)/(4Dt)}$ es una solución de la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\right) + rN$$

6. Use la ecuación (5), que obtuvimos usando el modelo de Skellam, para hallar la densidad de población para ratas almizcleras en 1925 en el lugar 500 km al norte y 500 km al oeste del punto en que se escaparon, cerca de Praga.

7. Use el modelo de Skellam para construir una función que estime la densidad de población de la pequeña mariposa blanca del repollo, si el máximo coeficiente de difusión observado es 129 km^2/año y el máximo ritmo intrínseco de aumento observado es 31.5/año. ¿Cuál es el máximo ritmo pronosticado de expansión de población? ¿Cómo se compara esto con el máximo ritmo de expansión poblacional observado de 170 km/año?

8. En esta pregunta, se pide explorar un método alternativo para analizar el problema de ratas almizcleras usando el modelo de Skellam. Recuerde que el ritmo intrínseco de crecimiento de la población de ratas almizcleras fue $r = 1.1$ y que el máximo ritmo de dispersión observado fue $V = 25.4$.

a) Use estos valores para r y V en la fórmula (3) para estimar el coeficiente de dispersión D.

b) Sustituyendo $r = 1.1$ en la fórmula (2) junto con el valor obtenido para D en el inciso *a*), encuentre la densidad de población en 1925 para las ratas almizcleras en el lugar a 500 km al norte y 500 km al oeste del punto en que se soltaron (la fuente), cerca de Praga. Compare su respuesta con la respuesta a la pregunta 6.

c) Use la fórmula (4) para estimar la distancia promedio, A, de la población de ratas almizcleras en 1925 desde su fuente cerca de Praga.

Referencias

D. A. Andow, P. M. Kareiva, Simon A. Levin, y Akira Okubo, "Spread of invading organisms", *Landscape Ecology*, Volumen 4, números. 2/3 (1990), páginas 177-188.

Leah Edelstein-Keshet, *Mathematical Models in Biology*, McGraw-Hill, Boston, 1988.

J. G. Skellam, "The formulation and interpretation of mathematical models of diffusionary processes in population biology", en *The Mathematical Theory of the Dynamics of Biological Populations*, editado por M. S. Bartlett y R. W. Hiorns, Academic Press, New York, 1973, páginas 63-85.

J. G. Skellam, "Random dispersal in theoretical populations", *Biometrika*, Volumen 28 (1951), páginas 196-218.

www.FreeLibros.com

www.FreeLibros.com

CAPÍTULO 8



La concentración de sustancias contaminantes en un lago puede ser determinada usando ecuaciones diferenciales.

ECUACIONES DIFERENCIALES

1 Introducción a las ecuaciones diferenciales
2 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden
3 Aplicaciones adicionales de las ecuaciones diferenciales
4 Soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales
5 Ecuaciones en diferencias
Resumen del capítulo
Términos símbolos y fórmulas importantes
Revisión del capítulo
Problemas de repaso
¡Explore! Actualización
Reflexione acerca de...

www.FreeLibros.com

SECCIÓN 8.1 | Introducción a las ecuaciones diferenciales

En la sección 1.4, se introdujo la modelación matemática como un proceso dinámico que comprende tres etapas:

1. A un problema real se le da una formulación matemática llamada *modelo matemático*. Con frecuencia, esto comprende hacer suposiciones de simplificación acerca del problema para que sea más accesible.
2. El modelo matemático es analizado o resuelto con el uso de herramientas de áreas como el álgebra, el cálculo y la estadística, entre otros, o mediante métodos numéricos, usando calculadoras graficadoras o computadoras.
3. La solución del modelo matemático es interpretada en términos del problema real original. Esto a veces lleva a ajustes en las suposiciones del modelo.

El proceso puede entonces repetirse, con un modelo cada vez más refinado, hasta que se logra una comprensión satisfactoria del problema real.

En todo este libro se ha empleado el cálculo para analizar modelos matemáticos, y muchos de estos modelos involucran razones de cambio. A veces la formulación matemática de un problema contiene una ecuación en la que están relacionadas una cantidad y su razón de cambio. Como las razones de cambio se expresan en términos de derivadas o diferenciales, tal ecuación recibe el nombre de **ecuación diferencial.** Por ejemplo,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 5 \quad \text{y} \quad \frac{dP}{dt} = kP \quad \text{y} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$$

son todas ellas ecuaciones diferenciales. Las ecuaciones diferenciales están entre las herramientas más útiles para modelar fenómenos continuos, incluyendo situaciones importantes que se presentan en finanzas y economía, así como en ciencias sociales y biológicas. En esta sección, se introducen técnicas para resolver ecuaciones diferenciales básicas, y se estudian algunas aplicaciones prácticas.

El tipo más sencillo de ecuación diferencial tiene la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

en la que la derivada de la magnitud y se da explícitamente como función de la variable independiente x. Esta ecuación se puede resolver con sólo hallar la integral indefinida de $g(x)$. La expresión de todas las posibles soluciones de la ecuación se denomina **solución general.** Una ecuación diferencial asociada con una condición inicial se llama **solución particular** del problema de valor inicial. En los ejemplos 8.1.1 al 8.1.3 se ilustra dicha terminología y se demuestra la forma en que se pueden emplear las ecuaciones diferenciales para construir modelos matemáticos.

EJEMPLO | 8.1.1

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 3x$$

y la solución particular que satisfaga $y = 2$ cuando $x = 1$.

www.FreeLibros.com

Solución

Integrando, se obtiene

$$y = \int \left(\frac{dy}{dx}\right) dx = \int (x^2 + 3x)\, dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C$$

Ésta es la solución general puesto que todas las soluciones se pueden expresar en dicha forma. Para la solución particular, sustituya $x = 1$ y $y = 2$ en la solución general:

$$2 = \frac{1}{3}(1)^3 + \frac{3}{2}(1)^2 + C$$

$$C = 2 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$$

Por tanto, la solución particular requerida es $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}$.

EJEMPLO | 8.1.2

El valor de reventa de cierta máquina industrial disminuye durante 10 años a una tasa que depende de la antigüedad de la máquina. Cuando la máquina tiene x años de fabricada, la razón a la que su valor está cambiando es $220(x - 10)$ dólares por año. Exprese el valor de la máquina como función de su edad y de su valor inicial. Si la máquina valía originalmente \$12 000, ¿cuánto valdrá a los 10 años?

Solución

Denote por $V(x)$ el valor de la máquina cuando tenga x años de edad. La derivada $\frac{dV}{dx}$ es igual a la razón $220(x - 10)$ a la que el valor de la máquina está cambiando. Por tanto, para modelar este problema, se puede usar la ecuación diferencial

$$\frac{dV}{dx} = 220(x - 10) = 220x - 2\,200$$

Para hallar V, resuelva esta ecuación diferencial integrando:

$$V(x) = \int (220x - 2\,200)\, dx = 110x^2 - 2\,200x + C$$

Nótese que C es igual a $V(0)$, el valor inicial de la máquina. Un símbolo más descriptivo para esta constante es V_0. Con el uso de esta notación, se puede escribir la solución general como

$$V(x) = 110x^2 - 2\,200x + V_0$$

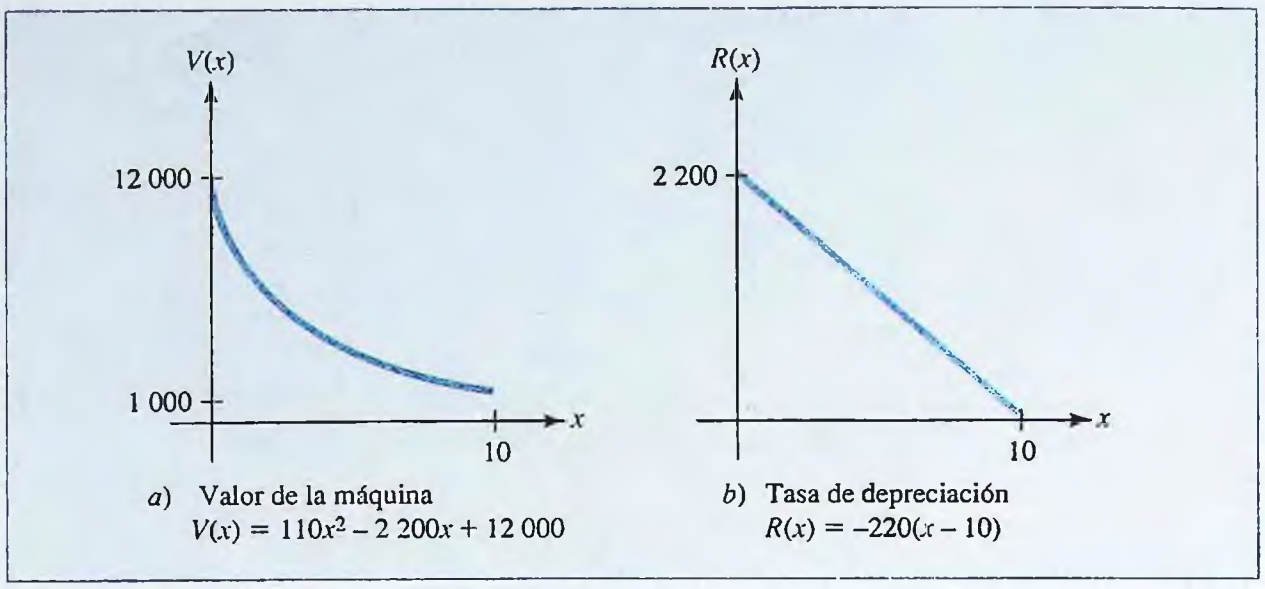
Si $V_0 = 12\,000$, entonces la solución particular correspondiente es

$$V(x) = 110x^2 - 2\,200x + 12\,000$$

Por tanto, cuando la máquina tenga $x = 10$ años de antigüedad, su valor es

$$V(10) = 110(10)^2 - 2\,200(10) + 12\,000 = \$1\,000$$

www.FreeLibros.com



a) Valor de la máquina
$V(x) = 110x^2 - 2\,200x + 12\,000$

b) Tasa de depreciación
$R(x) = -220(x - 10)$

FIGURA 8.1 El valor de la máquina y su tasa de depreciación.

El negativo de la razón de cambio del valor de reventa de la máquina

$$R = -\frac{dV}{dx} = -220(x - 10)$$

se denomina **tasa de depreciación.** En la figura 8.1 se muestran las gráficas del valor de reventa V de la máquina y de la tasa de depreciación R.

EJEMPLO | 8.1.3

Se espera que un pozo petrolero que acaba de abrirse produzca 300 barriles de petróleo crudo por mes, y se espera que a ese ritmo se agote en 3 años. Se estima que dentro de t meses, el precio del petróleo crudo sea $p(t) = 28 + 0.3\sqrt{t}$ dólares por barril. Si el petróleo se vende tan pronto como es extraído del pozo, ¿cuál será el ingreso total generado por el pozo durante su operación?

Solución

Sea $R(t)$ el ingreso generado durante los primeros t meses después de abrirse el pozo, de modo que $R(0) = 0$. Para construir la ecuación diferencial, use la relación de la razón

$$\begin{pmatrix}\text{razón de cambio del ingreso con}\\ \text{respecto al tiempo (dólares/mes)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{dólares por}\\ \text{barril}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{barriles}\\ \text{por mes}\end{pmatrix}$$

Se deduce que se puede modelar este problema usando la ecuación diferencial

$$\underset{\substack{\textit{razón de cambio}\\ \textit{de ingreso}}}{\frac{dR}{dt}} = \underset{\substack{\textit{dólares}\\ \textit{por barril}}}{(28 + 0.3\sqrt{t})} \underset{\substack{\textit{barriles}\\ \textit{por mes}}}{(300)}$$

y se deduce que

$$\frac{dR}{dt} = p(t)(300) = 300(28 + 0.3\sqrt{t})$$
$$= 8\,400 + 90t^{1/2}$$

www.FreeLibros.com

Integrando, se obtiene que la solución general de esta ecuación diferencial es

$$R(t) = \int (8\,400 + 90t^{1/2})\,dt = 8\,400t + 90\left(\frac{t^{3/2}}{3/2}\right) + C$$

$$= 8\,400t + 60t^{3/2} + C$$

Como $R(0) = 0$, se tiene que

$$R(0) = 0 = 8\,400(0) + 60(0)^{3/2} + C$$

de modo que $C = 0$, y la solución particular buscada es

$$R(t) = 8\,400t + 60t^{3/2}$$

Por tanto, como el pozo se agotará en 36 meses, el ingreso total generado por el pozo durante su operación es

$$R(36) = 8\,400(36) + 60(36)^{3/2}$$
$$= \$315\,360$$

Ecuaciones de variables separables

Numerosas ecuaciones diferenciales útiles se pueden rescribir formalmente de modo que todos los términos que contengan la variable independiente aparezcan en un miembro de la ecuación, y todos los términos que contengan la variable dependiente aparezcan en el otro. Las ecuaciones diferenciales con esta propiedad especial se llaman **ecuaciones de variables separables** y se pueden resolver por medio del siguiente procedimiento, que comprende dos integraciones.

Ecuaciones diferenciales de variables separables ■ Una ecuación diferencial que se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h(x)}{g(y)}$$

se llama ecuación de **variables separables.** La solución general de esta ecuación se puede obtener separando las variables e integrando ambos miembros; esto es,

$$\int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx$$

EJEMPLO | 8.1.4

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2}$.

Solución

Para separar las variables, suponga que la derivada $\frac{dy}{dx}$ es en realidad un cociente y escriba

$$y^2\,dy = 2x\,dx$$

Ahora integre ambos lados de esta ecuación para obtener

$$\int y^2\,dy = \int 2x\,dx$$

$$\frac{1}{3}y^3 + C_1 = x^2 + C_2$$

¡EXPLORE!

Consulte el ejemplo 8.1.4. Introduzca la familia de curvas solución $y = (3x^2 + L1)\text{^}(1/3)$ en Y1 del editor de ecuaciones, donde la lista $L1 = \{-16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16\}$. Use la pantalla $[-4.7, 4.7]1$ por $[-3, 4]1$ para graficar esta familia de curvas y describa lo que observe. ¿Cuál de estas curvas pasa por el punto (0, 2)?

www.FreeLibros.com

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias. Al despejar y, resulta

$$\frac{1}{3}y^3 = x^2 + (C_2 - C_1) = x^2 + C_3 \qquad \text{donde } C_3 = C_2 - C_1$$

$$y^3 = 3x^2 + 3C_3 = 3x^2 + C \qquad \text{donde } C = 3C_3$$

$$y = (3x^2 + C)^{1/3}$$

EJEMPLO | 8.1.5

Un cuerpo se mueve a lo largo del eje x en forma tal que en cada momento t, su velocidad está dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \ln t$$

Si el cuerpo está en $x = -2$ cuando $t = 1$, ¿dónde está cuando $t = 3$?

Solución

Separando las variables en la ecuación diferencial dada e integrando, se tiene

$$\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int \ln t\,dt$$

$$\frac{-1}{x} + C_1 = t \ln t - \int \frac{1}{t}(t)\,dt \qquad \text{integración por partes con } u = \ln t \quad dv = dt$$

$$= t \ln t - t + C_2 \qquad du = \frac{1}{t}dt \quad v = t$$

de modo que la solución general es

$$\frac{-1}{x} = t \ln t - t + C \qquad \text{donde } C = C_2 - C_1$$

Como $x = -2$ cuando $t = 1$, se tiene

$$\frac{-1}{(-2)} = (1)\ln(1) - (1) + C \qquad \text{puesto que } \ln 1 = 0$$

$$\frac{1}{2} = 0 - 1 + C$$

$$C = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

de modo que

$$\frac{-1}{x} = t \ln t - t + \frac{3}{2}$$

En particular, cuando $t = 3$, se tiene

$$\frac{-1}{x} = (3)\ln(3) - (3) + \frac{3}{2} \approx 1.80$$

Al despejar x de esta ecuación, se obtiene

$$x \approx \frac{-1}{1.8} \approx -0.56$$

que significa que el objeto está en $x = -0.56$ cuando $t = 3$.

---

www.FreeLibros.com

Crecimiento y decaimiento exponenciales

En la sección 4.1, se obtuvo la fórmula $Q = Q_0e^{kt}$ para el crecimiento exponencial, y $Q = Q_0e^{-kt}$ para decaimiento exponencial; luego, en la sección 4.3 se demostró que la razón de cambio de una magnitud que experimenta uno de estos dos tipos de cambio exponencial (crecimiento o decaimiento) es proporcional a su tamaño; esto es, $\frac{dQ}{dt} = mQ$ para alguna constante m. El ejemplo 8.1.6 muestra que lo inverso de este resultado también es verdadero.

EJEMPLO | 8.1.6

Demuestre que una magnitud Q que cambia a una razón proporcional a su tamaño satisface $Q(t) = Q_0e^{mt}$, donde $Q_0 = Q(0)$.

Solución

Como Q cambia a una razón proporcional a su tamaño, se tiene

$$\frac{dQ}{dt} = mQ$$

para una constante m. Separando las variables e integrando, obtiene

$$\int \frac{1}{Q}\,dQ = \int m\,dt$$

$$\ln Q = mt + C_1$$

y al aplicar exponenciales en ambos miembros

$$Q(t) = e^{\ln Q} = e^{mt+C_1} = e^{C_1}e^{mt}$$

$$= Ce^{mt} \qquad \text{donde } C = e^{C_1}$$

Como $Q(0) = Q_0$, se deduce que

$$Q_0 = Q(0) = Ce^0 = C \qquad \text{porque } e^0 = 1$$

Por tanto, $Q(t) = Q_0e^{mt}$, como se pide.

Modelos de aprendizaje

En el capítulo 4, se hizo referencia a las gráficas de funciones de la forma $Q(t) = B - Ae^{-kt}$ como *curvas de aprendizaje,* porque funciones de esta forma describen con frecuencia la relación entre la eficiencia con la que un individuo realiza un trabajo determinado, y la cantidad de capacitación o experiencia que el "alumno" ha tenido. En general, cualquier magnitud que crezca a una razón proporcional a la diferencia entre su tamaño y un límite superior fijo está representada por una función de esta forma. A continuación se muestra un ejemplo de modelo de aprendizaje de este tipo.

EJEMPLO | 8.1.7

La razón a la que crece el número de personas enteradas de un nuevo aumento en las tarifas postales es proporcional al número de personas en el país que todavía no están enteradas. Exprese el número de personas enteradas del aumento como función del tiempo.

Solución

Denote por $Q(t)$ el número de personas enteradas del aumento en el momento t y sea B la población total del país. Entonces

$$\text{Razón a la que crece el número de personas enteradas del aumento} = \frac{dQ}{dt}$$

www.FreeLibros.com

y

$$\begin{matrix}\text{Número de personas que}\\ \text{todavía no saben del aumento}\end{matrix} = B - Q$$

Como la razón a la que crece el número de personas enteradas del aumento es proporcional al número de personas que no se han enterado del aumento, se deduce que

$$\frac{dQ}{dt} = k(B - Q)$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Note que la constante k debe ser positiva porque $\frac{dQ}{dt} > 0$ (pues Q es una función creciente de t) y $B - Q > 0$ (porque $B > Q$).

Separe las variables escribiendo

$$\frac{1}{B - Q}\,dQ = k\,dt$$

e integre, para obtener

$$\int \frac{1}{B - Q}\,dQ = \int k\,dt$$

$$-\ln|B - Q| = kt + C$$

(Asegúrese de revisar que aparezca el signo menos.) Esta vez se puede cancelar de inmediato el signo de valor absoluto porque $B - Q > 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} -\ln(B - Q) &= kt + C \\ \ln(B - Q) &= -kt - C \\ B - Q &= e^{-kt-C} = e^{-kt}e^{-C} \\ Q &= B - e^{-C}e^{-kt} \end{aligned}$$

Denotando la constante e^{-C} por A y usando notación funcional, se puede concluir que

$$Q(t) = B - Ae^{-kt}$$

que es precisamente la ecuación general de una curva de aprendizaje. Para referencia, la gráfica de Q aparece en la figura 8.2.

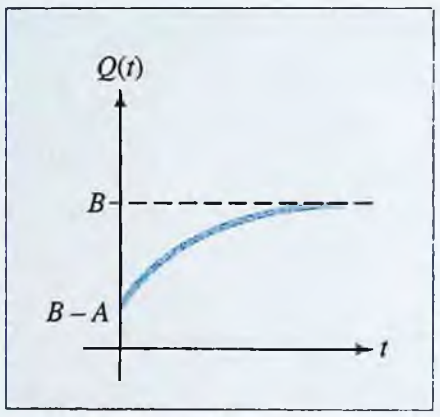


FIGURA 8.2 Curva de aprendizaje $Q(t) = B - Ae^{-kt}$.

Crecimiento logístico

Recuerde, del capítulo 3, que la razón relativa de crecimiento de una magnitud $Q(t)$ está dada por el cociente $Q'(t)/Q(t)$. En crecimiento y decaimiento exponenciales, donde $Q'(t) = kQ(t)$, la razón relativa de crecimiento es constante; es decir,

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)} = k$$

Una población sin restricciones de espacio o de recursos se puede modelar frecuentemente como que tiene crecimiento exponencial. No obstante, cuando existen esas restricciones, es razonable suponer que hay una población máxima, B, sustentable por el entorno (llamada **capacidad máxima**) y que en cualquier momento t, la razón relativa de crecimiento de la población es proporcional a la población *potencial* $B - Q(t)$; esto es,

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)} = k(B - Q(t))$$

www.FreeLibros.com

donde k es una constante positiva. Esta relación de la razón lleva a la ecuación diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = kQ(B - Q)$$

Lo anterior se llama **ecuación logística,** y el correspondiente modelo de crecimiento restringido de la población se conoce como **modelo logístico.**

La ecuación diferencial logística es de variables separables, pero antes de resolverla analíticamente, veamos lo que podemos deducir usando métodos cualitativos. Primero, note que la ecuación logística se puede escribir como $\frac{dQ}{dt} = R(Q)$, donde la razón de cambio de la población $R(Q) = kQ(B - Q)$ es una función cuadrática en Q. Como $k > 0$, la gráfica de $R(Q)$ es una parábola que abre hacia abajo (véase la figura 8.3), y como $R(0) = R(B) = 0$, la gráfica corta el eje Q en 0 y en B. El punto más alto (vértice) de la gráfica está en $B/2$.

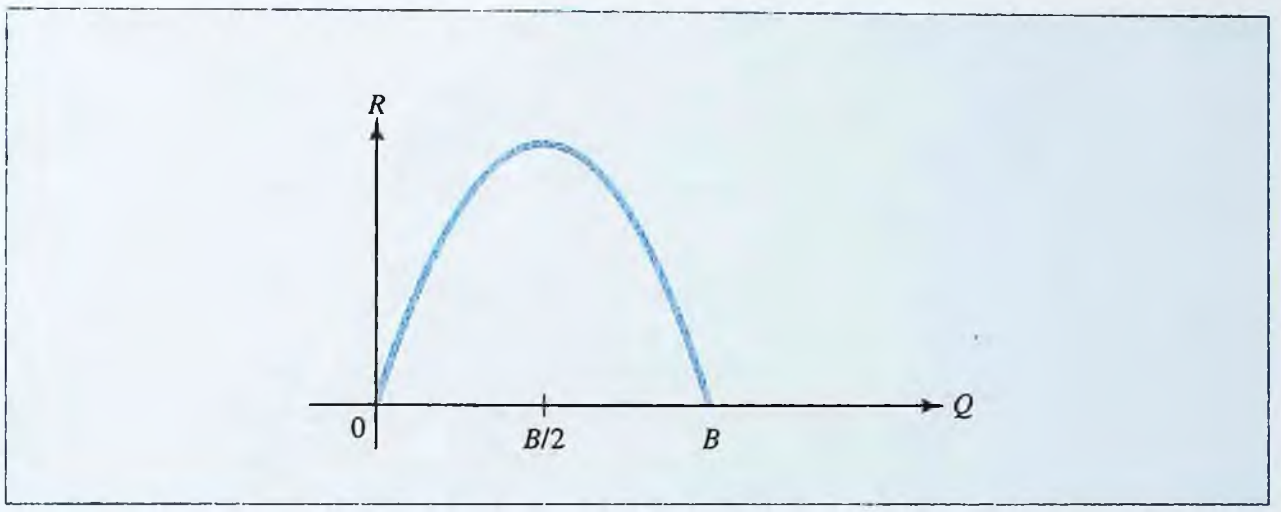


FIGURA 8.3 Gráfica de la función de razón de cambio de la población $R(Q) = kQ(B - Q)$.

Si la población inicial $Q(0)$ es 0, entonces $Q(t) = 0$ para toda $t > 0$ y, del mismo modo, si la población inicial es $Q(0) = B$, entonces la población permanece al nivel de la capacidad máxima para toda $t > 0$. Las dos soluciones constantes $Q = 0$ y $Q = B$, llamadas *soluciones de equilibrio* de la ecuación logística, se muestran en la figura 8.4*a*.

Si la población inicial $Q(0)$ satisface $0 < Q(0) < B$, entonces

$$R(Q) = kQ(B - Q) > 0$$

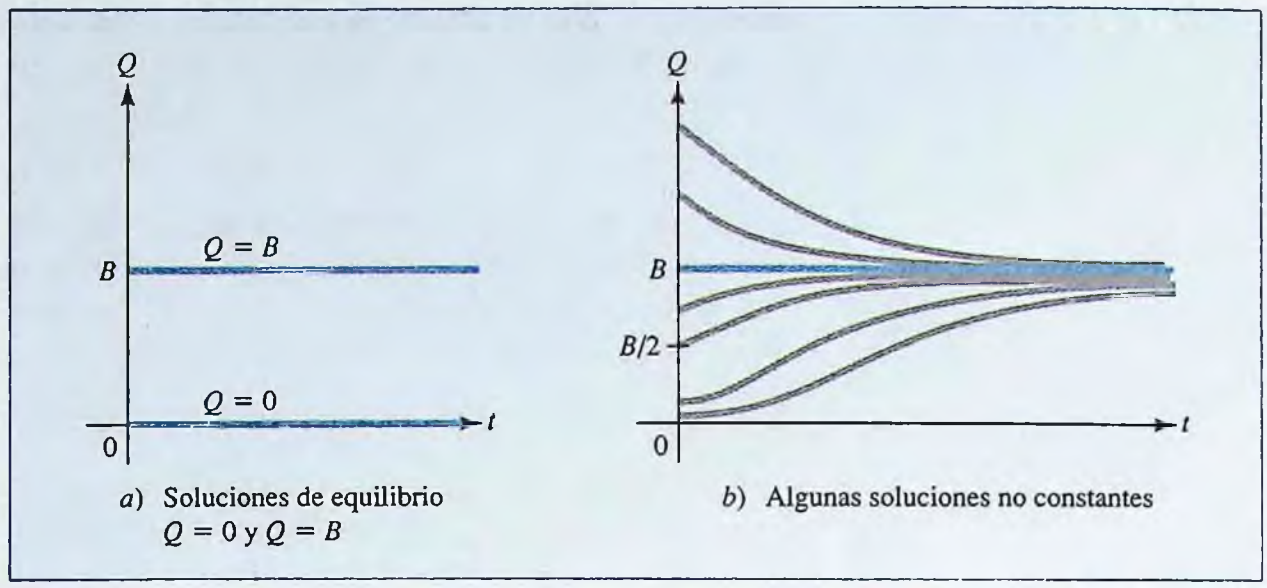
porque k, Q, y $B - Q$ son todas positivas. Como la razón de crecimiento es positiva, la propia población $Q(t)$ es creciente. Cuando $Q(t)$ se aproxima a B, la razón de crecimiento de la población $\frac{dQ}{dt}$ se aproxima a 0, lo cual sugiere que la gráfica de la función de población $Q(t)$ "se aplane", aproximándose a la capacidad máxima en forma asintótica. Si la población inicial satisface $Q(0) > B$, se tiene

$$R(Q) = kQ(B - Q) < 0$$

porque k y Q son positivas y $B - Q$ es negativa. En este caso, la población *decrece* desde su valor inicial, aproximándose una vez más a la capacidad máxima, en forma asintótica cuando Q se aproxima a B. En la figura 8.4*b* se muestran las soluciones no constantes de la ecuación logística.

Además de su papel para modelar crecimiento restringido de población, la ecuación logística también se puede usar para describir algunos comportamientos eco-

www.FreeLibros.com



a) Soluciones de equilibrio $Q = 0$ y $Q = B$

b) Algunas soluciones no constantes

FIGURA 8.4 Soluciones típicas de la ecuación logística $dQ/dt = kQ(B - Q)$.

nómicos así como interacciones dentro de un grupo social, como es la propagación de rumores (vea el problema 40). En el ejemplo 8.1.8, se usa un modelo logístico para describir la propagación de una epidemia.

EJEMPLO | 8.1.8

La razón a la que se propaga una epidemia en una comunidad es conjuntamente proporcional al número de residentes que han sido infectados y al número de residentes susceptibles que no se han infectado. Exprese el número de residentes que han sido infectados como función del tiempo.

Solución

Denote por $Q(t)$ el número de residentes susceptibles infectados en el momento t, y denote por B el número total de residentes susceptibles. Entonces

$$\text{Razón a la que residentes susceptibles se infectan en el momento } t = \frac{dQ}{dt}$$

y

$$\text{Número de residentes susceptibles no infectados todavía} = B - Q$$

REPASO

Justo-a-tiempo

Para decir que la cantidad z es conjuntamente proporcional a las cantidades x y y significa que hay una constante k tal que $z = kxy$.

"Conjuntamente proporcional" significa "proporcional al producto", de modo que la ecuación diferencial que describe la propagación de la epidemia es

$$\frac{dQ}{dt} = kQ(B - Q)$$

donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad. (¿Ve usted por qué k debe ser positiva?) Ésta es una ecuación diferencial de variables separables cuya solución es

$$\int \frac{dQ}{Q(B - Q)} = \int k\,dt$$

$$\frac{1}{B} \ln \left| \frac{Q}{B - Q} \right| = kt + C$$

www.FreeLibros.com

donde la integración de la izquierda se realizó usando la fórmula integral 6 en la tabla de integrales que aparece en la página 458 de la sección 6.1; específicamente,

$$\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{u}{a+bu} \right| + C$$

con $u = Q$, $a = B$, y $b = -1$.

Como $Q > 0$ y $B > Q$, podemos eliminar las barras de valor absoluto de la solución y escribir

$$\frac{1}{B} \ln \left(\frac{Q}{B-Q} \right) = kt + C$$

$$\ln \left(\frac{Q}{B-Q} \right) = Bkt + BC$$

$$\frac{Q}{B-Q} = e^{Bkt+BC} = e^{Bkt} e^{BC}$$

$$= A_1 e^{Bkt} \quad \text{donde } A_1 = e^{BC}$$

Multiplicando ambos lados de la última ecuación por $B - Q$ y despejando Q, se obtiene

$$Q = (B-Q)A_1 e^{Bkt} = (BA_1 - QA_1) e^{Bkt}$$

$$Qe^{-Bkt} = BA_1 - QA_1 \qquad \textit{multiplique ambos lados por } e^{-Bkt}$$

$$Q(A_1 + e^{-Bkt}) = BA_1 \qquad \textit{sume } QA_1 \textit{ a ambos lados}$$

$$Q = \frac{BA_1}{A_1 + e^{-Bkt}}$$

$$= \frac{B}{1 + \frac{1}{A_1} e^{-Bkt}} \qquad \textit{divida todos los términos de la derecha entre } A_1$$

Por último, haciendo $A = \frac{1}{A_1}$, vemos que Q tiene la forma logística

$$Q(t) = \frac{B}{1 + Ae^{-Bkt}}$$

La gráfica de $Q(t)$, el número de residentes infectados, se muestra en la figura 8.5. Note que esta gráfica tiene la forma característica de "S" de una curva logística con capacidad máxima B. Al principio de la epidemia, sólo $Q(0) = \frac{B}{1+A}$ residentes están infectados. El número de residentes infectados aumenta rápidamente al principio y se propaga con la mayor rapidez en el punto de inflexión de la gráfica. No es difícil demostrar que esto ocurre cuando la mitad de la población susceptible está infectada (véase el problema 50). La rapidez a la que se infecta la población empieza a disminuir cuando el número total de residentes infectados se aproxima de forma asintótica al nivel B, donde todos los residentes susceptibles estarían infectados.

¡EXPLORE!

Suponga que en una pequeña comunidad de 1 000 residentes, el número de ellos que contraen gripe en un periodo de 7 semanas está dado en la tabla siguiente:

Semanas	Número de infectados
1	45
2	75
3	200
4	450
5	595
6	700
7	760

Use la función de modelación estadística de su calculadora graficadora para ajustar una curva logística a los datos, y determine el nivel proyectado de residentes susceptibles que finalmente se infectarán con base en el modelo logístico.

www.FreeLibros.com

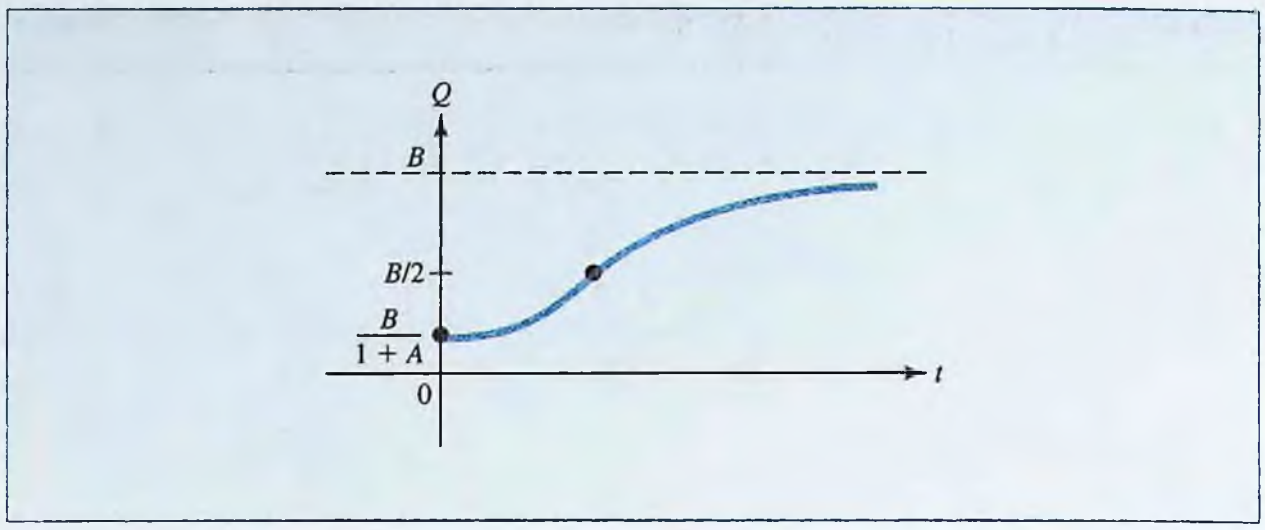


FIGURA 8.5 Curva logística $y = \dfrac{B}{1 + Ae^{-Bkt}}$ que muestra el número de residentes $Q(t)$ infectados en el momento t durante una epidemia.

Por qué funciona el método de separación de variables

Considere la ecuación diferencial separable

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h(x)}{g(y)}$$

o bien, lo que es equivalente,

$$g(y)\frac{dy}{dx} - h(x) = 0$$

El lado izquierdo de esta ecuación se puede rescribir en términos de las antiderivadas de g y h. En particular, si G es una antiderivada de g y H una antiderivada de h, de la regla de la cadena se deduce que

$$\frac{d}{dx}[G(y) - H(x)] = G'(y)\frac{dy}{dx} - H'(x) = g(y)\frac{dy}{dx} - h(x)$$

Por tanto, la ecuación diferencial $g(y)\dfrac{dy}{dx} - h(x) = 0$ dice que

$$\frac{d}{dx}[G(y) - H(x)] = 0$$

Pero las únicas funciones cuyas derivadas son idénticamente cero son las constantes, y entonces

$$G(y) - H(x) = C$$

para alguna constante C. Esto es,

$$G(y) = H(x) + C$$

o, lo que es equivalente,

$$\int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx + C$$

y la demostración está completa.

www.FreeLibros.com

PROBLEMAS | 8.1

En los problemas del 1 al 20 encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada. Deberá integrar por partes en los problemas del 17 al 20.

1. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 5x - 6$

2. $\frac{dP}{dt} = \sqrt{t} + e^{-t}$

3. $\frac{dy}{dx} = 3y$

4. $\frac{dy}{dx} = y^2$

5. $\frac{dy}{dx} = e^y$

6. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

9. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{xy}$

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 4}{xy}$

11. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x - 1}$

12. $\frac{dy}{dx} = e^y\sqrt{x + 1}$

13. $\frac{dy}{dx} = \frac{y + 3}{(2x - 5)^6}$

14. $\frac{dy}{dx} = e^{-2y}(x - 2)^9$

15. $\frac{dx}{dt} = \frac{xt}{2t + 1}$

16. $\frac{dy}{dt} = \frac{te^y}{2t - 1}$

17. $\frac{dy}{dx} = xe^{x-y}$

18. $\frac{dw}{ds} = \frac{se^{2w}}{w}$

19. $\frac{dy}{dt} = y \ln\sqrt{t}$

20. $\frac{dx}{dt} = \frac{\ln t}{\ln x}$

En los problemas del 21 al 28 encuentre la solución particular de la ecuación diferencial que satisfaga la condición indicada.

21. $\frac{dy}{dx} = e^{5x}$; $y = 1$ cuando $x = 0$

22. $\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 3x^2 - 2$; $y = 4$ cuando $x = 1$

23. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2}$; $y = 3$ cuando $x = 2$

24. $\frac{dy}{dx} = 4x^3y^2$; $y = 2$ cuando $x = 1$

25. $\frac{dy}{dx} = y^2\sqrt{4 - x}$; $y = 2$ cuando $x = 4$

26. $\frac{dy}{dx} = xe^{y-x^2}$; $y = 0$ cuando $x = 1$

27. $\frac{dy}{dt} = \frac{y + 1}{t(y - 1)}$; $y = 2$ cuando $t = 1$

$\left[\textit{Sugerencia: } \frac{y - 1}{y + 1} = 1 - \frac{2}{y + 1}\right]$

28. $\frac{dx}{dt} = xt\sqrt{t + 1}$; $x = 1$ cuando $t = 0$

En los problemas del 29 al 40 escriba una ecuación diferencial que describa la situación dada. Defina todas las variables que introduzca. (Esta vez no trate de resolver la ecuación diferencial.)

29. **CRECIMIENTO DE BACTERIAS** El número de bacterias en un cultivo crece a una razón que es proporcional al número de bacterias presente.

30. **DECAIMIENTO RADIACTIVO** Una muestra de radio se desintegra a una razón que es proporcional a su tamaño.

31. **CRECIMIENTO DE INVERSIÓN** Una inversión crece a una razón igual al 7% de su tamaño.

32. **CONCENTRACIÓN DE MEDICAMENTOS** La razón a la que disminuye la concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo es proporcional a la concentración.

www.FreeLibros.com

33. CRECIMIENTO DE POBLACIÓN La población de cierta villa aumenta a una tasa constante de 500 personas por año.

34. COSTO MARGINAL El costo marginal de un fabricante es \$60 por unidad.

35. CAMBIO DE TEMPERATURA La razón a la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre su propia temperatura y la temperatura del medio ambiente.

36. DISOLUCIÓN DE AZÚCAR Al ser puesta en un recipiente con agua, el azúcar se disuelve a una razón que es proporcional a la cantidad de azúcar no disuelta que queda en el recipiente.

37. RECORDAR Cuando se pide a una persona que recuerde un conjunto de datos, la razón a la que los datos son recordados es proporcional al número de datos en la memoria de la persona que todavía no han sido recordados.

38. PARTICIPACIÓN EN EL MERCADO La razón a la que un nuevo producto sustituye a otro, viejo y obsoleto, es conjuntamente proporcional a las participaciones en el mercado de los productos nuevo y viejo. [*Sugerencia:* Exprese la participación en el mercado como un porcentaje.]

39. CORRUPCIÓN EN EL GOBIERNO La razón a la que las personas se ven implicadas en un escándalo del gobierno es conjuntamente proporcional al número de personas ya implicadas, y al número de personas involucradas que todavía no han estado implicadas.

40. PROPAGACIÓN DE UN RUMOR La razón a la que un rumor se propaga en una comunidad es conjuntamente proporcional al número de personas de la comunicad que ya conocen del rumor y al número de personas que aun no lo conocen.

41. Verifique que la función $y = Ce^{kx}$ es una solución de la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = ky$.

42. Verifique que la función $Q = B - Ce^{-kt}$ es una solución de la ecuación diferencial $\dfrac{dQ}{dt} = k(B - Q)$.

43. Verifique que la función $y = C_1e^x + C_2xe^x$ es una solución de la ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 0$.

44. Verifique que la función $y = \dfrac{1}{20}x^4 - \dfrac{C_1}{x} + C_2$ es una solución de la ecuación diferencial $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = x^3$.

45. PRODUCCIÓN DE PETRÓLEO Cierto pozo de petróleo que produce 400 barriles de crudo por mes se agotará en 2 años. El precio del petróleo crudo es en ese momento de \$30 por barril, y se espera que aumente a una razón constante de 4 centavos por barril al mes. Si el petróleo se vende tan pronto como es extraído del pozo, ¿cuál será el ingreso total futuro del pozo?

46. PRODUCCIÓN AGRÍCOLA El **modelo Mitscherlich** para la producción agrícola especifica que el tamaño $Q(t)$ de una cosecha cambia a una tasa que es proporcional a la diferencia entre el tamaño máximo de la cosecha B y Q; esto es,

$$\frac{dQ}{dt} = k(B - Q)$$

a) De esta ecuación despeje $Q(t)$. Exprese su respuesta en términos de k y del tamaño inicial de cosecha $Q_0 = Q(0)$.

b) Una cosecha particular tiene un tamaño máximo de 200 bushels por acre. Al principio de la temporada de cosecha ($t = 0$), la cosecha es 50 de bushels y 1 mes después es de 60 bushels. ¿Cuál es la magnitud de la cosecha 3 meses después ($t = 3$)?

c) Nótese que este modelo es semejante al modelo de aprendizaje estudiado en el ejemplo 8.1.7. ¿Es esto sólo coincidencia o hay alguna analogía significativa que enlaza estas dos situaciones? Explique.

47. DILUCIÓN Un tanque contiene 200 galones de agua salada que contiene 2 libras de sal por galón. Entra agua limpia al tanque a razón de 5 galones por minuto, y la mezcla, que se mantiene uniforme al ser agitada, sale a la misma razón.

a) Si $S(t)$ es la cantidad de sal en la solución en el momento t, entonces la cantidad de sal en un galón de solución está dada por

$$\frac{\text{Cantidad de sal}}{\text{Cantidad de fluido}} = \frac{S(t)}{200}$$

¿A qué razón sale la sal del tanque en el momento t?

b) Escriba una ecuación diferencial para hallar la razón de cambio de $S(t)$, usando el hecho de que

$$\frac{dS}{dt} = \begin{pmatrix}\text{razón a la que}\\ \text{entra sal al tanque}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{razón a la que sale}\\ \text{del tanque la sal}\end{pmatrix}$$

c) Resuelva la ecuación diferencial del inciso *b*) para obtener $S(t)$. [*Sugerencia:* ¿Cuál es $S(0)$?]

48. PROPAGACIÓN DE UNA EPIDEMIA La razón a la que se propaga una epidemia, en una comunidad con 2 000 residentes susceptibles, es conjuntamente proporcional al número de residentes que han sido infectados y al número de residentes

www.FreeLibros.com

susceptibles que no han sido infectados. Exprese el número de residentes que han sido infectados como función del tiempo (en semanas), si 500 residentes tenían inicialmente la enfermedad y 855 residentes habían sido infectados al final de la primera semana.

49. PROPAGACIÓN DE UNA EPIDEMIA La razón a la que se propaga una epidemia en una comunidad es conjuntamente proporcional al número de residentes que han sido infectados y al número de residentes susceptibles que no se han infectado. Demuestre que el momento en el que la epidemia se propaga más rápidamente es cuando la mitad de los residentes susceptibles han sido infectados. [*Sugerencia:* No tiene que resolver una ecuación diferencial para hacer esto. Sólo empiece con una fórmula para la *razón* a la que la epidemia se propaga y use cálculo para maximizar esta razón.]

50. CURVAS LOGÍSTICAS Demuestre que si una magnitud Q satisface la ecuación diferencial $\frac{dQ}{dt} = kQ(B - Q)$, donde k y B son constantes positivas, entonces la razón de cambio $\frac{dQ}{dt}$ es máxima cuando $Q(t) = \frac{B}{2}$. ¿Qué indica este resultado acerca del punto de inflexión de una curva logística? Explique. [*Sugerencia:* véase la sugerencia para el problema 49.]

51. EFICIENCIA DE UN TRABAJADOR Para $0 \le p \le 1$, sea $p(t)$ la probabilidad de que un trabajador en una línea de producción cometa un error t horas después de iniciar su turno de 8 horas. Un trabajador en particular, Tom, nunca comete un error al principiar su turno y tiene sólo 5% de probabilidad de error al final de su turno. Plantee y resuelva una ecuación diferencial que suponga que, en cada momento t, la probabilidad de que Tom cometa un error aumenta a una razón que es proporcional a la probabilidad $1 - p(t)$, de que aun no se haya cometido un error.

52. EFICIENCIA DE UN TRABAJADOR Sue, compañera de trabajo de Tom en el problema 51, tiene 1% de probabilidad de cometer un error al principio de su turno, pero sólo 3% de probabilidad de cometer un error al final de su turno. Plantee y resuelva una ecuación diferencial que suponga que, en cada momento t, la probabilidad $p(t)$ de que Sue cometa un error aumenta a una razón conjuntamente proporcional a $p(t)$ y la probabilidad $1 - p(t)$, de que aun no se haya cometido un error .

53. CORRUPCIÓN EN EL GOBIERNO El número de personas implicadas en cierto escándalo gubernamental importante aumenta a una razón que es conjuntamente proporcional al número de personas ya implicadas y al número de involucrados que todavía no están implicados. Suponga que 7 personas estaban implicadas cuando por primera vez un periódico de Washington hizo público el escándalo, y que 9 más estuvieron implicados en los siguientes tres meses, y que otros 12 estuvieron implicados durante los siguientes 3 meses. ¿Aproximadamente, cuántas personas están involucradas en el escándalo? [*Advertencia:* ¡Este problema probará el ingenio del estudiante en álgebra!]

54. ALOMETRÍA Los diferentes miembros u órganos de una persona crecen a veces a ritmos diferentes, y una parte importante de la **alometría** comprende el estudio de las relaciones entre estos porcentajes de crecimiento (recuerde el ensayo Reflexione acerca de... al final del capítulo 1). Suponga que $x(t)$ es el tamaño (longitud, volumen o peso) de un órgano o miembro de un organismo individual en el momento t, y que $y(t)$ es el tamaño de otro órgano o miembro de la misma persona. Entonces la **ley de alometría** indica que los porcentajes relativos de crecimiento de x y y son proporcionales; esto es,

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = k\frac{x'(t)}{x(t)} \quad \text{para alguna constante } k > 0$$

Primero demuestre que la ley de alometría se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = k\frac{y}{x}$$

y a continuación despeje y de esta ecuación en términos de x.

55. RESPUESTA A UN ESTÍMULO La ley Weber-Fechner en psicología experimental especifica que la razón de cambio de una respuesta R, con respecto al nivel del estímulo S, es inversamente proporcional al estímulo; esto es,

$$\frac{dR}{dS} = \frac{k}{S}$$

Sea S_0 el umbral del estímulo; es decir, el nivel más alto de estímulo para el cual no hay respuesta, de modo que $R = 0$ cuando $S = S_0$.

a) De esta ecuación diferencial despeje $R(S)$. Exprese su respuesta en términos de k y S_0.

b) Dibuje la gráfica de la función de respuesta $R(S)$ encontrada en el inciso *a*).

56. LEY DE FICK Cuando una célula se coloca en un líquido que contiene un soluto, éste atraviesa la pared de la célula por difusión. En consecuencia, cambia la concentración del soluto dentro de la célula, aumentando, si la concentración del soluto fuera de la célula es mayor que la concentración en el interior y disminuyendo si ocurre lo contrario. En biología, la ley de Fick expresa que la concentra-

www.FreeLibros.com

ción del soluto dentro de la célula cambia a una razón que es conjuntamente proporcional al área de la pared de la célula y a la diferencia entre las concentraciones del soluto dentro y fuera de la célula. Suponiendo que la concentración del soluto fuera de la célula sea constante y mayor que la concentración en el interior, deduzca una fórmula para hallar la concentración del soluto dentro de la célula.

57. ELIMINACIÓN DE DESECHOS PELIGROSOS Para estudiar la degradación de ciertos desechos peligrosos con alto contenido tóxico, investigadores biológicos a veces usan la ecuación de Haldane

$$\frac{dS}{dt} = \frac{aS}{b + cS + S^2}$$

donde a, b y c son constantes positivas y $S(t)$ es la concentración de substrato (la sustancia sobre la que actúan bacteria en el material de desecho).[1] Encuentre la solución general de la ecuación de Haldane. Exprese su respuesta en forma implícita (como una ecuación que contiene S y T).

58. DEMOGRAFÍA La ecuación diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = Q(a - b \ln Q)$$

donde a y b son constantes, se denomina ecuación de Gompertz, y una solución de la ecuación recibe el nombre de función de Gompertz. Estas funciones se emplean para describir el crecimiento restringido en poblaciones, así como aspectos del aprendizaje y el crecimiento dentro de una organización.

a) Use la ecuación de Gompertz para demostrar que una función de Gompertz crece con su mayor rapidez cuando $\ln Q = (a - b)/b$. [*Sugerencia:* ¿Cuál derivada mide la razón con que está cambiando la razón de crecimiento dQ/dt?]

b) Resuelva la ecuación de Gompertz. [*Sugerencia:* Sustituya $u = \ln Q$.]

c) Calcule $\lim_{t \to \infty} Q(t)$.

d) Dibuje la gráfica de una función típica de Gompertz.

59. LEY DE PARETO La **ley de Pareto** en economía dice que la razón de cambio (el decrecimiento) del número de personas, P, que tienen un ingreso de al menos x dólares, en una economía estable, es directamente proporcional al número de esas personas e inversamente proporcional a su ingreso. Exprese esta ley como ecuación diferencial y despeje P en términos de x.

[1] Michael D. LaGrega, Philip L. Buckingham y Jeffery C. Evans, *Hazardous Waste Management*, McGraw-Hill, Inc., Nueva York, 1994, p. 578.

SECCIÓN 8.2 | Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Una ecuación diferencial **lineal de primer orden** tiene forma general.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Por ejemplo,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^{-x} \qquad (\text{para } x > 0)$$

Es una ecuación diferencial lineal de primer orden con $p(x) = \dfrac{1}{x}$ y $q(x) = e^{-x}$. En esa forma esta ecuación no puede ser resuelta por simple integración o por separación de variables. Pero, si se multiplican por x ambos lados de la ecuación, ella se convierte en

$$x\frac{dy}{dx} + y = xe^{-x}$$

Note que el lado izquierdo de esta ecuación es la derivada (con respecto a x) del producto xy porque

$$\frac{d}{dx}(xy) = x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y$$

Por tanto, la ecuación diferencial dada queda ahora como

$$\frac{d}{dx}(xy) = xe^{-x}$$

www.FreeLibros.com

que se puede resolver integrando ambos miembros con respecto a x:

$$\int \frac{d}{dx}(xy)\,dx = \int xe^{-x}\,dx$$

$$xy = \int xe^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x} + C \qquad \textit{usando integración por partes}$$

Al despejar y, se concluye que la ecuación diferencial lineal de primer orden dada tiene la solución general

$$y = \frac{1}{x}[e^{-x}(-x-1) + C]$$

En este ejemplo, al multiplicar ambos miembros de la ecuación por la función x, la ecuación diferencial lineal de primer orden dada se convirtió en otra que puede resolverse por integración simple. Esa función, x, se denomina **factor integrante** de la ecuación diferencial. En textos más avanzados, se demuestra que toda ecuación diferencial lineal de primer orden $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ tiene un factor integrante igual a $I(x) = e^{\int p(x)dx}$. Por ejemplo, en el ejemplo de la introducción, donde $p(x) = \dfrac{1}{x}$, el factor integrante es

$$I(x) = e^{\int 1/x\,dx} = e^{\ln x} = x \qquad \text{como } x > 0$$

Para resumir:

Solución de una ecuación diferencial lineal de primer orden La ecuación diferencial lineal de primer orden $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ tiene solución general

$$y = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)q(x)\,dx + C\right]$$

donde C es una constante arbitraria e $I(x)$ es el factor integrante

$$I(x) = e^{\int p(x)dx}$$

EJEMPLO | 8.2.1

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 2x$$

Solución

Ésta es una ecuación diferencial lineal de primer orden con $p(x) = 2$ y $q(x) = 2x$. El factor integrante es

$$I(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

y la solución general de la ecuación lineal de primer orden es

$$y = \frac{1}{e^{2x}}\left[\int 2x\,e^{2x}\,dx + C\right]$$

www.FreeLibros.com

La integral de la derecha se puede calcular integrando por partes:

$$\int 2x\, e^{2x} dx = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} = xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x}$$

(Verifique los detalles.) Por tanto, la solución general es

$$y = \frac{1}{e^{2x}}\left[xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C\right] = x - \frac{1}{2} + Ce^{-2x}$$

EJEMPLO | 8.2.2

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{x}$$

y la solución particular que satisface $y = -2$ cuando $x = 1$.

Solución

La ecuación diferencial dada se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{x} = 2 + \frac{y}{x} \qquad \textit{divida } 2x + y \textit{ entre } x$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 2 \qquad \textit{reste } y/x \textit{ de ambos lados}$$

Ésta es una ecuación diferencial lineal de primer orden con $p(x) = -1/x$ y $q(x) = 2$. El factor integrante es

$$I(x) = e^{\int(-1/x)dx} = e^{-\ln x}$$

$$= e^{\ln x^{-1}} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

y la solución general de la ecuación es

$$y = \frac{1}{1/x}\left[\int \frac{1}{x}(2)dx + C\right] = x\left[\int \frac{2}{x}dx + C\right]$$

$$= x[2 \ln x + C]$$

Para hallar la solución particular, sustituya $x = 1$ y $y = -2$ en la solución general para obtener

$$-2 = (1)[2 \ln(1) + C] = 2(0) + C = C$$

En consecuencia, la solución particular es

$$y = x[2 \ln x - 2] = 2x\,[\ln x - 1]$$

En la sección 4.1, se utiliza un límite para calcular la cantidad de dinero en una cuenta en la que el interés se capitaliza continuamente. El ejemplo 8.2.3 ilustra la forma en que estos cálculos se pueden realizar usando una ecuación diferencial lineal de primer orden.

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 8.2.3

David deposita $20 000 en una cuenta en la que el interés se acumula a una tasa de 5% anual, capitalizado continuamente. Él planea retirar $3 000 por año.

a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para determinar el saldo $Q(t)$ de su cuenta t años después del depósito inicial.

b) ¿Cuánto tardará su cuenta en agotarse?

Solución

a) Si no se hicieran retiros, el valor de la cuenta cambiaría a una tasa igual a la tasa de interés anual, es decir,

$$\frac{100Q'(t)}{Q(t)} = 5$$

o bien, $Q'(t) = 0.05Q(t)$. Ésta es la tasa a la que se suma interés a la cuenta, y al restar cantidades monto del retiro anual de $3 000, se obtiene la razón de cambio del saldo, o sea .

$$\frac{dQ}{dt} = 0.05Q - 3\,000$$

$$\begin{bmatrix}\text{tasa neta de}\\ \text{cambio de } Q\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{tasa a la que se}\\ \text{suma interés}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{cantidad que}\\ \text{se retira}\end{bmatrix}$$

Al rescribir esta ecuación como

$$\frac{dQ}{dt} - 0.05Q = -3\,000$$

se reconoce como una ecuación diferencial lineal de primer orden con $p(t) = -0.05$ y $q(t) = -3\,000$, que se desea resolver sujeta a la condición inicial de que $Q(0) = 20\,000$. El factor integrante para esta ecuación es

$$I(t) = e^{\int -0.05\,dt} = e^{-0.05t}$$

de modo que la solución general es

$$Q(t) = \frac{1}{e^{-0.05t}}\left[\int e^{-0.05t}(-3\,000)dt + C\right]$$

$$= e^{0.05t}\left[-3\,000\left(\frac{e^{-0.05t}}{-0.05}\right) + C\right]$$

$$= 60\,000 + Ce^{0.05t}$$

Como $Q(0) = 20\,000$, se tiene

$$Q(0) = 20\,000 = 60\,000 + Ce^0 = 60\,000 + C$$

de modo que

$$C = -40\,000$$

y por tanto,

$$Q(t) = 60\,000 - 40\,000e^{0.05t}$$

¡EXPLORE!

Consulte el ejemplo 8.2.3. Introduzca Q(*t*) = 60 000 − 40 000*e*^(.05*t*) en Y1 del editor de ecuaciones de su calculadora graficadora. Use la pantalla [−10, 10]1 por [−5 000, 40 000]1 000 y determine gráficamente cuándo:

a) quedarán $5 000 en la cuenta

b) La cuenta quedará en cero

Ahora en su calculadora use la función TRACE, o la de hallar intersecciones, para encontrar con precisión esos valores.

www.FreeLibros.com

b) La cuenta se agota cuando $Q(t) = 0$. Si se resuelve la ecuación

$$Q(t) = 0 = 60\,000 - 40\,000e^{0.05t}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} 40\,000e^{0.05t} &= 60\,000 && \textit{sume } 40\,000e^{0.05t} \textit{ a ambos lados} \\ e^{0.05t} &= \frac{60\,000}{40\,000} = 1.5 && \textit{divida ambos lados entre } 40\,000 \\ 0.05t &= \ln 1.5 && \textit{aplique logaritmos de ambos lados} \\ t &= \frac{\ln 1.5}{0.05} && \textit{divida ambos lados entre } 0.05 \\ &\approx 8.11 \end{aligned}$$

Por tanto, la cuenta se agota en aproximadamente 8 años.

Modelos de dilución

Es posible usar ecuaciones diferenciales lineales de primer orden para modelar situaciones en las que una cantidad está "diluida". Estos modelos aparecen en numerosos campos de acción como son finanzas, ecología, medicina, química, etcétera. El procedimiento general para modelar una dilución se ilustra en el ejemplo 8.2.4.

EJEMPLO | 8.2.4

Un tanque de 70 galones contiene inicialmente 20 libras de sal disueltas en 50 galones de agua. Suponga que cada minuto entran al tanque 3 galones de agua salada, que contienen 2 libras de sal disuelta por galón, y que la mezcla (que se mantiene uniforme agitándola) sale del tanque a razón de 2 galones por minuto.

a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para hallar la expresión de la cantidad de sal en el tanque después de t minutos.

b) ¿Cuánta sal habrá en el tanque en el instante en que empiece a derramarse?

Solución

a) Sea $S(t)$ la cantidad de sal en el tanque en el momento t. Como cada minuto entran al tanque 3 galones de agua salada, y cada galón contiene 2 libras de sal, entonces cada minuto entran al tanque $(3)(2) = 6$ libras de sal. Para hallar el número de libras de sal que salen del tanque cada minuto, observe que en el momento t hay $S(t)$ libras de sal y $50 + (3 - 2)t = 50 + t$ galones de solución en el tanque (porque hay un aumento neto de $3 - 2 = 1$ galón de solución por minuto).

Por tanto, la concentración de sal en la solución en el momento t es $\dfrac{S(t)}{50 + t}$ libras por galón, y la sal sale del tanque a razón de

$$\left[\frac{S(t)}{50 + t} \text{ libras/galón}\right][2 \text{ galones/minuto}] = \frac{2S(t)}{50 + t} \text{ libras/minuto}$$

Se deduce que la razón de cambio neta $\dfrac{dS}{dt}$ de sal en el tanque está dada por

$$\underbrace{\frac{dS}{dt}}_{\textit{razón de cambio neta}} = \underbrace{6}_{\textit{entra}} - \underbrace{\frac{2S}{50 + t}}_{\textit{sale}}$$

www.FreeLibros.com

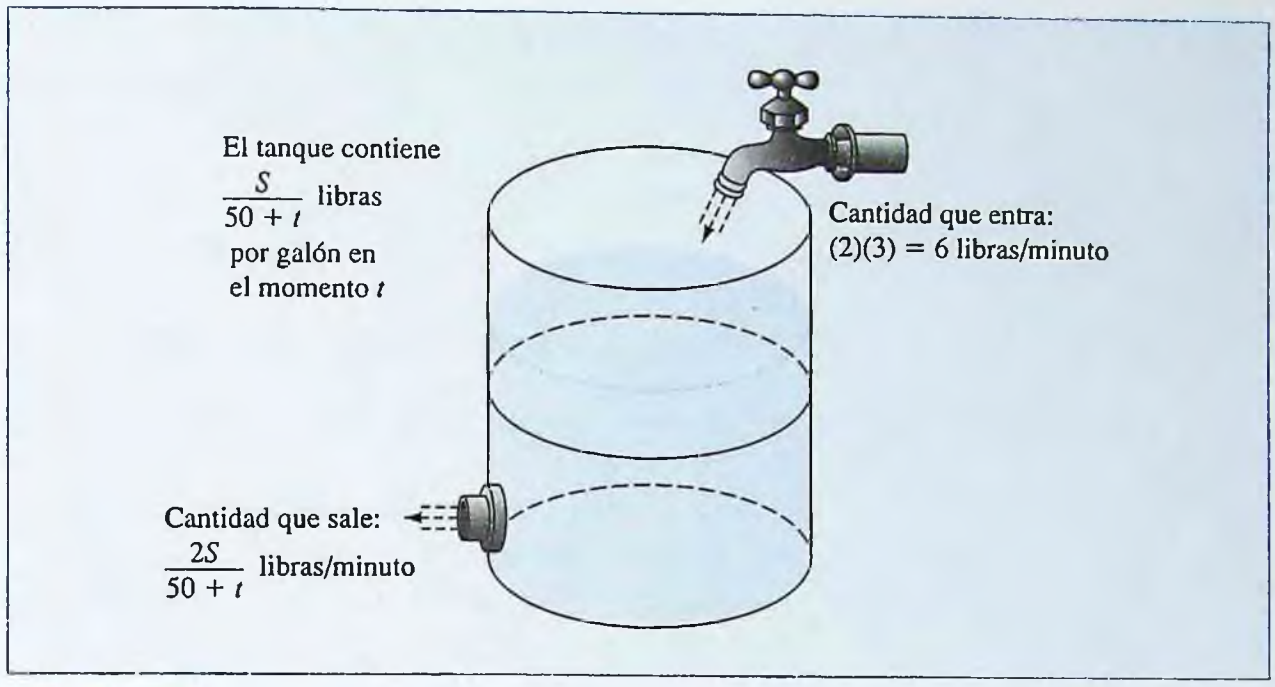


FIGURA 8.6 La razón de cambio neta de sal en la solución es igual a la cantidad que entra menos la cantidad que sale.

(véase la figura 8.6). Esta ecuación se puede escribir como

$$\frac{dS}{dt} + \frac{2S}{50+t} = 6$$

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden con $p(t) = \dfrac{2}{50+t}$ y $q(t) = 6$. El factor integrante es

$$\begin{aligned} I(t) &= e^{\int p(t)dt} = e^{\int 2/(50+t)dt} \\ &= e^{2\ln|50+t|} = e^{\ln|50+t|^2} \\ &= (50+t)^2 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución general es

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{(50+t)^2}\left[\int (6)(50+t)^2 dt + C\right] \\ &= \frac{1}{(50+t)^2}[2(50+t)^3 + C] \\ &= 2(50+t) + \frac{C}{(50+t)^2} \end{aligned}$$

Para hallar C, nótese que inicialmente hay 20 libras de sal en el tanque. En consecuencia,

$$20 = S(0) = 2(50+0) + \frac{C}{(50+0)^2}$$

de modo que $C = -80(50)^2$. Se ahí se deduce que la cantidad de sal en el momento t es

$$S(t) = 2(50+t) - \frac{80(50)^2}{(50+t)^2}$$

b) Después de t minutos, el tanque contiene $50 + t$ galones de solución, y empieza a derramarse cuando la cantidad de solución llegue a su capacidad de 70 galones.

www.FreeLibros.com

Resolviendo la ecuación $50 + t = 70$, se ve que esto ocurre cuando $t = 20$ minutos. Al sustituir $t = 20$ en la fórmula obtenida en el inciso *a*), se llega a que

$$S(20) = 2(50 + 20) - \frac{80(50)^2}{(50 + 20)^2}$$

$$\approx 99.18$$

Entonces, cuando empieza a derramarse, el tanque contiene aproximadamente 99 libras de sal.

Se pueden usar ecuaciones diferenciales lineales de primer orden para modelar varias situaciones en ciencias biológicas. El ejemplo 8.2.5 ilustra la forma en que este modelo se puede usar para ayudar a un médico a tomar una decisión con respecto al medicamento administrado a un paciente.

EJEMPLO | 8.2.5

Se inyecta un medicamento en el torrente sanguíneo de un paciente a una razón constante r (la *razón de inyección*) y es eliminada del torrente sanguíneo a una razón proporcional a la cantidad de medicamento presente en el momento t. Inicialmente (cuando $t = 0$), la sangre del paciente no contiene medicamento.

a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para la cantidad de medicamento, $A(t)$, presente en el torrente sanguíneo del paciente en el momento t.

b) Demuestre que $A(t)$ tiende a un valor constante cuando $t \to \infty$. Éste es el nivel de medicación en *estado estable*.

c) Suponga que médico fija la razón de inyección a un paciente particular en 2 mg por hora, y que, después de 1 hora, se toma una muestra que indica que hay 1.69 mg del medicamento en la sangre del paciente. ¿Cuánto medicamento estará presente después de 6 horas? ¿Cuál es el nivel de medicación en estado estable?

d) Suponga que el médico del inciso *c*) desea que el nivel de medicación en el torrente sanguíneo del paciente en estado estable sea 8 mg. ¿Cómo debe ajustarse la razón de infusión para lograr este objetivo?

Solución

a) La cantidad de medicamento $A(t)$ en el torrente sanguíneo en el momento t cambia a una razón de

$$\frac{dA}{dt} = \underset{\text{inyección}}{r} - \underset{\text{eliminación}}{kA}$$

donde k es una constante (el *coeficiente de eliminación*). Rescribiendo esta ecuación como

$$\frac{dA}{dt} + kA = r$$

se ve que es una ecuación diferencial lineal de primer orden, con $p(t) = k$ y $q(t) = r$. El factor integrante es

$$I(t) = e^{\int k\,dt} = e^{kt}$$

www.FreeLibros.com

de modo que la solución general es

$$A(t) = \frac{1}{e^{kt}}\left[\int re^{kt}dt + C\right]$$
$$= e^{-kt}\left[\frac{re^{kt}}{k} + C\right]$$
$$= \frac{r}{k} + Ce^{-kt}$$

Como no hay medicamento en la sangre inicialmente, se tiene $A(0) = 0$ y

$$A(0) = 0 = \frac{r}{k} + Ce^{0}$$

Por tanto, $C = \frac{-r}{k}$, y

$$A(t) = \frac{r}{k} - \frac{r}{k}e^{-kt} = \frac{r}{k}[1 - e^{-kt}]$$

b) Como

$$\lim_{t\to\infty} A(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{r}{k}[1 - e^{-kt}] = \frac{r}{k}(1 - 0) = \frac{r}{k}$$

el nivel de medicación en estado estable es $\frac{r}{k}$.

c) En este caso particular, se tiene $r = 2$ y $A(1) = 1.69$. Sustituyendo esta información en la fórmula de $A(t)$ obtenida en el inciso *a*), se tiene

$$A(1) = 1.69 = \frac{2}{k}[1 - e^{-k(1)}]$$

Usando una calculadora graficadora, se resuelve esta ecuación, obteniendo $k = 0.35$. En consecuencia, después de 6 horas, la cantidad de medicamento en el torrente sanguíneo del paciente es

$$A(6) = \frac{2}{0.35}[1 - e^{-0.35(6)}] \approx 5.01 \text{ mg}$$

El nivel de medicación en estado estable es

$$\frac{r}{k} = \frac{2}{0.35} \approx 5.71 \text{ mg}$$

d) Se supone que el coeficiente de eliminación k depende del metabolismo del paciente y no de la razón de inyección, r. (¿Le parece a usted razonable esta suposición?) Por lo tanto, con k fija, igual a 0.35, un nivel en estado estable de 8 mg se logra ajustando la razón de inyección, r, para que satisfaga

$$\frac{r}{0.35} = 8$$

de modo que

$$r = 2.8 \text{ mg/h}$$

www.FreeLibros.com

PROBLEMAS | 8.2

En los problemas del 1 al 14 encuentre la solución general de la ecuación diferencial lineal de primer orden.

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = x$

2. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \sqrt{x} + 1$

3. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = \sqrt{x}\, e^{x}$

4. $x^4 \frac{dy}{dx} + 2x^3 y = 5$

5. $x^2 \frac{dy}{dx} + xy = 2$

6. $x \frac{dy}{dx} + 2y = xe^{x^3}$

7. $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x+1}{x}\right)y = e^{-2x}$

8. $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{x^2+1} = x$

9. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+xy}{1+x}$

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{2x+1}$

11. $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{1+t} = t$

12. $\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t} = te^{-t}$

13. $\frac{dy}{dt} + \frac{ty}{t+1} = t + 1$

14. $\frac{dx}{dt} + \frac{x}{1+2t} = 5$

En los problemas del 15 al 20 encuentre la solución particular de la ecuación diferencial, que satisfaga la condición dada.

15. $x\frac{dy}{dx} - 2y = 2x^3$; $y = 2$ cuando $x = 1$

16. $\frac{dy}{dx} + y = x^2$; $y = 2$ cuando $x = 0$

17. $\frac{dy}{dx} + xy = x + e^{-x^2/2}$; $y = -1$ cuando $x = 0$

18. $\frac{dy}{dx} + y = x$; $y = 4$ cuando $x = 0$

19. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}$; $y = -2$ cuando $x = 1$

20. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \ln x$; $y = 3$ cuando $x = 1$

Las ecuaciones diferenciales pueden ser resueltas de varias formas diferentes. En los problemas del 21 al 24 resuelva la ecuación diferencial dada considerándola como a) de variables separables, y b) lineal de primer orden.

21. $\frac{dy}{dx} + 3y = 5$

22. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$

23. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x+1} = \frac{2}{x+1}$

24. $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy.$ (*Sugerencia:* factorice)

25. GEOMETRÍA Encuentre una función $f(x)$ cuya gráfica pase por el punto $(-1, 2)$ y tenga la propiedad de que en cada punto (x, y) sobre la gráfica, la pendiente de la recta tangente sea igual a la suma $x + y$ de sus coordenadas.

26. GEOMETRÍA Encuentre la función $f(x)$ cuya gráfica pase por el punto $(1, 1)$ y tenga la propiedad de que en cada punto (x, y) sobre la gráfica, la pendiente de la recta tangente sea igual a $x^2 + 2y$.

27. BIENES RAÍCES El precio de cierta casa es actualmente de \$200 000. Suponga que se estima que después de t meses, el precio $p(t)$ aumentará a razón de $0.01p(t) + 1\,000t$ dólares por mes. ¿Cuánto costará la casa dentro de 9 meses?

28. PRECIOS AL MENUDEO El precio de cierta mercancía es actualmente de \$3 por unidad. Se estima que dentro de t semanas, el precio $p(t)$ estará aumentando a razón de $0.02\, p(t) + e^{0.1t}$ centavos por semana. ¿Cuánto costará la mercancía en 10 semanas?

29. PLAN DE INVERSIÓN Un inversor hace depósitos regulares que totalizan D dólares cada año en

www.FreeLibros.com

una cuenta que gana interés a una tasa r anual, capitalizada continuamente.

a) Explique por qué la cuenta crece a una razón de

$$\frac{dV}{dt} = rV + D$$

donde $V(t)$ es el valor de la cuenta t años después del depósito inicial. Resuelva esta ecuación diferencial para expresar $V(t)$ en términos de r y D.

b) Amanda desea retirarse en 20 años. Para acumular un fondo de retiro, ella hace depósitos regulares anuales de \$8 000. Si la tasa prevaleciente de interés permanece constante a 4% capitalizado continuamente, ¿cuánto tendrá ella en su cuenta al final del periodo de 20 años?

c) Ray estima que necesitará \$800 000 para retirarse. Si la tasa prevaleciente de interés es 5% capitalizado continuamente, ¿de qué monto deben ser sus depósitos regulares anuales para que pueda retirarse en 30 años?

30. AHORROS Chris tiene un salario inicial de \$47 000 por año y piensa que, con aumentos de salario y bonos, su compensación aumentará a una tasa anual promedio de 9%. Ella regularmente deposita 5% de su salario en una cuenta de ahorros que gana interés a una tasa anual de 8%, capitalizado continuamente. ¿Cuánto habrá en su cuenta en 20 años? (Véase el problema 29.)

31. AHORROS Chuck está ahorrando para hacer un viaje de \$8 000 a Europa dentro de 4 años. Sus padres desean ayudar haciendo un depósito total de A dólares en una cuenta de ahorros que gana 4% de interés anual, capitalizado continuamente. Chuck planea sumar a esta cantidad haciendo depósitos frecuentes en la cuenta que totalicen \$800 por año. ¿Cuál debe ser A para que él cumpla su objetivo? (Véase el problema 29.)

32. DILUCIÓN Un tanque contiene 10 lb de sal disuelta en 30 galones de agua. Suponga que cada minuto entran al tanque 2 galones de agua salada que contienen 1 lb de sal disuelta por galón , y que la mezcla, que se mantiene uniforme por agitación, sale a una razón de 1 gal/min.

a) Plantee y resuelva un problema de valor inicial para la cantidad de sal $S(t)$ en el tanque en el momento t.

b) Suponga que el tanque tiene una capacidad de 50 galones. ¿Cuánta sal hay en el tanque cuando está lleno?

33. DILUCIÓN Un tanque contiene 5 libras de sal disuelta en 40 galones de agua. Entra agua pura en el tanque a razón de 1 gal/min, y la mezcla, que se mantiene uniforme por agitación, sale a razón de 3 gal/min.

a) Plantee y resuelva un problema de valor inicial para la cantidad de sal $S(t)$ en el tanque en el momento t.

b) ¿Cuánto tarda la cantidad de sal de la solución en llegar a 4 libras?

c) ¿Cuánta sal hay en solución cuando el tanque se vacía?

34. PURIFICACIÓN DE AIRE Un cuarto de 2 400 pies cúbicos contiene un filtro de aire de carbón activado a través del cual pasa aire a razón de 400 pies cúbicos por minuto. El ozono del aire es absorbido por el carbón cuando el aire circula por el filtro, y el aire purificado se hace recircular en el cuarto. Suponiendo que el ozono restante está distribuido uniformemente en el cuarto en todo momento, determine cuánto tarda el filtro en remover 50% del ozono del cuarto.

35. RELATO DE ESPÍAS Cuando el espía emerge de la sala del asadero de Scélérat (problema 32, sección 7.5), es capturado por los peligrosos amigos del desalmado francés. Después es amarrado a una silla y metido en un armario en el que lentamente se hace entrar gas venenoso. El armario tiene un volumen de 128 ft^3. El gas venenoso entra a razón de 0.2 ft^3/min, y el aire mezclado (gas y aire freso) escapa a la misma razón por una grieta bajo la puerta. El gas se hace mortal cuando el aire dentro del armario contiene 1% de gas venenoso. Si el espía tarda 3 minutos en desamarrarse y otros 45 segundos para abrir la puerta de una patada, ¿sobrevivirá?

36. AHORROS Ella deposita \$10 000 en una cuenta en la que se acumula interés a una tasa de 4% anual, capitalizado continuamente. Ella planea retirar \$2 000 por año.

a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para determinar el saldo $Q(t)$ de la cuenta t años después del depósito inicial.

b) ¿Cuánto tardará la cuenta en agotarse?

37. AHORROS Alonzo planea hacer un depósito inicial en una cuenta que gana 5% de interés anual, capitalizado continuamente, y luego hacer retiros de \$5 000 por año. ¿Cuánto debe depositar si su cuenta tarda 10 años en agotarse?

38. AHORROS Janine tiene un salario inicial de \$40 000 y piensa que con aumentos de salario y bonos, su compensación aumentará a una razón anual promedio de 5%. Ella regularmente deposita 10% de su salario en una cuenta de ahorros que

www.FreeLibros.com

gana interés a una tasa de 4% anual capitalizado continuamente, y retira $3 000 por año para gastos.

a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para la cantidad de dinero $A(t)$ en la cuenta después de t años.

b) ¿Cuánto tendrá Janine en su cuenta cuando se retire dentro de 40 años?

39. MEDICACIÓN Un medicamento inyectado en el torrente sanguíneo de un paciente, a una razón constante de 3 mg por hora, es eliminado de la sangre a una razón proporcional a la cantidad de medicamento presente en cada momento. Al principio (cuando $t = 0$), la sangre del paciente no contiene medicamento.

a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para la cantidad de medicamento $A(t)$ presente en el torrente sanguíneo del paciente en el momento t.

b) Suponga que se toma una muestra que indica que hay 2.3 mg del medicamento en la sangre del paciente después de 1 hora. ¿Cuánto medicamento estará presente después de 8 horas? ¿Cuánto medicamento estará presente cuando $t \to \infty$ (el nivel en estado estable)?

c) Suponga que el médico del paciente desea que el nivel de medicamento en el torrente sanguíneo del paciente en estado estable sea de 9 mg. ¿Cómo debe ajustarse la razón de inyección para lograr este objetivo?

40. MEDICACIÓN Un medicamento inyectado en el torrente sanguíneo de un paciente, a una razón constante de 2.2 mg por hora, es eliminado de la sangre a una razón proporcional a la cantidad de medicamento presente en cada momento. Al principio (cuando $t = 0$), la sangre del paciente contiene 0.5 mg del medicamento.

a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para la cantidad de medicamento $A(t)$ presente en el torrente sanguíneo del paciente en el momento t.

b) Suponga que se toma una muestra que indica que hay 2 mg del medicamento en la sangre del paciente después de 1 hora. ¿Cuánto medicamento estará presente después de 6 horas? ¿Cuánto medicamento está presente cuando $t \to \infty$ (el nivel en estado estable)?

c) Suponga que el médico del paciente desea que el nivel del medicamento en el torrente sanguíneo del paciente en estado estable sea de 8 mg. ¿Cómo debe ajustarse la razón de infusión para lograr este objetivo?

SECCIÓN 8.3 | Aplicaciones adicionales de ecuaciones diferenciales

En las primeras dos secciones de este capítulo, se han visto aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a las finanzas, la enseñanza, el crecimiento poblacional, la propagación de una epidemia y la cantidad de medicamento en el torrente sanguíneo de un paciente. En todos estos modelos, una razón de cambio específica es interpretada como una derivada, que luego está relacionada con otras características del modelo mediante una ecuación diferencial. En esta sección, se examinan varios modelos adicionales que contienen ecuaciones diferenciales de variables separables y lineales de primer orden. Se comienza con un modelo aplicado a la salud pública.

Un modelo de dilución en salud pública

EJEMPLO | 8.3.1

Los residentes de cierta comunidad han votado para descontinuar la fluorización de su reserva de agua. El depósito local contiene actualmente 200 millones de galones de agua fluorada que contiene 1 600 libras de flúor. El agua fluorada sale del depósito a razón de 4 millones de galones por día y es sustituida a esa misma razón por agua sin fluorar. En todo momento el flúor restante se distribuye uniformemente en el depósito. Exprese la cantidad de flúor en el depósito como función del tiempo.

Solución

Sea $Q(t)$ la cantidad de flúor (en libras) en el depósito t días después de cesar la fluorización. Para modelar el flujo de flúor, comience con la relación de razón

$$\begin{bmatrix}\text{razón de cambio neta del}\\ \text{flúor con respecto al tiempo}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{cantidad de flúor que}\\ \text{entra diariamente}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\text{cantidad de flúor}\\ \text{que sale diariamente}\end{bmatrix}$$

www.FreeLibros.com

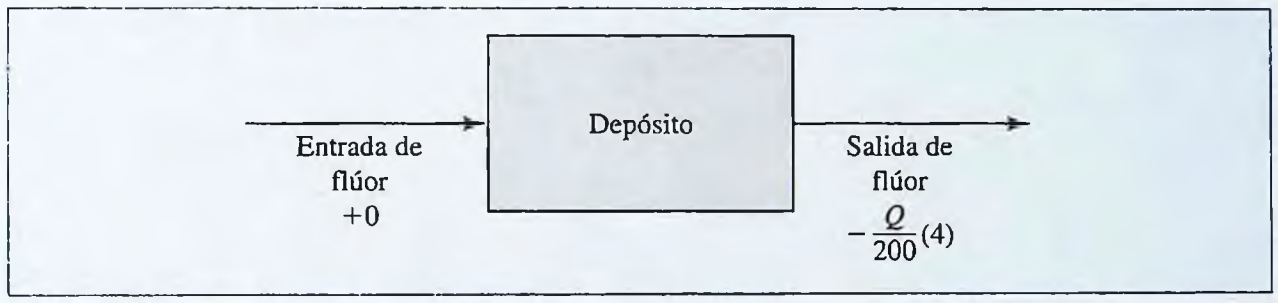
La razón neta de cambio del flúor con respecto al tiempo es $\frac{dQ}{dt}$, y como la fluorización ha cesado, la cantidad de flúor que entra es 0. Como el volumen de agua fluorada del depósito permanece fijo en 200 millones de galones, y el flúor está siempre uniformemente distribuido en el depósito, la concentración de flúor en el depósito en el momento t está dada por la relación

$$\frac{Q(t) \text{ libras de flúor}}{200 \text{ millones de galones de agua fluorada}}$$

Por tanto, como 4 millones de galones de agua fluorada salen cada día, la cantidad de flúor que sale diariamente está dada por el producto

$$\left[\begin{array}{c}\text{cantidad de flúor que} \\ \text{sale diariamente}\end{array}\right] = \left(\frac{Q(t) \text{ lb}}{200 \text{ millones de gal.}}\right)\left(\frac{4 \text{ millones de gal.}}{\text{día}}\right) = \frac{4Q}{200} \text{lb/día}$$

En este diagrama se resumen las relaciones de gasto:



Como la razón de cambio de la cantidad de flúor en el depósito es igual a la cantidad que entra menos la cantidad que sale, se deduce que

$$\frac{dQ}{dt} = 0 - \frac{4Q}{200} = -\frac{Q}{50}$$

Cantidad que entra *Cantidad que sale*

Si se resuelve esta ecuación diferencial por separación de variables, resulta

$$\int \frac{1}{Q} dQ = -\int \frac{1}{50} dt$$

$$\ln Q = -\frac{t}{50} + C$$

$$Q = e^{C - t/50} = e^C e^{-t/50}$$

$$= Q_0 e^{-t/50} \qquad \text{donde } Q_0 = e^C$$

Inicialmente, el depósito contenía 1 600 libras de flúor, de modo que

$$1\,600 = Q(0) = Q_0 e^0 = Q_0$$

por tanto

$$Q(t) = 1\,600 e^{-t/50}$$

y la cantidad de flúor disminuye exponencialmente, como se ilustra en la figura 8.7.

www.FreeLibros.com

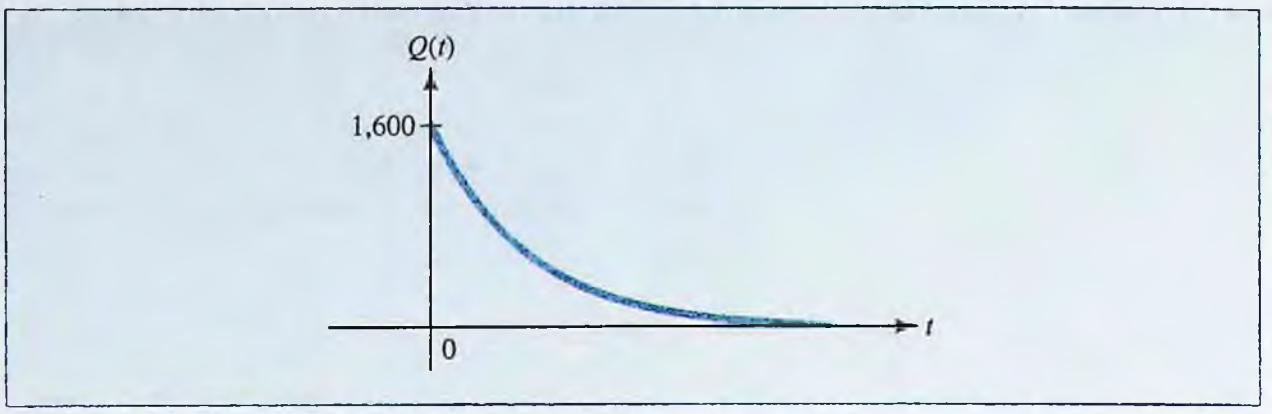


FIGURA 8.7 Cantidad de flúor $Q(t) = 1\,600e^{-t/50}$.

Modelo de ajuste de precios

Sea $S(p)$ el número de unidades de una mercancía particular suministrada al mercado, a un precio de p dólares por unidad, y sea $D(p)$ el número correspondiente de unidades demandadas en el mercado al mismo precio. En circunstancias estáticas, hay equilibrio de mercado al precio en que la demanda es igual a la oferta (recuerde el análisis de la sección 1.4.) No obstante, ciertos modelos económicos consideran una clase más dinámica de economía en la que se supone que el precio, la oferta y la demanda varían con el tiempo. Uno de éstos, el *modelo de ajuste de precio de Evans*, supone que la razón de cambio del precio con respecto al tiempo t es proporcional a la escasez $D - S$, de modo que

$$\frac{dp}{dt} = k(D - S)$$

donde k es una constante positiva. A continuación se muestra un ejemplo donde aparece este modelo.

EJEMPLO | 8.3.2

Una mercancía se introduce a un precio inicial de \$5 por unidad, y t meses después el precio es $p(t)$ dólares por unidad. Un estudio indica que, en el momento t, la demanda de la mercancía será $D(t) = 3 + 10e^{-0.01t}$ miles de unidades y que serán suministradas $S(t) = 2 + p$ miles de unidades. Suponga que en cada momento t, el precio está cambiando a una razón igual al 2% de la escasez $D(t) - S(t)$.

a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para el precio unitario $p(t)$.

b) ¿Cuál es el precio unitario de la mercancía 6 meses después?

c) ¿En qué momento es máximo el precio unitario? ¿Cuál es el precio unitario máximo y la correspondiente oferta y demanda?

d) ¿Qué ocurre al precio "a largo plazo" (cuando $t \to \infty$)?

Solución

a) De acuerdo con la información dada, el precio unitario $p(t)$ satisface la ecuación siguiente

$$\frac{dp}{dt} = 0.02[D(t) - S(t)] = 0.02[(3 + 10e^{-0.01t}) - (2 + p)]$$
$$= 0.02 + 0.2e^{-0.01t} - 0.02p$$

o, lo que es equivalente,

$$\frac{dp}{dt} + 0.02p = 0.02 + 0.2e^{-0.01t}$$

¡EXPLORE!

Considere el ejemplo 8.3.2. Introduzca $p(t) = 1 + 20e^{(-0.01t)} - 16e^{(-0.02t)}$ en Y1 del editor de ecuaciones de su calculadora graficadora. Use la pantalla [0, 200]10 por [0, 12]1 y determine gráficamente el valor máximo de $p(t)$.

www.FreeLibros.com

que es una ecuación diferencial lineal de primer orden con $P(t) = 0.02$ y $Q(t) = 0.02 + 0.2e^{-0.01t}$. El factor integrante es

$$I(t) = e^{\int 0.02\,dt} = e^{0.02t}$$

de modo que la solución general es

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{e^{0.02t}}\left[\int e^{0.02t}(0.02 + 0.2e^{-0.01t})\,dt + C\right] \\ &= e^{-0.02t}\left[\frac{0.02e^{0.02t}}{0.02} + \frac{0.2e^{0.01t}}{0.01} + C\right] \\ &= 1 + 20e^{-0.01t} + Ce^{-0.02t} \end{aligned}$$

Como el precio inicial es $p(0) = 5$, se tiene

$$p(0) = 5 = 1 + 20e^0 + Ce^0 = 1 + 20 + C$$

de modo que $C = 5 - 21 = -16$ y

$$p(t) = 1 + 20e^{-0.01t} - 16e^{-0.02t}$$

b) Después de 6 meses ($t = 6$), el precio es

$$p(6) = 1 + 20e^{-0.01(6)} - 16e^{-0.02(6)} \approx 5.6446$$

que es aproximadamente \$5.64 por unidad.

c) Para maximizar el precio, primero se calcula la derivada

$$\begin{aligned} p'(t) &= 20(-0.01e^{-0.01t}) - 16(-0.02e^{-0.02t}) \\ &= -0.2e^{-0.01t} + 0.32e^{-0.02t} \end{aligned}$$

y luego se calcula que $p'(t) = 0$ cuando

$$\begin{aligned} p'(t) = -0.2e^{-0.01t} + 0.32e^{-0.02t} &= 0 \\ 0.32e^{-0.02t} &= 0.2e^{-0.01t} && \textit{sume } 0.2e^{-0.01t} \textit{ a ambos miembros} \\ \frac{e^{-0.01t}}{e^{-0.02t}} &= \frac{0.32}{0.2} \\ e^{-0.01t-(-0.02t)} &= 1.6 \\ e^{0.01t} &= 1.6 && \textit{tome logaritmos en ambos miembros} \\ 0.01t &= \ln 1.6 \\ t &\approx 47 \end{aligned}$$

Este número crítico corresponde a un máximo (verifique que $p''(47) < 0$), de modo que el precio máximo se presenta después de casi 47 meses. Dado que

$$p(47) = 1 + 20e^{-0.01(47)} - 16e^{-0.02(47)} \approx 7.25$$

el precio unitario máximo es aproximadamente \$7.25. Como

$$D(47) = 3 + 10e^{-0.01(47)} \approx 9.25$$

y

$$S(47) = 2 + p(47) = 2 + 7.25 \approx 9.25$$

se deduce que aproximadamente 9 250 unidades serán demandadas y ofertadas al precio máximo de \$7.25 por unidad.

www.FreeLibros.com

d) Como

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty}(1 + 20e^{-0.01t} - 16e^{-0.02t})$$
$$= 1 + 20(0) - 16(0) = 1$$

"a largo plazo" el precio tiende a \$1 por unidad. La gráfica de la función de precio unitario, $p(t)$, se muestra en la figura 8.8.

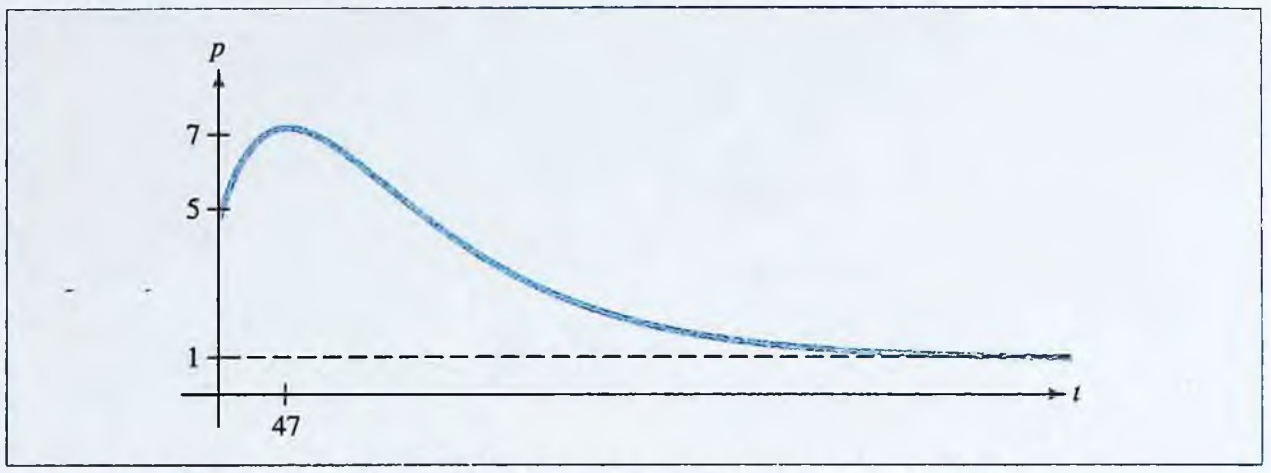


FIGURA 8.8 Gráfica de la función de precio unitario del ejemplo 8.3.2.

Ley de enfriamiento de Newton: Un modelo forense

La ley de enfriamiento de Newton dice que la razón de cambio de la temperatura $T(t)$ de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre $T(t)$ y la temperatura T_m del medio circundante; esto es

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$$

La ley de enfriamiento se puede usar para modelar varias situaciones donde hay cambio de temperatura. Por ejemplo, cuando un cadáver es descubierto con relativa rapidez (dentro de los 2 días posteriores a la muerte) y la temperatura del aire circundante es esencialmente constante, con frecuencia la hora del fallecimiento se puede determinar usando la ley de enfriamiento, como se ilustra en el ejemplo 8.3.3.

EJEMPLO | 8.3.3

Se descubre un cuerpo al mediodía de un viernes en un cuarto donde la temperatura del aire es de 70°F. La temperatura del cuerpo en el momento de su descubrimiento es de 76°F y una hora después es de 75.3°. Use esta información para determinar la hora de su fallecimiento.

Solución

Como la temperatura del medio que rodea al cuerpo es $T_m = 70$, la ley de enfriamiento de Newton dice que

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70)$$

www.FreeLibros.com

donde t es el número de horas transcurridas desde el momento del fallecimiento. Separando las variables e integrando, se tiene que

$$\int \frac{dT}{T-70} = \int k\,dt$$

$$\ln|T-70| = kt + C_1$$

Aplicando exponenciales en ambos miembros, se obtiene

$$T - 70 = e^{kt+C_1} = e^{kt}\,e^{C_1}$$

de modo que

$$T = 70 + Ce^{kt} \quad \textit{donde } C = e^{C_1}$$

Suponga que el cuerpo tenía la temperatura normal de 98.6°F al momento de su fallecimiento. Entonces

$$98.6 = 70 + Ce^{k(0)} = 70 + C$$

$$C = 98.6 - 70 = 28.6$$

y

$$T = 70 + 28.6\,e^{kt}$$

Sea t_0 el número de horas desde el momento del fallecimiento hasta la hora en que se descubrió el cadaver. Entonces la información dada indica que $T(t_0) = 76$ y $T(t_0 + 1) = 75.3$. Puesto que

$$T(t_0) = 76 = 70 + 28.6\,e^{kt_0}$$

se tiene

$$28.6\,e^{kt_0} = 76 - 70 = 6$$

También se tiene

$$T(t_0 + 1) = 75.3 = 70 + 28.6\,e^{k(t_0+1)}$$
$$= 70 + 28.6\,e^{kt_0}\,e^{k}$$

de modo que

$$(28.6\,e^{kt_0})e^{k} = 5.3$$

$$(6)e^{k} = 5.3 \qquad \textit{porque } 28.6\,e^{kt_0} = 6$$

$$e^{k} = \frac{5.3}{6} = 0.8833$$

$$k = \ln(0.8833) \approx -0.1241 \qquad \textit{aplique logaritmos a ambos miembros}$$

Como $28.6\,e^{kt_0} = 6$, se deduce que

$$e^{kt_0} = \frac{6}{28.6} \approx 0.2098$$

$$e^{-0.1241t_0} \approx 0.2098 \qquad \textit{porque } k \approx -0.1241$$

$$-0.1241t_0 \approx \ln 0.2098 \approx -1.5616$$

$$t_0 \approx \frac{-1.5616}{-0.1241} \approx 12.58 \qquad \textit{aplique logaritmos a ambos miembros}$$

www.FreeLibros.com

Por tanto, hasta momento en que fue descubierto al mediodía del viernes, el cuerpo había estado muerto durante aproximadamente 12.58 horas (12 horas y 35 minutos). Esto pone la hora del fallecimiento a las 11:25 p.m. del jueves.

Trayectorias ortogonales: Quimiotaxia

Una curva que corta en ángulo recto a todas las curvas de una familia de curvas dada recibe el nombre de **trayectoria ortogonal** de esa familia (vea la figura 8.9). Las trayectorias ortogonales aparecen en diversas aplicaciones. En aerodinámica, por

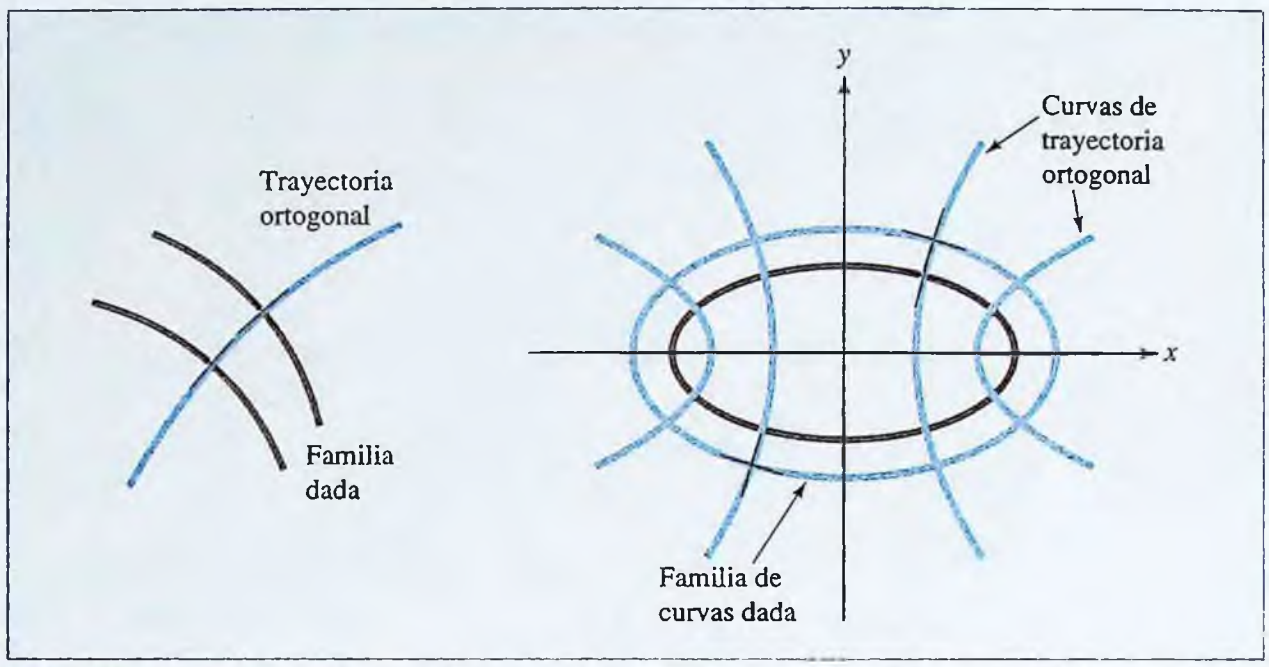


FIGURA 8.9 Trayectorias ortogonales de una familia de curvas.

ejemplo, las trayectorias ortogonales de las líneas aerodinámicas (curvas en la dirección de una corriente de aire) son líneas *equipotenciales* y, en termodinámica, las trayectorias ortogonales de las líneas de flujo térmico son líneas *isotermas* (curvas de temperatura constante).

El procedimiento general para hallar las trayectorias ortogonales de una familia de curvas dada consiste en resolver una ecuación diferencial. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 8.3.4, donde se aborda un problema aplicado de biología.

EJEMPLO | 8.3.4

En biología, un organismo que se mueve sobre una superficie plana en una cama nutriente idealmente sigue una trayectoria a lo largo de la cual aumenta el nivel de concentración de nutrientes. El organismo recibe indicaciones para su avance al cruzar continuamente curvas de concentración constante de nutrientes; esto es, curvas a lo largo de las cuales la concentración permanece igual. Este tipo de movimiento, llamado *quimiotaxia,* se realiza en forma más eficiente siguiendo una trayectoria que es ortogonal a las curvas de concentración constante de nutrientes. En otras palabras, en su búsqueda de niveles mayores y mayores de nutrientes, el organismo avanzará a lo largo de una trayectoria ortogonal a la familia de curvas de concentración constante de nutrientes.

Suponga que una cama particular de nutrientes está distribuida en el plano xy, en forma tal que la concentración de nutrientes es siempre la misma a lo largo de cualquier curva de la forma $x^2 + 2y^2 = C$. Si un organismo quimiotáctico se introduce a la cama de nutrientes en el punto (1, 2), ¿qué trayectoria sigue?

www.FreeLibros.com

Solución

Es necesario hallar una trayectoria ortogonal a la familia de curvas $x^2 + 2y^2 = C$, que pase por el punto (1, 2). Vamos a usar las letras mayúsculas X y Y al referirnos a las curvas de trayectoria ortogonal, para distinguirlas de las curvas de la familia dada $x^2 + 2y^2 = C$.

Al derivar implícitamente con respecto a x en la ecuación $x^2 + 2y^2 = C$, se tiene que

$$2x + 2(2y)\frac{dy}{dx} = 0$$

de modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{4y} = \frac{-x}{2y}$$

REPASO

Justo-a-tiempo

Cuando dos curvas se cruzan formando un ángulo recto en un punto donde las respectivas rectas tangentes tienen pendientes m_1 y m_2, se cumple que

$$m_2 = \frac{-1}{m_1}.$$

Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación diferencial de la familia* $x^2 + 2y^2 = C$, lo que indica que en cada punto (x, y) sobre cualquier curva de la forma $x^2 + 2y^2 = C$, la pendiente es $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{2y}$. Como una curva de trayectoria ortogonal corta a esta curva formando un ángulo recto, la pendiente de la trayectoria ortogonal debe satisfacer

$$\frac{dY}{dX} = \frac{-1}{dy/dx} = \frac{-1}{-x/2y} = \frac{2y}{x}$$
$$= \frac{2Y}{X}$$

porque $x = X$ y $y = Y$ en el punto de intersección. Si se separan las variables de esta ecuación diferencial y se integra, se obtiene

$$\int \frac{dY}{Y} = \int \frac{2\,dX}{X}$$
$$\ln Y = 2 \ln X + K_1 = \ln X^2 + K_1$$

para cierta constante K_1. Aplicando exponenciales en cada miembro de esta ecuación, se llega a que

$$Y = KX^2 \quad \text{donde } K = e^{K_1}$$

Ésta es la fórmula para la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas dada $x^2 + 2y^2 = C$. Para hallar el miembro particular de la familia de trayectoria ortogonal que pasa por el punto (1, 2), donde el organismo empieza su búsqueda de alimento, se sustituye $X = 1$ y $Y = 2$ en la fórmula $Y = KX^2$ y se obtiene que

$$2 = K(1)^2$$

de modo que

$$K = 2$$

Por tanto, el organismo se desplaza a lo largo de la curva de trayectoria ortogonal $Y = 2X^2$. En la figura 8.10 se ilustran miembros de la familia de curvas dada (elipses), junto con la curva de trayectoria ortogonal $Y = 2X^2$ (una parábola).

www.FreeLibros.com

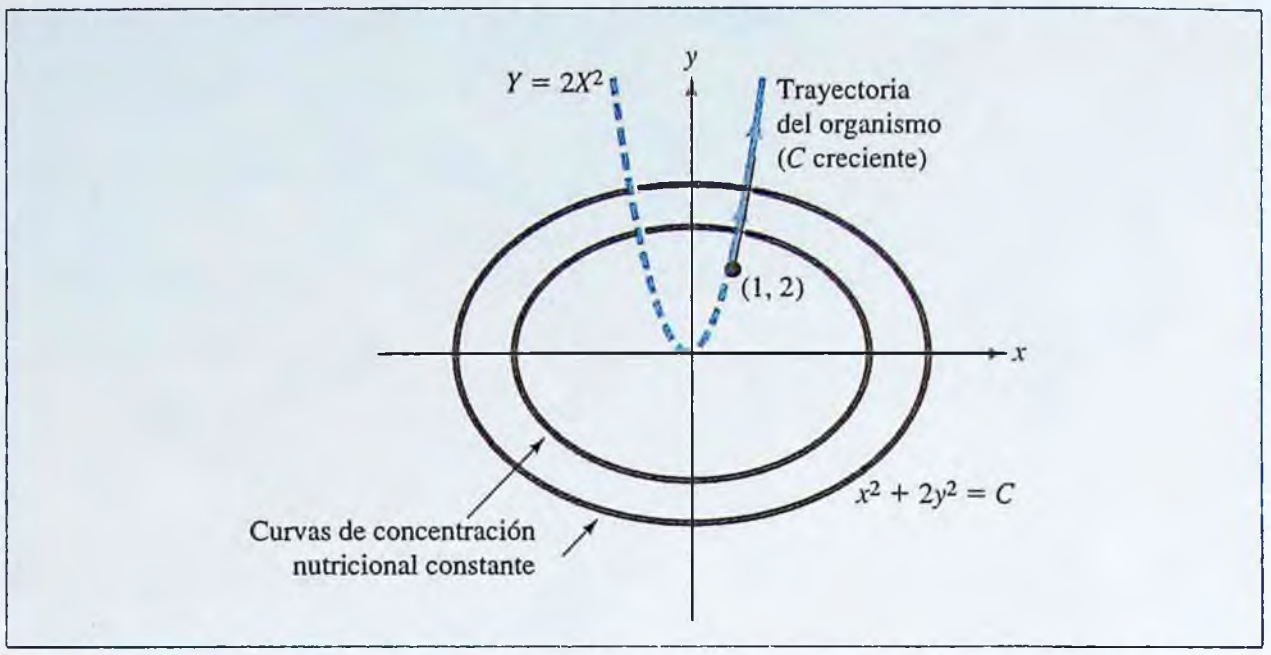


FIGURA 8.10 Movimiento de un organismo en una cama de nutrientes.

Modelo financiero: Ecuaciones diferenciales acopladas

En ciertas aplicaciones aparecen variables cuyas razones de cambio están relacionadas por un sistema de ecuaciones diferenciales. En el ejemplo 8.3.5, se examina un modelo en el que el flujo de dinero entre dos componentes de un portafolio financiero está determinado por sistema de este tipo.

EJEMPLO | 8.3.5

Jessica tiene actualmente \$15 000 invertidos en un fondo de mercado de dinero que gana 3% anual, capitalizado continuamente. Las condiciones del mercado están mejorando y ella decide transferir continuamente 20% de su cuenta a un fondo accionario que gana 8% anual. ¿Cuánto habrá en cada cuenta en 4 años a partir de ahora?

Solución

Sea $M(t)$ el valor de la cuenta del mercado de dinero después de t años, y sea $S(t)$ el valor correspondiente de la cuenta de acciones. De acuerdo con la información dada, la cuenta del mercado de dinero cambia a una razón de

$$\frac{dM}{dt} = \underset{\substack{\text{tasa porcentual}\\ \text{de crecimiento}}}{0.03M} - \underset{\substack{\text{tasa de}\\ \text{transferencia a } S}}{0.20M} = -0.17M$$

mientras que la razón de cambio de la cuenta de acciones es

$$\frac{dS}{dt} = \underset{\substack{\text{tasa porcentual}\\ \text{de crecimiento}}}{0.08S} + \underset{\substack{\text{tasa de}\\ \text{transferencia a } M}}{0.20M}$$

La ecuación diferencial $\frac{dM}{dt} = -0.17M$ es una ecuación de crecimiento exponencial. En el ejemplo 8.1.6 de la sección 8.1 se demuestra que esta ecuación tiene la solución

$$M(t) = M_0 e^{-0.17t}$$

www.FreeLibros.com

donde $M_0 = M(0) = 15\,000$ es el valor inicial de la cuenta del mercado de dinero. Sustituyendo $M(t) = 15\,000e^{-0.17t}$ en la ecuación diferencial para $S(t)$, se obtiene

$$\frac{dS}{dt} = 0.08S + 0.20\,[15\,000e^{-0.17t}] = 0.08S + 3\,000e^{-0.17t}$$

o, lo que es equivalente,

$$\frac{dS}{dt} - 0.08S = 3\,000e^{-0.17t}$$

Ésta es una ecuación diferencial lineal de primer orden con $p(t) = -0.08$ y $q(t) = 3\,000e^{-0.17t}$. El factor integrante es

$$I(t) = e^{\int -0.08dt} = e^{-0.08t}$$

y la solución general es

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{e^{-0.08t}}\left[\int e^{-0.08t}(3\,000e^{-0.17t})dt + C\right] \\ &= e^{0.08t}\left[\int 3\,000e^{-0.25t}dt + C\right] \\ &= e^{0.08t}\left[\frac{3\,000e^{-0.25t}}{-0.25} + C\right] \\ &= -12\,000e^{-0.17t} + Ce^{0.08t} \end{aligned}$$

Como la cuenta de acciones no contiene dinero inicialmente, se tiene que $S(0) = 0$ y

$$S(0) = 0 = -12\,000e^0 + Ce^0 = -12\,000 + C$$

de modo que $C = 12{,}000$ y

$$S(t) = 12\,000\,(-e^{-0.17t} + e^{0.08t})$$

Por tanto, cuando $t = 4$, se tiene

$$M(4) = 15\,000e^{-0.17(4)} \approx 7\,599.25$$

y

$$\begin{aligned} S(4) &= 12\,000\,(-e^{-0.17(4)} + e^{0.08(4)}) \\ &\approx 10\,446.13 \end{aligned}$$

Esto es, después de 4 años, la cuenta del mercado de dinero contiene aproximadamente \$7 599, mientras que la cuenta de acciones contiene alrededor de \$10 446.

PROBLEMAS | 8.3

TRAYECTORIAS ORTOGONALES En los problemas del 1 al 4 encuentre una ecuación para las trayectorias ortogonales de la familia de curvas dada. En cada caso, dibuje algunos miembros de la familia dada y de la familia de trayectorias ortogonales.

1. $xy^2 = C$

2. $x^2 + y^2 = C$

3. $y = Cx^2$

4. $y = Ce^{-x}$

www.FreeLibros.com

AJUSTE DE PRECIOS PARA OFERTA/DEMANDA *En los problemas del 5 al 8 las funciones de oferta* S(t) *y demanda* D(t) *de una mercancía están dadas en términos del precio unitario* p(t) *en el momento t. Suponga que el precio cambia a una razón proporcional a la escasez* D(t) − S(t), *con la constante de proporcionalidad k indicada, y precio inicial* p_0. *En cada problema:*

a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para p(t).
b) Encuentre el precio unitario de la mercancía cuando t = 4.
c) Determine lo que ocurre al precio cuando $t \to \infty$.

5. $S(t) = 2 + 3p(t); D(t) = 10 - p(t); k = 0.02; p_0 = 1$
6. $S(t) = 1 + 4p(t); D(t) = 15 - 3p(t); k = 0.015; p_0 = 3$
7. $S(t) = 2 + p(t); D(t) = 3 + 7e^{-t}; k = 0.02; p_0 = 4$
8. $S(t) = 1 + p(t); D(t) = 2 + 8e^{-t/2}; k = 0.03; p_0 = 2$
9. DISOLUCIÓN DE AZÚCAR Cuando se pone azúcar en un recipiente con agua, ésta se disuelve a una razón que es proporcional a la cantidad $Q(t)$ de azúcar no disuelta que queda en el recipiente en ese momento (véase el problema 36, sección 8.1). Si la mitad del azúcar se ha disuelto después de 3 minutos, ¿cuánto tardará en disolverse 3/4 del azúcar?
10. LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON Cuando una bebida fría se saca de un refrigerador, su temperatura es de 40°F. Se pone en el exterior, donde la temperatura del aire es de 70°F y, 20 minutos más tarde, su temperatura es de 50°F.
    a) ¿Cuál será la temperatura 30 minutos después de sacarla del refrigerador?
    b) ¿Cuánto tiempo transcurre para que la temperatura de la bebida sea de 60°F?
11. LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON En un frío día de invierno, una taza de chocolate caliente se saca al exterior, donde la temperatura es −5°C. Pasados 10 minutos, su temperatura es de 70°C y, 10 minutos después de eso, su temperatura es de 50°C. ¿Cuál era la temperatura original de la bebida?
12. LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON Al mediodía, un asado se saca del horno donde su temperatura era de 170°F y se coloca en un cuarto donde tarda 1 hora para enfriarse a 125°F. Si el asado está listo para servirse a las 2:00 p.m. cuando su temperatura llega a 100°F, ¿cuál es la temperatura del aire en el cuarto?
13. FORENSE Un cadáver es descubierto a las 3:00 p.m. de un lunes en un almacén, donde la temperatura del aire es de 50°F. La temperatura del cuerpo en ese momento es de 80°F y 20 minutos más tarde es de 78°F. ¿Cuál fue la hora del fallecimiento?
14. PRESIÓN ATMOSFÉRICA Suponiendo temperatura constante, la presión atmosférica P disminuye respecto a la altitud h sobre el nivel del mar a una razón proporcional a P. Suponga que a nivel del mar la presión es de 30 pulgadas de mercurio, y que, a una altitud de 1 milla, es de 24.6 pulgadas de mercurio.
    a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para expresar P como función de h.
    b) ¿Cuál es la presión en la cima del Monte Everest, a una altitud aproximada de 29 000 pies?
    c) Un humano adulto saludable tendrá problemas cuando la presión atmosférica se reduzca a la mitad de su valor a nivel del mar. ¿A qué altitud ocurre esto?
15. CANTIDAD DE MEDICAMENTO EN UN ÓRGANO Un medicamento con concentración de 0.16 g/cc se introduce en un órgano a razón de 6 cc/s y se dispersa a esa misma razón. Suponga que el órgano tiene un volumen de 200 cc, y que inicialmente no contiene nada del medicamento. Plantee y resuelva una ecuación diferencial para la cantidad de medicamento $A(t)$ en el órgano en el momento t.
16. ABSORCIÓN DE LUZ La intensidad de luz, $I(d)$ a una profundidad d debajo de la superficie de un cuerpo de agua cambia a una razón que es proporcional a I. Si la intensidad a una profundidad de $d = 0.5$ metros es la mitad de la intensidad I_0 en la superficie, ¿a qué profundidad es que la intensidad es 5% de I_0?
17. CONSERVACIÓN DE UN RESTAURANTE Como parte de su decoración, un restaurante de mariscos cuenta con un acuario de 3 000 galones lleno de peces exóticos; para mantenerlos sanos y activos, en el tanque se bombea una solución que contiene $0.2te^{-t/40}$ onzas de un nutriente soluble, y que se hace circular a una razón de 75 galones por minuto.
    a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para hallar la cantidad de nutriente $N(t)$ en la solución en el momento t.
    b) ¿Cuál es la máxima concentración de nutriente en el tanque y cuándo se presenta?
18. DIFUSIÓN POR UNA MEMBRANA Una sustancia química en una solución se difunde, desde un compartimiento con concentración $C_1(t)$, a través de una membrana a un segundo compartimiento donde la concentración es $C_2(t)$. Experimentos realizados sugieren que la razón de cambio de $C_2(t)$ con respecto al tiempo es proporcional a la diferencia de las concentraciones $C_1 - C_2$. Plantee y resuelva una ecuación diferencial para hallar $C_2(t)$ para el caso en que $C_2(0) = 0$, $C_1(t) = 100e^{-t}$, y $k = 1.5$ es la constante de proporcionalidad.

www.FreeLibros.com

EMIGRACIÓN DESDE UNA POBLACIÓN *Suponga que una población* P(t) *crece exponencialmente a una razón natural* r *y que* E(t) *individuos están emigrando desde la población en el momento t de modo que*

$$\frac{dP}{dt} = rP - E$$

Resuelva esta ecuación para determinar la población en el momento t para cada uno de los casos de los problemas 19 y 20.

19. $r = 0.03$, $E(t) = 10t$, y $P(0) = 100\,000$.

20. $r = 0.015$, $E(t) = 200e^{-t}$, y $P(0) = 250\,000$.

21. EMIGRACIÓN A UNA POBLACIÓN Suponga que una población $P(t)$ crece exponencialmente a una razón r y que $I(t)$ individuos están inmigrando a esa población en el momento t. Plantee y resuelva una ecuación diferencial para hallar $P(t)$ en el caso donde t está en años, $r = 0.02$, $I(t) = 100e^{-t}$, y $P(0) = 300\,000$.

22. ADMINISTRACIÓN DE UNA PESQUERÍA Suponga que una población de peces en un criadero crece exponencialmente con una razón de crecimiento natural k, y que se permite cosechar (pescarlos) a una razón constante y continua h.

a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para la población $P(t)$ en el momento t. [En su respuesta aparecerán k, h y la población inicial $P_0 = P(0)$.]

b) Encuentre $P(t)$ para el caso donde t es en años, $k = 0.2$, la población inicial es $P(0) = 2\,000$, y la razón de cosecha es $h = 300$ peces por año.

c) Suponga que en el criadero del inciso *b)* se decide la política de cosechar sólo peces suficientes para que la población permanezca constante en 2 000 individuos. ¿Qué razón de cosecha h garantizará el objetivo?

23. CRECIMIENTO INCONTROLADO Para cierta especie prolífica, la población $P(t)$ crece a una razón proporcional a P^{1+c}, para $c > 0$; esto es,

$$\frac{dP}{dt} = kP^{1+c}$$

a) Resuelva esta ecuación diferencial en términos de k, c y la población inicial $P_0 = P(0)$.

b) Demuestre que hay un tiempo finito t_a tal que $\lim_{t \to t_a} P(t) = \infty$.

c) Suponga $c = 0.02$ para cierta población de roedores. Encuentre $P(t)$ si la población empieza con una pareja y dos meses después se ha duplicado (esto es, $P(0) = 2$ y $P(2) = 4$).

d) ¿Cuánto tarda la población de la parte del inciso *c)* en hacerse esencialmente infinita?

24. CONTAMINACIÓN DE AGUA Un lago contiene 4 mil millones de ft^3 de agua e inicialmente su contenido de contaminantes es 0.19%. Un río cuyas aguas contienen 0.04% de contaminantes entra al lago a razón de 250 millones de ft^3/día y luego sale del lago a esa misma razón. Suponiendo que el agua del lago y los dos ríos está siempre bien mezclada, ¿cuánto tarda el contenido de contaminante del lago en reducirse al 0.1%?

25. CONTAMINACIÓN DE AGUA Dos lagos están comunicados por un río, como se muestra en la siguiente figura. Los lagos contienen agua pura hasta que 2 000 lbs de contaminante se descargan en el lago superior. Suponga que el lago superior contiene 700 000 galones de agua, el lago inferior contiene 400 000 galones, y el río circula a razón de 1 500 galones por hora. Suponga que el contaminante se dispersa con rapidez suficiente para que la mezcla de contaminante y agua sea homogénea en todo momento.

a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para la cantidad de contaminante $P_1(t)$ en el lago superior en el momento t.

b) Si $P_2(t)$ es la cantidad de contaminante en el lago inferior en el momento t, entonces existen constantes a y b, tales que

$$\frac{dP_2}{dt} = aP_1 - bP_2$$

Use la información dada para determinar a y b, y luego resuelvaesta ecuación para $P_2(t)$.

c) ¿Cuál es la cantidad máxima de contaminante contenida en el lago inferior? ¿Cuándo se presenta esta cantidad máxima?

d) ¿Cuánto tarda la concentración combinada de contaminante

$$\frac{P_1(t) + P_2(t)}{1\,100\,000}$$

en reducirse a 1 libra por 1 000 000 de galones?



PROBLEMA 25

www.FreeLibros.com

26. MODELO DE DEUDA DE DOMAR Sean D e I la deuda nacional y el ingreso nacional, y suponga que ambos son funciones del tiempo t. Uno de varios **modelos de deuda de Domar** supone que las razones de cambio de D e I son ambos proporcionales a I, de modo que

$$\frac{dD}{dt} = aI \quad \text{y} \quad \frac{dI}{dt} = bI$$

Suponga $I(0) = I_0$ y $D(0) = D_0$.

a) Resuelva estas dos ecuaciones diferenciales y exprese $D(t)$ e $I(t)$ en términos de a, b, I_0 y D_0.

b) El economista Evsey Domar, quien primero estudió este modelo, estaba interesado en hallar la razón entre la deuda nacional y el ingreso nacional. Determine lo que ocurre a esta razón a largo plazo calculando el límite

$$\lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{I(t)}$$

27. AJUSTES TEMPORAL DE LA OFERTA Y LA DEMANDA La oferta $S(t)$ y demanda $D(t)$ de cierta mercancía varían con el tiempo t (meses) en forma tal que

$$\frac{dD}{dt} = -kD \quad \text{y} \quad \frac{dS}{dt} = 2kS$$

para cierta constante $k > 0$. Se sabe que $D(0) = 50$ unidades y $S(0) = 5$ unidades y que se presenta un equilibrio cuando $t = 10$ meses, es decir, $D(10) = S(10)$.

a) Use esta información para hallar k.

b) Encuentre $D(t)$ y $S(t)$.

c) ¿Cuántas unidades se ofrecen y demandan en el equilibrio?

28. RENOVACIÓN DE MONEDA Una nación tiene 5 mil millones de dólares en moneda. Todos los días entran a los bancos unos 18 millones de dólares y sale la misma cantidad. Suponga que el país decide que siempre que un billete de 1 dólar entre a un banco, se le destruya y se sustituya por un nuevo estilo de moneda. ¿Qué tiempo debe transcurrir para que el 90% de la moneda en circulación sea del nuevo estilo? [*Sugerencia:* Considere esta situación como si fuera un problema de dilución.]

29. QUIMIOTAXIA Suponga que una cama particular de nutrientes está distribuida en el plano xy en forma tal que la concentración de nutrientes siempre es la misma a lo largo de cualquier curva de la forma $3x^2 + y^2 = C$. Si un organismo quimiotáctico se introduce en la cama de nutrientes en el punto (1, 1), ¿qué trayectoria sigue?

30. QUIMIOTAXIA Suponga que una cama particular de nutrientes está distribuida en el plano xy en forma tal que la concentración de nutrientes siempre es la misma a lo largo de cualquier curva de la forma $x^2 - y^2 = C$. Si un organismo quimiotáctico se introducen en la cama de nutrientes en el punto (3, 1), ¿qué trayectoria sigue?

31. AHORROS Marcia tiene invertidos actualmente \$30 000 en un fondo de mercado de dinero, que gana 2% anual capitalizado continuamente. Las condiciones del mercado están mejorando y ella decide transferir continuamente 25% de su cuenta a un fondo de acciones que gana 10% anual. ¿Cuánto habrá en cada cuenta dentro de 5 años?

32. AHORROS Elvin tiene actualmente \$40 000 invertidos en una cuenta de ahorros que gana 3% anual capitalizado continuamente. Las condiciones de mercado están mejorando y él decide transferir continuamente 15% de su cuenta a un fondo de acciones que gana 12% anual. Él también retira \$5 000 al año de su cuenta de ahorros para gastos.

a) Plantee y resuelva una pareja de ecuaciones diferenciales acopladas para determinar la cantidad de dinero en cada cuenta dentro de t años.

b) ¿Cuánto tardará la cuenta de ahorros en agotarse? ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta de acciones en ese momento?

33. PROPAGACIÓN DE UNA EPIDEMIA Sea $N(t)$ el número de personas de una población susceptible N_s que están infectados por cierta enfermedad t días después de iniciarse una epidemia. Unos investigadores modelan la epidemia usando la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = k(N_s - N)(N - m)$$

donde $k > 0$ y m son constantes, con $0 < m < N_s$. Sea m el *umbral epidémico* de la enfermedad.

Suponga que $k = 0.04$, que $N_s = 250\,000$ personas son susceptibles a la enfermedad, y que el umbral epidémico m es 1% de la población susceptible.

a) Resuelva la ecuación diferencial para esta epidemia en términos de $N_0 = N(0)$, que es el número de personas que inicialmente están infectadas. (*Sugerencia:* La fórmula de integración 6 de la página 458 puede ayudar.)

b) Demuestre que si $N_0 = 5\,000$, entonces $N(t)$ tiende a N_s a largo plazo. Esto es, toda la población susceptible se infecta finalmente.

c) Demuestre que si $N_0 = 1\,000$, entonces hay un tiempo finito T tal que $N(T) = 0$. Esto es, la epidemia finalmente desaparece.

d) En general, ¿qué relación entre N_0 y m determina si una epidemia modelada por una ecuación diferencial de la forma dada desaparece en un tiempo finito? ¿Qué efecto (si lo hay) tiene que cambiar el valor de k en esta relación ?

www.FreeLibros.com

SECCIÓN 8.4 Soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales

Ciertas ecuaciones diferenciales, incluyendo muchas que aparecen en aplicaciones prácticas, no pueden ser resueltas por ningún método conocido. Sin embargo, a veces es posible obtener soluciones aproximadas de estas ecuaciones. En esta sección, estudiamos varios procedimientos para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales.

Campos de pendiente

Suponga que se desea resolver el problema de valor inicial

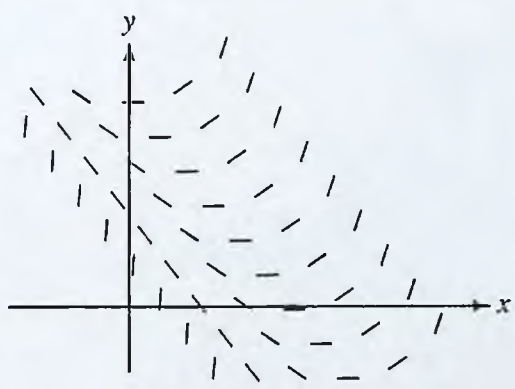
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

Es posible que no se pueda hallar la solución exacta, pero sí se puede obtener un dibujo aproximado si se explota el hecho de que como $y' = f(x, y)$ en cada punto (x, y) sobre una curva de solución $y = y(x)$, la pendiente de la recta tangente a la curva en (x, y) está dada por $f(x, y)$. A continuación veamos una descripción del procedimiento que seguiremos.

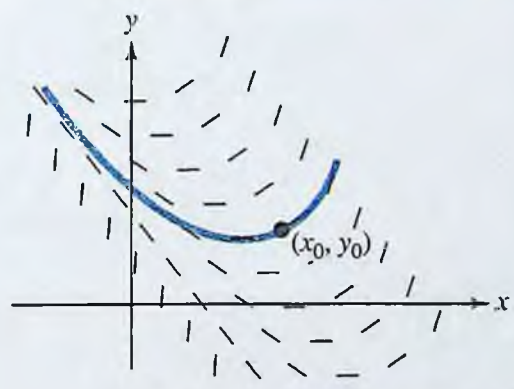
Procedimiento de campo de pendientes para dibujar una curva solución de $y' = f(x, y)$ que contiene al punto (x_0, y_0).

Paso 1. En cada punto (x, y) de una cuadrícula en el plano xy, dibuje un segmento de recta corto con pendiente igual a $f(x, y)$. El conjunto de todos estos puntos y segmentos se llama **campo de pendientes** de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$.

Paso 2. Empezando con el punto (x_0, y_0), se usan las pendientes indicadas por el campo de pendiente para trazar la solución pedida como se demuestra en esta figura:



Campo de pendiente



Trazo aproximado de la curva solución que pasa por (x_0, y_0)

¡EXPLORE!

Es posible construir un programa relativamente sencillo en su calculadora graficadora para mostrar el campo de pendientes de una ecuación diferencial de primer orden, $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Para este programa, vea la sección ¡Explore! Actualización al final de este capítulo. Use este programa para construir el campo de pendientes y la curva solución destacada en el ejemplo 8.4.1.

En el ejemplo 8.4.1 se ilustra el procedimiento de campo de pendiente para tener una idea gráfica de la solución de una ecuación diferencial.

EJEMPLO 8.4.1

Use un campo de pendientes para dibujar varias soluciones de la ecuación diferencial

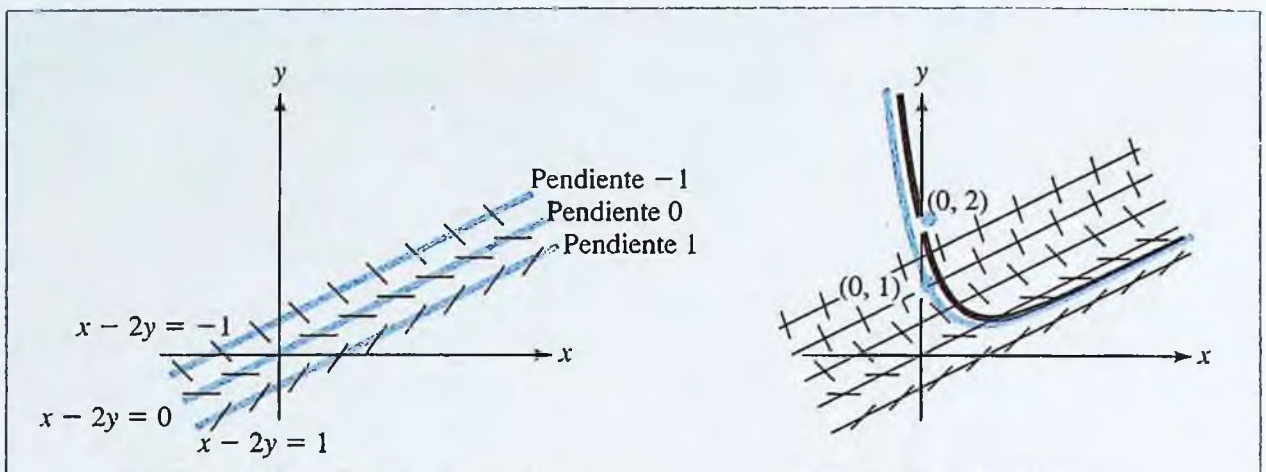
$$\frac{dy}{dx} = x - 2y$$

En particular, dibuje la solución que pasa por el punto (0, 1).

www.FreeLibros.com

Solución

Note que si (x, y) es un punto sobre la recta $x - 2y = m$, entonces cualquier curva solución $y = y(x)$ de la ecuación diferencial $y' = x - 2y$ que pasa por (x, y) tendrá pendiente $y' = m$. Por tanto, se puede construir el campo de pendientes para esta ecuación diferencial dibujando la familia de rectas paralelas $x - 2y = m$ y trazando un pequeño segmento de recta, de pendiente m, en los puntos seleccionados a lo largo de cada una de estas rectas. Esto se hace en la figura 8.11*a*.



a) Campo de pendientes. A cada punto (x, y) sobre la recta $x - 2y = m$ se le asigna un segmento de recta con pendiente m.

b) Varias curvas solución de la ecuación diferencial, (0, 1).

FIGURA 8.11 Uso de un campo pendiente para construir soluciones para $y' = x - 2y$.

En la figura 8.11*b*, se usa el campo de pendientes de la figura 8.11*a* para dibujar varias soluciones de la ecuación diferencial $y' = x - 2y$. Como prueba, note que la ecuación diferencial dada se puede rescribir en la forma lineal de primer orden

$$y' + 2y = x$$

y luego resolver analíticamente usando el método desarrollado en la sección 8.2. El factor integrante es

$$I(x) = e^{\int 2\,dx} = e^{2x}$$

de modo que la solución general es

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{e^{2x}}\left[\int x\,e^{2x}\,dx + C\right] \\ &= e^{-2x}\left[\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C\right] \qquad \textit{integración por partes:} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + Ce^{-2x} \end{aligned} \qquad u = x \quad dv = e^{2x}\,dx$$

Para la solución particular con $y = 1$ cuando $x = 0$, se tiene

$$1 = 0 - \frac{1}{4} + Ce^{0} = -\frac{1}{4} + C$$

de modo que $C = \frac{5}{4}$ y

$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{-2x}$$

Ésta es la curva trazada en azul en la figura 8.11*b*.

www.FreeLibros.com

El procedimiento de campo de pendientes no era realmente necesario en el ejemplo 8.4.1 porque era bastante fácil resolver la ecuación diferencial usando los métodos de la sección 8.2. No obstante, en el ejemplo 8.4.2, se usa el procedimiento para obtener soluciones aproximadas de una ecuación diferencial que no se puede resolver directamente.

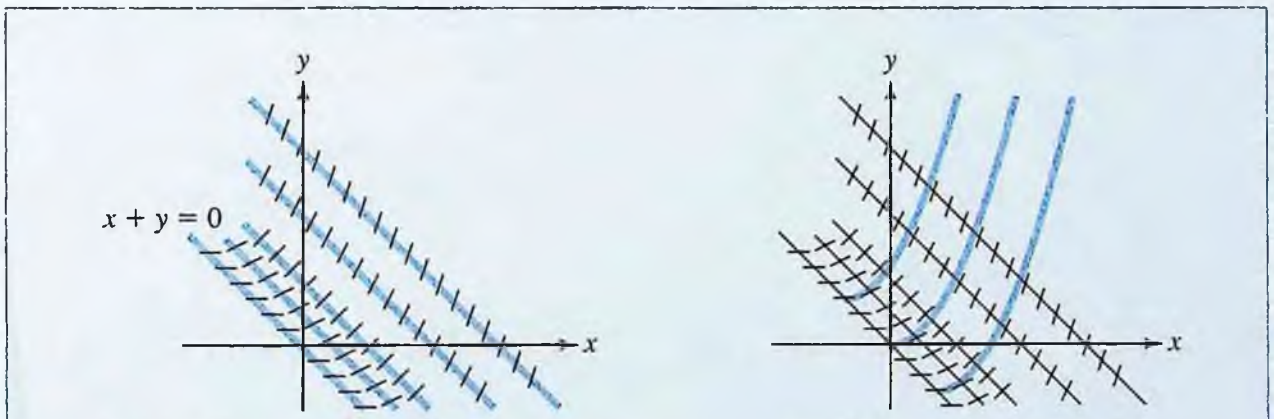
EJEMPLO | 8.4.2

Use un campo de pendientes para dibujar soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x + y}$$

Solución

Si (x, y) es un punto sobre la recta $x + y = m$ para $m \geq 0$, entonces cualquier curva $y = y(x)$ solución de la ecuación diferencial $y' = \sqrt{x + y}$ que pasa por (x, y) tendrá una pendiente $y' = \sqrt{m}$. Construya el campo de pendientes para esta ecuación dibujando la familia de rectas paralelas $x + y = m$ y asignando un pequeño segmento de recta, de pendiente en puntos seleccionados a lo largo de cada una de esta rectas. La figura 8.12*a* muestra el campo de pendientes. Note que, como $\sqrt{x + y}$ no está definido para $x + y < 0$, todo el campo de pendientes se encuentra sobre o arriba de la recta $x + y = 0$. En la figura 8.12*b* se ilustran varias curvas solución. Nótese que cada curva solución es "plana" (tiene pendiente 0) sobre la recta $x + y = 0$ y luego crece rápidamente hacia la derecha.



a) El campo de pendientes: A cada punto (x, y) sobre la recta $x + y = m$ para $m \geq 0$ se asigna un segmento de recta con pendiente $\sqrt{m}$.

b) Varias curvas solución de la ecuación diferencial.

FIGURA 8.12 Construcción del campo de pendientes para las soluciones de $y' = \sqrt{x + y}$.

Método de Euler

El procedimiento de campo de pendientes que se acaba de mostrar permite obtener un dibujo aproximado de la solución a un problema de valor inicial, y el siguiente objetivo es demostrar la forma en que esta solución puede ser generada numéricamente. La gran ventaja de un procedimiento numérico de aproximación es que se puede programar en una computadora de alta velocidad. De hecho, usando computadoras y esquemas numéricos de aproximación, ahora es posible analizar modelos de situaciones complejas como son configuraciones meteorológicas, ecosistemas e interacciones económicas entre naciones.

El procedimiento numérico de aproximación que se estudiará ahora se llama método de Euler, en honor a su creador, el gran matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783). Aun cuando el método de Euler es mucho menos preciso que los procedimientos numéricos empleados en aplicaciones prácticas, éste se ocupa de los mismos problemas que los procedimientos más refinados y su estructura relativamente sencilla lo hace más fácil de demostrar.

www.FreeLibros.com

Para ilustrar las ideas que hay detrás del método de Euler, suponga que se desea aproximar la solución al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{para} \quad y(x_0) = y_0$$

La clave del método de Euler es que una vez que se conoce el valor de la solución $y(c)$ para algún número c, entonces se puede calcular $f(c, y(c))$ que es igual a $y'(c)$, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la solución en $(c, y(c))$. Usando este dato, es posible aproximar valores de la solución $y = y(x)$ en puntos sucesivos igualmente espaciados.

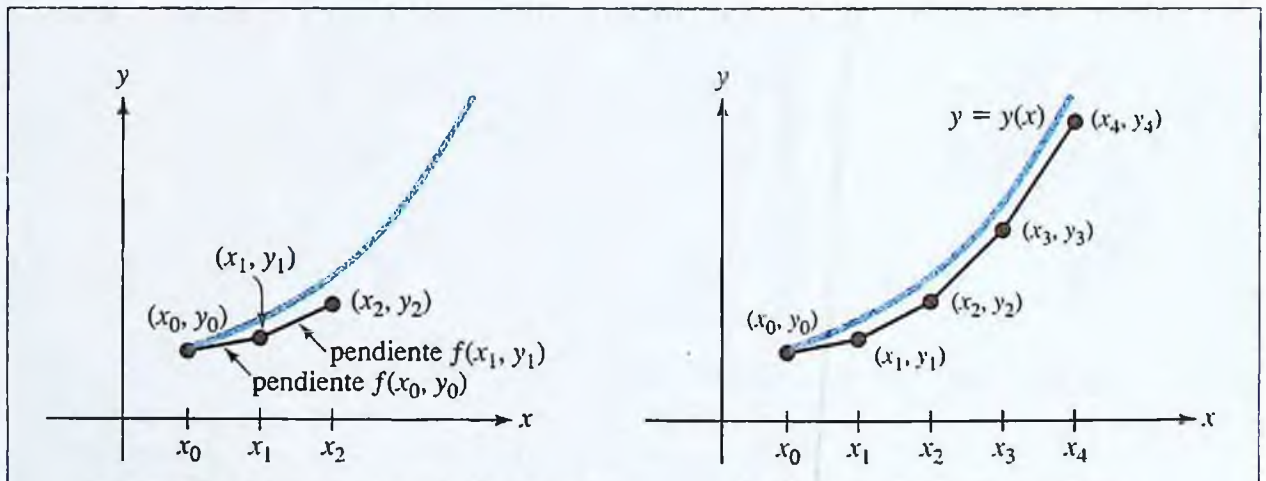
Para iniciar el proceso de aproximación, se selecciona el *tamaño de paso h*. Ésta es la distancia entre puntos sucesivos a lo largo del eje x para la curva de la solución aproximada. Esto es, se obtendrán valores aproximados de la solución en los puntos

$$x_0,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ \ldots,\ x_n = x_0 + nh$$

Partiendo de (x_0, y_0), se calcula $f(x_0, y_0)$ y se traza la recta que pasa por (x_0, y_0) con pendiente $f(x_0, y_0)$. Se sabe que esta recta es tangente a la curva solución $y = y(x)$ en (x_0, y_0), y se continúa a lo largo de esta recta hasta el punto (x_1, y_1), donde

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)h$$

es el valor y del punto sobre la recta tangente que corresponde a x_1. A continuación, se calcula $f(x_1, y_1)$, que es la pendiente de la recta tangente a la curva solución que pasa por (x_1, y_1). Se dibuja la recta que pasa por (x_1, y_1) con pendiente $f(x_1, y_1)$ y se continúa al punto (x_2, y_2), donde $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h$. Estos dos pasos se muestran en la figura 8.13*a*. Se continúa de este modo y en el paso $k+1$ se dibuja la recta que pasa por el punto (x_k, y_k) con pendiente $f(x_k, y_k)$ para localizar el punto (x_{k+1}, y_{k+1}), donde $y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h$. La solución aproximada completa es la trayectoria poligonal que se ilustra en la figura 8.13*b*.



a) Construcción de los primeros dos puntos en la aproximación de Euler.

b) Relación de la aproximación de Euler y la solución real

FIGURA 8.13 Método de Euler para aproximar la solución al problema de valor inicial $y'(x) = f(x, y)$ con $y(x_0) = y_0$.

A continuación veamos un resumen, paso a paso, de cómo usar el método de Euler para obtener la solución aproximada de un problema de valor inicial. El método está ilustrado en el ejemplo 8.4.3.

www.FreeLibros.com

Método de Euler para aproximar la solución al problema de valor inicial $y'(x) = f(x, y)$ con $y(x_0) = y_0$.

Paso 1. Seleccione el tamaño de paso h.

Paso 2. Para $k = 1, 2, \ldots, n$, calcule los puntos sucesivos (x_k, y_k), donde $x_k = x_{k-1} + h$ y $y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1})h$

Paso 3. Construya la aproximación de Euler localizando los puntos (x_k, y_k) para $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ en el plano xy y uniendo los pares sucesivos de puntos con segmentos de recta.

¡EXPLORE!

Vea el ejemplo 8.4.3. Cree el campo de pendientes para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x - y$, usando el programa que aparece en la sección ¡Explore! Actualización de este capítulo. Gráficamente muestre la solución $g(x) = x - 1 + 2e^{(-x)}$, que pasa por el punto (0, 1).

EJEMPLO | 8.4.3

Use el método de Euler, con tamaño de paso $h = 0.1$ para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x - y \quad \text{con} \quad y(0) = 1$$

Compare la aproximación con la solución real.

Solución

La ecuación diferencial dada se puede escribir en forma de ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx} + y = x$$

Usando los métodos de la sección 8.2, se puede demostrar que la solución general es $y = x - 1 + Ce^{-x}$ y la solución particular con $y(0) = 1$ es

$$g(x) = x - 1 + 2e^{-x}$$

A continuación se compara esta solución con la solución aproximada obtenida al aplicar el método de Euler con $h = 0.1$, $f(x, y) = x - y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, y 10 pasos. El primer paso da

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h = 1 + (0 - 1)(0.1) = 0.9$$

y comparando esto con el valor real de la solución $y = g(x)$ en $x_1 = 0.1$, obtenemos $y_1 - g(x_1) = 0.9 - 0.90967 = -0.00967$. El resto de los cálculos se muestra en la siguiente tabla:

k	x_k	y_k	Pendiente $f(x_k, y_k)$	y_{k+1}	Solución real $g(x_k)$	Diferencia $y_k - g(x_k)$
0	0	1	−1	0.9	1	0
1	0.1	0.9	−0.8	0.820	0.910	−0.010
2	0.2	0.82	−0.62	0.758	0.837	−0.017
3	0.3	0.758	−0.458	0.712	0.782	−0.024
4	0.4	0.712	−0.312	0.681	0.741	−0.029
5	0.5	0.681	−0.181	0.663	0.713	−0.032
6	0.6	0.663	−0.063	0.657	0.698	−0.035
7	0.7	0.657	0.043	0.661	0.693	−0.036
8	0.8	0.661	0.139	0.675	0.699	−0.038
9	0.9	0.675	0.225	0.698	0.713	−0.038
10	1.0	0.698	0.302	0.728	0.736	−0.038

www.FreeLibros.com

En la figura 8.14, se compara la aproximación de Euler (trayectoria poligonal) con la curva solución real

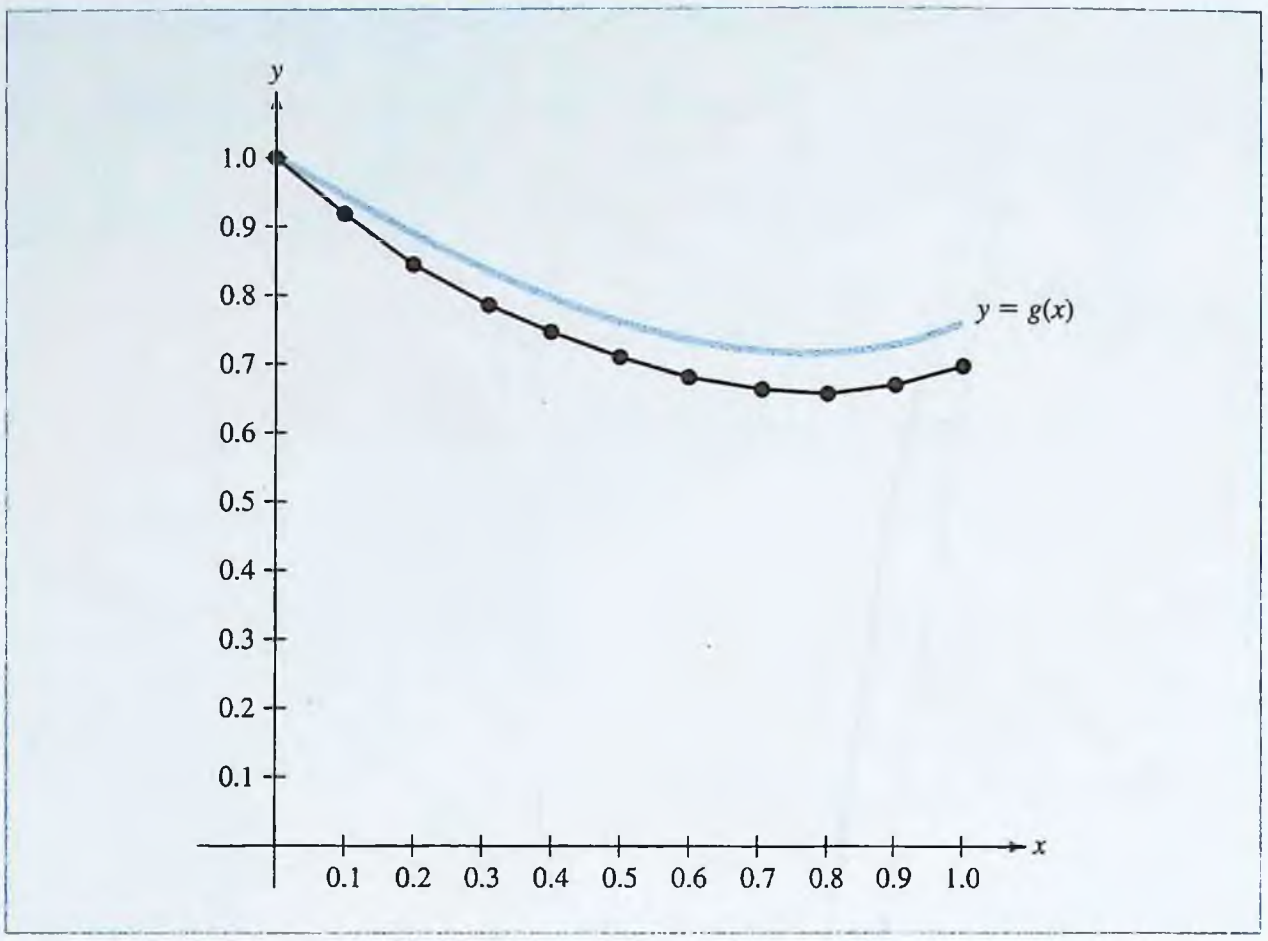


FIGURA 8.14 Comparación de la curva solución para el problema de valor inicial $y' = x - y$ con $y(0) = 1$, y la aproximación de Euler.

Es frecuente que en algunos modelos aplicados aparezcan problemas de valor inicial cuya solución exacta es difícil o imposible de obtener. En el ejemplo 8.4.4, se aproxima la solución de un modelo de población usando el método de Euler.

EJEMPLO | 8.4.4

Después de t meses de observación, se encuentra que la población $P(t)$ de una especie animal aislada en una isla está cambiando a razón de

$$\frac{dP}{dt} = 0.03\sqrt{P} - 0.005t$$

Suponga que la población era de 1 000 cuando empezaron las observaciones ($t = 0$). Utilice el método de Euler para estimar la población después de 1 año.

Solución

La función pendiente es $f(t, P) = 0.03\sqrt{P} - 0.005t$, con $P = 1\,000$ cuando $t = 0$. Como el tiempo se mide en meses, deseamos estimar $P(12)$. Suponga un paso de tamaño $h = 2$. Entonces la población P_{k+1} en el paso $k + 1$ está relacionada con la población en el k-ésimo paso por la fórmula

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= P_k + f(t_k, P_k)h \\ &= P_k + [0.03\sqrt{P_k} - 0.005t_k](2) \end{aligned}$$

donde $t_k = 0 + 2k = 2k$. La tabla siguiente resume los cálculos para la aproximación.

www.FreeLibros.com

k	t_k	P_k	Pendiente $f(t_k, P_k)$	P_{k+1}
0	0	1 000.00	0.9487	1 001.90
1	2	1 000.90	0.9391	1 002.78
2	4	1 002.78	0.9300	1 004.64
3	6	1 004.64	0.9209	1 006.48
4	8	1 006.48	0.9118	1 008.30
5	10	1 008.30	0.9026	1 010.11
6	12	1 010.11	0.8935	1 011.90

Por tanto, con base en esta aproximación de Euler, se estima que la población, al término de 1 año, es aproximadamente de 1 012 animales.

PROBLEMAS | 8.4

En los problemas del 1 al 12 trace el campo de pendientes para la ecuación diferencial dada y úselo para trazar la gráfica de la solución que pasa por el punto especificado.

1. $y' = x + y$; $(1, 1)$

2. $y' = x - y$; $(1, 1)$

3. $y' = y^2$; $(0, 1)$

4. $y' = \sqrt{x}$; $(4, 0)$

5. $y' = y(2 - y)$; $(0, -1)$

6. $y' = \dfrac{x}{y + 1}$; $(0, 0)$

7. $y' = x^2 + y^2$; $(1, -1)$

8. $y' = x - y^2$; $(1, 1)$

9. $y' = \dfrac{2y - 3x}{x + y}$; $(0, 1)$

10. $y' = 2 - x - y$; $(0, 0)$

11. $y' = e^{xy}$; $(0, 0)$

12. $y' = e^{x/y}$; $(1, 1)$

En los problemas del 13 al 20 use el método de Euler con el tamaño de paso h y el número de incrementos n indicados para obtener una solución aproximada del problema de valor inicial dado.

13. $y' = 2x + y$; $y(0) = 1$; $h = 0.2$; $n = 5$

14. $y' = x - 3y$; $y(0) = 0$; $h = 0.4$; $n = 5$

15. $y' = \dfrac{y}{x} + x$; $y(1) = 0$; $h = 0.2$; $n = 5$

16. $y' = xy + y$; $y(0) = 1$; $h = 0.5$; $n = 6$

17. $y' = \sqrt{x} - y$; $y(1) = 1$; $h = 0.5$; $n = 8$

18. $y' = \dfrac{e^x}{y}$; $y(0) = -1$; $h = 0.5$; $n = 8$

19. $y' = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$; $y(1) = 1$; $h = 0.4$; $n = 5$

20. $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $y(0) = 1$; $h = 0.2$; $n = 5$

En los problemas del 21 al 26, use el método de Euler con el tamaño de paso h indicado para estimar la solución requerida del problema de valor inicial.

21. $y' = x + 2y$; $y(0) = 1$; $h = 0.2$; $y(1)$ estime

22. $y' = \dfrac{x}{y}$; $y(1) = 1$; $h = 0.2$; $y(2)$ estime

23. $y' = \dfrac{x - y}{2x + y}$; $y(0) = 1$; $h = 0.2$; $y(1)$ estime

24. $y' = x\sqrt{1 + y^2}$; $y(0) = 0$; $h = 0.5$; $y(4)$ estime

25. $y' = x^2 + 2y^2$; $y(0) = 0$; $h = 0.4$; $y(2)$ estime

26. $y' = \ln(x + y)$; $y(0) = 1$; $h = 0.5$; $y(4)$ estime

www.FreeLibros.com

27. La longitud $L(t)$ de la curva $y = \ln x$ sobre el intervalo $1 \leq x \leq t$ satisface

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\sqrt{1 + t^2}}{t} \qquad L(1) = 0$$

Estime la longitud $L(4)$ usando el método de Euler, con paso de tamaño $h = 0.5$.

28. **CRECIMIENTO DE UNA ESPECIE** La población de zorros $F(t)$ en una isla grande satisface el problema de valor inicial logístico modificado

$$\frac{dF}{dt} = 0.01(80 - F)(F - 76) \qquad F(0) = 70$$

Use el método de Euler con $h = 1$ para estimar $F(10)$, la población de zorros 10 años después.

29. **CRECIMIENTO DE UNA ESPECIE** La longitud $L(t)$ de una especie de peces a la edad t se modela por medio del problema de valor inicial de von Bertalanffy

$$\frac{dL}{dt} = 1.03(5.3 - L) \qquad L(0) = 0.2$$

donde L se mide en pulgadas y t en meses.

a) Use el método de Euler con $h = 0.4$ para estimar la longitud de los peces en el momento, $t = 2$.

b) Resuelva el problema de valor inicial y evalúe $L(2)$. Compare este valor exacto con la estimación obtenida en el inciso *a)*.

30. **OFERTA** Suponga que el número de unidades $S(t)$ de una mercancía particular que será suministrada por productores en el momento t, aumenta a razón de

$$\frac{dS}{dt} = 0.3\,Se^{-0.1t}$$

Si $S(0) = 3$, use el método de Euler con $h = 0.5$ para estimar $S(4)$.

31. **PRODUCCIÓN** La producción Q en cierta fábrica cambia a razón de

$$\frac{dQ}{dK} = 0.2Q + K^{1/2}$$

donde K es el gasto de capital (en unidades de \$1 000). Suponga que cuando el gasto de capital es de \$2 000, habrá $Q(2) = 500$ unidades producidas. Use el método de Euler con $h = 1$ para estimar el número de unidades producidas cuando el gasto de capital sea de \$5 000.

32. **EXTINCIÓN DE POBLACIÓN** Cuando la densidad de población de una especie que se reproduce sexualmente cae por debajo de cierto umbral, los individuos de la especie tienen dificultades para hallar una pareja apropiada, y esto tiene el efecto de reducir la población todavía más, lo que en última instancia lleva a la extinción. En biología, esto recibe el nombre de *efecto de Allee*, por W. C. Allee, quien fue el primero en estudiar el efecto en 1931. Si la población en el momento t es $P(t)$, este efecto se puede modelar mediante la ecuación logística modificada

$$\frac{dP}{dt} = kP(P - A)\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

donde k es la tasa de crecimiento natural de la especie, K es la capacidad máxima y A es el umbral de la población. Suponga que $k > 0$ y $0 < A < K$.

Para una especie en particular, suponga que P se mide en miles, t en años, y que 0.2, $K = 20$, y $A = 2$. Suponga, además, que la población inicial es $P(0) = 1$. Use el método de Euler con $h = 0.25$ para estimar $P(1)$, la población después de 1 año.

SECCIÓN 8.5 | Ecuaciones en diferencias

Ya se ha visto la forma en que se pueden usar ecuaciones diferenciales para modelar una amplia variedad de situaciones dinámicas que comprenden un comportamiento continuo. No obstante, casi siempre resulta más natural o conveniente describir ciertas situaciones en términos del comportamiento medido en un conjunto de puntos discretos, en lugar de continuamente. Por ejemplo, la población de Estados Unidos se mide por medio de un censo que se hace cada 10 años, un biólogo interesado en saber la población de una colonia de bacteria podría tomar mediciones cada año, o un economista que elabore una gráfica de la oferta y la demanda de cierta mercancía podría reunir los datos pertinentes una vez por semana.

Las **ecuaciones en diferencias** desempeñan el mismo papel en el estudio de situaciones dinámicas discretas, que las ecuaciones diferenciales en la modelación de fenó-

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Algunos modelos de calculadora graficadora pueden manejar ecuaciones en diferencias por medio de la función de relaciones recursivas dadas por el modo de secuencia. Busque en la sección de Introducción a la Calculadora cómo mostrar en pantalla estas funciones y sus gráficas. Siguiendo el ejemplo de esta página respecto a una colonia de bacterias, construya la función

$u(n) = 0.03u(n-1) + 1\,000,$

con valor inicial

$u(1) = 100\,000$, en el editor de ecuaciones de su calculadora graficadora. Muestre los valores para al menos siete generaciones usando el editor de lista, así como las funciones de gráficas de su calculadora. ¿Parece que la población de bacterias se aproxima a un valor límite?

menos continuos. El objetivo en esta sección es examinar unas cuantas propiedades y aplicaciones de las ecuaciones en diferencias y luego comparar estas ecuaciones con las ecuaciones diferenciales análogas. Se comienza con la terminología y la notación.

Una *función discreta* $f(k)$ es una función cuyo dominio es una secuencia de enteros representada por el índice k. Para mayor sencillez, escribimos $y = f(k)$ como f_k o como y_k. Una ecuación en diferencias relaciona cada término de la secuencia $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ con uno o más términos previos. Por ejemplo,

$$y_n = 2y_{n-1}$$

es una ecuación en diferencia, al igual que

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-2} \qquad \textit{(la ecuación de Fibonacci)}$$

y

$$y_n - y_{n-1} = ky_{n-1}\left(1 - \frac{1}{K}y_{n-1}\right) \qquad \textit{(la ecuación logística)}$$

Una **solución** de una ecuación en diferencias dada es una secuencia cuyos términos satisfacen la ecuación, y una **solución general** es una fórmula que caracteriza todas las posibles soluciones. Un **problema de valor inicial** es aquél en el que se busca la solución particular de una ecuación en diferencias dada, que satisfaga las condiciones iniciales especificadas.

Por ejemplo, suponga que cada hora se observa una colonia de bacterias que inicialmente contiene 100 000 individuos. Si se encuentra que la población P_{k+1} en el momento $k+1$ es siempre 1 000 más que 3% de la población en el momento k, P_k, esta información se puede expresar como el problema de valor inicial

$$P_{k+1} = 0.03P_k + 1\,000 \quad \text{con } P_0 = 100\,000$$

Los ejemplos 8.5.1 y 8.5.2 ilustran más esta notación y terminología.

EJEMPLO | 8.5.1

Escriba los primeros cinco términos de la secuencia $y_1, y_2, \ldots$ que satisface el problema de valor inicial

$$y_n = -3y_{n-1} + 1 \quad \text{con } y_0 = 2$$

Solución

El término inicial es $y_0 = 2$, y se genera cada término sucesivo sustituyendo en la ecuación en diferencias. Así se calcula

$$\begin{aligned} y_0 &= 2 \\ y_1 &= -3y_0 + 1 = -3(2) + 1 = -5 \\ y_2 &= -3y_1 + 1 = -3(-5) + 1 = 16 \\ y_3 &= -3y_2 + 1 = -3(16) + 1 = -47 \\ y_4 &= -3y_3 + 1 = -3(-47) + 1 = 142 \end{aligned}$$

Entonces, los primeros cinco términos de la secuencia son 2, −5, 16, −47, y 142.

Las ecuaciones en diferencias desempeñan un importante papel en la modelación matemática. Por ejemplo, estas ecuaciones se pueden usar para relacionar los valores de una cantidad particular en momentos o periodos discretos diferentes, como por ejemplo generaciones. Esto se ilustra en el ejemplo 8.5.2 para una aplicación a la genética.

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 8.5.2

La genética poblacional está interesada en conocer la forma en que la distribución de genotipos de una población cambia de una generación a otra. Suponga que ocurre un apareamiento aleatorio en una población, y que los individuos que heredan un gene recesivo particular de ambos padres no tendrán descendencia. Bajo estas condiciones, la frecuencia f_n del gene recurrente en la n-ésima generación puede ser modelada por la ecuación en diferencias

$$f_{n+1} = \frac{f_n}{1 + f_n}$$

Verifique que

$$f_n = \frac{f_0}{1 + nf_0}$$

satisfaga esta ecuación en diferencias, donde f_0 es la frecuencia inicial.

Solución

Para verificar que $f_n = \dfrac{f_0}{1 + nf_0}$ satisface la ecuación en diferencias dada, nótese que

$$f_{n+1} = \frac{f_0}{1 + (n + 1)f_0}$$

mientras que

$$\frac{f_n}{1 + f_n} = \frac{\dfrac{f_0}{1 + nf_0}}{1 + \left(\dfrac{f_0}{1 + nf_0}\right)} = \frac{\dfrac{f_0}{1 + nf_0}}{\dfrac{1 + nf_0 + f_0}{1 + nf_0}}$$

$$= \frac{f_0}{1 + f_0 + nf_0} = \frac{f_0}{1 + (n + 1)f_0}$$

Por tanto,

$$f_{n+1} = \frac{f_0}{1 + (n + 1)f_0} = \frac{f_n}{1 + f_n}$$

como se pidió.

Solución de una ecuación en diferencias

Siempre se pueden hallar soluciones de un problema de valor inicial dado comenzando con la condición inicial y usando la ecuación en diferencias para generar un valor tras otro, como se hizo en el ejemplo 8.5.1. No obstante, lo que realmente se desea es una fórmula para hallar y_n en términos de n, que haga posible hallar cualquier término particular y_k en la sucesión de la solución, con sólo sustituir k por n en la fórmula, sin tener que hallar primero $y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}$. Por ejemplo, el resultado del ejemplo 8.5.2 indica que el 20avo término en la sucesión de la solución para la ecuación en diferencias

$$f_{n+1} = \frac{f_n}{1 + f_n}$$

se puede hallar sustituyendo $n = 20$ en la fórmula

$$f_n = \frac{f_0}{1 + nf_0}$$

www.FreeLibros.com

Esto es,

$$f_{20} = \frac{f_0}{1 + 20f_0}$$

Una ecuación en diferencias **lineal de primer orden** es una ecuación de la forma general

$$y_n = ay_{n-1} + b$$

donde a y b son constantes. El objetivo es demostrar cómo es que el término general y_n, de la sucesión de la solución de esa ecuación, se puede expresar en función del término inicial y_0. Se usará un procedimiento iterativo en el que y_n se expresa en función de y_{n-1}, luego y_{n-1} en función de y_{n-2} y así sucesivamente hasta tener una fórmula para y_n en función de y_0. A continuación se muestran los pasos específicos:

$$\begin{aligned}
&y_0\\
&y_1 = ay_0 + b\\
&y_2 = ay_1 + b = a(ay_0 + b) + b = a^2y_0 + ab + b\\
&y_3 = ay_2 + b = a(a^2y_0 + ab + b) + b = a^3y_0 + a^2b + ab + b\\
&y_4 = ay_3 + b = a^4y_0 + a^3b + a^2b + ab + b
\end{aligned}$$

y, en general,

$$\begin{aligned}
y_n = ay_{n-1} + b &= a^ny_0 + a^{n-1}b + a^{n-2}b + \cdots + a^2b + ab + b\\
&= a^ny_0 + (a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)b
\end{aligned}$$

Para $a = 1$, todas las potencias de a también son iguales a 1, y se tiene $y_n = y_0 + nb$. Si $a \neq 1$, la expresión $a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1$ puede ser sumada por la fórmula de las **series geométricas**

$$a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1 = \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

(vea el problema 40, o el estudio general de series geométricas de la sección 1 del capítulo 9). En este caso, la fórmula para y_n se puede escribir como

$$y_n = a^ny_0 + \left(\frac{1 - a^n}{1 - a}\right)b$$

Resumiendo:

¡EXPLORE!

Consulte el problema explorado en la caja ¡Explore! de la página 633. Regrese el menú **MODE** al modo **Func** y escriba **Y1 = 100 000(0.03)^X + 1 000(1 − 0.03^X)/(1 − 0.03)**, y grafique usando la pantalla [0, 7]1 por [0, 100,000]1 000. ¿Cómo difiere esta gráfica de la gráfica de puntos individuales de la caja ¡Explore! de la página 633? ¿Cuál representación de la situación del problema es mejor?

Solución de una ecuación en diferencias lineal de primer orden con una condición inicial

Para a y b constantes, considere el problema de valor inicial

$$y_n = ay_{n-1} + b \qquad \text{con valor inicial } y_0$$

Si $a = 1$, la solución general es

$$y_n = y_0 + nb$$

Si $a \neq 1$, la solución general es

$$y_n = a^ny_0 + \left(\frac{1 - a^n}{1 - a}\right)b$$

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 8.5.3

Resuelva el problema de valor inicial lineal de primer orden

$$y_n = \frac{-1}{2} y_{n-1} + 5 \qquad \text{con valor inicial } y_0 = 3$$

Solución

Comparando la ecuación en diferencias dada con la forma lineal de primer orden $y_n = ay_{n-1} + b$, se observa que $a = \frac{-1}{2}$ y $b = 5$. Como $a \neq 1$, la solución general es

$$\begin{aligned} y_n &= a^n y_0 + \left(\frac{1 - a^n}{1 - a}\right) b \\ &= \left(\frac{-1}{2}\right)^n (3) + \left[\frac{1 - (-1/2)^n}{1 - (-1/2)}\right](5) \\ &= \left(\frac{-1}{2}\right)^n (3) + \frac{10}{3}\left[1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right] \\ &= \frac{10}{3} + \left(3 - \frac{10}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{10}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Por ejemplo, el quinto término de la sucesión de la solución es

$$y_5 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^5 = \frac{107}{32}$$

¡EXPLORE!

Consulte el ejemplo 8.5.4. Introduzca la función P_n en Y1 del editor de funciones de su calculadora graficadora, usando la variable x en lugar de n. Grafique usando la ventana [0, 300]10 por [10 000, 25 000]1 000. ¿Cómo ilustra esto la situación del problema para este ejemplo? Explique también por qué la función continua no representa verdaderamente la situación del problema? Use funciones de gráficación de su calculadora para demostrar que la población tiende hacia 24 000 a largo plazo.

EJEMPLO | 8.5.4

Hay 12 000 personas en Styxville. Cada año, mueren 3% de las personas de la ciudad y nacen 720 bebés.

a) ¿Cuál será la población dentro de 5 años?

b) ¿Cuál será la población a largo plazo?

Solución

a) Sea P_n la población después de n años. Como $0.03P_{n-1}$ personas mueren durante el n-ésimo año, se deduce que $0.97P_{n-1}$ siguen viviendo, y que el número se suma a los 720 nacimientos, de modo que

$$\underset{\text{población actual}}{P_n} = \underset{\text{población sobreviviente}}{0.97P_{n-1}} + \underset{\text{nacimientos}}{720}$$

Sustituyendo $a = 0.97$, $b = 720$, y $P_0 = 12\,000$ en nuestra fórmula para la solución general de la ecuación $y_n = ay_{n-1} + b$ se obtiene

$$P_n = (0.97)^n(12\,000) + \frac{[1 - (0.97)^n](720)}{1 - 0.97}$$

Por tanto, cuando $n = 5$, la población es

$$\begin{aligned} P_5 &= (0.97)^5(12\,000) + \frac{[1 - (0.97)^5](720)}{1 - 0.97} \\ &= 13\,695 \end{aligned}$$

www.FreeLibros.com

b) Para hallar la población a largo plazo, se calcula el límite

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\left\{(0.97)^n(12\,000) + \frac{[1-(0.97)^n](720)}{1-0.97}\right\}$$

$$= 0 + \frac{[1-0](720)}{0.03} = 24\,000$$

En consecuencia, en un tiempo muy largo, la población tiende hacia 24 000 personas.

Aplicaciones de ecuaciones en diferencias

Se usan ecuaciones en diferencias en modelos para negocios y economía, psicología, sociología, biología, teoría de la información, y una variedad de otros campos de acción. En los ejemplos 8.5.5 y 8.5.6 se examinan dos de estas aplicaciones.

EJEMPLO | 8.5.5 (*Amortización de deuda*)

Cuando se pide dinero prestado a una tasa de interés r, el total de la deuda aumenta igual que una cuenta bancaria que paga la misma tasa de interés. La **amortización** es un procedimiento para pagar la deuda, incluyendo intereses, haciendo una secuencia de pagos. Por lo general los pagos son de igual monto y se hacen a intervalos iguales (anualmente, trimestralmente o mensualmente).

Suponga que una deuda de D dólares, a una tasa de interés anual r se amortiza en un periodo de n años, haciendo pagos anuales de A dólares. Plantee y resuelva una ecuación en diferencias para demostrar que

$$A = \frac{rD}{1-(1+r)^{-n}}$$

Solución

Sea y_n la deuda total después de n años. Entonces $y_n - y_{n-1}$ es el cambio de la deuda durante el n-ésimo año, que es igual al interés ry_{n-1} cargado durante el n-ésimo año, menos el pago anual A. Esto es,

$$\underset{\substack{\text{cambio de}\\ \text{la deuda}}}{y_n - y_{n-1}} = \underset{\substack{\text{interés}\\ \text{cobrado}}}{ry_{n-1}} - \underset{\substack{\text{pago}\\ \text{anual}}}{A}$$

Combinando los términos y_{n-1}, y usando el hecho de que $y_0 = D$ es la deuda inicial, se obtiene el problema de valor inicial

$$y_n = (1+r)y_{n-1} - A \qquad \text{con } y_0 = D$$

Esta ecuación en diferencias tiene forma lineal de primer orden, con $a = 1 + r$ y $b = -A$, de modo que la solución general es

$$y_n = a^n y_0 + \left(\frac{1-a^n}{1-a}\right)b$$

$$= (1+r)^n D + \left[\frac{1-(1+r)^n}{1-(1+r)}\right](-A)$$

$$= (1+r)^n D + \left(\frac{-A}{-r}\right)[1-(1+r)^n]$$

$$= (1+r)^n D + \frac{A}{r}[1-(1+r)^n]$$

www.FreeLibros.com

Como la deuda debe ser pagada en n años, se desea hallar A para que $y_n = 0$; esto es,

$$y_n = (1 + r)^n D + \frac{A}{r}[1 - (1 + r)^n] = 0$$

Al restar $\frac{A}{r}[1 - (1 + r)^n]$ en ambos miembros de esta ecuación, se obtiene

$$(1 + r)^n D = \frac{-A}{r}[1 - (1 + r)^n] = \frac{A}{r}[(1 + r)^n - 1]$$

de modo que

$$A = rD\left[\frac{(1 + r)^n}{(1 + r)^n - 1}\right]$$

Por último, multiplicando numerador y denominador por $(1 + r)^{-n}$, se obtiene la fórmula de amortización

$$A = \frac{rD}{1 - (1 + r)^{-n}}$$

EJEMPLO | 8.5.6 (*Administración de biología-pesquera*)

Un biólogo está empleado para regular la población de truchas en un lago. El biólogo estima que el lago inicialmente contiene 150 000 truchas, y que la población de truchas está creciendo a una tasa de 15% al año. Actualmente, la pesquería cosecha truchas a una tasa de 30 000 peces por año.

a) Plantee y resuelva una ecuación en diferencias para hallar la población de peces después de n años.

b) ¿Cuánto tiempo transcurre antes de que el lago se quede sin truchas?

c) Suponga que la pesquería decide cambiar la política de cosecha de modo que en el lago aun queden truchas dentro de 20 años. ¿Cuál es la máxima tasa de cosecha que permitirá que esto ocurra?

d) ¿Cuál es la máxima tasa de cosecha que se puede permitir si la pesquería desea que el lago siempre contenga truchas?

Solución

a) Denote por p_n la población de truchas al final del n-ésimo año. Entonces el cambio de la población $p_n - p_{n-1}$ durante el n-ésimo año satisface

$$\underset{\substack{\textit{cambio de}\\ \textit{la población}}}{p_n - p_{n-1}} = \underset{\substack{\textit{crecimiento}\\ \textit{natural}}}{0.15p_{n-1}} - \underset{\substack{\textit{peces}\\ \textit{cosechados}}}{30\,000} \qquad \text{donde } p_0 = 150\,000$$

Al combinar los p_{n-1} términos de la derecha, vemos que esta ecuación en diferencias tiene forma lineal de primer orden

$$p_n = (1 + 0.15)\, p_{n-1} - 30\,000 = 1.15p_{n-1} - 30\,000$$

www.FreeLibros.com

donde $a = 1.15$ y $b = -30\,000$. La solución de esta ecuación es

$$\begin{aligned} p_n &= (1.15)^n (150\,000) + \left[\frac{1-(1.15)^n}{1-1.15}\right](-30\,000) \\ &= (1.15)^n (150\,000) + \left(\frac{-30\,000}{-0.15}\right)[1-(1.15)^n] \\ &= (1.15)^n (150\,000) + 200\,000\,[1-(1.15)^n] \\ &= (1.15)^n [150\,000) - 200\,000] + 200\,000 \\ &= -50\,000(1.15)^n + 200\,000 \end{aligned}$$

b) No quedan truchas en el lago cuando $p_n = 0$; es decir, cuando

$$-50\,000(1.15)^n + 200\,000 = 0$$

$$(1.15)^n = \frac{200\,000}{50\,000} = 4$$

Aplicando logaritmos en ambos miembros de esta ecuación, se obtiene que

$$\ln (1.15)^n = \ln 4$$

de modo que

$$n \ln(1.15) = \ln 4$$

$$n = \frac{\ln 4}{\ln(1.15)} = 9.92$$

Por tanto, no quedarán peces en el lago después de aproximadamente 10 años.

c) Suponga que la tasa de cosecha es h. Entonces la ecuación en diferencias se convierte en $p_n = (1.15)p_{n-1} - h$, y su solución es

$$\begin{aligned} p_n &= (1.15)^n (150\,000) + \left[\frac{1-(1.15)^n}{1-1.15}\right](-h) \\ &= (1.15)^n (150\,000) + \left(\frac{-h}{-0.15}\right)[1-(1.15)^n] \\ &= (1.15)^n \left(150\,000 - \frac{h}{0.15}\right) + \frac{h}{0.15} \end{aligned}$$

Se quiere hallar h para que el lago se quede sin peces cuando $n = 20$. Haciendo $p_{20} = 0$ y despejando h, se halla que

$$p_{20} = (1.15)^{20}\left(150\,000 - \frac{h}{0.15}\right) + \frac{h}{0.15} = 0$$

$$\frac{h}{0.15}[1-(1.15)^{20}] = -(1.15)^{20}(150\,000)$$

$$h = \frac{-0.15(1.15)^{20}(150\,000)}{1-(1.15)^{20}} = 23\,964$$

Por tanto, se pueden cosechar aproximadamente 24 000 truchas por año.

d) Si el lago debe tener truchas siempre, el n-ésimo año en el que todas las truchas desaparecen debe satisfacer $n \to \infty$. Según el cálculo del inciso c), la población de peces será 0 en el n-ésimo año si

$$p_n = (1.15)^n \left(150\,000 - \frac{h}{0.15}\right) + \frac{h}{0.15} = 0$$

www.FreeLibros.com

Al despejar h de esta ecuación se encuentra que

$$h = \frac{-0.15(1.15)^n\,(150\,000)}{1-(1.15)^n}$$

$$= \frac{0.15(1.15)^n(150\,000)}{(1.15)^n - 1} \qquad \textit{multiplique numerador y denominador por } -1$$

$$= \frac{0.15\,(150\,0000}{1-(1.15)^{-n}} \qquad \textit{multiplique numerador y denominador por } (1.15)^{-n}$$

Para hallar la tasa de pesca para el caso donde el lago siempre debe tener peces, calculamos h cuando $n \to \infty$; es decir,

$$h = \lim_{n\to\infty} \frac{0.15(150\,000)}{1-(1.15)^{-n}} = \frac{0.15(150\,000)}{1-0} \qquad \textit{porque } \lim_{n\to\infty}(1.515)^{-n} = 0$$

$$= 22\,500$$

Por tanto, si la tasa de pesca se establece en no más de 22 500 truchas por año, el lago siempre tendrá peces.

El modelo de la telaraña

En el capítulo 1 introdujimos los conceptos económicos de oferta y demanda, y definimos el equilibrio de mercado como la situación en que la oferta es igual a la demanda. En la sección 3 de este capítulo, estudiamos un modelo de ajuste de precios en el que la oferta y la demanda se consideran como funciones del precio, que cambia continuamente con el tiempo a medida que se ajustan las condiciones del mercado. Sin embargo, el equilibrio no se presenta instantáneamente por mutuo acuerdo entre productores y consumidores, si no que llega por una secuencia de ajustes discretos, y nuestra siguiente meta es describir un modelo con ecuaciones en diferencias para describir los ajustes discretos de oferta-demanda en un mercado dinámico.

A continuación se considera una sola mercancía cuyas demanda, D, y oferta, S, son funciones lineales del precio p. Como la demanda generalmente disminuye al aumentar el precio, mientras que la oferta aumenta, se puede escribir

$$D(p) = a - bp \qquad \text{y} \qquad S(p) = c + dp$$

donde a, b, c y d son constantes (a, b y d son positivas, mientras que c suele ser negativa.) El equilibrio en el mercado se alcanza cuando la oferta es igual a la demanda, es decir, para un precio p_e cuando

$$a - bp_e = c + dp_e$$

$$p_e = \frac{a-c}{b+d}$$

¡EXPLORE!

Suponga que las ecuaciones de oferta y demanda para una mercancía particular están dadas por $S(p) = 2p + 20$ y $D(p) = -3p + 30$, donde el precio p de la mercancía está en cientos de dólares. Introduzca estas dos funciones en el editor de ecuaciones, sustituyendo la variable p por x. Grafique, usando la pantalla [0, 4.7]1 por [15, 35]5. Use **TRACE** u otra función de gráficación para localizar el precio de equilibrio. Verifique, evaluando, que $p_e = \dfrac{a-c}{b+d}$.

A continuación, suponga que el precio de nuestra mercancía y por tanto su oferta y demanda se ajustan en periodos discretos de tiempo. Denote por p_{n-1} el precio prevaleciente de la mercancía durante el periodo $n-1$, y denote por D_{n-1} y S_{n-1} la demanda y la oferta correspondientes. Para ilustrar la situación, suponga que nuestra mercancía es una cosecha, por ejemplo de trigo o maíz. El productor basa el nivel de producción para el período $n-1$ en el precio p_{n-1}, pero la cosecha toma tiempo, digamos un periodo , y cuando la oferta (cosecha recogida) está lista para el mercado el precio se ha ajustado a p_n para que la oferta $S_n = c + dp_{n-1}$ satisfaga la actual demanda $D_n = a - bp_n$. Los productores entonces usan este nuevo precio p_n como

www.FreeLibros.com

indicador para determinar el nivel de producción para el n-ésimo periodo, y así, el proceso continúa.

Durante cada ciclo, la oferta debe ser igual a la demanda, de modo que se debe tener

$$\underset{\text{oferta } S_n}{c + dp_{n-1}} = \underset{\text{demanda } D_n}{a - bp_n}$$

que es una ecuación en diferencias que puede rescribirse en forma lineal de primer orden como sigue:

$$c + dp_{n-1} = a - bp_n$$
$$bp_n = a - (c + dp_{n-1})$$
$$p_n = \left(\frac{-d}{b}\right)p_{n-1} + \left(\frac{a-c}{b}\right)$$

Sustituyendo en nuestra fórmula para la solución general de una ecuación en diferencias, lineal, de primer orden, se tiene que

$$p_n = \left(\frac{-d}{b}\right)^n p_0 + \left[\frac{1-(-d/b)^n}{1-(-d/b)}\right]\left(\frac{a-c}{b}\right)$$
$$= \left(\frac{-d}{b}\right)^n p_0 + \left(\frac{a-c}{b+d}\right)\left[1 - \left(\frac{-d}{b}\right)^n\right]$$
$$= \left(\frac{-d}{b}\right)^n \left[p_0 - \left(\frac{a-c}{b+d}\right)\right] + \left(\frac{a-c}{b+d}\right)$$

donde p_0 es el precio inicial de la mercancía.

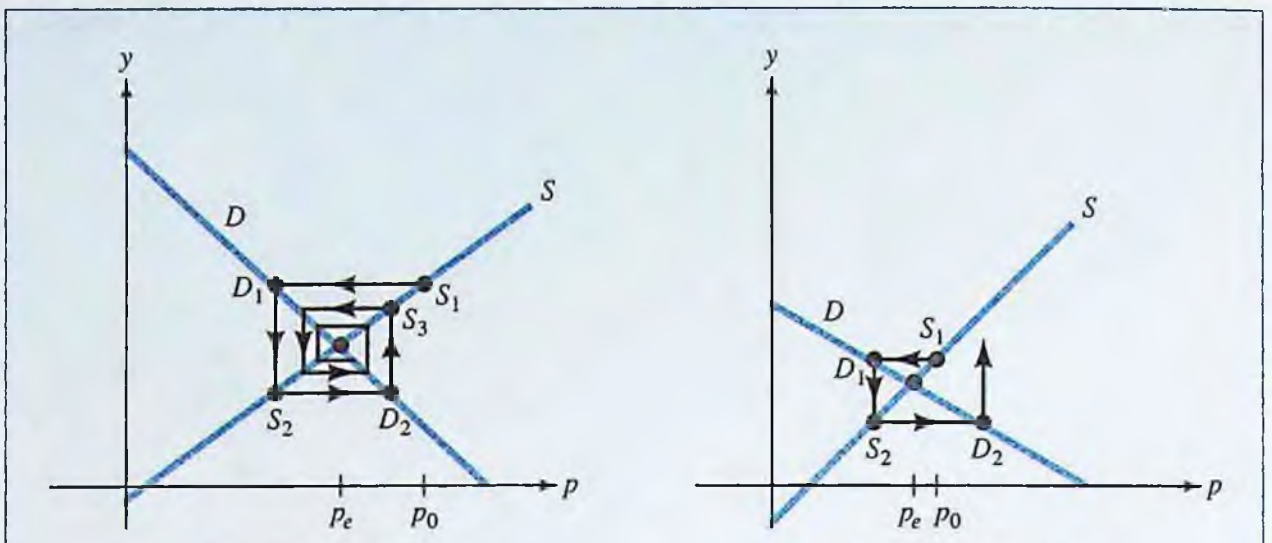
Si $d < b$, entonces $(-d/b)^n$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$ y, sin importar cuál sea el precio inicial p_0, el precio p_n se aproximará al precio de equilibrio $p_e = (a - c)/(b + d)$, cuando $n \to \infty$. Sin embargo, si $d > b$, el término $(-d/b)^n$ crecerá más y más en valor absoluto, mientras que si $d = b$, entonces $(-d/b)^n = (-1)^n$ oscilará entre 1 y -1. En ambos casos, la sucesión de precios $p_0, p_1, p_2, \ldots$ no convergerá. Como d es la pendiente de la recta de oferta, ella mide la tasa de aumento de la oferta y, del mismo modo, b mide la tasa de disminución de la demanda. Por tanto, el resultado que se acaba de obtener se puede interpretar como que la sucesión de precios $p_0, p_1, p_2, \ldots$ converge al precio de equilibrio si y sólo si la tasa de disminución de la demanda excede a la tasa de aumento de la oferta. En otras palabras, para que haya convergencia, *los proveedores deben ser menos sensibles a los cambios de precio que los consumidores.*

El modelo que se acaba de describir se denomina **modelo de la telaraña.** Para ver por qué, observe las dos figuras de la figura 8.15. Las rectas de oferta y demanda se muestran en ambas figuras. El punto de equilibrio del mercado ocurre donde las rectas se cruzan, y el precio de equilibrio p_e es el precio que corresponde al punto de intersección. En la figura 8.15*a*, se ve la trayectoria de oferta y demanda sobre varios periodos en el caso donde $d < b$. Nótese que el precio inicial p_0 determina la oferta S_1 en el primer periodo, que a su vez determina la demanda D_1 en ese periodo y el precio p_2, tal que $S_1 = D_1$. Entonces p_2 determina la oferta S_2 en el segundo periodo, y así sucesivamente. La trayectoria seguida de este modo se parece a una telaraña que converge hacia dentro, hacia el punto de equilibrio. La figura 8.15*b* muestra el caso donde $d > b$. Observe que el espiral de la "telaraña" se mueve hacia afuera, es decir, diverge del punto de equilibrio.

¡EXPLORE!

Vea el modelo de la telaraña en las páginas 640 y 641. Ponga su calculadora graficadora en **MODE** de sucesión y escriba **u(n) = (−2/3)u(n − 1) + (10/3)** en el editor de ecuaciones, con $p_0 = u(0) = 3$ ($300), que representa la función recursiva p_n. Calcule los valores de $p_n = u(n)$ para $n = 1$ a 6, así como los correspondientes valores para $S(p) = 2p + 20$ y $D(p) = -3p + 30$. Examine los valores de p_n para determinar si la espiral de la telaraña converge o diverge. Verifique, comparando los valores d y b. Repita con el precio inicial de $100 ($p_0 = 1$).

www.FreeLibros.com



a) Caso donde $d < b$: la trayectoria de telaraña de oferta/demanda converge al equilibrio.

b) Caso donde $d > b$: el espiral de la trayectoria de telaraña se mueve hacia afuera.

FIGURA 8.15 Progresión de oferta y demanda en el modelo de la telaraña.

Ecuaciones en diferencias y ecuaciones diferenciales

Cuando se modela con ecuaciones en diferencias, la diferencia $y_n - y_{n-1}$ entre términos consecutivos se emplea en forma muy semejante a como se usa la derivada $\frac{dy}{dx}$ cuando se modela con una ecuación diferencial. Continuando con la analogía, el cociente

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{y_{n-1}}$$

se utiliza para representar la tasa de cambio relativa o porcentual en un modelo discreto.

Por ejemplo, suponga que se observa que una especie de peces se reproduce a una tasa de 15% al año. Entonces la población de peces F_n después de n años puede ser modelada por la ecuación en diferencias

$$\frac{F_n - F_{n-1}}{F_{n-1}} = 0.15$$

o, de manera equivalente, por

$$F_n - F_{n-1} = 0.15F_{n-1}$$

Por otra parte, si deseamos modelar la población de peces como una función continua, $F(t)$, del tiempo t, podríamos representar este crecimiento por la ecuación diferencial análoga

$$\frac{dF}{dt} = 0.15F$$

Los resultados obtenidos con las ecuaciones en diferencias pueden ser algo distintos de los obtenidos usando las ecuaciones diferenciales análogas. Por ejemplo, en el ejemplo 8.5.5, se empleó la ecuación en diferencias

$$y_n - y_{n-1} = ry_{n-1} - A$$

para modelar la deuda total y_n acumulada después de n años, cuando el interés se capitaliza continuamente a una tasa anual r, y se pagan A dólares anualmente para reducir la deuda. Un modelo análogo en el que la deuda $Q(t)$ es considerada como una función continua del tiempo t plantea la ecuación diferencial

$$\frac{dQ}{dt} = rQ - A$$

www.FreeLibros.com

Si se usan los métodos estudiados en la sección 8.2 para resolver esta ecuación, sujeta a la condición inicial $Q(0) = D$ (la deuda inicial), encontramos que

$$Q(t) = \left(D - \frac{A}{r}\right)e^{rt} + \frac{A}{r}$$

(como práctica, el estudiante debe verificar este resultado). Si la deuda debe amortizarse en un término de n años, entonces se desea que $Q(n) = 0$, de modo que

$$0 = Q(n) = \left(D - \frac{A}{r}\right)e^{rt} + \frac{A}{r}$$

Despejando A en esta ecuación, se tiene

$$\left(D - \frac{A}{r}\right)e^{rt} = \frac{-A}{r} \qquad \textit{reste } \frac{A}{r} \textit{ en ambos miembros}$$

$$D - \frac{A}{r} = \frac{-A}{r}e^{-rt} \qquad \textit{multiplique ambos miembros por } e^{-rt}$$

$$D = (1 - e^{-rt})\frac{A}{r} \qquad \textit{sume } \frac{A}{r} \textit{ en ambos miembros y saque factor común}$$

$$A = \frac{rD}{1 - e^{-rt}} \qquad \textit{multiplique ambos miembros por } \frac{r}{1 - e^{-rt}}$$

Note las semejanzas y diferencias entre esta fórmula de amortización continua y la fórmula discreta hallada en el ejemplo 8.5.5. Por ejemplo, si la deuda inicial es $D = 10\,000$ dólares y la tasa de interés anual es de 8% ($r = 0.08$), entonces el modelo discreto nos dice que la deuda se amortizará en un término de $n = 10$ años, haciendo pagos de

$$A = \frac{0.08\,(10\,000)}{1 - (1 + 0.08)^{-10}} = 1\,490.29$$

mientras que el modelo continuo da pagos anuales de

$$A = \frac{0.08\,(10\,000)}{1 - e^{-0.08(10)}} = 1\,452.77$$

La diferencia es que, en el caso discreto, el pago se hace una vez al año como suma total, mientras que en el caso continuo el pago anual se supone que se reparte continuamente durante todo el año.

PROBLEMAS | 8.5

En los problemas del 1 al 8 escriba los cinco primeros términos del problema de valor inicial dado.

1. $y_n = 3y_{n-1}\,;\, y_0 = 1$

2. $y_n = y_{n-1} + 2\,;\, y_0 = 0$

3. $y_n = y_{n-1}^2\,;\, y_0 = 1$

4. $y_n = y_{n-1}^2 + (1 - y_{n-1})y_{n-1}\,;\, y_0 = 1$

5. $y_{n+1} = y_n + y_{n-1}\,;\, y_0 = 1, y_1 = 1$

6. $y_{n+1} = y_n^2 - 2y_{n-1}\,;\, y_0 = -1, y_1 = 0$

7. $y_{n+1} = \dfrac{y_n}{y_n + 2}\,;\, y_0 = 1$

8. $y_{n+1} = \dfrac{y_n}{y_{n-1} + 1}\,;\, y_0 = 0, y_1 = 1$

www.FreeLibros.com

En los problemas 9 y 10 encuentre las constantes A y B de modo que la expresión dada yn satisfaga la ecuación en diferencias especificada.

9. $ny_n + (n-1)y_{n-1} = 2n - 3\,;\; y_n = A + \dfrac{B}{n}$

10. $y_{n+1} = y_n + n\,;\; y_n = An^2 + Bn$

En los problemas del 11 al 17 resuelva el problema de valor inicial lineal de primer orden dado.

11. $y_n = -y_{n-1}\,;\; y_0 = 1$

12. $y_n = 2y_{n-1} + 3\,;\; y_0 = 0$

13. $y_n = \dfrac{1}{2}y_{n-1} + 1;\; y_0 = 0$

14. $y_n = \dfrac{-1}{2}y_{n-1} - \dfrac{1}{4};\; y_0 = 10$

15. $y_n - y_{n-1} = \dfrac{1}{8}y_{n-1} + \dfrac{1}{4};\; y_0 = 0$

16. $y_n - y_{n-1} = \dfrac{-1}{2}y_{n-1} + \dfrac{1}{3};\; y_0 = 1$

17. $y_n - y_{n-1} = \dfrac{1}{10}y_{n-1};\; y_0 = 10$

18. **CUENTA DE AHORROS** Tom deposita $1 000 en una cuenta que paga 5% de interés, capitalizado anualmente. Plantee y resuelva un problema de valor inicial para hallar la cantidad de dinero A_n en la cuenta después de n años.

19. **CUENTA DE AHORROS** Al igual que Tom en el Problema 18, Sally invierte $1 000 en una cuenta que paga 5% de interés capitalizado anualmente. Pero ella también hace depósitos adicionales de $50 al término de cada año. Plantee y resuelva un problema de valor inicial para hallar la cantidad de dinero A_n en la cuenta después de n años.

20. **ESPECULACIÓN EN EL MERCADO DE ACCIONES** Jake invierte en una acción especulativa cuyo precio p_n al término de cada mes satisface el problema de valor inicial

$$p_n = -0.1p_{n-1} + 300 \quad \text{donde } p_0 = 100$$

¿Cuánto valdrá su inversión después de n meses?

21. **POBLACIÓN ANIMAL CON CACERÍA** La población de zorros en cierta región es inicialmente de 50 000 y se encuentra que crece a razón de 8% al año. A los cazadores se les permite "cosechar" h zorros por año.

a) Si $h = 2\,000$, ¿cuál es la población de zorros después de n años?

b) ¿Cuál debe ser h para que la población de zorros permanezca igual de un año a otro?

22. **PROPAGACIÓN DE UNA ENFERMEDAD** Una enfermedad se propaga, en forma tal, que el número de personas expuestas durante el mes n es proporcional al número de personas susceptibles de la población que todavía no se infectan. Esto es, si S_n es el número de personas enfermas en una población susceptible P, entonces

$$S_{n+1} - S_n = k(P - S_n)$$

Suponga que 10 000 personas de una comunidad son susceptibles a una nueva variedad de gripe. Si 500 personas tienen inicialmente la enfermedad y 700 están recién infectados durante el primer mes, ¿cuántos tendrán la enfermedad n meses después del brote? ¿Qué ocurre a S_n "a largo plazo" (cuando $n \to \infty$)?

23. **PROPAGACIÓN DE UNA ENFERMEDAD CON CURA** En el problema 22, suponga que 20% de las personas que tienen la enfermedad al término del mes $n - 1$ se curan durante el n mes.

a) Rescriba la ecuación en diferencias del Problema 22 para tomar en cuenta esta nueva característica.

b) Ahora, ¿cuántas personas tendrán la enfermedad n meses después del brote? ¿Qué ocurre a S_n cuando $n \to \infty$ en este caso?

24. **RECICLADO** Allison tiene una biblioteca de 1 200 libros en rústica. Cada año, ella dona 15% de los libros que tiene y compra 135 libros nuevos. Plantee y resuelva una ecuación en diferencias para el número de libros B_n de la biblioteca al término del n-ésimo año. ¿Cuántos libros tendrá al término del décimo año? ¿Cuántos tendrá "a largo plazo"?

25. **ADMINISTRACIÓN DE EMPRESAS** Una empresa de renta de autos posee actualmente 300 autos. Cada año, la compañía planea deshacerse de 25% de su flota de autos y sumar 50 autos nuevos.

a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para hallar el número de autos C_n de la flota al término del *n-ésimo* año.

b) ¿Cuántos autos habrá en la flota después de 10 años? ¿Qué tan grande será la flota "a largo plazo"?

26. **PAGOS DE HIPOTECA** Una persona hace un pago inicial de $35 000 por una casa de $350 000 y

www.FreeLibros.com

toma una hipoteca a 30 años por el saldo. Si la tasa de interés es de 6% al año, capitalizado anualmente, ¿cuáles son los pagos mensuales de la hipoteca?

27. PAGOS A PLAZOS Martín hace un pago inicial de $3 000 por un auto nuevo de $25 000 y pagará el saldo con pagos parciales mensuales en los siguientes 5 años. ¿Cuáles son sus pagos mensuales si la tasa de interés es 8% anual, capitalizado mensualmente?

28. PAGOS A PLAZOS Joan solicita un préstamo de $5 000 a 24 meses y 9% de interés, capitalizado mensualmente. Si el préstamo debe pagarse en pagos parciales de $200 con un pago final global de A dólares al final del plazo de 24 meses, ¿cuál es A?

29. FONDO DE AMORTIZACIÓN Evelyn tiene un plan de ahorros en nómina, en el que cierta cantidad fija A se toma de su cheque mensual y se pone en una cuenta que gana 5% de interés anual capitalizado mensualmente. ¿Cuál debe ser A para que Evelyn ahorre $7 000 para viajar a China dentro de 3 años?

30. POBLACIÓN Suponga que el número de hembras en la n-ésima generación de la población de cierta especia está dada por P_n. Suponga además que, en promedio, cada hembra de la generación $n - 1$ procrea b hijas y que, en cada generación, se espera que fallezcan d hembras, donde b y d son constantes positivas.

a) Plantee y resuelva una ecuación en diferencias para hallar P_n en términos de b, d y la población inicial de hembras $P_0 = P(0)$.

b) Suponga que $P_0 = 100$, $b = 0.2$, y $d = 15$. ¿Cuál será la población de hembras de la décima generación? ¿Qué ocurre a la población de hembras a largo plazo (cuando $n \to \infty$)?

31. INGRESO NACIONAL En el modelo clásico de Harrod-Hicks[2] de una economía nacional en expansión, se supone que si I_n denota el ingreso nacional al término del n-ésimo año, entonces el cambio del ingreso nacional durante ese año está dado por la ecuación en diferencias

$$I_n - I_{n-1} = cI_{n-1} - h$$

donde c y h son constantes positivas (c es la *propensión marginal a consumir*). Resuelva esta ecuación para hallar I_n en términos de c, h y del ingreso nacional inicial $I_0 = I(0)$.

32. GENÉTICA Ciertas enfermedades genéticas pueden ser modeladas por una ecuación en diferencias de la forma

$$f_{n+1} = \frac{f_n}{1 + f_n}$$

donde f_n es la frecuencia relativa de un gene recesivo y productor de una enfermedad, en la n-ésima generación, suponiendo que los individuos portadores del gene recesivo no se reproducen (recuerde el ejemplo 8.5.2). Esta ecuación en diferencias no es lineal de primer orden, pero es posible resolverla si se procede como sigue:

a) Demuestre que si $g_n = 1/f_n$, entonces g_n satisface la ecuación en diferencias lineal de primer orden $g_n = Ag_{n-1} + B$ para ciertas constantes A y B.

b) Despeje g_n de la diferencia en el inciso *a*) y luego use este resultado para hallar una fórmula para f_n.

c) Lea un artículo sobre genética de población y escriba un párrafo sobre métodos matemáticos de modelación de enfermedades genéticas.[3]

33. CRECIMIENTO LOGÍSTICO Una forma alternativa de la ecuación diferencial logística analizada en la sección 8.1 es

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right)$$

Estas ecuaciones se emplean con frecuencia en modelos continuos para poblaciones $P(t)$ que crecen rápidamente al principio, pero que luego lo hacen lentamente y por último se aproximan a la capacidad máxima K cuando $t \to \infty$. La ecuación en diferencias análoga

$$P_n - P_{n-1} = kP_{n-1}\left(1 - \frac{1}{K}P_{n-1}\right)$$

recibe el nombre de *ecuación logística discreta* y es una herramienta útil en la modelación discreta, en especial en biología.

a) Suponga que una población particular es modelada por una ecuación logística discreta. Se dice que la población alcanza un nivel L de *equilibrio* si $P_m = P_{m+1} = L$ para alguna m. Demuestre que una población a un nivel de equilibrio se queda ahí, es decir, $P_n = L$ para toda $n > m$.

b) La población de cierta colonia de bacteria se registra a intervalos discretos. Sea P_n la población (en miles) en la n-ésima observación, y suponga que $P_0 = 50$ (es decir, 50 000), $P_1 = 55$, y

[2] J. R. Hicks, "Mr. Harrod's Dynamic Theory", *Economica*, New Series, Vol. 16, pp. 106-121. En este texto se puede hallar una exposición que merece la pena de leerse respecto a aplicaciones de ecuaciones de diferencia a la economía, *Introduction to Difference Equations*, por Samuel Goldberg, Wiley, Nueva York, 1958; pp. 93-96.

[3] Un buen lugar para empezar es el texto "*Introduction to Dynamic Systems*", de David G. Luenberger, Wiley, Nueva York, 1979, pp. 382-389.

www.FreeLibros.com

$P_2 = 60$. Si la población se modela con una ecuación logística discreta, use esta información para hallar K y k y el nivel L de equilibrio.

c) Plantee y resuelva una ecuación diferencial logística análoga para la población de bacteria del inciso *b*), considerada como una función continua $P(t)$ del tiempo t, donde $P(0) = 50$, $P(1) = 55$, y $P(2) = 60$. Compare con los resultados obtenidos para el modelo discreto del inciso *b*).

34. APRENDIZAJE Considere un experimento en el que un sujeto recibe un estímulo repetidas veces, el cual puede ser considerado como "prueba". Cada vez que se presenta la prueba, se pide al sujeto que conteste, y si la respuesta es "positiva," se da una recompensa. Por ejemplo, una rata se puede colocar en un laberinto (el estímulo). Si responde eligiendo el camino "correcto", es recompensada con alimento, mientras que un camino "incorrecto" la lleva a no recibir alimento, o a recibir una pequeña descarga eléctrica.[4]

Suponga que, en nuestro experimento, p_n (para $0 \le p_n \le 1$) es la probabilidad de que el sujeto "tenga éxito" en la prueba en el n-ésimo intento. Suponga que el cambio del rendimiento $p_n - p_{n-1}$ entre los intentos $n - 1$ y n satisface la ecuación en diferencias

$$p_n - p_{n-1} = A(1 - p_{n-1}) - Bp_{n-1}$$

donde A y B son parámetros que satisfacen $0 < A < 1$ y $0 < B < 1$. El parámetro A puede ser considerado como una medida del valor de una recompensa para el sujeto, mientras que $-B$ mide el impacto negativo de un castigo.

a) De la ecuación en diferencias despeje p_n en términos de A, B y la probabilidad p_0 de que el sujeto tenga éxito inmediato.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el sujeto tenga éxito en la prueba a largo plazo (cuando el número de intentos aumente indefinidamente)?

c) Suponga que la probabilidad $p(t)$ varía continuamente con el tiempo t. Plantee y resuelva una ecuación diferencial análoga para hallar $p(t)$. Compare esta solución con la solución al problema discreto hallado en el inciso *a*). En particular, estos dos modelos ¿dan la misma probabilidad de éxito?

d) Escriba un párrafo sobre cuál modelo (discreto o continuo) piensa usted que es más apropiado para este experimento.

[4] El modelo de aprendizaje del problema 34 se adaptó de un modelo clásico desarrollado por R. R. Bush y F. Mosteller, descrito en *Introduction to Difference Equations*, por Samuel Goldberg, Wiley, Nueva York, 1958; pp. 103-107.

35. RENOVACIÓN DE MONEDA Una nación tiene \$5 mil millones de moneda. Todos los días, unos \$18 millones entran a los bancos de la nación y sale la misma cantidad. Suponga que el país decide que cada billete de dólar que entre a un banco sea destruido y sustituido por un nuevo estilo de moneda.

a) Plantee y resuelva una ecuación en diferencias para la cantidad de moneda nueva C_n en circulación al principio del n-ésimo día después de empezar la renovación de moneda. Puede usted suponer que $C_0 = 0$

b) ¿Cuánto tiempo transcurre antes que el 90% de la moneda en circulación sea nueva?

c) Compare los resultados que acaba de obtener, para su modelo discreto de moneda, con el modelo continuo análogo analizado en el problema 28 del conjunto de problemas 8.3. En particular, ¿los dos modelos dan el mismo periodo para la renovación del 90% de la moneda?

d) Escriba un párrafo sobre cuál de los dos modelos (discreto o continuo) piensa usted que es más apropiado para describir el proceso de renovación.

MODELO DE LA TELARAÑA *En los problemas del 36 al 39* p *es el precio de una mercancía particular y* S(p) *y* D(p) *son las funciones correspondientes de oferta y demanda. Suponga que estas cantidades se registran en una sucesión de periodos regulares, y sean* p_n, S_n, *y* D_n *el precio, la oferta, y la demanda, respectivamente, durante el n-ésimo periodo. En cada caso:*

a) *Encuentre el precio de equilibrio* p_e.

b) *Plantee y resuelva una ecuación en diferencias para hallar una fórmula para* p_n.

c) *Encuentre* p_n, S_n *y* D_n *para* $n = 1,2$ *y* 3, *y luego trace la correspondiente gráfica de telaraña para los primeros tres periodos.*

36. $S_n = 1.5p_{n-1} - 2$; $D_n = -2p_n + 3$; $p_0 = 2$

37. $S_n = 3p_{n-1} - 2$; $D_n = -p_n + 1.3$; $p_0 = 1$

38. $S_n = 5p_{n-1} - 1$; $D_n = -0.7p_n + 3.5$; $p_0 = 1$

39. $S_n = 2p_{n-1} - 1$; $D_n = -2p_n + 7$; $p_0 = 3$

40. *a*) Demuestre que para $a \neq 1$,

$$S_n = a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1 = \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

[*Sugerencia:* ¿A qué es igual $S_n - aS_{n-1}$?]

b) Demuestre que

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - a} \text{ si } |a| < 1 \\ \infty \text{ si } a = 1 \end{cases}$$

¿Qué pasa cuando $a = -1$?

www.FreeLibros.com

Términos importantes, símbolos y fórmulas

Ecuación diferencial (588)

Solución general (588)

Solución particular (588)

Ecuación diferencial de variables separables:

Forma: (591)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h(x)}{g(y)}$$

Solución: (591)

$$\int g(y)\,dy = \int h(x)\,dx$$

Modelos de crecimiento y decaimiento exponenciales:

Ecuación: (593)

$$\frac{dQ}{dt} = mQ \qquad \text{con } Q(0) = Q_0$$

Solución: (593)

$$Q(t) = Q_0 e^{mt}$$

Modelos de aprendizaje:

Ecuación: (594)

$$\frac{dQ}{dt} = k(B - Q)$$

Solución: (594)

$$Q(t) = B - Ae^{-kt}$$

Modelos logísticos de crecimiento:

Ecuación: (595)

$$\frac{dQ}{dt} = kQ(B - Q)$$

donde B es la capacidad máxima

Solución: (597)

$$Q(t) = \frac{B}{1 + Ae^{-Bkt}}$$

Ecuación diferencial lineal de primer orden:

Forma: (602)

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Factor integrante: (603)

$$I(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Solución: (603)

$$y = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)q(x)\,dx + C\right]$$

Modelos de dilución (606)

Modelo de ajuste de precios (614)

Ley de enfriamiento de Newton (616)

Trayectorias ortogonales (618)

Ecuaciones diferenciales acopladas (620

Campos de pendientes (625)

Método de Euler (627)

Ecuaciones en diferencias (632)

Ecuación en diferencias lineal de primer orden:

Forma: (635)

$$y_n = ay_{n-1} + b \qquad \text{con valor inicial } y_0$$

Solución: (636)

$$y_n = a^n y_0 + \left(\frac{1 - a^n}{1 - a}\right)b$$

Amortización de una deuda (637)

El modelo de la telaraña (640)

Revisión del capítulo 8

1. Encuentre la solución general para cada una de la siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{x^2 + 1}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} + x^3$

c) $\dfrac{dy}{dx} = xe^{y-x}$

2. En cada caso, encuentre la solución particular de la ecuación diferencial dada que satisfaga la condición indicada.

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2}{x^2y}$ donde $y = 1$ cuando $x = -1$

b) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = 5$ donde $y = 0$ cuando $x = 1$

c) $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{xy}{x^2 + 1} = x$ donde $y = 0$ cuando $x = 0$

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

3. Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones en diferencias sujetas a la condición inicial indicada.

a) $y_n = \frac{-1}{2} y_{n-1}\,;\, y_0 = -1$

b) $y_n - y_{n-1} = \frac{1}{3} y_{n-1}\,;\, y_0 = 2$

c) $y_n - y_{n-1} = \frac{1}{4} y_{n-1} - \frac{1}{2}\,;\, y_0 = 0$

4. Trace un campo de pendientes para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, y use el campo para trazar la gráfica de la solución que pasa por el punto especificado.

a) $y' = 2x - y\,;\, (0, 0)$

b) $y' = x^2 - y^2;\, (1, 1)$

c) $y' = \frac{y}{x+1}\,;\, (0, 0)$

En los problemas 5 y 6 plantee una ecuación diferencial que describa la situación dada. (No trate de resolver la ecuación.)

5. CONTAMINACIÓN DEL AGUA La cantidad $P(t)$ de contaminación en un arroyo t días después de un derrame industrial, disminuye con respecto al tiempo a una razón igual al 11% de la cantidad presente en ese momento.

6. AJUSTE DE PRECIO El precio $p(t)$ de una mercancía cambia con respecto al tiempo con una razón que es proporcional al excedente $S(p) - D(p)$, donde S y D son la oferta y demanda, respectivamente.

7. MEDICACIÓN A un niño se le aplica una inyección con A_0 mg de un anestésico y, t horas después, la cantidad $A(t)$ del medicamento todavía presente en el torrente sanguíneo del niño está disminuyendo con respecto al tiempo a una razón proporcional a $A(t)$. Transcurren 4 horas para eliminar la mitad de la dosis original de medicamento, y el anestésico pierde efecto cuando la sangre contiene menos de 1 800 mg. ¿Qué dosis A_0 debe administrarse para garantizar que el niño permanecerá anestesiado durante una operación de 2 horas?

8. CRECIMIENTO DE UNA INVERSIÓN Un gerente de inversiones determina que el valor $V(t)$ de cierta inversión está creciendo con respecto al tiempo a una razón proporcional a V^2. El valor inicial de la inversión fue de \$10 000 y tardó 10 años en duplicarse. ¿Cuánto tardará para que la inversión valga \$50 000?

9. DILUCIÓN Un tanque de 500 galones contiene inicialmente 200 galones de agua salada que contienen 75 libras de sal disuelta. En el tanque entra agua salada que contiene 2 libras de sal por galón, a razón de 4 galones por minuto, y la mezcla bien agitada sale a razón de 1 galón por minuto. Plantee y resuelva una ecuación diferencial para hallar la cantidad de sal $A(t)$ del tanque en el momento t. ¿Cuánta sal habrá en el tanque cuando esté lleno?

10. OFERTA Y DEMANDA La oferta S_n y la demanda D_n de cierta mercancía durante el n-ésimo periodo para $n = 1, 2, \ldots$ están dadas por

$$S_n = 20 + p_{n-1} \qquad \text{y} \qquad D_n = 50 - 2p_n$$

donde p_n es el precio de la mercancía durante el n-ésimo periodo. El precio inicial de la mercancía es $p_0 = 20$.

a) Encuentre el precio de equilibrio p_e.

b) Plantee y resuelva una ecuación en diferencias para hallar una fórmula para p_n.

c) Trace una gráfica de telaraña para los primeros tres periodos.

Problemas de repaso

En los problemas 1 al 12 encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada.

1. $\frac{dy}{dx} = x^3 - 3x^2 + 5$

2. $\frac{dy}{dx} = 0.02y$

3. $\frac{dy}{dx} = k(80 - y)$

4. $\frac{dy}{dx} = y(1 - y)$

5. $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ [*Sugerencia:* $e^{x+y} = e^x e^y$.]

6. $\frac{dy}{dx} = ye^{-2x}$

www.FreeLibros.com

7. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{4y}{x} = e^{-x}$

8. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{x+1}$

9. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x+1} = \dfrac{4}{x+2}$

10. $x^3\dfrac{dy}{dx} + xy = 5$

11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\ln x}{xy}$

12. $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x-y}$ $\left[\textit{Sugerencia: } e^{2x-y} = \dfrac{e^{2x}}{e^{y}}.\right]$

En los problemas 13 al 24 encuentre la solución particular de la ecuación diferencial dada que satisfaga la condición indicada.

13. $\dfrac{dy}{dx} = 5x^4 - 3x^2 - 2$; $y = 4$ cuando $x = 1$

14. $\dfrac{dy}{dx} = 3 - y$; $y = 2$ cuando $x = 0$

15. $\dfrac{dy}{dx} = 0.06y$; $y = 100$ cuando $x = 0$

16. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{x}$; $y = -1$ cuando $x = 1$

17. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{5y}{x} = x^2$; $y = 4$ cuando $x = -1$

18. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x+1} = x$; $y = 0$ cuando $x = 3$

19. $\dfrac{dy}{dx} - xy = e^{x^2/2}$; $y = 4$ cuando $x = 0$

20. $\dfrac{dy}{dx} + 3x^2y = x^2$; $y = 2$ cuando $x = 0$

21. $\dfrac{dy}{dx} = y \ln \sqrt{x}$; $y = -4$ cuando $x = 1$

22. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\ln x}{y}$; $y = 100$ cuando $x = 1$

23. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy}{\sqrt{1-x^2}}$; $y = 2$ cuando $x = 0$

24. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2$; $y = 5$ y $\dfrac{dy}{dx} = 3$ cuando $x = 0$

En los problemas 25 al 30 encuentre la solución de la ecuación en diferencias lineal de primer orden dada, que satisfaga la condición inicial indicada.

25. $y_n = y_{n-1} + 2$; $y_0 = 1$

26. $y_n = -8y_{n-1}$; $y_0 = 1$

27. $y_n - y_{n-1} = 3$; $y_0 = 1$

28. $y_n - y_{n-1} = -1$; $y_0 = -2$

29. $y_n - 5y_{n-1} = 2$; $y_0 = 2$

30. $y_n - 2y_{n-1} = 8$; $y_0 = -1$

En los problemas 31 al 36 trace un campo de pendiente para la ecuación diferencial dada y use el campo para trazar la gráfica de la solución particular que pase por el punto indicado.

31. $y' = 3x - y$; $(1, 0)$

32. $y' = 3 - x + y$; $(0, 0)$

33. $y' = x + y^2$; $(1, 1)$

34. $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$; $(1, 1)$

35. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$; $(1, 0)$

36. $y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$; $(0, 1)$

En los problemas 37 al 40 use el método de Euler, con el tamaño de paso h, y el número de incrementos n, indicados para obtener una solución aproximada del problema de valor inicial dado.

37. $y' = 3x - y$; $y(0) = 0$; $h = 0.1$; $n = 5$

38. $y' = x + xy$; $y(0) = 1$; $h = 0.1$; $n = 4$

39. $y' = \dfrac{y}{x} + y$; $y(1) = 1$; $h = 0.2$; $n = 4$

40. $y' = \sqrt{x} + \sqrt{y}$; $y(0) = 0$; $h = 0.2$; $n = 5$

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

En los problemas del 41 al 44 use el método de Euler con el tamaño de paso indicado h para estimar la solución del problema de valor inicial dado.

41. $y' = x + 4y$; $y(0) = 1$; estime $y(1)$ usando $h = 0.2$

42. $y' = \dfrac{y}{x}$; $y(1) = 0$; estime $y(2)$ usando $h = 0.2$

43. $y' = e^{-xy}$; $y(0) = 0$; estime $y(2)$ usando $h = 0.4$

44. $y' = \ln(xy)$; $y(1) = 1$; estime $y(3)$ usando $h = 0.4$

45. RECORDAR Algunos sicólogos piensan que cuando a una persona se le pide que recuerde un conjunto de datos, la razón con la que los datos son recordados es proporcional al número de datos en la memoria del sujeto que todavía no han sido recordados. Suponga que a un sujeto se le presenta una lista de A datos, y que en el momento $t = 0$, el sujeto no sabe ninguno de estos datos. Plantee y resuelva una ecuación diferencial para hallar el número de datos $N(t)$ que han sido recordados como función del tiempo t.

46. DECAIMIENTO DE UNA BIOMASA Un investigador determina que cierta proteína con masa $m(t)$ gramos, en el momento t (horas), se desintegra en aminoácidos a una razón conjuntamente proporcional a $m(t)$ y t. Experimentos realizados indican que la mitad de cualquier muestra dada se desintegrará en 12 horas.

a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para $m(t)$.

b) ¿Qué fracción de una muestra dada estará presente después de 9 horas?

47. DILUCIÓN Un tanque tiene actualmente 200 galones de agua salada con 3 libras de sal por galón.Al tanque entra agua limpia a razón de 4 galones por minuto, mientras que la mezcla, que se mantiene homogénea por agitación, sale del tanque con la misma razón. ¿Cuánta sal habrá en el tanque después de 100 minutos?

48. DILUCIÓN Un tanque de 200 galones tiene actualmente 30 libras de sal disuelta en 50 galones de agua. Agua salada que contiene 2 libras de sal por galón entra al tanque a razón de 2 galones por minuto, y la mezcla, que se mantiene homogénea por agitación, sale del tanque a razón de 1 galón por minuto.

a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para hallar la cantidad de sal $S(t)$ en la solución en el momento t.

b) ¿Cuántos galones de solución hay en el tanque cuando hay 40 libras de sal en la solución?

c) ¿Cuánta sal habrá en el tanque cuando se derrame?

49. CRECIMIENTO DE POBLACIÓN Un demógrafo estima que factores ambientales ponen un límite superior de 10 millones de personas a la población de cierto país. En cada momento t, la población $P(t)$ está creciendo a una razón que es conjuntamente proporcional a la población actual P y a la diferencia entre el límite superior y P. Suponga que la población de este país era de 4 millones en 2000 y 7.4 millones en 2004. Plantee y resuelva una ecuación diferencial para hallar $P(t)$. ¿Cuál será la población en 2010?

50. INGRESO PARA EL RETIRO Un jubilado deposita S dólares en una cuenta que gana intereses a una tasa anual r, capitalizada continuamente, y cada año retira W dólares.

a) Explique por qué la cuenta cambia a razón de

$$\frac{dV}{dt} = rV - W$$

donde $V(t)$ es el valor de la cuenta t años después de iniciada. Resuelva esta ecuación diferencial para expresar $V(t)$ en términos de r, W y S.

b) Frank y Jessie Jones depositan $500 000 en una cuenta que paga 5% de interés capitalizado continuamente. Si retiran $50 000 al año, ¿cuánto habrá en su cuenta al término de 10 años?

c) ¿Qué cantidad anual W pueden retirar Frank y Jessie anualmente, si su objetivo es mantener su cuenta sin cambio en $500 000?

d) Si Frank y Jessie deciden retirar $80 000 anualmente, ¿cuánto tiempo tardan en agotar su cuenta? [Es decir, cuando $V(t)$ sea 0?]

51. CONCENTRACIÓN DE GLUCOSA EN LA SANGRE Se inyecta glucosa en el torrente sanguíneo de un paciente a una razón R y, a cada momento t, se convierte y secreta a una razón proporcional a la concentración presente de glucosa $C(t)$.

a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para hallar $C(t)$. Exprese su respuesta en términos de R, la constante de proporcionalidad k (la constante de eliminación) y la concentración inicial de glucosa $C_0 = C(0)$.

b) Demuestre que a largo plazo (cuando $t \to \infty$) la concentración de glucosa se aproxima a un nivel que depende sólo de r y k y no de la concentración inicial C_0.

www.FreeLibros.com

c) Encuentre una expresión para el tiempo T necesario para que la mitad de la concentración inicial C_0 sea eliminada. (Nótese que esta "vida media" depende de C_0 a menos que $C_0 = 0$.)

52. REDUCCIÓN DE CONTAMINANTE DEL AIRE En un cuarto con volumen de 3 000 ft³ el aire inicialmente contiene 0.21% de dióxido de carbono. Suponga que el cuarto recibe aire fresco que contiene 0.04% de dióxido de carbono a razón de 800 ft³ por minuto. Todo el aire del cuarto se hace circular con un ventilador, y la mezcla sale a la misma razón (800 ft³/min).

a) Plantee y resuelva una ecuación diferencial para hallar el porcentaje de dióxido de carbono en el cuarto después de t minutos.

b) ¿Cuánto tiempo transcurre antes que el cuarto contenga sólo 0.1% de dióxido de carbono?

c) ¿Qué porcentaje de dióxido de carbono queda en el cuarto a largo plazo (cuando $t \to \infty$)?

53. ADMINISTRACIÓN DE PERSONAL Cierta compañía inicia operaciones con 100 empleados y, en los años siguientes, el número de empleados E_n durante el n-ésimo año, siempre excede en 5% al número de empleados E_{n-1} durante el año anterior. Exprese esta relación como una ecuación en diferencias lineal de primer orden y resuelva la ecuación para hallar E_n.

54. MEDICACIÓN Un medicamento administrado por vía intravenosa a un paciente es eliminado del torrente sanguíneo del paciente a razón de 14% por hora. Plantee y resuelva una ecuación en diferencias para hallar la cantidad D_n de una dosis de D_0 miligramos de medicamento que queda después de n horas. ¿Cuánto de la dosis permanece después de 10 horas?

En los problemas 55 y 56, el estudiante necesitará la fórmula

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots = \frac{1}{1 - a} \quad \text{para } |a| < 1$$

obtenida en el problema 40 del conjunto de problemas 8.5.

55. CONTROL DE CALIDAD Suponga que en una línea de producción industrial particular, la probabilidad p_n de que una unidad defectuosa reciba su imperfección, durante la n-ésima etapa de producción, es el 30% de la probabilidad p_{n-1} de que la imperfección sea introducida durante la etapa $n - 1$.

a) Plantee y resuelva una ecuación en diferencias para hallar p_n en términos de la probabilidad p_0 de que la materia prima de la unidad ya sea defectuosa.

b) ¿Por qué es cierto que $p_0 + p_1 + p_2 + \cdots = 1$? Use este dato para hallar una fórmula para p_n. ¿Cuál es la probabilidad de que la imperfección ocurra durante la tercera etapa?

56. INFLUENCIA POLÍTICA Suponga que la probabilidad p_n de que un político particular influya en n colegas, es 60% de la probabilidad p_{n-1} de que el mismo político influya sólo en $n - 1$ colegas.

a) Plantee y resuelva una ecuación en diferencias para p_n en términos de la probabilidad p_0 de que el político no influya en ningún colega.

b) ¿Por qué es cierto que $p_0 + p_1 + p_2 + \cdots = 1$? Use este hecho para hallar una fórmula para p_n.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el político influya hasta en cinco colegas?

57. CRECIMIENTO DE POBLACIÓN Una colonia de bacteria comienza con una población $P_0 > 0$ y crece en forma tal que la población P_n, después de n hora, está relacionada con la población P_{n-1} después de $n - 1$ horas por la ecuación en diferencias

$$P_n = \frac{bP_{n-1}}{a + P_{n-1}}$$

donde a y b son constantes positivas.

a) Demuestre que $P_n < (b/a)P_{n-1}$, y por tanto $P_n < (b/a)^n P_0$.

b) Si $a > b$, demuestre que la población finalmente se extingue, es decir, $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$.

c) Si $a < b$, ¿qué ocurre a la población a largo plazo? Se puede suponer que $\lim_{n\to\infty} P_n$ existe y que $\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} P_{n-1}$.

58. Resuelva la ecuación en diferencias

$$P_n = \frac{bP_{n-1}}{a + P_{n-1}}$$

del problema 57 siguiendo estos pasos:

a) Demuestre que al sustituir $Q_n = 1/P_n$ la ecuación en diferencias dada se convierte en la ecuación lineal

$$Q_n = \frac{a}{b} Q_{n-1} + \frac{1}{b}$$

b) Resuelva la ecuación lineal en Q_n obtenida en el paso *a*) y luego use su solución para resolver la ecuación en diferencias dada en términos de a, b y P_0.

59. LA ECUACIÓN DE FIBONACCI Fibonacci (1170-1250), matemático del siglo XIII, también conocido como Leonardo de Pisa, planteó este problema en su libro *Liber Abaci:*

Considere una isla donde por siempre habitan conejos. Cada mes, cada par de conejos adultos produce un par de hijos que a su vez son adultos reproductivos dos meses después. Si la colonia de conejos empieza con un par de recién nacidos, ¿cuántas parejas habrá después de n meses?

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

a) Sea R_n el número total de parejas de conejos (adulto, recién nacido y adolescente) en la colonia después de n meses. Explique por qué $R_1 = 1, R_2 = 1, R_3 = 2, R_4 = 3$, y en general

$$R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$$

Esta ecuación en diferencias es la *ecuación de Fibonacci*.

b) Encuentre todos los números λ tales que $R_n = \lambda^n$ satisface la ecuación de Fibonacci.

c) Si λ_1 y λ_2 son los números hallados en el inciso *b)*, se puede demostrar que la solución general de la ecuación de Fibonacci tiene la forma

$$R_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$$

para las constantes A y B. Encuentre A y B de modo que las condiciones iniciales $R_1 = 1$ y $R_2 = 1$ se satisfagan.

d) Los números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... generados por la ecuación de Fibonacci se llaman *números de Fibonacci*. Estos números se presentan en una sorprendente variedad de aplicaciones, que van desde genética de población hasta análisis de mercado de acciones. Por ejemplo, en botánica, los números aparecen en el estudio de filotaxia, que es la disposición de las hojas en los tallos de plantas. Escriba un párrafo sobre aplicaciones de los números de Fibonacci, usando el Internet como fuente de investigación.

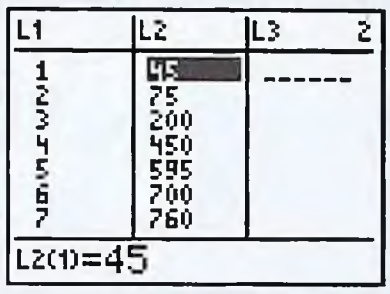
www.FreeLibros.com

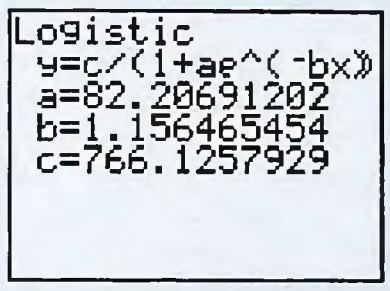
¡EXPLORE! ACTUALIZACIÓN

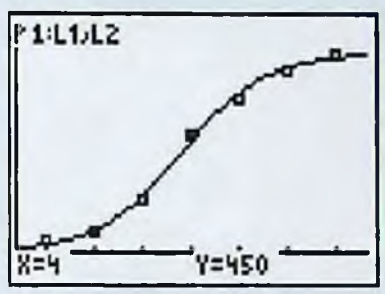
En el sitio web especificado en el libro, www.mhhe.com/hoffmann, es posible tener acceso a las soluciones completas para todas las cajas ¡EXPLORE! de este libro.

Solución para el ¡Explore! de la página 597

Introduzca los datos en el editor **STAT,** como se ve en la pantalla izquierda. En el menú **CALC,** seleccione la opción **B: Logistic** y escriba el comando **Logistic L1, L2, Y1** para obtener los parámetros de la ecuación logística, mostrados en la pantalla de en medio. Los puntos de los datos y las gráfica logística se pueden presentar usando el comando **STAT PLOT** (como en la pantalla derecha). Después de un largo periodo (cuando x se aproxima a un número relativamente grande), el denominador de la fórmula logística se hace arbitrariamente cercano a 1, indicando que la población de residentes susceptibles se estabilizará en unos $y = 766$. Aproximadamente, ¿cuándo se infectó la mitad de la comunidad susceptible?

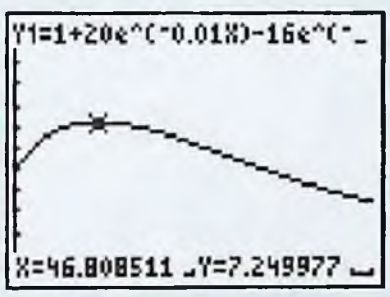


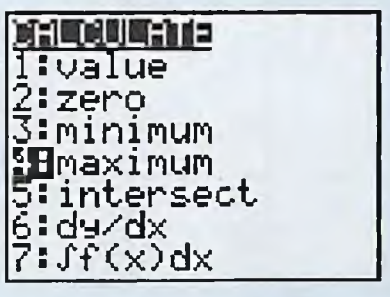


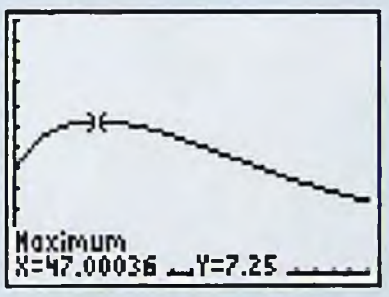


Solución para el ¡Explore! de la página 614

Consulte el ejemplo 8.3.2. Introduzca $p(t) = 1 + 20e^{\wedge}(-0.01t) - 16e^{\wedge}(-0.02t)$ en Y1 del editor de ecuaciones de su calculadora graficadora y trace usando la pantalla [0, 200]10 por [0, 12]1. Al seguir la curva, podemos determinar gráficamente que $p(t)$ alcanza un valor máximo de unos 7.25 cuando $x = 47$. Más precisamente podemos confirmar esto con el uso de la función de búsqueda de máximo de **CALC (2ND TRACE)** para determinar estos valores, una vez especificados los límites izquierdo y derecho y un estimado.







Solución para el ¡Explore! de la página 625

Un programa relativamente sencillo (llamado SLPFIELD) aparece en la tabla en la página 654, para construir un campo de pendientes para una ecuación diferencial de primer orden, $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Éste requiere que la función $f(x, y)$ se escriba como Y1 en el editor de ecuaciones de su calculadora. Busque, en la Introducción a la Calculadora, en el Prefacio de este texto, las instrucciones para construir programas en su calculadora graficadora. Los números de las líneas están incluidos para facilitar el trabajo al lector. La línea 1 despeja la pantalla de comandos, gráficas y dibujos no deseados. Las líneas 2 y 3 piden el número de segmentos deseados de pendiente en las direcciones x y y, respectivamente, mientras que las líneas 4 y 5 calculan la longitud y ancho del subrectángulo que contiene el segmento de pendiente. Imagine que la pantalla de la calculadora graficadora se divide en una malla de rectángulos más pequeños R por L. Las líneas 6 y 8 localizan las coordenadas del punto del centro del primer subrectángulo

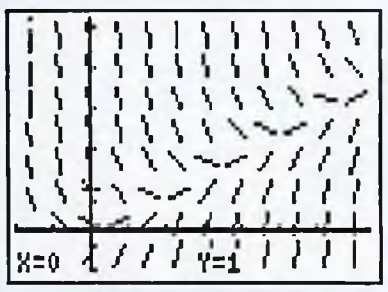
www.FreeLibros.com

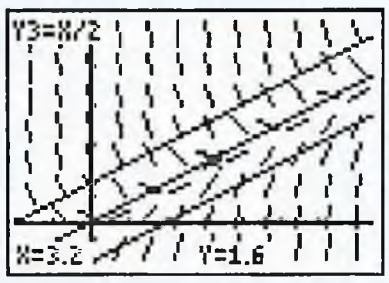
¡EXPLORE! ACTUALIZACION

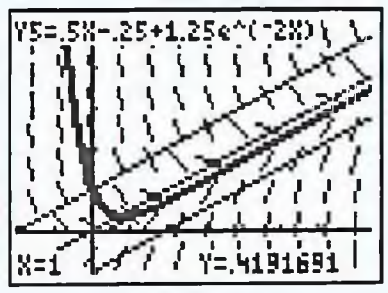
y punto medio del segmento de recta inicial. Dos lazos (líneas 7 a 20 y 9 a 18) repiten el cálculo de segmentos de pendiente dentro de los subrectángulos, indicando primero en la dirección x y luego en la dirección y. El segmento de pendiente tiene pendiente $f(X, Y) = S$ (línea 10) y longitud $\frac{1}{2}$ de la diagonal del subrectángulo (línea 11). Las líneas de la 12 a la 15 localizan las coordenadas de los puntos de extremo, (E, G) y (F, H), del segmento de pendiente y la línea 16 traza el segmento de pendiente.

Línea	PROGRAMA: SLPFIELD	Línea	(continúa de la primera columna)
1	:ClrHome: ClrDraw: FnOff	11	:$\sqrt{(A^2 + B^2)/2} \rightarrow C$
2	:Input "No. X Values", R	12	:$X - C/2*\cos(\tan^{-1}(S)) \rightarrow E$
3	:Input "No. Y Values", L	13	:$X + C/2*\cos(\tan^{-1}(S)) \rightarrow F$
4	:$(X_{max} - X_{min})/R \rightarrow A$	14	:$Y - C/2*\sin(\tan^{-1}(S)) \rightarrow G$
5	:$(Y_{max} - Y_{min})/L \rightarrow B$	15	:$Y + C/2*\sin(\tan^{-1}(S)) \rightarrow H$
6	:$X_{min} + A/2 \rightarrow X$	16	:Line (E, G, F, H)
7	:For (I, 1, R)	17	:$Y + B \rightarrow Y$
8	:$Y_{min} + B/2 \rightarrow Y$	18	:End
9	:For (J, 1, L)	19	:$X + A \rightarrow X$
10	:Y1 $\rightarrow$ S	20	:End

Ahora vea el ejemplo 8.4.1 y la figura 8.11. Escriba **Y1 = X − 2Y** en el editor de ecuaciones de su calculadora. Como finalmente deseamos ver la curva de solución que pasa por el punto (0, 1), ponemos la pantalla con dimensiones [−2, 7.4]1 por [−1, 5.2]1 y ejecutamos el programa SLPFIELD con 12 elementos en la dirección x y 8 en la dirección y, como se muestra a la izquierda. En el editor de ecuaciones, escriba **Y2 = (X + 2)/2, Y3 = X/2, y Y4 = (X − 2)/2** y luego presione **GRAPH.** Verá líneas rectas, llamadas **isoclinas,** sobre las que todos los segmentos de las pendientes tienen la misma pendiente, es decir, $S = -2$, 0 y 2, respectivamente. Vea la pantalla de en medio. Por último, escriba **Y5 = .5X − 0.25 + 1.25e^(−2X)** y grafique en negritas, como se ve en la pantalla abajo a la derecha, para ver la curva de solución que pasa por el punto (0, 1).

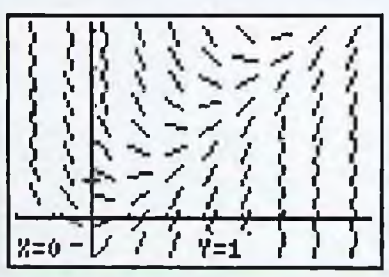


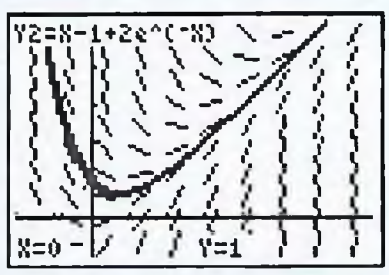




Solución para el ¡Explore! de la página 629

Vea el Ejemplo 8.4.3. Utilizando el programa **SLPFIELD** indicado líneas antes, el campo de pendientes para la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = x - y$ se construye usando una pantalla con dimensiones decimales modificadas [−2, 7.4]1 por [−1, 5.2]1. La solución particular $g(x) = x - 1 + 2e^{\wedge}(-x)$ que pasa por el punto (0, 1) también se muestra.

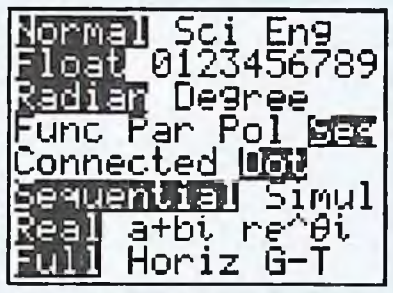


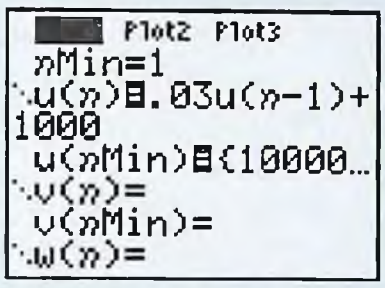


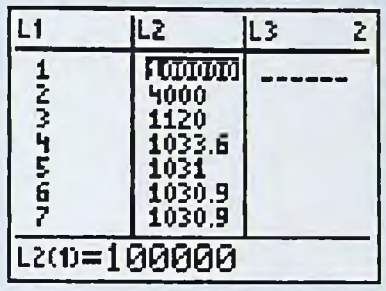
www.FreeLibros.com

Solución para el ¡Explore! de la página 633

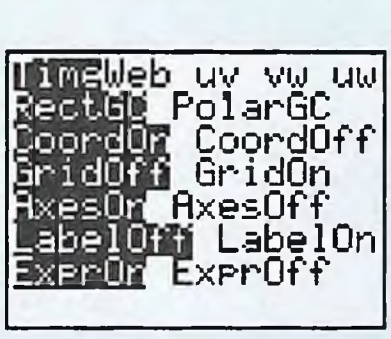
En la Introducción a la Calculadora vea las instrucciones para mostrar funciones recursivas, como son las ecuaciones en diferencias. Asegúrese que los ajustes **MODE** sean semejantes a los de la pantalla izquierda mostrada abajo. Siguiendo el ejemplo de la página 633 referente a una colonia de bacterias, construya la función **u(n)=0.03u(n−1)+1 000,** con valor inicial **u(1)=100 000,** en el editor de ecuaciones de su calculadora graficadora (vea la pantalla de en medio). El símbolo **u** se encuentra con la tecla de **2nd** función arriba de "el número 7." La secuencia $u(n)$ empieza con la condición inicial $u(1)=100\,000$. En el editor de listas, escriba **L2 = u(L1),** donde L1 es la secuencia de números naturales de 1 a 7. Vea la pantalla derecha, que exhibe siete generaciones de poblaciones de bacterias.

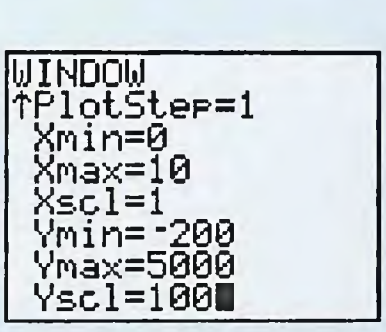


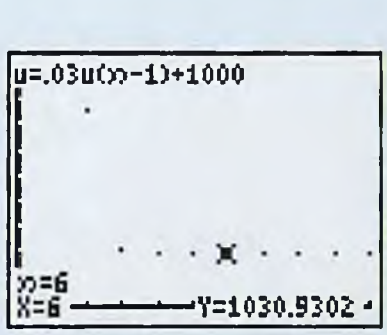




¿La población de bacterias se aproxima a un valor límite? Esta pregunta se contesta en forma gráfica. Asegúrese que **FORMAT (2nd ZOOM)** está en gráficas **Time,** como se ve en la pantalla izquierda. Use una **WINDOW** con el mismo ajuste de tiempo que **nMin = 1** y dimensiones **nMax = 10** y **XY de** [0, 10]1 por[−200, 5000]100, como se ve en la pantalla de en medio. Presione **GRAPH** para obtener la secuencia de puntos que se ve a la derecha.



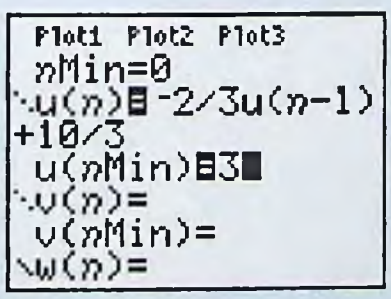


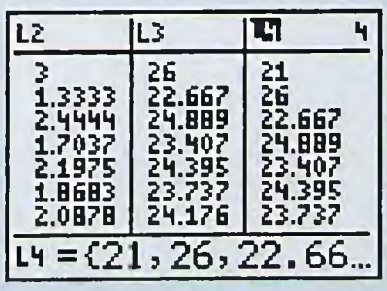


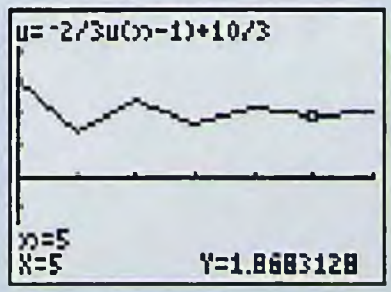
Los valores de población bajan rápidamente de 100 000 a un valor que se aproxima a 1 000 bacterias.

Solución al ¡Explore! de la página 641

Vea el modelo de la telaraña (páginas 640 y 641). En la secuencia **MODE,** escriba **u(n) = (−2/3)u(n−1) + (10/3)** en el editor de ecuaciones, con p_0 **= u(0) = 3** ($300), como en la pantalla de abajo a la izquierda. En el editor de listas, guarde los números 0 a 6 en L1, y escriba **L2 = u(L1), L3 = 2L2 + 20 y L4 = −3L2 + 30** para obtener $u(n)$, $S = 2p + 20$ y $D = -3p + 30$, para n de 0 a 6. Vea la pantalla de en medio. Graficando $u(n)$ con la pantalla [0, 6]1 por [−3, 4]1, note que $u(n)$ parece converger, lo que indica la espiral convergente de la telaraña. Esto está confirmado por $d = 2 < 3 = b$. Repitiendo con el precio inicial de $100 ($p_0 = 1$) también da una espiral convergente de la telaraña pero con un lugar de inicio diferente.







www.FreeLibros.com



REFLEXIONE ACERCA DE...

MODELADO DE EPIDEMIAS

El brote de una enfermedad que afecta a un gran número de personas se denomina *epidemia* (del griego *epi* "sobre" y *demos* "el pueblo"). Las matemáticas desempeñan un importante papel en el estudio de las epidemias, disciplina conocida como *epidemiología*. Se han desarrollado modelos matemáticos para epidemias de gripe, peste bubónica, HIV, SIDA, viruela, gonorrea y otras enfermedades. Haciendo unas cuantas suposiciones para simplificar, podemos construir un modelo basado en ecuaciones diferenciales, llamado **modelo S-I-R,** que es útil para hacer predicciones acerca del curso de una epidemia. Nuestro modelo será más bien sencillo, con suficientes suposiciones de simplificación para hacer accesibles las matemáticas. Más adelante, se examinarán las suposiciones, para mejorar el modelo y hacerlo más realista.



Para construir nuestro modelo, considere una epidemia que afecta a una población de N personas, cada una de las cuales cae en exactamente uno de los siguientes grupos en el momento t:

Susceptibles, $S(t)$, son personas que todavía no se enferman, pero que se pueden enfermar después. Cuando una persona susceptible enferma, se supone que no es con retraso.

Infecciosos, $I(t)$, son personas que tienen la enfermedad y pueden infectar a otros. Los infecciosos no se hospitalizan y continúan interactuando de forma normal con otras personas.

Removidos, $R(t)$, son personas que ya no pueden infectar a otros. En particular, una persona removida no puede contraer la enfermedad otra vez ni infectar a otros.

Se supone que ninguna persona entra ni sale de la población (incluyendo nacimientos y fallecimientos) y que, en el momento $t = 0$, hay algunos susceptibles e infecciosos pero no removidos, es decir

$$N = S(t) + I(t) + R(t) \qquad \text{para toda } t \geq 0$$

donde

$$S(0) > 0 \qquad I(0) > 0 \qquad R(0) = 0$$

de modo que $S(0) + I(0) = N$.

www.FreeLibros.com

La clave para modelar una epidemia u otra situación dinámica se encuentra en las suposiciones hechas sobre las razones de cambio. En nuestro modelo, suponemos que la razón a la que las personas susceptibles se están infectando en cualquier momento es proporcional al número de contactos entre susceptibles e infecciosos, es decir, al producto SI. Por tanto, la población susceptible $S(t)$ es *decreciente* (se infecta) con una razón dada por

$$(1) \qquad \frac{dS}{dt} = -aSI$$

También se supone que la razón con la que las personas están siendo removidas de la población infectada es proporcional al número de personas que son infecciosas, de modo que

$$(2) \qquad \frac{dR}{dt} = bI$$

para algún número $b > 0$. Por último, suponemos que la razón a la que cambia el número de infecciosos es la razón a la que los susceptibles se infectan menos la razón a la que los infecciosos son removidos de la población de infecciosos. Esto significa que

$$(3) \qquad \frac{dI}{dt} = aSI - bI = aI(S - b/a) = aI(S - c)$$

con $c = b/a$. [En la Pregunta 1, se pide al estudiante obtenga esta última razón derivando ambos miembros de la ecuación $I(t) = N - S(t) - R(t)$ con respecto a t y sustituyendo las razones en las ecuaciones (1) y (2).]

El modelo S-I-R está formado por las tres ecuaciones diferenciales simultáneas que hemos construido, es decir,

$$\frac{dS}{dt} = -aSI \qquad \frac{dR}{dt} = bI \qquad \frac{dI}{dt} = aI\,(S - c)$$

donde $S(t) + I(t) + R(t) = N$ para toda t, con $R(0) = 0$ y $S(0) > 0$, $I(0) > 0$. Aun cuando este sistema no puede ser resuelto explícitamente para obtener fórmulas sencillas para las funciones $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$, estas ecuaciones diferenciales pueden ser usadas para ayudarnos a entender el avance de las epidemias. Esto se ilustra al aplicar nuestro modelo S-I-R a un caso histórico, una epidemia de peste bubónica en Eyam, población cercana a Sheffield, Inglaterra, durante 1665-1666. Este análisis es posible porque esa ciudad se puso en cuarentena durante la epidemia y conservó registros suficientemente detallados. Se usarán estos registros para estimar las constantes a y b en las ecuaciones (1) y (2).

Primero, observe que la constante b de la ecuación (2) se puede interpretar como la razón a la que las personas son removidas de la población de infecciosos. El periodo infeccioso de la peste bubónica en Eyam duró 11 días, o sea 0.367 meses. Por tanto, si se mide el tiempo t en meses y se supone, para mayor sencillez, que las personas infectadas se remueven de esta población a una razón constante, se puede estimar b como el cociente

$$b = \frac{1}{0.367} \approx 2.72$$

A continuación, los registros conservados durante la epidemia muestran que el 19 de julio de 1666, había 201 susceptibles y 22 infecciosos, mientras que el 19 de agosto de ese mismo año había 121 susceptibles y 21 infecciosos. Por tanto, el número de susceptibles cambió en $121 - 201 = -80$ durante ese periodo de un mes de largo, y este cambio se puede usar para estimar $\frac{dS}{dt}$ el día que empezó el periodo. En otras palabras, el 19 de julio de 1666,

$$S = 201 \quad I = 22 \quad \text{y} \quad \frac{dS}{dt} \approx -80$$

www.FreeLibros.com

Sustituyendo en la ecuación (1) y despejando la constante a, se calcula que

$$a = \frac{-dS/dt}{SI} = \frac{-(80)}{(201)(22)} = 0.018$$

Resulta que el modelo, con las estimaciones que acabamos de obtener para los valores de a y b, funciona bien para estimar los datos reales. La figura 1 muestra los valores pronosticados por el modelo y los datos reales. [Esta información está adaptada de Raggett (1982) y del análisis de Brauer y Castillo-Chávez (2001.]

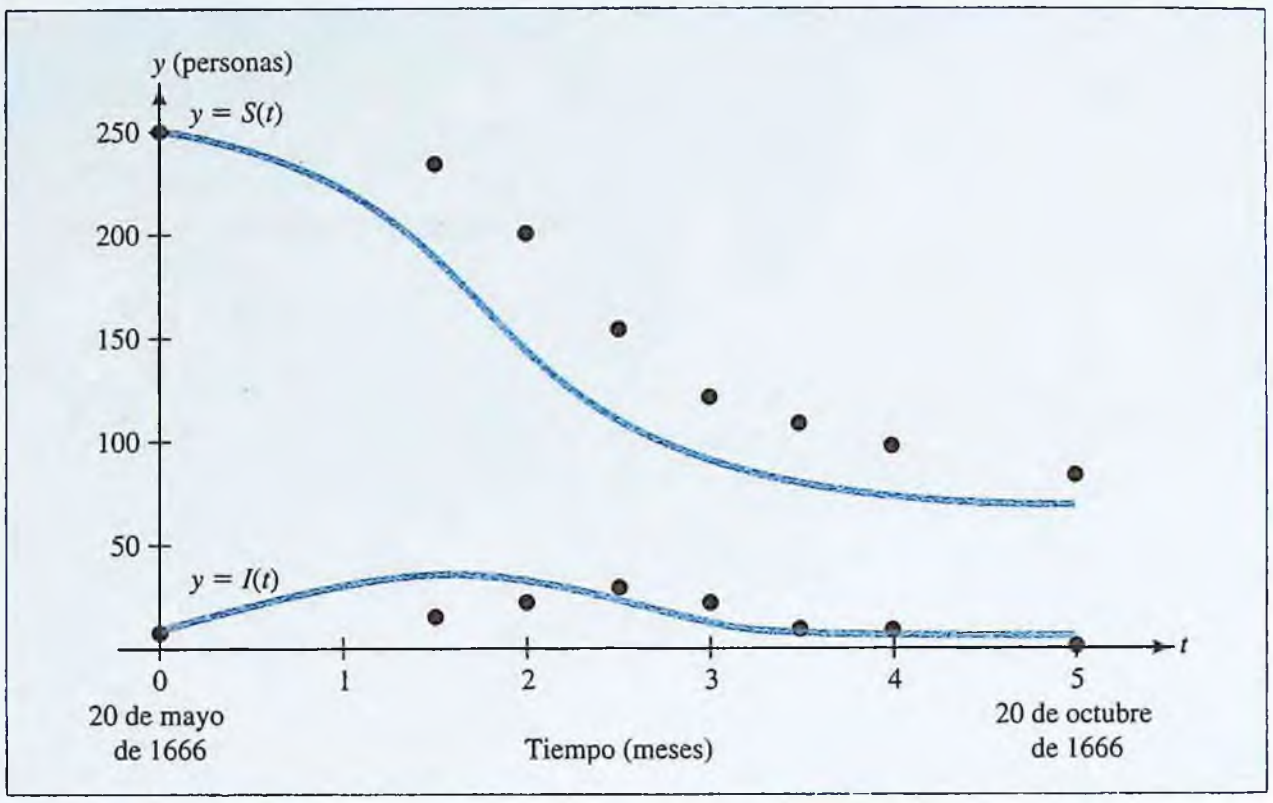


FIGURA 1 Comparación de datos de la peste de Eyam con valores pronosticados por el modelo S-I-R.

El modelo S-I-R se puede usar para hacer algunas observaciones generales acerca del curso de las epidemias. Por ejemplo, a menos que el número de infecciosos aumente inicialmente, la epidemia nunca se iniciará (puesto que el número de infecciosos no crece a más del número inicial). En el lenguaje de cálculo, una epidemia se inicia sólo si $\frac{dI}{dt} > 0$ en $t = 0$. Examinando la ecuación (3) del modelo S-I-R, se Sve que esto ocurre sólo si $S(0) > c$. Por esta razón, c se denomina *número umbral de susceptibles*. Cuando el número inicial de susceptibles excede a c, la epidemia se propaga; de otro modo, desaparece. Por ejemplo, los registros de la peste bubónica de 1666 en Eyam indican que hubo inicialmente $S(0) = 254$ susceptibles. Usando nuestras estimaciones de $a \approx 0.018$ y $b \approx 2.72$, se puede estimar que el número umbral para este modelo es

$$c = \frac{b}{a} = \frac{2.72}{0.018} \approx 151$$

Como $S(0) = 254 > 151$, el modelo pronostica que la epidemia debe propagarse, que es exactamente lo que ocurrió en la historia.

Es probable que haya observado que al construir nuestro modelo S-I-R y aplicarlo a la epidemia de Eyam, se han hecho varias suposiciones más bien fuertes, ninguna de las cuales es que $S(t) + I(t) + R(t)$ es una constante. ¿Es realista suponer que

www.FreeLibros.com

el tamaño de la población sujeta a una epidemia nunca debe cambiar? ¿Es más realista suponer que las personas se hacen infecciosas inmediatamente, sin intervalos de tiempo? Seguro que no, puesto que por lo general las enfermedades tienen periodos de incubación, pero al insertar un intervalo para tomar en cuenta el periodo de incubación el modelo resultaría demasiado complicado para ser analizado sin herramientas matemáticas más refinadas. Esto ilustra el problema central al que se enfrenta cualquiera que use la modelación matemática: *Es frecuente que un modelo completamente realista sea difícil de analizar, cuando no imposible, mientras que hacer suposiciones para simplificar el análisis puede llevar a resultados que no son del todo realistas*. El modelo S-I-R está de hecho basado en varias suposiciones de simplificación que son un tanto irreales, pero también hemos visto que el modelo se puede usar de manera efectiva para explorar la dinámica de una epidemia. ¿Cómo piensa usted que el modelo podría ser más realista sin sacrificar demasiado su sencillez?

Preguntas

1. Use la ecuación $N = S(t) + I(t) + R(t)$ y las razones de las ecuaciones (1) y (2) del modelo S-I-R para verificar la razón de la ecuación (3).

2. ***a)*** Use la regla de la cadena para demostrar que, en el modelo S-I-R, la razón de cambio del número de infecciosos con respecto al número de susceptibles es el cociente de la razón de cambio de infecciosos dividida entre la razón de cambio de susceptibles, es decir,

$$\frac{dI}{dS} = \frac{dI/dt}{dS/dt}$$

b) Encuentre una fórmula para $\frac{dI}{dS}$ usando las ecuaciones (1) y (3) del modelo. Use esto para hallar $\frac{dI}{dS}$ para la epidemia de peste bubónica de Eyam, en 1666.

c) Use su respuesta del inciso *b*) para hallar el número de susceptibles cuando el número de infectados es máximo

3. Una epidemia de gripe brotó en un internado de Inglaterra en 1978. Al iniciarse la epidemia, hubo 762 niños susceptibles y 1 niño infeccioso y, un día después, enfermaron dos niños más. Suponga que cualquier persona enferma de gripe también es infecciosa.

a) Use los datos suministrados para estimar la constante a en la ecuación (1) del modelo S-I-R para esta epidemia con t que representa el tiempo en días.

b) Suponga que la mitad de los niños enfermos fueron llevados al hospital de la escuela y por ello se removieron de la población infecciosa el primer día en que enfermaron, y que la otra mitad fueron removidos al día siguiente. Use esta información para estimar la constante b de la ecuación (2) del modelo S-I-R para esta epidemia.

c) Use los valores de a y b calculados en los incisos *a*) y *b*) para hallar el número umbral de susceptibles necesario para que esta epidemia se iniciara.

d) Use los resultados de la pregunta 2 para hallar el número de susceptibles cuando el número de estudiantes infectados con gripe fue máximo.

REFLEXIONE ACERCA DE...

www.FreeLibros.com

REFLEXIONE ACERCA DE...

e) Dibuje las gráficas de $S(t)$ e $I(t)$ suponiendo que después de un mes, ligeramente menos de la mitad habían enfermado de gripe, y después de 2 meses, más del 90% de los estudiantes habían enfermado.

4. Modifique el modelo de epidemias S-I-R para tomar en cuenta la vacunación de personas a un ritmo constante d, suponiendo que alguien vacunado deja de ser susceptible de inmediato. Encuentre una fórmula para $\frac{dI}{dS}$ para el modelo resultante.

5. Es posible usar un modelo S-I para modelar una epidemia donde aquel que enferme permanece infeccioso. (Un modelo S-I es realmente el caso especial del modelo S-I-R en el que $b = 0$.) Conteste las siguientes preguntas acerca de este tipo de epidemia.

a) Demuestre que $\frac{dS}{dt} = -aS(N - S)$ donde N es el tamaño de la población (que suponemos es constante).

b) Verifique que $S(t) = \frac{N(N-1)}{(N-1) + e^{aNt}}$ es una solución de esta ecuación diferencial y concluya que $I(t) = \frac{Ne^{aNt}}{(N-1) + e^{aNt}}$.

c) Demuestre que $\lim_{t \to +\infty} S(t) = 0$ y $\lim_{t \to +\infty} I(t) = N$. Dibuje una gráfica que muestre las curvas de susceptibles y de infecciosos, $y = S(t)$ y $y = I(t)$, suponiendo que en el momento $t = 0$ hay I_0 personas infectadas, donde $0 < I_0 < N$.

Referencias

W. O. Kermack y A. G. McKendrick, "A contribution to the mathematical theory of epidemics," *Proc. Royal Soc. London,* Volumen 115 (1927), pp. 700–721.

G. F. Raggett, "Modeling the Eyam plague," *IMA Journal,* Volumen 18 (1982), pp. 221–226.

Fred Brauer y Carlos Castillo-Chavez, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology,* Springer-Verlag, New York, 2001.

Leah Edelstein-Keshet, *Mathematical Models in Biology,* Birkhauser Mathematics Series, McGraw-Hill, Boston, 1988, pp. 243–256.

www.FreeLibros.com

CAPÍTULO 9



La acumulación de medicamentos en el torrente sanguíneo de un paciente puede determinarse con el uso de series infinitas.

APROXIMACIONES POR SERIES INFINITAS Y SERIES DE TAYLOR

1 Series infinitas
2 Criterios de convergencia
3 Funciones como series de potencias; series de Taylor
Resumen del capítulo
Términos, símbolos y fórmulas importantes
Revisión del capítulo 9
Problemas de repaso
¡Explore! Actualización
Reflexione acerca de...

www.FreeLibros.com

SECCIÓN 9.1 | Series infinitas

La suma de una cantidad infinitamente grande de números puede ser finita. Este enunciado, que puede parecer paradójico, desempeña un papel muy importante en las matemáticas y tiene una amplia variedad de aplicaciones. El propósito de este capítulo es explorar su significado y algunas de sus consecuencias.

Usted ya está familiarizado con el fenómeno de una suma finita de infinitos valores. Usted, por ejemplo, sabe que el decimal periódico $0.333\ldots$ representa la suma infinita $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots$ y que su valor es el número finito $\frac{1}{3}$. Sin embargo, lo que puede no ser familiar para usted, es decirle el significado exacto de que esta suma infinita "totaliza" $\frac{1}{3}$. Esta situación será explicada en esta sección introductoria.

Convergencia y divergencia de series infinitas

Una expresión de la forma

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

recibe el nombre de **serie infinita.** Es costumbre usar notación de suma para escribir las series en forma compacta como sigue:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

El uso de esta notación se ilustra en el ejemplo 9.1.1.

EJEMPLO | 9.1.1

a) Escriba algunos términos representativos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

b) Use notación de suma para escribir la serie $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots$ en forma compacta.

Solución

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$

b) El n-ésimo término de esta serie es

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

donde el factor $(-1)^{n+1}$ genera signos alternos, que empiezan con un signo positivo cuando $n = 1$. Por tanto,

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

En términos generales, se dice que una serie infinita

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

converge si "su suma" es un número finito y se dice que *diverge* si no lo es.

www.FreeLibros.com

Un enunciado más preciso del criterio de convergencia se da a través de la suma

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

de los primeros n términos de la serie infinita. Esta suma finita se llama n-ésima *suma parcial* de la serie infinita, y su comportamiento cuando n tiende a infinito determina la convergencia o divergencia de la serie. A continuación se da un resumen del criterio.

Convergencia o divergencia de una serie infinita ■ Se dice que una serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ con n-ésima suma parcial

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

converge a S si S es un número finito tal que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

y en este caso se escribe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$$

Se dice que la serie **diverge** si $\lim_{n\to\infty} S_n$ no es un número finito.

¡EXPLORE!

Calcule

$$\sum_{n=1}^{7} \frac{n^3 - 2n}{n+1}$$

con una precisión de al menos tres lugares decimales. Para hacerlo en su calculadora graficadora, escriba

Y1 = (X^3 − 2X)/(X + 1)

en el editor de ecuaciones y utilice las funciones de sucesión y sucesión acumulada de la clave LIST, como se muestra en la Introducción a la calculadora, del prefacio de este texto. Explique el comportamiento de la sucesión de sumas parciales.

Según este criterio, para determinar la convergencia o divergencia de una serie infinita, se empieza por hallar una expresión para la suma de los primeros n términos de la serie y luego se calcula el límite de su suma finita cuando n tiende a infinito. Este procedimiento es parecido al empleado en la sección 6.2 para determinar la convergencia o divergencia de una integral impropia. A continuación se muestra un ejemplo.

EJEMPLO | 9.1.2

Investigue la posible convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$.

Solución

Nótese que cada término de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots$$

es $\frac{1}{10}$ veces el término precedente. Esto lleva al siguiente truco para hallar una fórmula compacta para S_n.

Comience con la n-ésima suma parcial de la forma

$$S_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n}$$

y multiplique ambos miembros de esta ecuación por $\frac{1}{10}$ para obtener

$$\frac{1}{10} S_n = \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \frac{3}{10^{n+1}}$$

¡EXPLORE!

Calcule las primeras siete sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$, usando las funciones de sucesión y sucesión acumulada de su calculadora graficadora. Haga conjeturas acerca del valor de la suma infinita S y compárelo con los cálculos mostrados en el ejemplo 9.1.2.

www.FreeLibros.com

Ahora reste la expresión para $\frac{1}{10}S_n$ de la expresión para S_n. Casi todos los términos se cancelan y sólo queda el primer término de S_n y el último término de $\frac{1}{10}S_n$, es decir,

$$S_n - \frac{1}{10}S_n = \frac{9}{10}S_n = \frac{3}{10} - \frac{3}{10^{n-1}} = \frac{3}{10}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

o,
$$S_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

Entonces
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{3}$$

y por lo tanto
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{1}{3}$$

como se esperaba.

Series geométricas

Note que la serie presentada en el ejemplo 9.1.2 tiene la propiedad de que el cociente de términos sucesivos es una constante $\left(\text{es decir, } \frac{1}{10}\right)$. Cualquier serie con esta propiedad recibe el nombre de **serie geométrica** y tiene la forma general

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots$$

donde a es una constante y r es la razón entre términos sucesivos. Por ejemplo,

$$\frac{2}{9} - \frac{2}{27} + \frac{2}{81} - \frac{2}{243} + \cdots = \frac{2}{9}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \cdots\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

es una serie geométrica con $a = \frac{2}{9}$ y razón $r = -\frac{1}{3}$.

Una serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$ converge si $|r| < 1$ y diverge si $|r| \geq 1$. Para demostrar esto, se procede como en el ejemplo 9.1.2. Se comienza con la n-ésima suma parcial

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \qquad (r \neq 0)$$

(Obsérvese que la potencia de r en el n-ésimo término es sólo $n - 1$ porque el primer término en la suma es $a = ar^0$.) Ahora se multiplican ambos miembros de esta ecuación por r para obtener

$$rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

y se resta la expresión de rS_n de la expresión de S_n para obtener

$$S_n - rS_n = a - ar^n \qquad \textit{todos los otros términos se cancelan}$$
$$(1 - r)S_n = a(1 - r^n)$$
$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

www.FreeLibros.com

Si $|r| < 1$, se tiene $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, y se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

En otras palabras, la serie geométrica dada converge a la suma $\frac{a}{1-r}$. Si $|r| > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} |r| = \infty$, y $\lim_{n\to\infty} S_n$ no puede existir. La serie también diverge cuando $|r| = 1$ (véase el problema 47). Para resumir:

Convergencia de una serie geométrica ■ La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$, de *razón común* r, converge si $|r| < 1$ y su suma es

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$$

En otro caso (es decir, si $|r| \geq 1$), la serie diverge.

¡EXPLORE!

Dada la serie geométrica con $a = 2$ y $r = 0.85$, calcule S_{15} y S_{50} con una precisión de cinco lugares decimales. Compare S_{15} y S_{50} con S_∞. ¿Cuál es el error en cada caso?

Por ejemplo, las siguientes dos series divergen porque $|r| > 1$:

$$2 + 2(1.5) + 2(1.5)^2 + \cdots \qquad (r = 1.5)$$

y

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{7}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{7}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{9}{7}\right)^3 + \cdots \qquad \left(r = -\frac{9}{7}\right)$$

Los ejemplos 9.1.3, 9.1.4 y 9.1.5 ilustran el caso donde $|r| < 1$.

EJEMPLO | 9.1.3

Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

Solución

Ésta es una serie geométrica con $r = -\frac{2}{3}$. Como $|r| < 1$, converge a la suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-(-\frac{2}{3})} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

EJEMPLO | 9.1.4

Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n}$.

Solución

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^n = 3\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 3\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = 6$$

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 9.1.5

Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}}$.

Solución

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^{n+1}} = \frac{-2}{3^2} + \frac{(-2)^2}{3^3} + \frac{(-2)^3}{3^4} + \cdots$$

$$= \frac{-2}{3^2}\left[1 + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{9}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= -\frac{2}{9}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{3}}\right) = -\frac{2}{9}\left(\frac{3}{5}\right) = -\frac{2}{15}$$

Aplicaciones de series geométricas

Las series geométricas aparecen en numerosas ramas de matemáticas y en una amplia variedad de aplicaciones. Cuatro de estas aplicaciones se consideran en los ejemplos 9.1.6 al 9.1.9.

Decimales periódicos

Resulta que cualquier número N cuya forma decimal contiene un patrón que se repite infinitamente es racional, es decir, $N = \frac{p}{q}$ para enteros p y q. El ejemplo 9.1.6 ilustra un procedimiento donde se usan las series geométricas para hallar p y q.

EJEMPLO 9.1.6

Exprese el decimal periódico 0.232323 . . . como una fracción.

Solución

Escriba el decimal en forma de serie geométrica como sigue:

$$0.232323\ldots = \frac{23}{100} + \frac{23}{10\,000} + \frac{23}{1\,000\,000} + \cdots$$

$$= \frac{23}{100}\left[1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \frac{23}{100}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{100}\right)^n$$

$$= \frac{23}{100}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right) = \frac{23}{100}\left(\frac{100}{99}\right) = \frac{23}{99}$$

El efecto multiplicador en economía

Si una suma de dinero A se inyecta en la economía, digamos por una reducción de impuestos, el efecto total sobre esa economía es la inducción de un nivel de gasto mucho mayor que A. La causa de esto es que la parte de S gastada por un individuo se convierte en ingreso para uno o más individuos, que, a su vez, gastan de nuevo parte de su ingreso, generando así ingreso para que otras personas gasten. Los economistas llaman **efecto multiplicador** a este tipo de gasto en etapas múltiples. Si la fracción del ingreso que se gasta en cada etapa de este proceso permanece constante,

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Siguiendo el ejemplo 9.1.7, introduzca la función 40(0.9)^X en Y1 del editor de ecuaciones. Use las funciones de sucesión y sucesión acumulada de su calculadora graficadora para determinar cuántos términos de $\Sigma 40(0.9)^n$ es necesario sumar para que la suma llegue al millar de millones más cercano.

entonces la cantidad total de gasto es la suma de una serie geométrica, como se ilustra en el ejemplo 9.1.7.

EJEMPLO | 9.1.7

Suponga que a nivel nacional se gasta aproximadamente el 90% de todo el ingreso y se ahorra el 10%. ¿Cuál es la cantidad total de gasto generado por una reducción de impuesto de $40 mil millones si los hábitos de ahorro no cambian?

Solución

El gobierno empieza por gastar $40 mil millones, y luego los receptores originales de la reducción gastan 0.9(40) mil millones de dólares. Esto se convierte en nuevo ingreso, del cual

$$0.9[0.9(40)] = 40(0.9)^2$$

miles de millones de dólares se gastan. Esto, a su vez, genera un ingreso adicional de

$$0.9\left[40(0.9)^2\right] = 40(0.9)^3$$

y así sucesivamente. Si este proceso continúa indefinidamente, la cantidad total gastada es

$$T = 40 + 40(0.9) + 40(0.9)^2 + 40(0.9)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} 40(0.9)^n$$

que se reconoce como una serie geométrica con $a = 40$ y $r = 0.9$. Como $|r| < 1$, la serie geométrica converge a la suma

$$T = \frac{40}{1 - 0.9} = 400$$

Así, la cantidad total de gasto generado es de $400 mil millones.

En general, suponga que originalmente se inyectan A dólares en la economía y que cada vez que una persona reciba un dólar, esa persona gastará una fracción fija c del dólar. Por ejemplo, $c = \frac{9}{10}$ en el ejemplo 9.1.7. Entonces c se llama **propensión marginal al consumo** y, al proceder como en el ejemplo 9.1.7, se puede demostrar que la cantidad total gastada será

$$T = \frac{A}{1 - c} = \frac{A}{s} = mA$$

donde $s = 1 - c$ es la **propensión marginal al ahorro** y $m = \frac{1}{s}$ es el **multiplicador** para el proceso de gasto.

Valor presente de una anualidad

EJEMPLO | 9.1.8

Encuentre la cantidad de dinero que se debe invertir hoy a una tasa de interés anual de 10% capitalizado continuamente para que, iniciando el año siguiente, se puedan hacer retiros anuales de $400 a perpetuidad.

Solución

La cantidad que se debe invertir hoy para generar la sucesión deseada de retiros es la suma de los valores presentes de los retiros individuales. Se puede calcular el valor

www.FreeLibros.com

presente de cada retiro usando la fórmula $P = Be^{-rt}$ de la sección 4.1, donde $B = 400$, $r = 0.1$, y t es el tiempo (en años) en que se hace el retiro. Entonces,

$$P_1 = \text{valor presente del primer retiro} = 400e^{-0.1(1)} = 400e^{-0.1}$$

$$P_2 = \text{valor presente del segundo retiro} = 400e^{-0.1(2)} = 400e^{-0.2}$$

$$\vdots$$

$$P_n = \text{valor presente del } n\text{-ésimo retiro} = 400e^{-0.1(n)}$$

y así sucesivamente. La situación se ilustra en la figura 9.1.

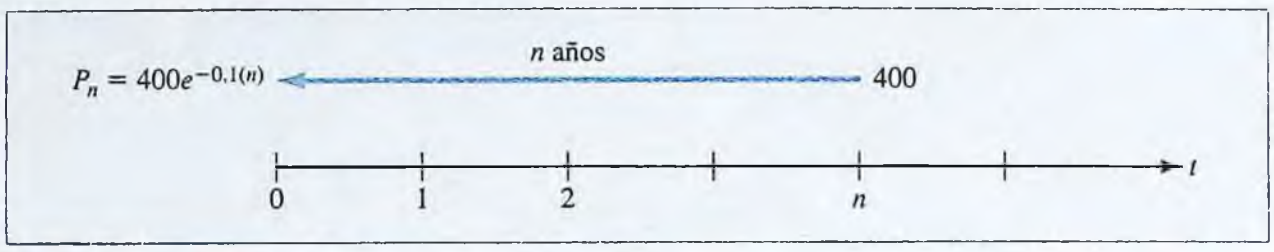


FIGURA 9.1 Valor presente del n-ésimo retiro.

La cantidad que se debe invertir hoy es la suma de este número infinito de valores presentes. Esto es,

$$\text{Cantidad a ser invertida} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} 400e^{-0.1(n)}$$

$$= 400[e^{-0.1} + e^{-0.2} + e^{-0.3} + \cdots]$$

$$= 400e^{-0.1}[1 + e^{-0.1} + (e^{-0.1})^2 + \cdots]$$

Ésta es una serie geométrica con $a = 400e^{-0.1}$ y $r = e^{-0.1} = 0.9048$. Como $|r| < 1$, la serie converge a la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} 400e^{-0.1(n)} = \frac{400e^{-0.1}}{1 - e^{-0.1}} \approx 3\,803.33$$

Por tanto, se deben invertir \$3 803.33 para lograr el objetivo indicado.

¡EXPLORE!

Siguiendo el ejemplo 9.1.8, introduzca la función 400e^(−0.1X) en Y1 del editor de ecuaciones. Usando las funciones de sucesión y sucesión acumulada de su calculadora graficadora, como se mostró en la sección ¡Explore! Actualización de este capítulo, determine cuántos términos de la serie infinita se necesitan para estar a menos de un centavo del total real.

Acumulación de medicamento en el cuerpo

En el ejemplo 6.2.5 de la sección 6.2, se consideró una planta de energía nuclear que generaba desechos radiactivos, los cuales se desintegraban exponencialmente. El problema era determinar la acumulación de los desechos provenientes de la planta a largo plazo. Como los desechos eran generados *continuamente*, el modelo empleado para analizar esta situación contenía una integral (impropia). La situación del ejemplo 9.1.9 es similar. Un paciente recibe un medicamento que es eliminado del cuerpo exponencialmente, y el objetivo es determinar la acumulación del medicamento en el cuerpo del paciente a largo plazo. En este caso, no obstante, el medicamento se administra en dosis *discretas*, y en el modelo aparece una serie infinita en lugar de una integral.[1]

EJEMPLO | 9.1.9

Un paciente recibe una inyección de 10 unidades de cierto medicamento cada 24 horas. El medicamento se elimina exponencialmente, de modo que la fracción que queda en el cuerpo del paciente después de t días es $f(t) = e^{-t/5}$. Si el tratamiento continúa

[1] Una fuente que contiene varios modelos matemáticos para dosis de medicamento es el módulo de Brindell Horelick y Sinan Koont, "Prescribing Safe and Effective Dosage," *UMAP Modules 1977: Tools for Teaching*, Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., Lexington, MA, 1978.

www.FreeLibros.com

indefinidamente, ¿aproximadamente cuántas unidades del medicamento habrá en el cuerpo del paciente justo antes de una inyección?

Solución

De la dosis original de 10 unidades, sólo $10e^{-1/5}$ unidades quedan en el cuerpo del paciente después de 1 día (justo antes de la segunda inyección). Esto es,

$$\text{Cantidad en el cuerpo después de 1 día} = S_1 = 10e^{-1/5}$$

El medicamento en el cuerpo del paciente después de 2 días es lo que queda de las primeras *dos* dosis. De la dosis original, sólo quedan $10e^{-2/5}$ (ya que han transcurrido dos días), y de la segunda dosis quedan $10e^{-1/5}$ unidades (vea la figura 9.2). Por tanto,

$$\text{Cantidad en el cuerpo después de 2 días} = S_2 = 10e^{-1/5} + 10e^{-2/5}$$

Del mismo modo,

$$\begin{matrix}\text{Cantidad de medicamento en}\\ \text{el cuerpo después de } n \text{ días}\end{matrix} = S_n = 10e^{-1/5} + 10e^{-2/5} + \cdots + 10e^{-n/5}$$

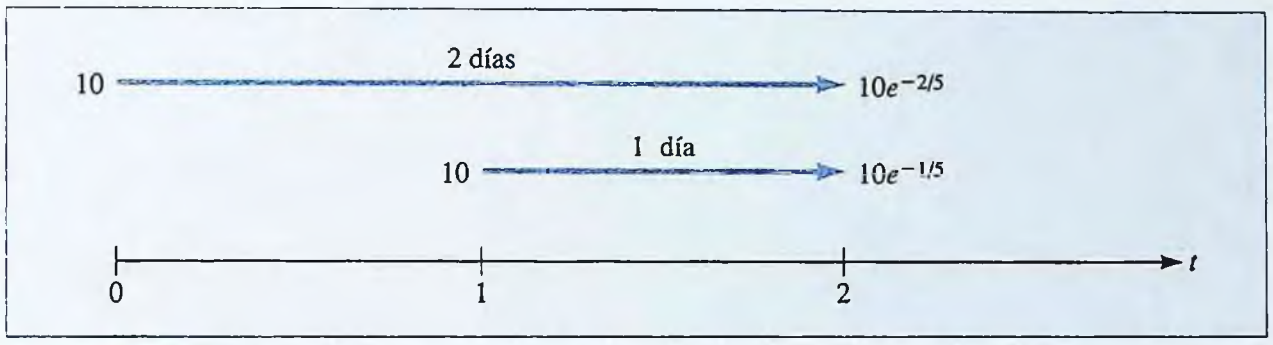


FIGURA 9.2 Cantidad de medicamento en el cuerpo después de 2 días.

La cantidad S de medicamento en el cuerpo del paciente, a largo plazo, es el límite de S_n cuando n tiende a infinito. Es decir,

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} 10e^{-n/5} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 10(e^{-1/5})^n = 10e^{-1/5}\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-1/5})^n \\ &= 10e^{-1/5}\left(\frac{1}{1-e^{-1/5}}\right) \approx 45.17 \text{ unidades} \end{aligned}$$

PROBLEMAS | 9.1

En los problemas del 1 al 6, use notación de suma para escribir la serie dada en forma compacta.

1. $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\cdots$

2. $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\cdots$

3. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots$

4. $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+\cdots$

5. $\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+\frac{9}{4}-\frac{16}{5}+\cdots$

6. $-3+\frac{9}{4}-\frac{27}{9}+\frac{81}{16}-\cdots$

www.FreeLibros.com

En los problemas del 7 al 10, encuentre la cuarta suma parcial S_4 de la serie dada.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$

En los problemas del 11 al 24, determine si la serie geométrica dada converge; si es así, encuentre su suma.

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$

12. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^n$

13. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^n}$

14. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(-3)^n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$

17. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{(-4)^n}$

18. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{4}{3}\right)^n$

19. $\sum_{n=1}^{\infty} 5(0.9)^n$

20. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-0.2n}$

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^{n+2}}$

22. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{3^{n+1}}$

23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{5^{n-1}}$

24. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n+1}}{3^{n-3}}$

En los problemas del 25 al 28, exprese el decimal dado como una fracción.

25. 0.3333 . . .

26. 0.5555 . . .

27. 0.252525 . . .

28. 1.405405405 . . .

29. EL EFECTO MULTIPLICADOR Suponga que, a nivel nacional, se gasta aproximadamente 92% de todo el ingreso y se ahorra 8%. ¿Cuál es la cantidad total de gasto generado por una reducción de impuestos de $50 mil millones si no cambian los hábitos de ahorro?

30. EL EFECTO MULTIPLICADOR Suponga que, a nivel nacional, se gasta aproximadamente nueve veces más de lo que se ahorra, y que planificadores económicos desean generar un gasto total de 270 mil millones de dólares efectuando una reducción de impuestos de N dólares. ¿Cuánto vale N?

31. VALOR PRESENTE Una inversión garantiza pagos anuales de $1 000 a perpetuidad, iniciando los pagos de inmediato. Encuentre el valor presente de esta inversión, si la tasa de interés predominante permanece fija al 4% anual, capitalizada continuamente. [*Sugerencia:* El valor presente de la inversión es la suma de los valores presentes de los pagos individuales.]

32. VALOR PRESENTE ¿Cuánto se debe invertir a una tasa de interés de 5% anual, capitalizada continuamente, para que empezando el año próximo se puedan hacer retiros anuales de $2 000 a perpetuidad?

33. VALOR PRESENTE Una inversión garantiza pagos anuales de A dólares al término de cada año a perpetuidad, en una cuenta que gana una tasa de interés anual fija r, capitalizada anualmente. Demuestre que el valor presente de la inversión es $\frac{A}{r}$.

34. VALOR PRESENTE Suponga que en el problema 33, se hacen pagos de A dólares k veces por año (al término de cada periodo) en una cuenta que gana interés a una tasa anual r, capitalizada k veces

www.FreeLibros.com

por año. Demuestre que el valor presente de la inversión es $\frac{kA}{r}$.

35. ACUMULACIÓN DE MEDICAMENTO Un paciente recibe una inyección de 20 unidades de cierto medicamento cada 24 horas. El medicamento se elimina exponencialmente, de modo que la fracción que queda en el cuerpo del paciente después de t días es $f(t) = e^{-t/2}$. Si el tratamiento continúa en forma indefinida, ¿aproximadamente cuántas unidades del medicamento habrá en el cuerpo del paciente, a largo plazo, justo antes de una inyección?

36. ACUMULACIÓN DE MEDICAMENTO Un paciente recibe una inyección de A unidades de cierto medicamento cada h horas. El medicamento se elimina exponencialmente, de modo que la fracción que queda en el cuerpo del paciente t horas después de ser administrada es $f(t) = e^{-rt}$, donde r es una constante positiva.

a) Si este tratamiento continúa indefinidamente, encuentre una expresión para el número total, T, de unidades del medicamento que estarán acumuladas en el cuerpo del paciente.

b) Suponga que un médico determina que la cantidad acumulada, T, del medicamento hallada en el inciso *a*) es 20% mayor de lo indicado para la seguridad del paciente. Suponiendo que la constante de eliminación r es una característica fija del cuerpo del paciente, ¿cómo debe ajustarse h para garantizar que la cantidad de medicamento acumulado no sea insegura?

37. SALUD PÚBLICA Un problema de salud, especialmente en países en desarrollo, es que los alimentos de que el pueblo puede disponer con frecuencia contienen toxinas y venenos. Suponga que una persona consume una dosis d de cierta toxina diariamente y que la proporción de toxina acumulada eliminada por el cuerpo de la persona cada día es q. (Por ejemplo, si $q = 0.7$, entonces cada día se elimina el 70% de la toxina acumulada .) Encuentre una expresión para la cantidad total de toxina que se acumulará en el cuerpo de la persona a largo plazo.

38. DISTANCIA RECORRIDA POR UNA PELOTA QUE REBOTA Una pelota tiene la propiedad de que, cada vez que cae desde una altura h a una superficie rígida, nivelada, rebota a una altura rh, donde r $(0 < r < 1)$ es el número llamado *coeficiente de restitución*.

a) Una superpelota con $r = 0.8$ se deja caer desde una altura de 5 metros. Demuestre que si la pelota continúa rebotando indefinidamente, recorrerá una distancia total de 45 metros.

b) Encuentre una fórmula para la distancia total recorrida por una pelota con coeficiente de restitución r que se deje caer desde una altura H.

c) Cierta pelota que rebota indefinidamente después de caer desde una altura H recorre una distancia de $2H$. ¿Qué valor tiene r?

39. TIEMPO DE RECORRIDO DE UNA PELOTA QUE REBOTA Vea el problema 38. Suponiendo que no hay resistencia del aire, un cuerpo cae $s = 16t^2$ pies en t segundos.

a) Una pelota de golf con coeficiente de restitución $r = 0.36$ se deja caer desde una altura de 16 pies. Demuestre que si la pelota continúa rebotando indefinidamente, su tiempo total de recorrido será de 4 segundos.

b) Encuentre una fórmula para el tiempo total de recorrido de una pelota con coeficiente de restitución r, que cae desde una altura de H pies.

c) Se deja caer cierta pelota desde una altura de 9 pies y se deja rebotar indefinidamente. Si su tiempo total de recorrido es de 2.25 segundos, ¿cuál es la distancia que recorre?

40. MEMBRESÍA DE GRUPO Cada día 1 de enero, la administración de cierto colegio privado suma seis nuevos miembros a su consejo directivo Si la fracción de directivos que permanecen en activo al menos t años es $f(t) = e^{-0.02t}$, ¿aproximadamente cuántos directivos activos tendrá el colegio, a largo plazo, el 31 de diciembre?

41. AGOTAMIENTO DE RESERVAS Cierto gas raro que se emplea en procesos industriales tenía reservas conocidas de 3×10^{11} m^3 en 2000. En 2001 se consumieron 1.7×10^9 m^3 del gas, y luego el consumo se incrementó 7.4% cada año. ¿Cuándo se agotarán todas las reservas conocidas del gas?

42. PARADOJA DE ZENÓN El filósofo griego Zenón de Elea (495-435 a.C.) presentó unas paradojas que dejaron perplejos a muchos matemáticos de su tiempo. Quizá la más famosa es la paradoja de la carrera, que puede ser planteada como sigue:

> "Cuando un corredor corre en una pista, él debe recorrer primero la mitad de la longitud de la pista, luego la mitad de la distancia que le falta, después nuevamente la mitad de la distancia que le falta , y así indefinidamente. Como hay un número infinito de estos medios segmentos y el corredor requiere de un tiempo finito para completar cada uno de ellos, entonces él nunca podrá terminar la carrera" .

Suponga que el corredor avanza a un paso constante y que le toma T minutos salvar la primera mitad de la carrera. Plantee una serie infinita que dé el tiempo total requerido para terminar la carrera y demuestre que ese tiempo total es igual a $2T$, tal y como se podría intuir.

www.FreeLibros.com

43. RELATO DE ESPÍAS Cuando el espía está tratando de liberarse de los amarres en el armario envenenado de Scélérat (problema 35, sección 8.2), la puerta se abre y el mismísimo Scélérat está ahí. "Amigo mío," dice cruelmente el criminal francés, "de seguro no piensa que yo le dejaría morir sin tener una pequeña . . . como dice usted . . . plática". El espía es arrastrado del armario, amarrado a una silla y le aplican una inyección de 800 mg de suero de la verdad. Cada 4 horas es interrogado y, cuando no habla, le administran otra inyección de 400 mg de suero. Por fortuna, el espía ha acumulado resistencia a este medicamento en particular, y su cuerpo elimina 30% de la cantidad presente durante cada periodo de 4 horas entre las inyecciones. Pero incluso el espía tiene su límite, y él piensa que perderá el control cuando en su torrente sanguíneo se haya acumulado 1 000 mg de la droga. ¿Cuánto tiempo tiene el espía para planear y realizar un escape, antes de que hable y se haga prescindible?

44. Evalúe $\sum_{n=1}^{5} \frac{n^3 - 3n}{2n + 1}$ en su calculadora, con una precisión de tres lugares decimales, siguiendo estos pasos:

a) Introduzca la expresión como (X^3 − 3X)/(2X + 1) en la lista de funciones e introduzca el valor 1 para X. Evalúe la expresión y guarde el resultado en un lugar temporal, por ejemplo en A.

b) Introduzca 2 para X, evalúe la función y sume el resultado al valor A de la memoria.

c) Repita el paso (b) con 3 para X; luego 4 y, por último, 5.

45. Repita el problema 44 con la suma $\sum_{n=1}^{5} 300e^{-0.2n}$.

46. Calcule la suma S de la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} 2(0.85)^n$. A continuación calcule las sumas parciales S_5 y S_{10} con precisión de 5 lugares decimales y compare los valores de estas sumas parciales con la suma S de la serie.

47. Demuestre que la serie geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k$ diverge cuando

a) $r = 1$ [*Sugerencia:* Observe que la n-ésima suma parcial es $S_n = na$.]

b) $r = -1$ [*Sugerencia:* Observe que la n-ésima suma parcial es $S_n = 0$ si n es impar o $S_n = a$ si n es par.]

SECCIÓN 9.2 | Criterios de convergencia

En la sección 9.1 se introdujeron las nociones de convergencia y divergencia de series infinitas, y se obtuvo que una serie geométrica $\sum_{n=b}^{\infty} ar^n$ converge, si $|r| < 1$, y diverge en otro caso. Éste es un criterio fácil de aplicar, pero ¿qué hacer con series que no son geométricas? En esta sección se desarrollarán varios procedimientos, llamados "criterios de convergencia", que hacen posible determinar la convergencia o divergencia de una variedad de series. Se comienza por examinar una serie especial que será usada en ejemplos y aplicaciones posteriores.

Serie armónica

La serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots$$

recibe el nombre **serie armónica** porque aparece en física, en el estudio del sonido. En el ejemplo 9.2.1 se determina si esta serie converge o no examinando sus sumas parciales.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Como se demostró en el ejemplo 9.2.1, la serie armónica diverge, pero lo hace muy lentamente. Un ejercicio en la calculadora graficadora ilustrará esto. Introduzca la función 1/X en Y1 del editor de ecuaciones. Use las funciones de sucesión y sucesión acumulada, como se muestra en la sección ¡Explore! Actualización de este capítulo, para determinar cuántos términos son necesarios para que la suma parcial de la serie armónica llegue al valor 6.

EJEMPLO | 9.2.1

Demuestre que la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge.

Solución

Sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la n-ésima suma parcial de la serie armónica, y observe que

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{2}$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}$$

y, en general,

$$S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$$

Esto significa que las sumas parciales S_n se pueden hacer tan grandes como se desee si se toma n suficientemente grande. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe como número finito, y la serie armónica diverge.

Se acaba de ver que las sumas parciales de la serie armónica crecen sin límite cuando n crece. No obstante, el valor de las sumas parciales crece muy lentamente. Por ejemplo, los cálculos demuestran que $S_{100} \approx 5.19$ y $S_{1\,000} \approx 7.49$ y que para obtener una suma parcial que exceda de 20 se requieren más de 178 millones de términos. El ejemplo 9.2.2 presenta una aplicación en la que la estimación del tamaño de una suma parcial de la serie armónica desempeña un papel crucial.

EJEMPLO | 9.2.2

Suponga que se conservan registros de las nevadas en cierta región para un periodo de 100 años. ¿Para cuántos años se deben esperar nevadas récord en el sentido de que la nevada en ese invierno excede la nevada de todos los años previos del periodo?

Solución

Al modelar esta situación, suponga que la nevada en cualquier año dado del periodo de 100 años no es afectada por nevadas de años previos y que el clima no cambia en forma sistemática. También suponemos que la nevada se mide en forma precisa, de modo que no hay empates. Nuestro análisis comprenderá algunas nociones básicas (intuitivas) de probabilidad.

www.FreeLibros.com

Considere los 100 años como una sucesión de eventos en los que se registran los niveles de nevadas. La nevada del primer año es un récord, puesto que los registros empiezan en ese momento. En el segundo año, es igualmente probable que la nevada sea mayor o menor a la nevada del primer año. Se deduce que hay una probabilidad de $\frac{1}{2}$ de que la nevada del segundo año establezca un récord al exceder la nevada del primer año. Por lo tanto, en los primeros dos años del periodo de 100 años, se espera tener $1 + \frac{1}{2}$ nevadas récord. Para el tercer año, la probabilidad de que la nevada de ese año exceda la nevada de los primeros dos años es $\frac{1}{3}$, de modo que el número esperado de nevadas récord en tres años es $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Continuando de este modo durante n años, se ve que el número esperado de años con nevadas récord es

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

que es la n-ésima suma parcial de la serie armónica. En particular, el número esperado de nevadas récord en todo el periodo de 100 años es

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{100} \approx 5.19$$

Se concluye que, en promedio, se esperarían unos 5 años de nevadas récord durante el periodo de 100 años.

Si se fuera a probar este resultado al verificar un periodo específico de 100 años, puede hallar menos de 5 años récord o más de 5, quizá muchos más. La interpretación correcta del resultado es que si observa un conjunto grande (cuanto más grande, mejor) de periodos de 100 años, entonces, en promedio, habría unos 5 años de nevadas récord para cada periodo de 100 años.

El criterio de divergencia

A continuación se desarrollan varios criterios generales para determinar si una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge o diverge. El más fácil de estos criterios sólo se puede usar para establecer divergencia y por eso se llama *criterio de divergencia*.

El criterio de divergencia ■ Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe o si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

El criterio de divergencia queda demostrada al comprobar que si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, los términos a_n deben tender a 0 cuando n tiende a infinito; esto es, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (¿Ve usted por qué esto es equivalente al enunciado del criterio de divergencia?) Para ver por qué esto es así, sea $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ a n-ésima suma parcial de la serie, y observe que a_n es la diferencia entre S_n y S_{n-1}; es decir,

$$a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) = S_n - S_{n-1}$$

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge con la suma S, entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

www.FreeLibros.com

y se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$
$$= S - S = 0$$

como se indicó.

El ejemplo 9.2.3 muestra cómo se puede usar el criterio de divergencia para demostrar que una serie dada diverge.

EJEMPLO | 9.2.3

Demuestre que cada una de las series siguientes diverge:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}$ **b)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$

Solución

a) Como $\lim_{k\to\infty} \sqrt{k} = \infty$, se deduce que $\lim_{k\to\infty} \sqrt{k}$ no es 0, de modo que $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}$ diverge por el criterio de divergencia.

b) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$ diverge porque

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1+1/k} = \frac{1}{1+0} = 1 \neq 0$$

ADVERTENCIA *El criterio de divergencia no se puede usar para demostrar que una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.* Específicamente, no es posible concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge sólo porque $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Por ejemplo, para la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$

a pesar de que la serie armónica diverge. ■

El criterio de la integral

El segundo criterio para convergencia, el *criterio de la integral,* relaciona la convergencia de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con la convergencia de la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, donde $f(n) = a_n$. A continuación se muestra un enunciado preciso de este criterio.

El criterio de la integral ■ Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie con $a_n > 0$ para toda n. Si $f(x)$ es una función tal que $f(n) = a_n$ para toda n y si f es continua, positiva ($f(x) > 0$), y decreciente para $x \geq 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ o ambas convergen o ambas divergen.

(continúa)

www.FreeLibros.com

En particular,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge si } \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ converge}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge si } \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ diverge.}$$

Se hará una demostración geométrica del criterio de la integral después de ilustrar su uso en el ejemplo 9.2.4.

EJEMPLO | 9.2.4

Determine si cada una de las series siguientes converge o diverge.

a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

Solución

a) Sea $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, de modo que $f(n) = \dfrac{\ln n}{n}$. Note que $f(x)$ es continua y positiva para $x \geq 2$, y es decreciente porque su derivada satisface la ecuación

$$f'(x) = \frac{x(1/x) - (1)\ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0 \text{ para } x > e > 2$$

Por tanto, se puede aplicar el criterio de la integral, y como

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C \qquad \textit{por sustitución, con } u = \ln x,\ du = \frac{1}{x}\,dx$$

de ahí se deduce que

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^{t} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{2}(\ln t)^2 - \frac{1}{2}(\ln 2)^2\right] = \infty$$

Como la integral impropia diverge, se deduce que la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ también diverge.

b) Sea $f(x) = xe^{-x}$, de forma que $f(n) = ne^{-n}$. Entonces $f(x)$ es continua y positiva para $x \geq 1$, y es decreciente, porque su derivada satisface la ecuación

$$f'(x) = x(-e^{-x}) + (1)e^{-x} = (1 - x)e^{-x} < 0 \quad \text{para } x > 1$$

Por tanto, se puede aplicar el criterio de la integral, y como

$$\int xe^{-x}dx = (-x - 1)e^{-x} + C \qquad \textit{integrando por partes con } u = x,\ dv = e^{-x}dx$$

se deduce que

$$\int_1^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} xe^{-x}dx = \lim_{t\to\infty} \left[(-t - 1)e^{-t} - (-1 - 1)e^{-1}\right] = 2e^{-1}$$

Como la integral impropia converge, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$ también converge.

REPASO

Justo-a-tiempo

Recuerde que $\ln x > 1$ cuando $x > e$. Asimismo, $e^x > 0$ y $e^{-x} > 0$ para todos los números reales x.

www.FreeLibros.com

Justificación geométrica del criterio de la integral

Para ver por qué el criterio de la integral es verdadera, primero observe que, como el criterio requiere que $a_k > 0$ para toda k, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente a menos que se haga infinitamente grande; en particular, la serie no puede "ser divergente por oscilación" como la serie geométrica

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Del mismo modo, como $f(x) > 0$ y $f(x)$ es decreciente para $x > 1$, la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ será convergente, a menos que se haga infinita. Se demostrará que si la integral impropia es finita, entonces así lo es la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, y que si $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ es infinita, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ también debe ser infinita.

Vea las dos partes de la figura 9.3. Ambas muestran la gráfica de $f(x)$ junto con varios rectángulos de aproximación construidos en los intervalos [1, 2], [2, 3], ... En la figura 9.3*a*, los rectángulos están *inscritos* bajo la curva $y = f(x)$, y la altura del rectángulo de aproximación construido en el intervalo $[k-1, k]$ es $f(k) = a_k$, que es la altura de la curva $y = f(x)$ sobre el extremo *derecho* del intervalo. Como este rectángulo de aproximación tiene altura a_k y ancho 1, su área es $a_k \cdot 1 = a_k$, y el área total de los primeros n rectángulos es $a_2 + a_3 + \cdots + a_n$. Como los rectángulos están inscritos bajo la curva $y = f(x)$, esta área no es mayor que el área bajo la curva sobre el intervalo $[1, n]$, de modo que se tiene

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \le \int_1^n f(x)\,dx$$

lo cual significa que la n-ésima suma parcial de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ satisface la ecuación

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \le a_1 + \int_1^n f(x)\,dx$$

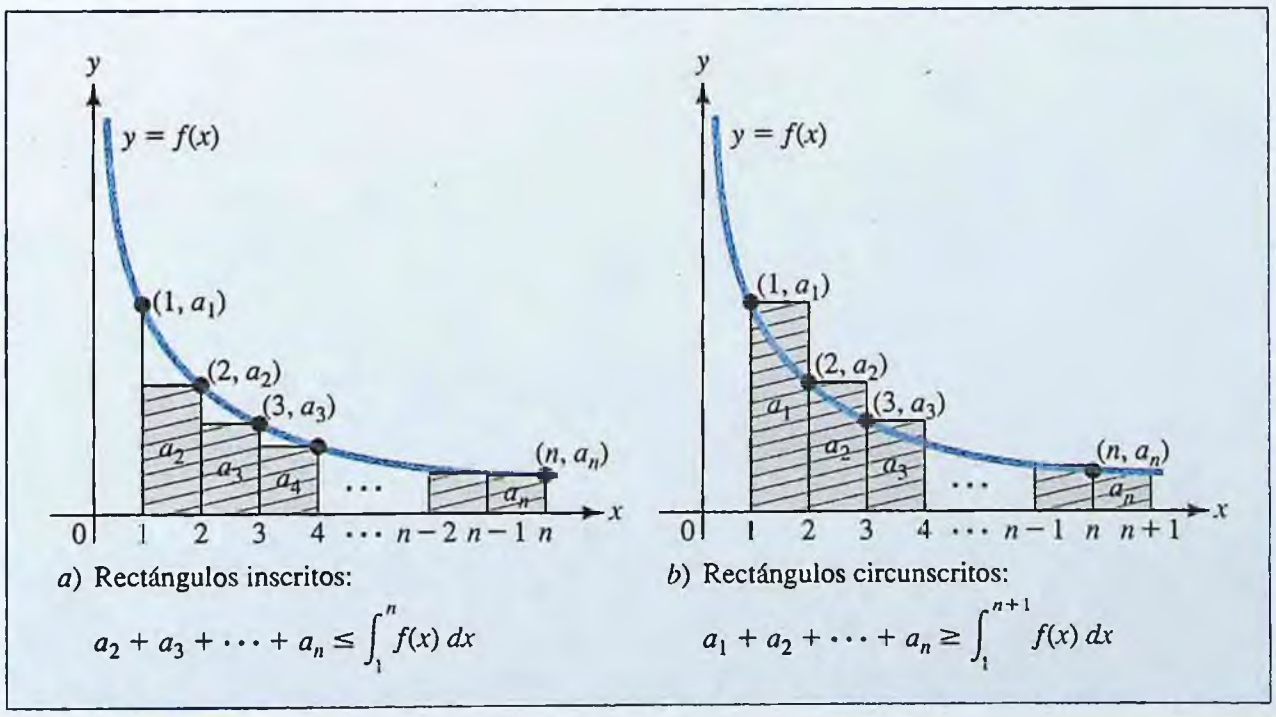


FIGURA 9.3 Interpretación geométrica del criterio de la integral.

Los rectángulos de la figura 9.3*b* están *circunscritos* sobre la curva $y = f(x)$ sobre el intervalo $[1, n + 1]$. Esta vez, la altura del rectángulo con base en el intervalo

www.FreeLibros.com

$[k-1, k]$ es $f(k-1) = a_{k-1}$, la altura de la curva sobre el extremo *izquierdo* del subintervalo. El área de este rectángulo de aproximación es $a_{k-1} \cdot 1 = a_{k-1}$, y como los rectángulos circunscritos cubren un área no menor que el área bajo la curva en $[1, n+1]$, se tiene

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \int_1^{n+1} f(x)\,dx$$

Combinando estos resultados, se ve que la n-ésima suma parcial S_n está "atrapada" entre dos integrales:

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n \leq a_1 + \int_1^{n} f(x)\,dx$$

Si la integral impropia converge, entonces las sumas parciales S_n están limitadas por arriba por la cantidad (finita) $a_1 + \int_1^{\infty} f(x)\,dx$, lo cual significa que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge a un valor finito. Por otra parte, si la integral impropia diverge, las sumas parciales no pueden ser convergentes puesto que son mayores a la cantidad $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$ que tiende al infinito.

El criterio de la serie p

Las series infinitas de la forma general $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, donde p es constante positiva, se llaman ***series p.*** Por ejemplo, la serie armónica es una serie p con $p = 1$. Una aplicación importante del criterio de la integral es establecer esta sencilla regla para determinar la convergencia o divergencia de una serie p.

> **El criterio de la serie p** ■ La serie p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

Para demostrar el criterio de la serie p, sea $f(x) = 1/x^p = x^{-p}$, de modo que $f(n) = 1/n^p$. Entonces $f(x)$ es continua y positiva para $x \geq 1$, y también es decreciente porque su derivada satisface la ecuación

$$f'(x) = -p\,x^{-p-1} = \frac{-p}{x^{p+1}} < 0$$

Si se aplica el criterio de la integral, primero se observa que si $p = 1$, entonces

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} (\ln t - \ln 1) = \infty$$

que confirma que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (recuerde el ejemplo 9.2.1). Para el caso donde $p \neq 1$, tenemos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} x^{-p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{t^{-p+1}}{(-p+1)} - \frac{1}{(-p+1)}\right]$$

$$= \begin{cases} \infty & si\ p < 1 \\ \dfrac{1}{p-1} & si\ p > 1 \end{cases}$$

Por tanto, la integral impropia y por tanto la serie p convergen para $p > 1$ y divergen para $p \leq 1$.

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 9.2.5

Determine si cada una de las series siguientes converge o diverge:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^3}}$ **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.999}}$

Solución

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ es una serie p con $p = 1/2 < 1$, de modo que la serie diverge.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ es una serie p con $p = 5/2 > 1$. Entonces la serie converge.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{0.999}}$ es una serie p con $p = 0.999 < 1$, por lo que la serie diverge.

Criterio de comparación directa

Nuestro siguiente criterio de convergencia compara el comportamiento de una serie dada con el de otra serie cuyas propiedades de convergencia se conocen.

Criterio de comparación directa ■ Considere dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, donde $0 < b_n \leq a_n$ para toda n. Entonces:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, también diverge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Para ver por qué funciona el criterio de comparación directa, observe que una serie de términos positivos diverge sólo si se hace infinitamente grande. Si $b_n \leq a_n$ para toda n y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (existe como número finito), entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Se deduce que la serie más pequeña $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también debe ser finita, de modo que converge.

Del mismo modo, si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es infinitamente grande. Como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también debe ser infinitamente grande y por lo tanto diverge.

EJEMPLO | 9.2.6

Determine si cada una de las series siguientes converge o diverge:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^{2n}}{3^n}$

Solución

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es una serie geométrica convergente($r = \frac{1}{2} < 1$), y como $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ para toda n, del criterio de comparación directa se deduce que la serie dada también converge.

www.FreeLibros.com

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n$ es una serie geométrica divergente $\left(r = \frac{4}{3} > 1\right)$, y como $\frac{n2^{2n}}{3^n} \geq \frac{2^{2n}}{3^n}$ para toda $n \geq 1$, el criterio de la comparación directa nos dice que la serie dada también diverge.

El criterio de la razón

La aplicación del criterio de comparación puede ser frustrante porque puede requerir de varios pasos de prueba y error para hallar una comparación apropiada. Una alternativa, el *criterio de la razón*, hace posible una clase de comparación interna de términos de la serie dada y tiene la ventaja adicional de ser aplicable a series que contienen términos negativos. A continuación se da un enunciado de este criterio.

El criterio de la razón ■ Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sea $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Entonces:

a) Si $L < 1$, la serie converge.

b) Si $L > 1$, la serie diverge.

c) Si $L = 1$, el criterio no es concluyente; es decir, cuando esto ocurre, la serie puede ser convergente o divergente.

El criterio de la razón es especialmente útil cuando se aplica a una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ en la que los términos a_n contienen potencias o factoriales. Esto se ilustra en el ejemplo 9.2.7.

EJEMPLO | 9.2.7

Determine si cada una de las series siguientes converge o diverge:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2}$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$ **c)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

Solución

a) Para aplicar el criterio de la razón, calcule el límite

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{5^n}{n^2}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}n^2}{5^n(n+1)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 5\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} 5\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^2 = 5\left(\frac{1}{1+0}\right)^2 = 5$$

Como $L = 5 > 1$, la serie diverge.

www.FreeLibros.com

b) Al aplicar el criterio de la razón, se encuentra que

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{(-2)^n}{n!}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-2)^{n+1}\, n!}{(-2)^n\, (n+1)!} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-2}{n+1} \right| \qquad \text{como } \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1\cdot 2\cdots n}{1\cdot 2\cdots n\ (n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

$$= 0$$

Como $L = 0 < 1$, la serie converge.

c) Ya se ha demostrado que esta serie diverge en el ejemplo 9.2.3*b*. No obstante, si se trata de confirmar este resultado usando el criterio de la razón, se obtiene

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{n+1}{(n+1)+1}}{\dfrac{n}{n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)(n+1)}{n(n+2)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1+2/n+1/n^2}{1+2/n} \right| = \frac{1+0+0}{1+0}$$

$$= 1$$

de modo que el criterio de la razón no es concluyente.

Se sabe que para saber cuál criterio de convergencia aplicar a una serie dada se requiere experiencia, y para adquirir esa experiencia es útil resolver tantos problemas de práctica como sea posible. En el siguiente conjunto de problemas, hay un grupo de ejercicios enfocados a cada criterio estudiado. Además, hay un conjunto grande de ejercicios en los que no se especifica el criterio.

PROBLEMAS | 9.2

En los problemas del 1 al 4, use el criterio de divergencia para demostrar que la serie dada diverge.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k+5}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{\sqrt{k}+1}$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left[1+(-1)^k\right]$

4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k}+1}{e^{-k}+2}$

En los problemas del 5 al 8, use el criterio de la integral para determinar si la serie dada converge o diverge.

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3k+1}$

6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$

7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3+k^2}$

8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{5k-1}}$

www.FreeLibros.com

En los problemas del 9 al 12, use el criterio de la serie p para determinar si la serie dada converge o diverge.

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{5/6}}$

10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt[3]{k^2}}$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\sqrt{k}}$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1.001}}$

En los problemas del 13 al 16, use el criterio de comparación para determinar si la serie dada converge o diverge.

13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k + 1}$

14. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + 1}{2^{k-1}}$

15. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} - 1}$

16. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k+1}}$

En los problemas del 17 al 20, use el criterio de la razón para determinar si la serie dada converge o diverge.

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^3}$

18. $\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^k$

19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k2^{2k}}$

20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

En los problemas del 21 al 36, determine si la serie dada converge o diverge. Puede usted usar cualquier criterio.

21. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k}{\ln k}$

22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{4^k + 1}$

23. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^k$

24. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 + 1}{k^3 + 2}$

25. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k)^{3/2}}$

26. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)^2}$

27. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}$

28. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^3}$

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k}}{k^2}$

30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^3}$

31. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{e^k}$

32. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^k}{2^k}$

33. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\sqrt{2}}}$

34. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^{3/4} - 2}$

35. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{1/k}$

36. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k!}$

En los problemas 37 y 38 demuestre que la serie dada converge, aplicando el criterio de comparación en dos formas diferentes. Esto es, encuentre dos series convergentes diferentes con términos mayores a los términos de la serie dada.

37. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 2^k}$

38. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 3^k}$

www.FreeLibros.com

En los problemas 39 y 40, use el criterio de la integral para determinar los valores de p para los cuales converge la serie dada:

39. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+2k)^p}$

40. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^p}$

41. ¿Para qué valores del número positivo c converge esta serie?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{k^c}$$

42. Demuestre que la serie

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$$

diverge.

43. Demuestre que la serie

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1}$$

diverge.

44. INGENIERÍA DE TRÁNSITO Suponga que no hay paso en una carretera de un solo carril. Usted observa que un auto lento es seguido por un grupo de autos que desean viajar más rápido pero la circulación está obstruida. Explique por qué si n autos se desplazan en la misma dirección en esta carretera, es de esperarse ver

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

grupos de autos que están más separados. Aproximadamente, ¿cuántos grupos de autos se observarán si 20 autos se desplazan en la misma dirección? ¿Qué pasa si hay 100 autos que se desplazan en la misma dirección? [*Sugerencia:* Busque velocidades mínimas permitidas.]

45. PRUEBA DE MATERIALES Suponga que se desea estimar la deformación por rotura de 100 vigas de madera de aproximadamente las mismas dimensiones, usando una máquina que aplica una fuerza gradualmente creciente al centro de la viga apoyada en sus extremos. Aumentando la fuerza hasta que la viga se rompe, es posible hallar la deformación por rotura de la viga. Demuestre que es posible determinar la mínima deformación por rotura de las 100 vigas, de modo que, en promedio, es de esperar que se rompan 5.19 vigas en la prueba. [*Sugerencia:* Encuentre la deformación por rotura de la primera viga. A continuación pruebe la segunda viga, aumentando la fuerza hasta llegar a la deformación por rotura de la primera viga. Entonces pruebe la tercera viga, aumentando la fuerza hasta llegar a la deformación por rotura de la segunda viga, cualquiera que sea más pequeña, y así sucesivamente.]

46. GUERRA EN EL DESIERTO En una base en el desierto, hay un número ilimitado de "jeeps" para entrar en acción. Los tanques de gasolina de los jeeps están llenos, pero ya no hay más gasolina. Demuestre que es posible hacer que uno de los vehículos jeep viaje de la base a otro destino situado a una distancia arbitraria, pasando gasolina de otros vehículos jeeps de modo que todos los otros regresen a la base sin agotárseles la gasolina en el desierto. [*Sugerencia:* La idea clave es enviar una sucesión de jeeps, pasando gasolina de modo que el primero de ellos llegue a su destino, dejando a los otros con suficiente gasolina para regresar a la base. Para desarrollar esta estrategia, nótese que si envía un jeep, éste puede transitar sólo hasta donde alcance con un tanque de gasolina, pero es posible hacer que el primer jeep llegue más lejos enviando un segundo jeep. Haga que ambos se detengan cuando hayan consumido 1/3 de su gasolina. Entonces transfiera 1/3 de gasolina del segundo jeep al primero, dejando así suficiente gasolina al segundo jeep para regresar a la base pero dando al primero suficiente para viajar $1 + \frac{1}{3}$ de su autonomía normal, es decir, la distancia que puede recorrer con un tanque de gasolina. Continúe considerando cómo usar tres jeeps, cuatro, y así sucesivamente. Necesitará el resultado del problema 42.]

47. REPASO DE LA PARADOJA DE ZENÓN Ésta es una continuación del problema 42, sección 9.1. Un partidario de Zenón, llamado Summo (fechas desconocidas), no está convencido de que un corredor que continúa corriendo siempre terminará una carrera de longitud finita. "¡Un momento!" dice. "Supongamos que el corredor tarda T minutos para recorrer la primera mitad de la pista y $T/2$ para el siguiente cuarto, pero luego se cansa y tarda $T/3$ minutos para el siguiente octavo, $T/4$ para el siguiente dieciseisavo, y así sucesivamente. Ahora, ¿cuánto tarda en terminar la carrera?"

El ***criterio de comparación del límite*** *dice que si* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *son series de términos positivos* ($a_k > 0$ *y* $b_k > 0$ *para toda k) y el límite* $L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$ *es un número real finito, positivo* ($0 < L < \infty$), entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *y* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *ambas convergen o ambas divergen. Use este criterio en los problemas del 48 al 51 para determinar si la serie dada converge o diverge.*

www.FreeLibros.com

48. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^3 + 5k + 71}$

49. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{\sqrt[3]{k^5 + k^2}}$

50. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3}{(2k+5)(\ln k)^2}$

51. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + 2^k}{3 + 5^k}$

Se puede demostrar que $\ln n < n$ *y* $e^n > n$ *para toda* $n \geq 1$. *Use estos datos junto con el criterio de comparación directa para determinar si las series de los problemas 52 y 53 convergen o divergen.*

52. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^2}$

53. $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$

SECCIÓN 9.3 | Funciones como series de potencias; series de Taylor

Una serie de la forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

recibe el nombre **serie de potencias** en la variable x. En esta sección mostraremos cómo las funciones pueden ser representadas por series de potencias. Estas representaciones son útiles en varias formas, principalmente porque las series de potencias pueden ser consideradas como polinomios generalizados y los polinomios se pueden manipular fácilmente. Por ejemplo, los valores funcionales en calculadoras y computadoras se obtienen aproximando las funciones mediante polinomios. También se utiliza un procedimiento similar para evaluar integrales definidas y para resolver ciertas ecuaciones diferenciales.

Convergencia de una serie de potencias

Una serie de potencias es una función de x y, al igual que con cualquier función, es importante conocer el dominio de esta función. En otras palabras, ¿cuál es el conjunto de todas las x para las que converge una serie de potencias dada? A continuación se muestra la respuesta a esta pregunta.

Convergencia de una serie de potencias ■ Para una serie de potencias

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

es cierta una y solo una de las siguientes afirmaciones:

a) La serie de potencia converge sólo para $x = 0$.

b) La serie converge para toda x.

c) Hay un número R tal que la serie converge para toda $|x| < R$ y diverge para $|x| > R$. En los puntos extremos $x = -R$ y $x = R$ la serie puede ser convergente o divergente .

El intervalo $|x| < R$ o, lo que es igual, $-R < x < R$, recibe el nombre de *intervalo de convergencia absoluta* de la serie de potencia, y R recibe el nombre de *radio de convergencia*. Si la serie de potencia converge sólo para $x = 0$, entonces $R = 0$, mientras que $R = \infty$ en el caso donde la serie de potencia converge para toda x. En la práctica, el radio de convergencia de una serie de potencia suele determinarse aplicando el criterio de la razón, como se ilustra en el ejemplo 9.3.1. La convergencia o divergencia en los puntos extremos $x = -R$ y $x = R$ del intervalo de convergencia absoluta debe ser verificada por otras pruebas, algunas de las cuales están fuera del alcance de este texto.

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 9.3.1

Para cada una de las siguientes series de potencia, encuentre el radio de convergencia y el intervalo de convergencia absoluta.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} k!\,x^k$ **b)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ **c)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{4^k}$

Solución

a) Al aplicar el criterio de la razón, se encuentra que el límite del valor absoluto de la razón de términos consecutivos $k!\,x^k$ y $(k+1)!\,x^{k+1}$ es

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)!\,x^{k+1}}{k!\,x^k}\right| = \lim_{k\to\infty}|(k+1)x|$$
$$= \infty \quad \text{a menos que } x = 0$$

Por tanto, la serie de potencia converge sólo para $x = 0$. El radio de convergencia es $R = 0$, y el intervalo de convergencia absoluta es el punto individual $x = 0$.

b) Para esta serie, se tiene

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k!\,x^{k+1}}{(k+1)!\,x^k}\right|$$
$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x}{k+1}\right| = 0 \quad \text{para toda } x$$

Como $L = 0 < 1$ para toda x, del criterio de la razón se deduce que la serie de potencia converge para toda x. En este caso, el radio de convergencia es $R = \infty$, y el intervalo de convergencia absoluta es todo el eje x.

c) Para esta serie de potencia, se tiene

$$L = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{2(k+1)}}{4^{k+1}}}{\frac{x^{2k}}{4^k}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{4^k x^{2k+2}}{4^{k+1}x^{2k}}\right|$$
$$= \frac{x^2}{4} \quad \text{como } \frac{x^{2k+2}}{x^{2k}} = x^{2k+2-2k} = x^2$$

Según el criterio de la razón, la serie de potencia converge si $L < 1$ y diverge si $L > 1$. En otras palabras, la serie converge si $x^2/4 < 1$ o, lo que es lo mismo, si $x^2 < 4$. Por tanto, el intervalo de convergencia absoluta es $-2 < x < 2$, y el radio de convergencia es $R = 2$.

Representación de funciones mediante series de potencias

A continuación, se muestra cómo usar series geométricas y funciones relacionadas con series geométricas como series de potencias. Recuerde que si x es cualquier número tal que $|x| < 1$, se tiene

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

que se puede interpretar como diciendo que la función $f(x) = 1/(1-x)$ puede ser representada por la serie de potencia $1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, cuyo intervalo de

www.FreeLibros.com

convergencia es $-1 < x < 1$. Como se ilustra en el ejemplo 9.3.2, la fórmula de la serie geométrica se puede modificar por sustitución para hallar la representación en serie de potencias de otras funciones.

EJEMPLO | 9.3.2

En cada caso, encuentre una serie de potencia para la función dada y determine su intervalo de convergencia absoluta:

a) $f(x) = \dfrac{x}{1 + 3x^2}$ **b)** $g(x) = \dfrac{1}{2 + 3x}$

Solución

a) Empiece con la serie geométrica de potencia

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ para } |x| < 1$$

y sustituya x por $-3x^2$ para obtener

$$\frac{1}{1 + 3x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-3x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n x^{2n}$$

El nuevo intervalo de convergencia absoluta es $|-3x^2| < 1$, que se puede rescribir como $|x^2| < \dfrac{1}{3}$ o , lo que es equivalente, como $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Ahora multiplique por x (que no afecta el intervalo de convergencia) para obtener

$$\frac{x}{1 + 3x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n x^{2n+1} \text{ para } |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

b) La forma de la serie geométrica $1/(1-x)$ requiere que el término constante en el denominador sea 1 y no 2. Por tanto, se comienza por factorizar 2 del denominador de la expresión funcional dada para obtener

$$\frac{1}{2 + 3x} = \frac{1}{2\left(1 + \dfrac{3x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - \left(-\dfrac{3x}{2}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{-3x}{2}\right) + \left(\frac{-3x}{2}\right)^2 + \cdots\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-3x}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{2^n}x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n}{2^{n+1}}x^n$$

La serie converge cuando

$$\left|\frac{-3x}{2}\right| < 1$$

$$|x| < \frac{2}{3}$$

de modo que el intervalo de convergencia absoluta es $-\dfrac{2}{3} < x < \dfrac{2}{3}$.

www.FreeLibros.com

Los polinomios son particularmente fáciles de derivar e integrar porque estas operaciones contienen la aplicación término a término de la regla de la potencia, es decir,

$$\frac{d}{dx}[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n] = a_1 + a_2(2x) + a_3(3x^2) + \cdots + a_n(nx^{n-1})$$

y

$$\int [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n]dx$$
$$= a_0 x + a_1\left(\frac{x^2}{2}\right) + a_2\left(\frac{x^3}{3}\right) + \cdots + a_n\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) + C$$

A continuación se muestra un planteamiento de este principio y su aplicación a series de potencias.

Derivación e integración, término a término, de series de potencias

Suponga que la serie de potencias $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $|x| < R$, y sea f la función definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{para} \quad -R < x < R$$

Entonces $f(x)$ es derivable para $-R < x < R$, y su derivada está dada por

$$f'(x) = a_1 + a_2(2x) + a_3(3x^2) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

TLa función $f(x)$ es también integrable para $-R < x < R$, y su integral está dada por

$$\int f(x)\,dx = C + a_0 x + a_1\left(\frac{x^2}{2}\right) + a_2\left(\frac{x^3}{3}\right) + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) + C$$

Se omite la demostración de este resultado. Observe que la constante de integración C está colocada enfrente de la forma expandida de la serie de potencia, para distinguirla de los términos de la serie.

Se puede usar la derivación y la integración término a término cuando se necesita generar representaciones de funciones en series de potencias, en forma muy semejante a como se usa la sustitución en el ejemplo 9.3.2. Este procedimiento está ilustrado en los ejemplos 9.3.3 y 9.3.4.

EJEMPLO | 9.3.3

Encuentre una serie de potencia para la función

$$g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Solución

Observe que si $f(x) = 1/(1-x) = (1-x)^{-1}$, entonces

$$f'(x) = -1\,(1-x)^{-2}\,(-1) = \frac{1}{(1-x)^2} = g(x)$$

www.FreeLibros.com

Por tanto, como $f(x)$ está representada por la serie geométrica

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

se puede hallar su derivada $f'(x) = g(x)$ derivando la serie geométrica término a término:

$$g(x) = f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Como la serie geométrica converge para $|x| < 1$, se deduce que la serie de potencias que se ha obtenido para $g(x)$ por derivación término a término también converge para $|x| < 1$.

EJEMPLO | 9.3.4

Encuentre una serie de potencia para la función logarítmica $L(x) = \ln(1 + x)$.

Solución

Primero, observe que

$$\ln(1 + x) = \int \frac{1}{1+x}\, dx$$

lo que sugiere que podemos hallar una serie de potencias para $\ln(1 + x)$ calculando una para $1/(1 + x)$ e integrando término a término. Sustituyendo $-x$ por x en la serie de potencias (geométrica) para $1/(1 - x)$, se obtiene

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + \cdots$$
$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

y al integrar término a término, se encuentra que

$$\ln(1 + x) = \int \frac{1}{1+x}\, dx = \int [1 - x + x^2 - x^3 + \cdots]\, dx$$
$$= C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + C$$

Para determinar el valor de C, se sustituye $x = 0$ en esta ecuación y se obtiene

$$\ln(1 + 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(0)^n}{n} + C = 0 + C$$
$$0 = C \qquad \textit{porque } \ln 1 = 0$$

Por tanto, se tiene

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

Como la serie geométrica modificada para $\dfrac{1}{1+x}$ converge para $|-x| < 1$, se deduce que la serie de potencias que se acaba de obtener para $\ln(1 + x)$ converge en el intervalo $-1 < x < 1$.

www.FreeLibros.com

Serie de Taylor

Imagine el lector que está dada una función $f(x)$ y que se quiere hallar los coeficientes a_n correspondientes, tales que la serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converja a $f(x)$ en algún intervalo. Para descubrir a qué son iguales estos coeficientes, suponga que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Si $x = 0$, sólo el primer término en la suma es diferente de cero y así

$$a_0 = f(0)$$

Ahora derive la serie término a término. Se puede demostrar que si la serie de potencias original converge a $f(x)$ en el intervalo $-R < x < R$, entonces la serie derivada converge a $f'(x)$ en este intervalo. Por tanto,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots na_n x^{n-1} + \cdots$$

y, si $x = 0$, se deduce que

$$a_1 = f'(0)$$

Se deriva otra vez para obtener

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots$$

y hacemos $x = 0$ para concluir que

$$f''(0) = 2a_2 \quad \text{o} \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

Análogamente, la tercera derivada de f es

$$f^{(3)}(x) = 3 \cdot 2a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + \cdots$$

y

$$f^{(3)}(0) = 3 \cdot 2a_3 \quad \text{o} \quad a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!}$$

y así sucesivamente. En general,

$$f^{(n)}(0) = n!a_n \quad \text{o} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

donde $f^{(n)}(0)$ denota la n-ésima derivada de f evaluada en $x = 0$, y $f^{(0)}(0) = f(0)$.

El argumento precedente muestra que *si* hay una serie de potencias que converge a $f(x)$, ésta debe ser aquélla cuyos coeficientes son obtenidos de las derivadas de f por la fórmula

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Esta serie se conoce como la **serie de Taylor de f** (alrededor de $x = 0$), y los coeficientes correspondientes a_n se llaman **coeficientes de Taylor de f.**

www.FreeLibros.com

Serie de Taylor ■ La serie de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x = 0$ es la serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, donde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Cuando se hace el desarrollo de una función en serie de Taylor , se observa que si hay una serie de potencias que converge a una función $f(x)$ dada, entonces ésta debe ser la serie de Taylor. Por ejemplo, como la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ representa a $g(x) = 1/(1 - x)$ para $|x| < 1$, entonces se espera que la serie de Taylor para $g(x)$ sea $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Este hecho se confirma en el ejemplo 9.3.5.

EJEMPLO | 9.3.5

Demuestre que la serie de Taylor alrededor de $x = 0$ para la función $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ es

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ para } |x| < 1$$

Solución

Calcule los coeficientes de Taylor como sigue:

$$f(x) = \frac{1}{1 - x} \qquad f(0) = 1 \qquad a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \frac{1}{0!} = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1 - x)^2} \qquad f'(0) = 1 \qquad a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1!} = 1$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot 1}{(1 - x)^3} \qquad f''(0) = 2! \qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{2!}{2!} = 1$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{(1 - x)^4} \qquad f^{(3)}(0) = 3! \qquad a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{3!}{3!} = 1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1 - x)^{n+1}} \qquad f^{(n)}(0) = n! \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

La serie de Taylor correspondiente es $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, que, como ya sabemos, converge a $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ para $|x| < 1$. Por tanto,

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots \text{ para } |x| < 1$$

En los ejemplos 9.3.2 al 9.3.4, se demuestra cómo modificar series geométricas para obtener la representación en serie de potencias para varias funciones racionales y una función logarítmica. Sin embargo, a veces la forma más directa de obtener la

www.FreeLibros.com

representación en serie de potencias de una función es hallando su serie de Taylor. Por ejemplo, la representación de serie de potencias para la función exponencial $E(x) = e^x$ no se puede hallar modificando o manipulando una serie geométrica, pero, como se muestra en el ejemplo 9.3.6, la serie de Taylor para $E(x)$ se puede hallar muy fácilmente.

EJEMPLO | 9.3.6

Demuestre que la serie de Taylor de la función $f(x) = e^x$, alrededor de $x = 0$ es

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Demuestre también que esta serie de potencia converge para toda x.

Solución

Calcule los coeficientes de Taylor como sigue:

$$f(x) = e^x \qquad f(0) = 1 \qquad a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \frac{1}{0!}$$

$$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1 \qquad a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \frac{1}{1!}$$

$$f''(x) = e^x \qquad f''(0) = 1 \qquad a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{1}{2!}$$

$$f^{(3)}(x) = e^x \qquad f^{(3)}(0) = 1 \qquad a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{3!} = \frac{1}{3!}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \qquad f^{(n)}(0) = 1 \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}$$

La correspondiente serie de Taylor es

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Para determinar el conjunto de convergencia de esta serie de potencias, se usa el criterio de la razón. Se encuentra que

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!\, x^{n+1}}{(n+1)!\, x^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 \qquad \text{para toda } x$$

Como $L = 0 < 1$, se deduce que la serie de Taylor para e^x converge para toda x. Además, se puede demostrar que la serie de Taylor converge a e^x para toda x; esto es,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

para toda x.

www.FreeLibros.com

Aunque la serie de Taylor de una función es la única serie de potencias que puede convergir a la función, realmente puede ser que no converja. De hecho, hay algunas funciones cuya serie de Taylor converge, pero no al valor de la función. Por fortuna, estas funciones raras veces se presentan en la práctica, y casi todas las funciones que es probable encontrar son iguales a su serie de Taylor allí donde converge la serie.

Series de Taylor alrededor de $x = a$

A veces es inapropiado (o imposible) representar una función dada por una serie de potencia de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, y en lugar de eso es necesario usar una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$, donde a es una constante. Éste es el caso, por ejemplo, de la función $f(x) = \ln x$, que no está definida para $x \leq 0$ y por ello no puede ser la suma de una serie de la forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, en un intervalo simétrico alrededor de $x = 0$.

Usando un argumento similar al de la página 689, se puede demostrar que si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$, los coeficientes de la serie están relacionados con las derivadas de f por la fórmula

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

La serie de potencia en $(x - a)$ con estos coeficientes se llama **serie de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x = a$.** Se puede demostrar que las series de este tipo convergen en intervalos simétricos de la forma $a - R < x < a + R$, incluyendo posiblemente uno o los dos puntos extremos $x = a - R$ y $x = a + R$. Nótese que la serie de Taylor alrededor de $x = 0$ es simplemente un caso especial de la serie de Taylor más general alrededor de $x = a$.

Serie de Taylor alrededor de $x = a$ ■ La serie de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x = a$ es la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$$

donde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

En el ejemplo 9.3.4, se encuentra una representación en serie de potencias para $\ln(1 + x)$, pero no hay serie de Taylor alrededor de $x = 0$ para $\ln x$ porque $\ln x$ y sus derivadas no están definidas en $x = 0$. No obstante, se puede hallar una serie de Taylor para $\ln x$ alrededor de $x = a$ para $a > 0$, como se ilustra en el ejemplo 9.3.7 para el caso donde $a = 1$.

EJEMPLO | 9.3.7

Demuestre que la serie de Taylor para $\ln x$ alrededor de $x = 1$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x - 1)^n}{n} = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} - \frac{(x - 1)^4}{4} + \cdots$$

¿Para qué valores de x converge esta serie?

www.FreeLibros.com

Solución

Calcule los coeficientes de Taylor como sigue:

$$f(x) = \ln x \qquad f(1) = 0 \qquad a_0 = \frac{f(1)}{0!} = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(1) = 1 \qquad a_1 = \frac{f'(1)}{1!} = 1$$

$$f''(x) = \frac{-1}{x^2} \qquad f''(1) = -1 \qquad a_2 = \frac{f''(1)}{2!} = -\frac{1}{2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2!}{x^3} \qquad f^{(3)}(1) = 2! \qquad a_3 = \frac{f^{(3)}(1)}{3!} = \frac{1}{3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-3!}{x^4} \qquad f^{(4)}(1) = -3! \qquad a_4 = \frac{f^{(4)}(1)}{4!} = -\frac{1}{4}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n} \qquad f^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)! \qquad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

La serie de Taylor correspondiente es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$$

Usando el criterio de la razón para determinar el conjunto de convergencia para esta serie de potencia, se encuentra que el límite de la razón de términos consecutivos es

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+2}(x-1)^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n(x-1)^{n+1}}{(n+1)(x-1)^n} \right|$$

$$= |x-1|$$

de modo que la serie converge para

$$L = |x-1| < 1$$

o, lo que es equivalente, para

$$-1 < x-1 < 1$$

$$0 < x < 2$$

y diverge para $|x-1| > 1$. Se puede demostrar que la serie también converge en el punto extremo $x = 2$ y, de hecho, que

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$$

$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \cdots \qquad \text{para } 0 < x \leq 2$$

www.FreeLibros.com

Aproximación por polinomios de Taylor

Las sumas parciales de la serie de Taylor de una función son polinomios que se pueden usar para aproximar la función. En general, cuantos más términos haya en la suma parcial, mejor será la aproximación. Denote por $P_n(x)$ la suma parcial $(n + 1)$, que es un polinomio de grado (a lo sumo) n. En particular,

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

El polinomio $P_n(x)$ se conoce como ***n*-ésimo polinomio de Taylor** de $f(x)$ alrededor de $x = a$. La aproximación de $f(x)$ por sus polinomios de Taylor $P_n(x)$ es más precisa cerca de $x = a$ y para valores grandes de n. A continuación se muestra un argumento geométrico que debe dar al estudiante una idea adicional de la situación.

Observe primero que en $x = a$, f y P_n son iguales, como son respectivamente, sus primeras n derivadas. Por ejemplo, con $n = 2$

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 \qquad \text{y} \qquad P_2(a) = f(a)$$

$$P_2'(x) = f'(a) + f''(a)(x - a) \qquad \text{y} \qquad P_2'(a) = f'(a)$$

$$P_2''(x) = f''(a) \qquad \text{y} \qquad P_2''(a) = f''(a)$$

El hecho de que $P_n(a) = f(a)$ implica que las gráficas de P_n y f se cruzan en $x = a$. El hecho de que $P_n'(a) = f'(a)$ implica además que las gráficas tienen la misma pendiente en $x = a$. El hecho de que $P_n''(a) = f''(a)$ impone la adicional restricción de que las gráficas tienen la misma concavidad en $x = a$. En general, cuando n aumenta, también aumenta el número de derivadas comparables y la gráfica de P_n se aproxima más a la de f, cerca de $x = a$. La situación se ilustra en la figura 9.4, que muestra las gráficas de e^x y sus primeros tres polinomios de Taylor.

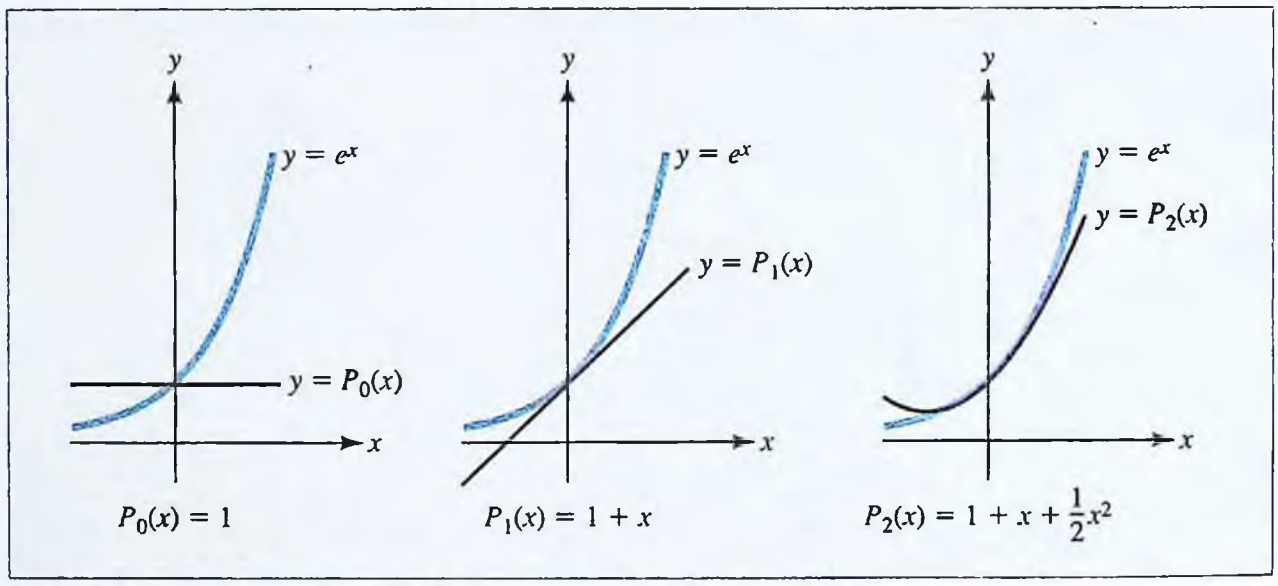


FIGURA 9.4 Gráficas de $f(x) = e^x$ y sus primeros tres polinomios de Taylor.

El uso de polinomios de Taylor para aproximar funciones se ilustra en los ejemplos 9.3.8 y 9.3.9.

EJEMPLO | 9.3.8

Use un polinomio de Taylor de grado 6 para aproximar e.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Refiérase al ejemplo 9.3.8. Grafique $f(x) = e^x$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, y $P_3(x)$, con $f(x)$ en negritas. Use la pantalla desimal modificada [−2.35, 2.35]1 por [−1, 4]1 y observe qué tan bien aproximan los polinomios de Taylor a $f(x)$. Cambie la pantalla a [0, 2.35]1 por [1, 5]1 y haga rastreo de las curvas en $X = 1$ para estimar los errores al aproximar el valor e. Repita para $X = 0.75$ y $X = 1.5$.

Solución

Del ejemplo 9.3.6,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{n!} \text{ para toda } x$$

Por tanto, $P_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$

y

$$e = e^1 \approx P_6(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx 2.71806$$

Analizando el error que resulta de esta clase de aproximación (basado en técnicas que están fuera del alcance de este texto), se puede demostrar que el valor real de e, redondeado a cinco lugares decimales, es 2.71828.

EJEMPLO | 9.3.9

Use un polinomio de Taylor apropiado de grado 3, para aproximar $\sqrt{4.1}$.

Solución

El objetivo es estimar $f(x) = \sqrt{x}$ cuando $x = 4.1$. Como 4.1 es cercano a 4 y los valores de f y de sus derivadas en $x = 4$ son fáciles de calcular, use un polinomio de Taylor alrededor de $x = 4$.

Calcule los coeficientes de Taylor necesarios alrededor de $x = 4$ como sigue:

$f(x) = \sqrt{x}$	$f(4) = 2$	$a_0 = \frac{2}{0!} = 2$
$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$	$f'(4) = \frac{1}{4}$	$a_1 = \frac{\frac{1}{4}}{1!} = \frac{1}{4}$
$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$	$f''(4) = -\frac{1}{32}$	$a_2 = \frac{-\frac{1}{32}}{2!} = -\frac{1}{64}$
$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$	$f^{(3)}(4) = \frac{3}{256}$	$a_3 = \frac{\frac{3}{256}}{3!} = \frac{1}{512}$

El correspondiente polinomio de Taylor de grado 3 es

$$P_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4) - \frac{1}{64}(x - 4)^2 + \frac{1}{512}(x - 4)^3$$

y por tanto

$$\sqrt{4.1} \approx P_3(4.1) = 2 + \frac{1}{4}(0.1) - \frac{1}{64}(0.1)^2 + \frac{1}{512}(0.1)^3 \approx 2.02485$$

Por cierto, los cinco lugares decimales de esta estimación son correctos. Redondeado a siete lugares decimales, el verdadero valor de $\sqrt{4.1}$ es 2.0248457.

En el ejemplo 9.3.10, se usa un polinomio de Taylor para estimar una integral definida de una función que no tiene antiderivada elemental. En el capítulo 10 se usará una forma de esta integral para calcular probabilidades relacionadas con la distribución normal.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!



Calcule la integral definida citada en el ejemplo 9.3.10, usando la función de integración numérica de su calculadora graficadora. Compare este valor con el de la integral usando un polinomio de Taylor de grado 8.

EJEMPLO 9.3.10

Use un polinomio de Taylor de grado 8 para aproximar $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

Solución

La forma más fácil de obtener la serie de Taylor de e^{-x^2} es empezar con la serie

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

para e^x y sustituir x por $-x^2$ para obtener

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

Por tanto,

$$e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8$$

y entonces

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2}dx &\approx \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8\right)dx \\ &= \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{42}x^7 + \frac{1}{216}x^9\right)\Big|_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0.7475\end{aligned}$$

Este valor es correcto sólo hasta la segunda cifra decimal. El verdadero valor de la integral a siete lugares decimales es 0.7468241.

PROBLEMAS | 9.3

En los problemas del 1 al 8 determine el radio de convergencia y el intervalo de convergencia absoluta para la serie de potencias dada.

1. $\sum_{k=0}^{\infty} 5^k x^k$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k}x^k$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$

4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k x^k}{k}$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}x^k}{k^2}$

6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(2k)!}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k x^k}{k!}$

8. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!x^k}{3^k}$

www.FreeLibros.com

En los problemas del 9 al 14 encuentre una serie de potencias para la función dada y determine su intervalo de convergencia absoluta.

9. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}$

10. $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$

11. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

12. $f(x) = \dfrac{x}{3 + 2x}$

13. $f(x) = \ln(2 + x)$

14. $f(x) = \ln(1 + 2x)$

En los problemas 15 al 23 encuentre la serie de Taylor para la función dada en el punto indicado $x = a$.

15. $f(x) = e^{3x}; a = 0$

16. $f(x) = e^{-2x}; a = 0$

17. $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}); a = 0$

18. $f(x) = (1 + x)e^x; a = 0$

19. $f(x) = e^{-3x}; a = -1$

20. $f(x) = \dfrac{1}{x}; a = 1$

21. $f(x) = \ln(2x); a = \dfrac{1}{2}$

22. $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}; a = 1$

23. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x}; a = 2$

24. Encuentre una serie de potencia para $f(x) = 1/(1 - x)^3$ usando la derivación término a término y el resultado del ejemplo 9.3.3.

25. Encuentre la serie de Taylor para $f(x) = 3x^2e^{x^3}$ alrededor de $x = 0$ de la serie de Taylor para e^x obtenida en el ejemplo 9.3.6 en dos formas diferentes:

a) Sustituya x^3 por x y luego multiplique por $3x^2$ la serie resultante.

b) Sustituya x^3 por x y luego derive término a término.

26. Encuentre la serie de Taylor alrededor de $x = 0$ para la integral indefinida

$$\int \frac{1}{1 + x^2}\, dx$$

[*Sugerencia:* Empiece con la serie geométrica para $1/(1 - x)$, luego sustituya $-x^2$ por x e integre término a término.]

27. Encuentre la serie de Taylor alrededor de $x = 0$ para la integral indefinida

$$\int x^2 e^{-x^2}\, dx$$

[*Sugerencia:* Empiece por sustituir $-x^2$ por x en la serie de Taylor para e^x obtenida en el ejemplo 9.3.6. Entonces multiplique por x^2 la serie resultante e integre término por término.]

En los problemas del 28 al 35 use un polinomio de Taylor de grado especificado n para aproximar la cantidad indicada.

28. $\sqrt{3.8}; n = 3$

29. $\sqrt{1.2}; n = 3$

30. $\ln 1.1; n = 5$

31. $\ln 0.7; n = 5$

32. $e^{0.3}; n = 4$

33. $\dfrac{1}{\sqrt{e}}; n = 4$

34. $\ln 2; n = 5$ [*Sugerencia:* $\ln 2 = -\ln 0.5$.]

35. $\ln \sqrt[3]{4}; n = 5$ [Véase la sugerencia al problema 34.]

www.FreeLibros.com

En los problemas del 36 al 39 use un polinomio de Taylor del grado indicado n, junto con integración término a término, para estimar la integral definida indicada.

36. $\int_0^{1/2} e^{-x^2}\,dx\,;\ n = 6$

37. $\int_{-0.2}^{0.1} e^{-x^2}\,dx\,;\ n = 4$

38. $\int_0^{0.1} \frac{1}{1+x^2}\,dx\,;\ n = 4$

39. $\int_{-1/2}^{0} \frac{1}{1-x^3}\,dx\,;\ n = 9$

En los problemas 40 al 43 calcule los primeros cuatro polinomios de Taylor $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ *y* $P_3(x)$ *para la función dada, alrededor del punto especificado* $x = a$. *A continuación use la función de gráficas de su calculadora para dibujar las gráficas de* f(x) *y de los cuatro polinomios de aproximación en el mismo conjunto de ejes.*

40. $f(x) = e^{2x}\,;\ a = 0$

41. $f(x) = 1 - e^{-x}\,;\ a = 0$

42. $f(x) = \ln x\,;\ a = 1$

43. $f(x) = \frac{\ln x}{x}\,;\ a = 1$

44. ANÁLISIS MARGINAL El costo marginal de producir x unidades de una mercancía particular es $C'(x)$ mil dólares por unidad, donde

$$C'(x) = \ln(1 + 0.01x^2)$$

El costo neto de producir las primeras ocho unidades de la mercancía está dado por la integral

$$C(8) - C(0) = \int_0^8 C'(x)\,dx = \int_0^8 \ln(1 + 0.01x^2)\,dx$$

a) Encuentre el polinomio de Taylor de grado 6 para $\ln(1 + 0.01x^2)$ en $x = 0$. [*Sugerencia:* El ejemplo 9.3.4 puede ayudar.]

b) Integre el polinomio de Taylor hallado en la parte ***a)*** para estimar el cambio neto $C(8) - C(0)$. [*Nota:* El costo neto real es alrededor de 1 452, es decir, $1 452.]

45. ANÁLISIS MARGINAL La utilidad marginal derivada de producir x unidades de una mercancía particular es $P'(x)$ mil dólares por unidad, donde

$$P'(x) = 10x^2e^{-x^2}$$

Encuentre el polinomio de Taylor de grado 7 para $P'(x)$ en $x = 0$, e integre para obtener una estimación de la utilidad neta $P(1) - P(0)$ obtenida al producir la primera unidad.

DENSIDAD DE POBLACIÓN *Si la densidad de población a* x *millas del centro de cierta ciudad es* D(x), *entonces es posible demostrar que la población total* P(M) *que vive dentro de un radio de* M *millas del centro de la ciudad está dada por la integral*

$$P(M) = \int_0^M [2\pi\, x\, D(x)]\,dx$$

(véase el problema 18 del conjunto de problemas 5.6). Use este resultado en los problemas 46 y 47.

46. Suponga que la densidad de población es

$$D(x) = \frac{5\,000}{1 + 0.5x^2}$$

a) Encuentre el polinomio de Taylor de grado 6 para $2\pi\, x\, D(x)$ en $x = 0$ e integre para obtener una estimación del número total de personas $P(1)$ que viven dentro de 1 milla del centro de la ciudad.

b) Evalúe la integral para $P(1)$ directamente usando la sustitución $u = 1 + 0.5x^2$. Compare este valor exacto de $P(1)$ con su estimación del inciso ***a)***.

c) Repita los incisos ***a)*** y ***b)*** para $P(10)$.

d) Sus dos respuestas del inciso ***c)***, ¿están cerca una de otra? Escriba un párrafo acerca de lo que piensa usted que salió mal.

47. Suponga que la densidad de población es

$$D(x) = \frac{5\,000}{1 + 0.5x^3}$$

Use un polinomio de Taylor de grado 8 para estimar $P(1)$, la población dentro de 1 milla del centro de la ciudad.

48. GENÉTICA El modelo de Jukes-Cantor[2] en genética se usa para estudiar mutaciones desde una secuencia original de ADN. La distancia de Jukes-Cantor entre secuencias S_0 y S_1 de ADN es la cantidad

$$d = \frac{-3}{4}\ln\left(1 - \frac{4}{3}p\right)$$

donde p es la fracción de sitios que están en desacuerdo entre las dos secuencias. Esto es una me-

[2] Por ejemplo, vea Mathematical Models in Biology, por E. S. Allman y J. A. Rhodes, Cambridge Univ. Press, 2004, pp. 155-162.

www.FreeLibros.com

dida del número total de sustituciones por sitio que ocurren cuando S_0 evoluciona hacia S_1.

a) Aproxime d por un polinomio de Taylor de grado 2 en $x = 0$.

b) Un investigador encuentra que, de 43 sitios en una secuencia S_0 particular de DNA, 17 han experimentado sustitución cuando la secuencia evoluciona hacia S_1. Use el polinomio de Taylor obtenido en el inciso *a)* para estimar la distancia de Jukes-Cantor para esta mutación.

c) Lea un artículo sobre la forma en que la distancia de Jukes-Cantor, así como otras *distancias filogenéticas*, se usan para medir similitud de secuencia. Luego escriba un párrafo que describa el papel desempeñado por estas ideas en modelos matemáticos de evolución.

Términos importantes, símbolos y fórmulas

Serie infinita:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots \quad (662)$$

n-ésima suma parcial:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad (663)$$

Convergencia y divergencia de una serie: (663)

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge a la suma S si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

y diverge en otro caso

Serie geométrica con razón común r: (665)

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n \text{ converge a } \frac{a}{1-r} \text{ si } |r| < 1$$

y diverge si $|r| \geq 1$

La serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (672)

El criterio de divergencia: (674)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ diverge si } \lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$$

El criterio de la integral: (675)

Si f es decreciente, $f(x) > 0$, y $f(n) = a_n$,

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ o ambas convergen o ambas divergen.

El criterio de la serie p: (678)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge si $p > 1$ y diverge si $0 \leq p \leq 1$

El criterio de comparación directa: (679)

Suponga que $0 \leq b_n \leq a_n$ para toda n. Entonces

si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, también converge $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, también diverge $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

El criterio de la razón: (680)

Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sea $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

La serie converge si $L < 1$ y diverge si $L > 1$.

La prueba no es concluyente si $L = 1$.

Para una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ se cumple una y solo una de las siguientes alternativas: (684)

Converge sólo para $x = 0$

Converge para toda x

Converge para $|x| < R$ y diverge para $|x| > R$

Intervalo de convergencia absoluta (684)

Radio de convergencia (684)

Derivación e integración de series de potencias, término a término (687)

Serie de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x = 0$: (690)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ donde } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Serie de Taylor de $f(x)$ alrededor de $x = a$: (692)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \text{ donde } a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Series de Taylor importantes:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ para } |x| < 1 \quad (690)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ para toda } x \quad (691)$$

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n \text{ para } 0 < x \leq 2 \quad (692)$$

Polinomios de Taylor (694)

RESUMEN DEL CAPÍTULO

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Revisión del capítulo 9

1. Determine si cada una de las siguientes series geométricas converge o diverge. Si la serie converge, encuentre su suma.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{5^{n+1}}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3^{n-1}}$

2. En cada caso, demuestre que la serie dada converge.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$

3. En cada caso, demuestre que la serie dada diverge.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n^2+1)}{100n^3+9}$ *b)* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

4. Determine si cada una de las series siguientes converge o diverge.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, e^{-n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ *d)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

5. Por cada una de las siguientes series de potencias, encuentre el intervalo de convergencia absoluta.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$ *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$

6. Encuentre una serie de potencias para cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ *b)* $g(x) = \frac{5}{2+3x}$

7. Encuentre la serie de Taylor alrededor de $x = 0$ para cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = e^x + e^{-x}$ *b)* $g(x) = \ln(x^2+1)$

8. ACUMULACIÓN DE MEDICAMENTO Un paciente recibe una inyección de 25 unidades de cierto medicamento cada 24 horas. El medicamento se elimina exponencialmente, de modo que la fracción que queda después de t días es $f(t) = e^{-t/3}$. Si el tratamiento se continúa en forma indefinida, ¿aproximadamente cuántas unidades habrá en el torrente sanguíneo del paciente a largo plazo justo antes de una inyección?

9. VALOR PRESENTE ¿Cuánto se debe invertir hoy a una tasa anual de 4% capitalizado continuamente para que, iniciando el año siguiente, se puedan hacer retiros anuales de $5 000 a perpetuidad?

10. Estime el valor de la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

hallando la serie de potencias $f(x) = 1/(1+x^2)$ e integrando término a término.

Problemas de repaso

En los problemas del 1 al 8 determine si la serie geométrica dada converge o diverge. Si la serie converge, encuentre su suma.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{5^{n+1}}$ **2.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{3^{2n}}$ **3.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{13}{(-5)^n}$ **4.** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-3}{2}\right)^n$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-0.5n}$ **6.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$ **7.** $\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{2}\right)^n\right]$ **8.** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n$

En los problemas del 9 al 17 determine si la serie dada converge o diverge.

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ **10.** $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2$ **11.** $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(2+\frac{1}{n}\right)$

12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\sqrt{n}}$ **13.** $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ **14.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$

www.FreeLibros.com

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ **16.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$ **17.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{2n}}{n!}$

En los problemas del 18 al 21 encuentre el intervalo de convergencia absoluta para la serie de potencias dada.

18. $\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n$ **19.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{3^{n-1}}$ **20.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!}$ **21.** $\sum_{n=1}^{\infty} e^n x^{n-1}$

En los problemas del 22 al 25 encuentre la serie de Taylor en x = 0 *para la función dada, ya sea usando la definición o manipulando una serie conocida.*

22. $f(x) = \frac{1}{(1+2x)^2}$ **23.** $f(x) = e^x - e^{-x}$ **24.** $f(x) = x^2 e^{-2x}$ **25.** $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)$

DECIMALES PERIÓDICOS *En los problemas 26 y 27, exprese el decimal periódico como una fracción* p/q.

26. 0.1223535 . . . **27.** 51.34747 . . .

28. PELOTA QUE REBOTA Se deja caer una pelota desde una altura de 6 pies y ésta rebota el 80% de su altura previa, en forma repetida e indefinidamente . ¿Qué distancia recorre la pelota?

29. PELOTA QUE REBOTA Se deja caer una pelota desde una altura de H y ésta rebota el 75% de su altura previa, en forma repetida e indefinidamente. Si recorre una distancia total de 70 pies, ¿cuánto es H?

30. AHORROS ¿Cuánto se debe invertir hoy a una tasa de interés anual de 5%, capitalizado continuamente para que, empezando el año próximo, se puedan hacer retiros anuales de $4 000 a perpetuidad?

31. VALOR PRESENTE Una inversión garantiza pagos anuales de $5 000 a perpetuidad, con pagos que inician de inmediato. Encuentre el valor presente de esta inversión si la tasa de interés anual predominante permanece fija al 5% capitalizado continuamente.

32. EL EFECTO MULTIPLICADOR Suponga que en toda la nación se gasta alrededor del 91% de todo el ingreso y se ahorra el 9%. ¿Cuál es la cantidad total de gasto generada por una reducción de impuesto de 60 mil millones de dólares, si los hábitos de ahorro no cambian?

33. ACUMULACIÓN DE MEDICAMENTO Un paciente recibe una inyección de 25 unidades de cierto medicamento cada 24 horas. El medicamento es eliminado exponencialmente, de modo que la fracción que queda en el cuerpo del paciente después de t días es $f(t) = e^{-kt}$ para cierta constante k. Si a largo plazo se acumulan 70 unidades de medicamento en el torrente sanguíneo del paciente justo antes de una inyección, ¿a qué es igual k?

34. DEMOGRAFÍA Un país en desarrollo tiene actualmente 2 500 científicos capacitados. El gobierno estima que, cada año, 6% del número de científicos se retira, muere o emigra, mientras que 278 nuevos científicos se gradúan de alguna universidad. Si esta tendencia continúa, ¿cuántos científicos habrá en 20 años? ¿Cuántos habrá a largo plazo?

35. SERIE TELESCOPIANTE Considere la serie infinita

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

a) La n-ésima suma parcial de la serie se puede escribir como

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

Expanda la quinta suma parcial para demostrar que

$$S_5 = 1 - \frac{1}{6}.$$

b) Generalice el resultado del inciso *a)* para demostrar que

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

c) Demuestre que la serie dada converge y encuentre su suma S. [*Sugerencia:* Recuerde que $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.]

36. SERIE TELESCOPIANTE Considere la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2 - 1}$$

a) La n-ésima suma parcial de la serie se puede escribir como

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^2 - 1} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$$

Demuestre que

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

b) Demuestre que la serie dada converge y encuentre su suma S. [Véase la sugerencia al problema 35.]

RESUMEN DEL CAPÍTULO

www.FreeLibros.com

37. **LINGÜÍSTICA** Los lingüistas y psicólogos, interesados en la evolución del lenguaje, han observado un interesante patrón en la frecuencia de las llamadas "palabras raras" en ciertas obras literarias. Según un modelo clásico[3] si un libro contiene un total de T de estas palabras diferentes, entonces aproximadamente $\frac{T}{(1)(2)}$ palabras aparecen exactamente una vez, $\frac{T}{(2)(3)}$ palabras aparecen exactamente dos veces y, en general, $\frac{T}{k(k+1)}$ palabras aparecen exactamente k veces.

a) Suponiendo que el patrón de frecuencia de palabras del modelo es preciso, ¿por qué debe esperarse que converja la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T}{k(k+1)}?$$

¿Cuál debe esperarse que sea su suma?

b) Verifique su conjetura del inciso *a*) sumando realmente la serie. [*Sugerencia:* Véase el problema 35.]

c) Lea un artículo sobre teoría de la información y la enseñanza, y escriba un párrafo sobre los métodos matemáticos sobre este tema.

38. **GENÉTICA** En un modelo genético clásico[4] el promedio de vida de un gen perjudicial está relacionado con la serie infinita

$$1 + 2r + 3r^2 + 4r^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k\, r^{k-1}$$

para $0 < r < 1$. Demuestre que esta serie converge y encuentre su suma en términos de r. [*Sugerencia:* Si S_n es la n-ésima suma parcial de la serie, ¿cuál es $S_n - rS_n$?]

En los problemas 39 y 40 encuentre la serie de Taylor para la función dada para el valor indicado de $x = a$

39. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$; $a = 2$

40. $f(x) = \ln(2 + x)$; $a = -1$

41. Use un polinomio de Taylor de grado 3 para aproximar $\sqrt{0.9}$.

42. Use un polinomio de Taylor de grado 10 para aproximar

$$\int_0^{1/2} \frac{x}{1+x^3}\, dx$$

43. **EL PROBLEMA DE LA ABEJA** Este relato cuenta que el famoso matemático John von Neumann (1903-1957), fue desafiado una vez a resolver una versión del siguiente problema:

> Dos trenes, cada uno corriendo a 30 ft/s, se aproximan uno al otro en una vía recta. Cuando están a 1 000 pies de distancia, una abeja empieza a volar de un tren a otro yendo y viniendo, a razón de 60 ft/s, hasta que los trenes chocan. ¿Qué distancia ha volado la abeja antes de ser aplastada por los trenes que chocan?

Von Neumann examinó la pregunta sólo brevemente antes de dar la respuesta correcta. La persona que le planteó el problema rió entre dientes y dijo: "Usted vio la trampa. Debí haberlo supuesto antes que tratar de engañarlo, profesor." Von Neumann pareció confundido y contestó "¿Cuál trampa? Sumé la serie".

a) Sume una serie como hizo von Neumann para hallar la distancia recorrida por la infortunada abeja.

b) A diferencia de von Neumann, ¿ve usted una forma fácil de resolver este problema? (A propósito, una forma de esta pregunta es a veces utilizada por Microsoft para probar nuevos empleados.)

c) Intente resolver esta versión más fácil y moderada del mismo problema. Suponga que los conductores de los dos trenes se ven mutuamente y aplican los frenos cuando están a 180 pies uno del otro. Si ambos trenes desaceleran a razón de 5 ft/s^2, ¿cuánto vuela la abeja antes que los trenes choquen?

44. Use su calculadora para calcular la suma

$$S(N) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^N}{(2N)!}$$

para $N = 2, 7, 10, 15$ y 30. Con base en sus resultados, ¿piensa usted que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

converge o diverge? Si converge, ¿cuál piensa usted que es su suma?

45. Calcule los primeros cuatro polinomios de Taylor $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $P_3(x)$ en $x = 0$ para la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

a) Use la función de gráficas de su calculadora para dibujar las gráficas de estos polinomios sobre el mismo conjunto de ejes.

---

[3] *Human Behavior and the Principle of Least Effort*, por G. K. Zipf, Addison-Wesley, Cambridge, MA. Otra fuente es *The Mathematical Theory of Communication*, por C. E. Shannon y W. Weaver, Univ. of Illinois Press, Urbana, IL.

[4] *Human Genetics: Principles and Methods*, por C.C. Li, McGraw-Hill, Nueva York.

www.FreeLibros.com

b) Use $P_3(x)$ para estimar el valor de la integral definida

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

46. EMIGRACIÓN DE MANO DE OBRA Los economistas se refieren al proceso de cambiarse de un trabajo a otro como *emigración de mano de obra*. Por lo general, este movimiento es realizado como un medio de mejorar social y económicamente, pero también implica costos como lo es la pérdida de antigüedad en el trabajo anterior y el costo psicológico de romper relaciones. Considere la función[5]

$$V = \sum_{n=1}^{N} \frac{E_2(n) - E_1(n)}{(1+i)^n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{C_m(n)}{(1+i)^n} - C_p$$

donde $E_2(n)$ y $E_1(n)$ denotan las ganancias de los trabajos nuevo y anterior, respectivamente, en el año n después de hacer el cambio; i es la tasa prevaleciente de interés anual (en forma decimal); N es el número de años que se espera que la persona esté en el nuevo trabajo; y C_m y C_p son los costos esperados monetario y psicológico del movimiento (ganancia psicológica menos pérdida psicológica).

a) ¿Qué representa V? ¿Por qué es deseable el cambio de trabajo si $V > 0$ e indeseable si $V < 0$?

b) Para mayor sencillez, suponga que $E_2 - E_1$ y C_m son constantes para toda n y que la persona espera permanecer en el nuevo trabajo "para siempre", una vez que se cambie (esto es, $N \to \infty$). Encuentre una fórmula para V y úsela para obtener un criterio para saber si hacer o no el cambio. [*Sugerencia:* El criterio de usted debe ser una desigualdad que contenga E_1, E_2, C_m, C_p e i.]

c) Lea un artículo sobre cambios de trabajo y emigración de mano de obra, y escriba un párrafo sobre métodos matemáticos para modelar estos problemas.

47. DETERMINACIÓN DE FECHAS GEOLÓGICAS En el momento en que se estudió la determinación de fechas por carbono, en el capítulo 4, se observó que los métodos de radiocarbono se emplearon principalmente para determinar fechas de especímenes que no son muy viejos[6] Para determinar la antigüedad de piedras y artefactos de más de 40 000 años, es necesario usar otros métodos. Ya sea que se use ^{14}C o un isótopo radiactivo de algún otro elemento para determinar la antigüedad, se puede demostrar que

$$\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} + 1 = e^{(\ln 2)t/\lambda}$$

donde $R(t)$ es el número de átomos del isótopo radiactivo en el momento t, $S(t)$ es el número de átomos del producto estable de desintegración radiactiva, $S(0)$ es el número de átomos del producto estable inicialmente presente (en $t = 0$), y λ es la vida media del isótopo radiactivo (el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de la muestra).

a) Aproxime el tiempo t en esta fórmula usando el polinomio de Taylor de grado 2 para e^x en $x = 0$.

b) Suponga que se analiza una trozo de mica, y se encuentra que 5% de los átomos de la piedra son rubidio 87 y 0.04% de estroncio 87, ambos radiactivos. Si todo el estroncio 87 se produjo por desintegración del rubidio 87 en la piedra, ¿cuál es la antigüedad de ésta? Use la aproximación obtenida en el inciso *a*). Necesitará saber que la vida media del rubidio 87 es 48.6×10^9 años.

c) Lea un artículo sobre métodos de determinación de fechas geológicas y escriba un párrafo sobre la forma en que estos métodos difieren de la determinación radiactiva y entre sí.

48. DETERMINACIÓN DE FECHAS GEOLÓGICAS Reconsidere la ecuación de determinación geológica

$$\frac{S(t) - S(0)}{R(t)} + 1 = e^{(\ln 2)t/\lambda}$$

del problema 47.

a) De la ecuación, despeje t. Entonces use el polinomio de Taylor de grado 2 para $\ln(1+x)$ en $x = 0$ para estimar el valor de t que satisface la ecuación.

b) ¿Qué ajuste sería necesario si su aproximación se usara para medir un valor de t tan grande o mayor que la vida media de la sustancia radiactiva empleada en la determinación de antigüedad?

[5] *Contemporary Labor Economics*, por C. R. McConnell y S. L. Brue, McGraw-Hill, Nueva York, 1992, pp. 440-444.

[6] Paul J. Campbell, "*How Old Is the Earth?*", UMAP Modules 1992: Tools for Teaching, Consortium for Mathematics and its Applications, Inc., Lexington, MA, 1993, pp. 105-137.

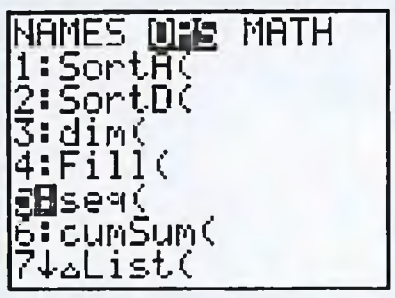
www.FreeLibros.com

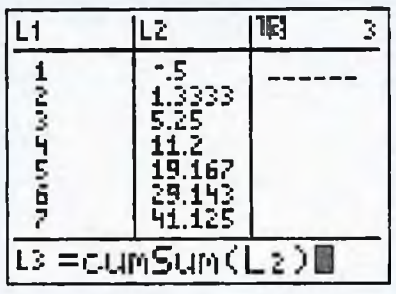
¡EXPLORE! ACTUALIZACIÓN

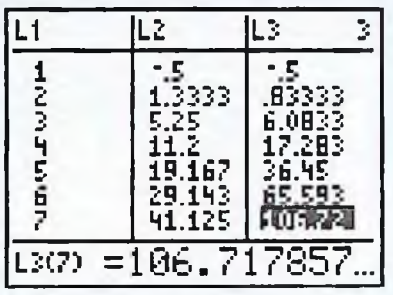
En el sitio web especificado en el libro, www.mhhe.com/hoffmann, es posible tener acceso a soluciones completas para todas las cajas ¡EXPLORE! de este libro.

Solución para el ¡Explore! de la página 663

Para calcular la suma $\sum_{n=1}^{7} \frac{n^3 - 2n}{n+1}$ con una precisión de por lo menos tres lugares decimales, primero escriba Y1 = (X^3 − 2X)/(X + 1) en el editor de ecuaciones. Como se mostró en la Introducción a la calculadora en el prefacio de este texto, utilice las funciones de sucesión, **5:seq(**, y sucesión acumulada, **6:sumSeq(**, del menú **OPS** de la tecla **LIST** (**2nd STAT**), mostrada en la siguiente pantalla izquierda. En el editor **STAT**, escriba **L1 = seq(X, X, 1, 7), L2 = Y1(L1)** y **L3 = cumSum(L2),** asegurándose que el cursor esté precisamente en la línea superior de cada columna de lista antes de escribir los respectivos comandos. Los resultados finales de la pantalla derecha que sigue, muestran que los términos individuales de esta serie en L2 parecen hacerse más y más grandes, creando una sucesión de sumas parciales acumuladas crecientes en L3.

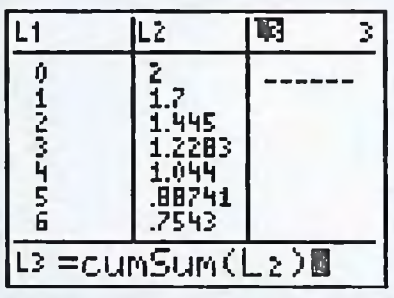


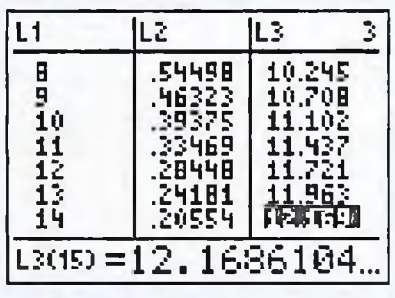


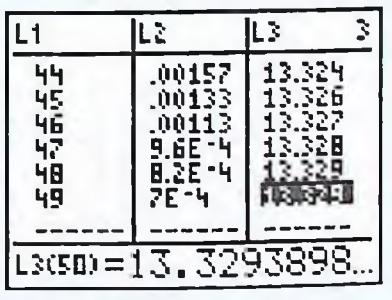


Solución para el ¡Explore! de la página 665

Para calcular la serie geométrica con $a = 2$ y $r = 0.85$, primero escriba Y1 = 2(0.85)^X en el editor de ecuaciones de su calculadora graficadora. Cree los números 0 a 49 en List 1 del editor **STAT**, con el uso de la función de sucesión, **L1 = seq(X, X, 0, 49).** A continuación escriba **L2 = Y1(L1)** en la parte superior de la columna List 2. Por último, ejecute **L3 = cumSeq(L2)** y flechas abajo a las filas 15 y 50 para obtener la sumas parciales $S_{15} = 12.1686104$ y $S_{50} = 13.3293898$, respectivamente. (Observe que los valores L1 son, respectivamente, 14 y 49.) Los valores S son semejantes a los obtenidos por la fórmula, $S_n = a(1 - r^n)/(1 - r)$. En comparación, $S_{15} = 12.1686104$ está a no más de dos unidades de $S_3 = 13\frac{1}{3}$ y $S_{50} = 13.3293898$ está a no más de unos centésimos de S_3. Trate de comparar S_{100} con S_3.





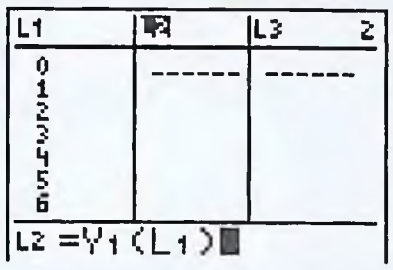


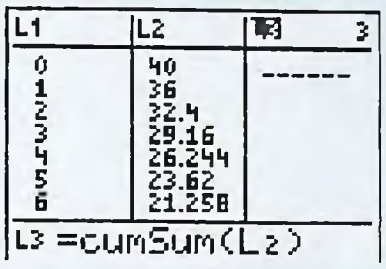
Solución para el ¡Explore! de la página 667

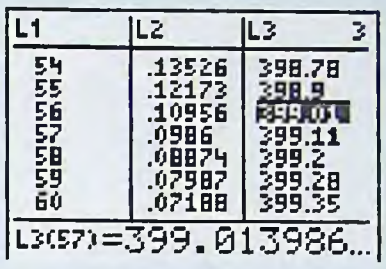
Siguiendo el ejemplo 9.1.7, escriba la función 40(0.9)^X en Y1 del editor de ecuaciones. Para fines de exploración, cree la sucesión {0, 1, . . . , 120} en List 1 del editor **STAT, L1 = seq(X, X, 0, 120).** Precisamente en la parte superior de List 2, escriba **L2 = Y1(L1)** (vea la pantalla de en medio de la página siguiente) para generar los términos correspondientes a la serie y en List 3 cree las correspondientes sumas

www.FreeLibros.com

parciales, **L3 = cumSeq(L2).** Arrastrando a L3 (vea la pantalla derecha siguiente) determinamos que se necesitaron 56 términos para tener la serie finita a no más de mil millones del total de la serie infinita de 400 mil millones.

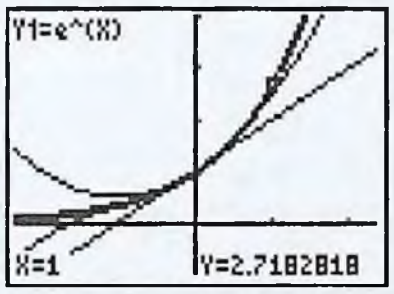


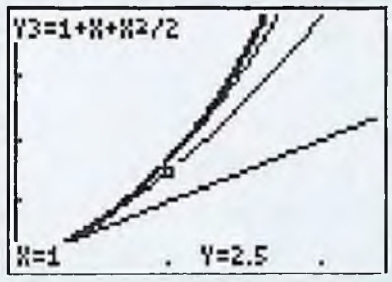


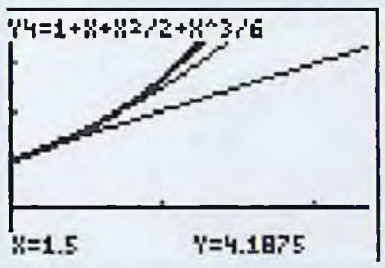


Solución para el ¡Explore! de la página 695

Vea el ejemplo 9.3.8. Grafique $f(x) = e^x$, $P_1(x)$, $P_2(x)$, y $P_3(x)$, con $f(x)$ en negritas, usando la pantalla $[-2.35, 2.35]1$ por $[-1, 4]1$. Los polinomios de Taylor aproximan mejor $f(x)$ en X = 0, con $P_3(x)$ acercándose lo más a $f(x)$ sobre el intervalo $[-2, 2]$, como se ve en la pantalla izquierda a continuación. Si se cambia la pantalla de observación a $[0, 2.35]1$ por $[1, 5]1$ y se rastrean las curvas en X = 1, encontramos $P_1(1) = 2$, $P_2(1) = 2.5$ y $P_3(1) = 2.667$, este último más cercano a $f(1) = e \approx 2.718$. Para X = 0.75, $P_1(0.75) = 1.75$, $P_2(0.75) = 2.031$, y $P_3(0.75) = 2.102$, de nuevo este último más cercano a $f(0.75) \approx 2.117$. En el otro lado en X = 1.5, $P_1(1.5) = 2.5$, $P_2(1.5) = 3.625$, y $P_3(1.5) = 4.1875$, de nuevo este último más cercano a $f(1.5) \approx 4.482$. Según nuestras observaciones, estas figuras muestran que cuanto más nos alejemos de X = 0, más aumenta el error de aproximación. No obstante, cuanto más alto sea el grado del polinomio de Taylor, es mejor la aproximación a $f(x) = e^x$.

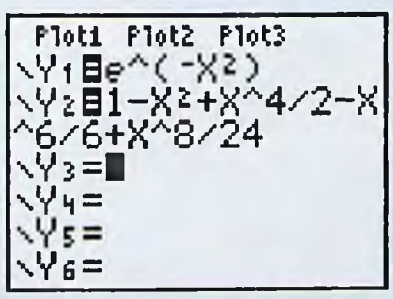


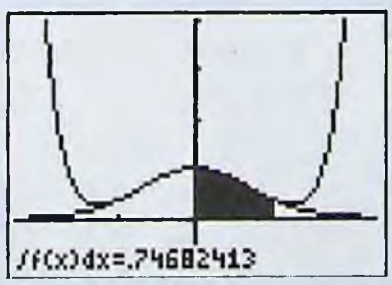




Solución para ¡Explore! de la página 696

Consulte el ejemplo 9.3.10 y introduzca la función $f(x) = e^{\wedge}(-X^2)$ en Y1 y $P_8(x) = 1 - X^2 + X^4/2 - X^6/6 + X^8/24$ en Y2 del editor de ecuaciones de su calculadora graficadora. Use la pantalla decimal modificada $[-2.35, 2.35]1$ por $[-1, 4]1$ y seleccione **7: ∫f(x)dx** de **CALC** menú (**2nd TRACE**) de su calculadora. La pantalla de en medio a continuación muestra la integral de $f(x) = e^{\wedge}(-X^2)$, escogiendo el límite inferior de integración como X = 0 y el límite superior como X = 1. Antes de generar la pantalla derecha de abajo para la integral de $P_8(x)$, asegúrese de borrar el dibujo previo al introducir **1:ClrDraw** en la tecla **DRAW** (**2ND PRGM**). La integral del polinomio de Taylor de grado 8 aproxima al de la función original a no más de 0.001.







www.FreeLibros.com



REFLEXIONE ACERCA DE...

¿CUÁNTOS HIJOS TENDRÁ UNA PAREJA?

Una consideración en la planeación familiar es que muchas parejas desean al menos un hijo y al menos una hija. Llamemos a esto *requerimiento de género*. En promedio, ¿cuántos hijos debe tener una pareja antes de satisfacer el requerimiento de género?



Se contestará esta pregunta en términos de la proporción de varones nacidos entre todos los nacimientos en una población particular. Si esta proporción es m, donde $0<m<1$, entonces la proporción de niñas nacidas será $f = 1 - m$. Por ejemplo, en Estados Unidos, las estadísticas de nacimientos muestran que las proporciones son $m = 0.51$ y $f = 0.49$ (51% niños contra 49% niñas). En el análisis que sigue, se supone que la probabilidad de que nazca un niño para una pareja es m, cualquiera que sea el género de sus hijos anteriores.

Primero se determinan las posibilidades cuando una pareja sigue teniendo hijos hasta satisfacer el requerimiento de género. Suponga que el primer hijo de la pareja es un niño. La pareja entonces continúa teniendo hijos hasta que tengan una hija. En consecuencia, la pareja puede tener un niño seguido por una niña, o dos niños seguidos por una niña, o tres niños seguidos por una niña, y así sucesivamente. Se denotan estas posibilidades por BG, BBG, $BBBG$, . . . , donde B denota un niño y G denota una niña.

Nuestro siguiente paso es determinar la proporción de cada una de estas posibilidades entre todas las parejas que siguen teniendo hijos hasta satisfacer su requerimiento de género. La proporción de estas familias que tienen un hijo seguido por una hija (BG) es

$$mf = m(1 - m)$$

mientras que la proporción de aquellas que tienen dos hijos seguidos por una hija BBG) es

$$mmf = m^2(1 - m)$$

y, en general, la proporción de familias que tienen $j-1$ niños antes de tener su primera niña es

$$\underbrace{m\,m\cdots m}_{j-1 \text{ términos}} f = m^{j-1}(1 - m)$$

www.FreeLibros.com

Análogamente, la proporción de estas familias que tienen $j-1$ niñas antes de tener el primer hijo es

$$\underbrace{ff\cdots f}_{j-1 \text{ términos}} m = f^{j-1} m = (1-m)^{j-1} m$$

Si se reúnen los datos, se ve que la proporción de parejas que tienen $j-1$ hijos del mismo género antes de tener un hijo del género opuesto está dada por la suma

$$p(m, j) = m^{j-1}(1-m) + (1-m)^{j-1} m$$

Si se multiplica la proporción $p(m, j)$ que acabamos de hallar por el número de hijos j en la familia en el momento que se satisface el requerimiento de género, se obtiene la proporción ponderada

$$p(m, j) = j[m^{j-1}(1-m) + (1-m)^{j-1} m]$$

Entonces el tamaño promedio $A(m)$ de una familia que satisface el requerimiento de género se encuentra al sumar estas proporciones ponderadas para todos los tamaños de familia posibles; es decir,

$$A(m) = \sum_{j=2}^{\infty} j\,[m^{j-1}(1-m) + (1-m)^{j-1} m]$$

donde la suma empieza en $j = 2$ porque debe haber al menos dos hijos en cualquier familia que satisfaga el requerimiento de género. Para ver por qué esta suma representa un promedio, considere el problema más sencillo en el que a un grupo de estudiantes se les pide que califiquen a su maestro en una escala de puntos desde 1 (terrible) a 4 (excelente). Suponga que el maestro recibe 1 punto de 10% de los estudiantes, 2 puntos de 40%, 3 puntos de 20% y 4 puntos del 30%. Entonces el promedio de calificación A del maestro está dado por la suma de proporciones ponderadas

$$A = 1(0.1) + 2(0.4) + 3(0.2) + 4(0.3) = 2.7$$

de modo que el maestro es calificado por los estudiantes como ligeramente arriba del promedio.

Ahora se determinará el tamaño del promedio $A(m)$ de una familia que satisface el requerimiento de género hallando la suma de la serie infinita

$$\begin{aligned} A(m) &= \sum_{j=2}^{\infty} j\,[m^{j-1}(1-m) + (1-m)^{j-1} m] \\ &= \sum_{j=2}^{\infty} j\,[m^{j-1}(1-m)] + \sum_{j=2}^{\infty} j\,[(1-m)^{j-1} m] \\ &= (1-m)\sum_{j=2}^{\infty} j\,m^{j-1} + m\sum_{j=2}^{\infty} j\,(1-m)^{j-1} \end{aligned}$$

factorice $1-m$ de la serie izquierda y m de la serie derecha

Nótese que se ha expresado la serie dada para $A(m)$ como la suma de dos subseries, cada una de las cuales tiene la forma $\sum_{j=2}^{\infty} j\,x^{j-1}$, donde $x = m$ para la primera subserie y $x = 1 - m$ para la segunda. Se puede sumar estas series usando la fórmula

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{j=1}^{\infty} jx^{j-1}$$

derivada en el ejemplo 9.3.3. Con la aplicación de esta fórmula, se encuentra que

$$\frac{1}{(1-m)^2} = \sum_{j=1}^{\infty} jm^{j-1}$$

www.FreeLibros.com

REFLEXIONE ACERCA DE...

y

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{[1-(1-m)]^2} = \sum_{j=1}^{\infty} j(1-m)^{j-1}$$

Como a estas dos sumas les falta el primer término (es decir, cada suma empieza con $j = 2$), restamos el término $j = 1$ de cada suma para calcular su valor. Se encuentra que

$$\sum_{j=2}^{\infty} jm^{j-1} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} jm^{j-1}\right) - 1 \cdot m^{1-1}$$

$$= \frac{1}{(1-m)^2} - 1 = \frac{2m-m^2}{(1-m)^2} = \frac{m(2-m)}{(1-m)^2}$$

y

$$\sum_{j=2}^{\infty} j(1-m)^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty} j(1-m)^{j-1} - 1(1-m)^{1-1}$$

$$= \frac{1}{m^2} - 1 = \frac{1-m^2}{m^2} = \frac{(1+m)(1-m)}{m^2}$$

Se deduce que el número promedio de hijos que una pareja tendrá si deciden tener hijos hasta que tengan al menos un niño o una niña es

$$A(m) = (1-m)m\frac{2-m}{(1-m)^2} + m(1-m)\frac{1+m}{m^2}$$

$$= \frac{m(2-m)}{1-m} + \frac{1-m^2}{m} = \frac{1-m+m^2}{m(1-m)}$$

Entonces, ¿cuál es el número promedio de hijos de estas familias cuando niños y niñas nacen en la misma proporción, es decir, cuando $m = 1/2$? Se encuentra que

$$A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1-\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3.$$

Este ensayo fue adaptado de un análisis del fascinante libro de Paul J. Nahin *Duelling Idiots and Other Probability Puzzlers,* Princeton University Press, Princeton, N. J., 2000. En la presente discusión, se ha evitado explícitamente usar ideas y terminología de teoría de probabilidad, pero puede hallar interesante repasar este ensayo después de encontrarse con probabilidades en el capítulo 10.

Preguntas

1. Encuentre el número promedio de hijos que nacerán a una pareja antes de satisfacer el requerimiento de género si $m = 0.51$, que es la proporción observada de hijos varones en Estados Unidos, es decir, encuentre $A(0.51)$.
2. Use cálculo para demostrar que el tamaño promedio de $A(m)$ de una familia que satisface el requerimiento de género se minimiza cuando $m = f = 1/2$.
3. ¿Qué ocurre al tamaño promedio $A(m)$ de una familia que satisface el requerimiento de género cuando la proporción de nacimientos de hijos varones m tiende a 0? ¿Qué pasa cuando m tiende a 1?
4. Una pareja decide tener hijos hasta que tengan una niña. En promedio, ¿cuántos niños tendrán antes de satisfacer este requisito? Exprese su respuesta en términos de una fórmula donde aparezca m, la proporción de nacimientos de varones.

www.FreeLibros.com

CAPÍTULO 10



Se puede usar probabilidad para medir la vida útil de un producto.

PROBABILIDAD Y CÁLCULO

1 Variables aleatorias discretas
2 Variables aleatorias continuas
3 Valor esperado y varianza de variables aleatorias continuas
4 Distribuciones de probabilidad normal y de Poisson
Resumen del capítulo
Términos, símbolos y fórmulas importantes
Revisión del capítulo 10
Problemas de repaso
¡Explore! Actualización
Reflexione acerca de...

www.FreeLibros.com

SECCIÓN 10.1 | Variables aleatorias discretas

No se puede predecir con certeza qué ocurrirá al lanzar al aire una moneda, o cuántos artículos defectuosos aparecerán en un lote de producción seleccionado al azar, ni cuánto tiempo funcionará un disco duro de computadora seleccionada al azar antes de fallar. De hecho, la incertidumbre es una característica clave de todo aspecto de la vida, y la teoría de probabilidades es la rama de la matemática dedicada al estudio de la incertidumbre.

La modelación matemática con probabilidades comprende el estudio de **experimentos aleatorios;** es decir, acciones con varios resultados posibles que pueden ser observados y registrados. A continuación se muestran tres ejemplos de experimentos aleatorios:

1. Tirar un dado y registrar el número de puntos en la cara que quede hacia arriba.
2. Muestrear un lote de producción seleccionado al azar y registrar si el artículo escogido está o no defectuoso.
3. Escoger un niño al azar, de un distrito escolar particular, y registrar el número de hermanos de ese niño.

El **espacio muestral** para un experimento aleatorio es el conjunto de todos los posibles resultados, y cada uno de éstos es un **punto muestra.** Un **evento** es un subconjunto del espacio muestral. Un evento formado por un punto muestra también se denomina **evento simple**, y el conjunto muestral recibe el nombre de **evento cierto.** El **evento imposible** es el conjunto vacío $\varnothing$; es decir, el subconjunto que no contiene resultados.

Por tanto, para un experimento aleatorio en el que se lanza un dado, los posibles resultados son los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Éstos son los puntos muestra y el espacio muestral es el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. El evento "cae un número par" es el subconjunto $\{2, 4, 6\}$, en tanto que el evento "el número que cae es menor a 4" es el subconjunto $\{1, 2, 3\}$.

Una **variable aleatoria** X es una función que asigna un valor numérico a cada punto muestra del espacio muestral de un experimento aleatorio. Una **variable aleatoria discreta** es aquella cuyos valores son tomados de un conjunto finito de números o una sucesión infinita de números, como es el caso de enteros. Por otra parte, una **variable aleatoria continua** toma un continuo de valores, como un intervalo de números reales. Se iniciará esta sección con el estudio de las propiedades de las variables aleatorias discretas *finitas*, es decir, variables aleatorias cuyos valores son tomados de un conjunto finito. A continuación, al final de la sección, se estudiarán *variables aleatorias geométricas,* cuyos valores son tomados de una sucesión infinita. Las variables aleatorias continuas se estudiarán en secciones siguientes de este capítulo. El ejemplo 10.1.1 ilustra la forma de distinguir entre los diferentes tipos de variable aleatoria.

EJEMPLO | 10.1.1

En cada uno de los casos siguientes, determine si la variable aleatoria dada X es discreta o continua. Si la variable aleatoria es discreta, exprese su valor en cada punto del espacio muestral.

a) Un proceso de manufactura comprende lotes de producción diaria de N unidades. Sea X el número de unidades defectuosas en un lote de producción seleccionado al azar.

b) Sea X la edad de una célula escogida al azar de un cultivo particular.

c) Sea X el tiempo que funciona el disco duro de una computadora personal seleccionada al azar hasta que falla.

d) Sea X el número de veces que una moneda escogida al azar debe ser lanzada al aire hasta que salga una cara (H).

www.FreeLibros.com

Solución

a) La variable aleatoria X es discreta y finita porque sus posibles valores son 0, 1, 2, . . . , N.

b) Como la edad de una célula puede ser cualquier número real positivo, esta variable aleatoria es continua.

c) El disco duro de una computadora personal puede estar defectuoso o puede fallar en cualquier momento, de modo que la variable aleatoria X puede tomar cualquier valor real no negativo. Por tanto, X es continua.

d) Cuando una moneda se lanza repetidas veces hasta que salga una cara, los posibles resultados están formados por una cara inmediata o una fila de cruces (T) que terminan en una cara. En otras palabras, el espacio muestral es {H, TH, TTH, TTTH, TTTTH, . . . } y como X mide el número de veces que la moneda es lanzada al aire antes de que aparezca una cara, se tiene $X(\text{H}) = 1$, $X(\text{TH}) = 2$, $X(\text{TTH}) = 3$, ... Como el conjunto de valores de X es el conjunto de todos los enteros positivos, se deduce que X es una variable aleatoria discreta, pero no es finita.

Notación: Se escribe $(X = c)$ para denotar el evento que contiene todos los puntos de un espacio muestral para el cual la variable aleatoria X tiene el valor c.

Por ejemplo, el espacio muestral para el experimento aleatorio de lanzar al aire una moneda dos veces es {HH, HT, TH, TT}. Si X es la variable aleatoria que cuenta el número de caras que se presentan, entonces el conjunto $(X = 2)$ contiene sólo el punto muestra HH (la única forma de obtener dos caras), mientras que $(X = 1)$ contiene HT y TH, y $(X = 0)$ contiene sólo TT.

Funciones de probabilidad

La probabilidad de un resultado es una medida numérica de la certeza de que ocurra ese resultado. Suponga que un experimento aleatorio particular tiene resultados $s_1, s_2, \ldots, s_n$, y que a cada resultado s_k se asigna un número real $P(s_k)$ en forma tal que se satisfagan las dos condiciones:

$$0 \leq P(s_k) \leq 1$$
$$P(s_1) + P(s_2) + \cdots + P(s_n) = 1$$

Entonces $P(s_k)$ se llama la **probabilidad** del resultado s_k. La primera condición requerida dice que la probabilidad de cualquier resultado debe estar entre imposible ($P = 0$) y cierta ($P = 1$). El segundo requisito dice que siempre que se realice el experimento aleatorio, es cierto que ocurrirá exactamente un resultado.

De forma más general, para cualquier evento E, formado por los puntos muestrales $t_1, t_2, \ldots, t_k$, se tiene

$$P(E) = P(t_1) + P(t_2) + \cdots + P(t_k)$$

Se deduce que el **complemento** de E, el evento $\overline{E}$ formado por todos los puntos del espacio muestral que no están en E, tiene probabilidad

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

porque todo resultado está ya sea en E o en $\overline{E}$ y la suma de las probabilidades de todos los resultados es 1. Por ejemplo, en un experimento aleatorio en el que se tira un dado no cargado y se observa el número en su cara superior, los resultados posibles son 1, 2, 3, 4, 5 y 6, y a cada resultado se asigna una probabilidad de 1/6. La probabilidad del evento E de que el dado muestre ya sea un 1 o un 2 es

$$P(E) = P(1) + P(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

www.FreeLibros.com

de modo que el evento complementario $\overline{E}$ de que el dado muestre un 3, un 4, un 5 o un 6 tiene probabilidad

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

NOTA No hay nada que se pueda llamar asignación "natural" de probabilidad. Por ejemplo, considere el experimento aleatorio de lanzar al aire una moneda, donde los resultados son caras (H) y cruces (T). Puede ser razonable asignar $P(\text{H}) = P(T) = 1/2$ si la moneda es legal, pero cuando se realiza un experimento de lanzar al aire una moneda particular un gran número de veces, se pueden observar diferentes frecuencias relativas de caras y cruces. Por ejemplo, si sale cara 55% de las veces en ese experimento, se pueden asignar $P(H) = 0.55$ y $P(T) = 0.45$. ■

Una vez que se hayan asignado probabilidades a los puntos del espacio muestral S de un experimento aleatorio, se puede examinar la forma en que la probabilidad varía en relación con una variable aleatoria discreta particular X definida en S. Esto se hace estudiando la *función de probabilidad* para X, que se puede definir como sigue.

Función de probabilidad ■ Suponga que se ha hecho una asignación de probabilidad para el espacio muestral S de un experimento aleatorio particular, y sea X una variable aleatoria discreta definida en S. Entonces la **función de probabilidad** para X es una función p tal que

$$p(x) = P(X = x)$$

para cada valor x tomado por X.

NOTA Una función de probabilidad p también se conoce como *distribución de probabilidad*. Nótese que, como p es una probabilidad, debe satisfacer

$$0 \leq p(x) \leq 1$$

y si X es una variable aleatoria discreta, entonces

$$p(x_1) + p(x_2) + \cdots + p(x_n) = 1$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los valores tomados por X.

EJEMPLO | 10.1.2

Considere el experimento aleatorio de lanzar al aire tres veces una moneda legal, y sea X la variable aleatoria que cuenta el número de caras que aparecen. Describa la función de probabilidad para X.

Solución

Para una moneda legal que se lance al aire tres veces, cada uno de los ocho resultados

HHH, HHT, HTT, HTH, THH, THT, TTH, TTT

ocurre con probabilidad 1/8. La función de probabilidad asociada $p(x)$ se encuentra sumando las probabilidades de todos los puntos muestra para los cuales X tiene el valor x. Se ve que

www.FreeLibros.com

$$p(0) = P(X = 0) = P(\text{TTT}) = \frac{1}{8}$$

$$p(1) = P(X = 1) = P(\text{HTT}) + P(\text{THT}) + P(\text{TTH}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$p(2) = P(X = 2) = P(\text{HHT}) + P(\text{HTH}) + P(\text{THH}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$p(3) = P(X = 3) = P(\text{HHH}) = \frac{1}{8}$$

Nótese que

$$p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

como se pidió.

Histogramas

Una forma para tener una idea de la función de probabilidad para una variable aleatoria discreta X, es construir una gráfica que muestre los valores de X y las asignaciones de probabilidad que corresponden a estos valores. Un **histograma** es una representación gráfica obtenida al poner primero los valores de la variable aleatoria X sobre una recta numérica y luego construir, arriba de cada uno de estos valores n, un rectángulo vertical de ancho 1 y altura igual a la probabilidad $P(X = n)$. Note que

$$\begin{bmatrix} \text{área del } n\text{-ésimo} \\ \text{rectángulo} \end{bmatrix} = 1 \cdot P(X = n) = P(X = n)$$

de modo que el área total limitada por todos los rectángulos del histograma es

$$\begin{bmatrix} \text{total} \\ \text{área} \\ \text{total} \end{bmatrix} = \sum P(X = n) = 1$$

donde la suma es sobre todos los enteros positivos n para los cuales $P(X = n) > 0$. El histograma para la variable aleatoria del ejemplo 10.1.2 se muestra en la figura 10.1.

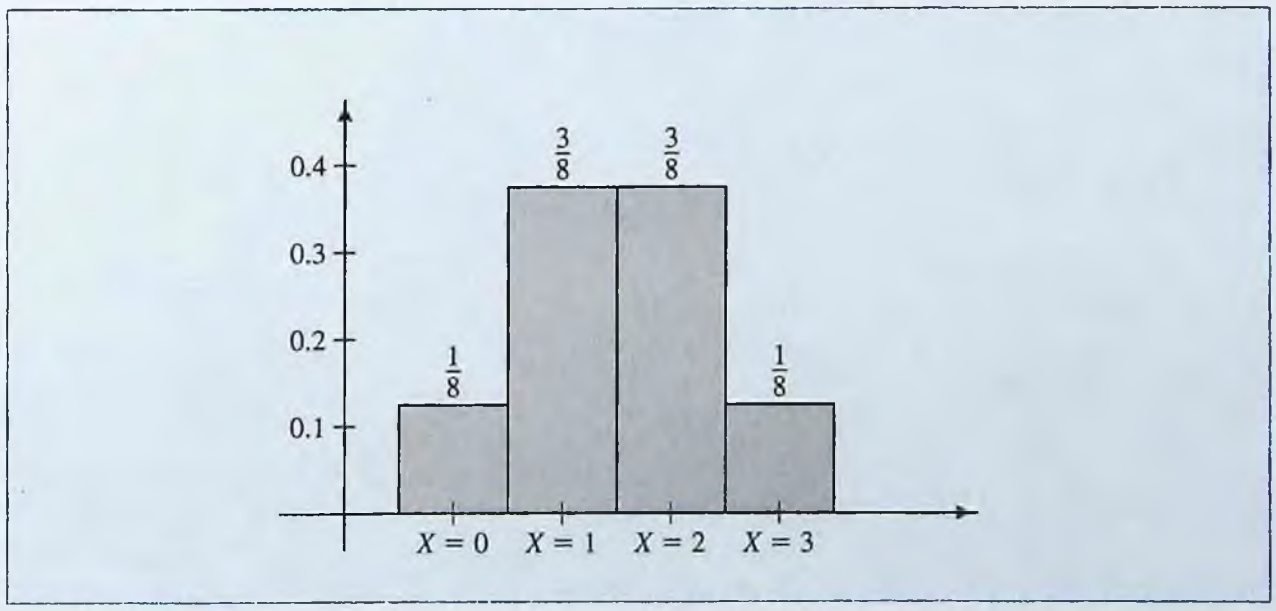


FIGURA 10.1 Histograma para la variable aleatoria del ejemplo 10.1.2.

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 10.1.3

Un estudio del efecto de una epidemia de gripe en los estudiantes que viven en un dormitorio universitario específico determina que durante los 30 días de abril, hubo

4 días en que los estudiantes no tuvieron gripe
3 días en que exactamente un estudiante tuvo gripe
1 día en que exactamente dos estudiantes tuvieron gripe
12 días en que exactamente seis estudiantes tuvieron gripe
8 días en que exactamente siete estudiantes tuvieron gripe
2 días en que exactamente ocho estudiantes tuvieron gripe.

Sea X la variable aleatoria que representa el número de estudiantes del dormitorio que tuvieron gripe en un día escogido al azar en abril. Describa el evento $(X = x)$ y calcule las probabilidades $P(X = x)$ para $x = 0, 1, 2, \ldots, 8$. Entonces dibuje el histograma para X.

Solución

Para cada valor de x, $(X = x)$ es el evento que en un día seleccionado al azar en abril, exactamente x estudiantes del dormitorio tuvieron gripe, y $P(X = x)$ es la asignación de probabilidad para ese evento. Se tiene que

$$P(X = 0) = \frac{4}{30} \quad \text{en 4 días de los 30, } x = 0 \text{ estudiantes tuvieron gripe}$$

$$P(X = 1) = \frac{3}{30} \quad \text{en 3 días de los 30, } x = 1 \text{ estudiante tuvo la gripe}$$

$$P(X = 2) = \frac{1}{30} \quad \text{en 1 día de los 30, } x = 2 \text{ estudiantes tuvieron la gripe}$$

$$P(X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5) = 0 \quad \text{no hay días en los que } x = 3, x = 4 \text{ o } x = 5 \text{ estudiantes tuvieron gripe}$$

$$P(X = 6) = \frac{12}{30} \quad \text{en 12 días de los 30, } x = 6 \text{ estudiantes tuvieron gripe}$$

$$P(X = 7) = \frac{8}{30} \quad \text{en 8 días de los 30, } x = 7 \text{ estudiantes tuvieron gripe}$$

$$P(X = 8) = \frac{2}{30} \quad \text{en 2 días de los 30, } x = 8 \text{ estudiantes tuvieron gripe}$$

El histograma para esta variable aleatoria se muestra en la figura 10.2.

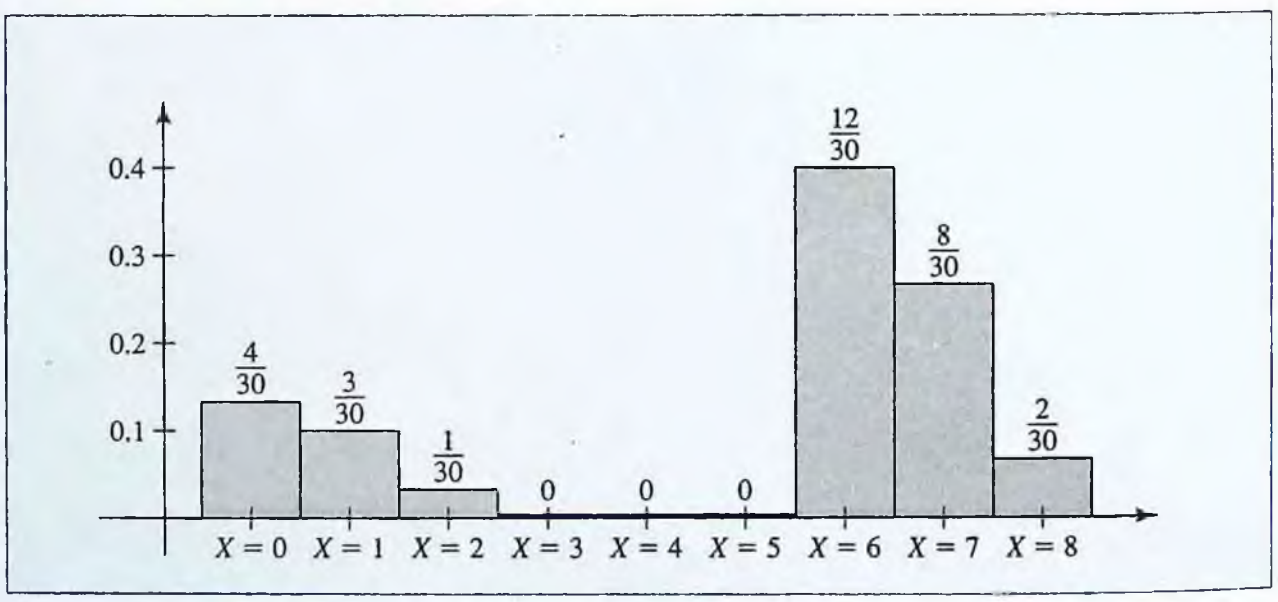


FIGURA 10.2 Histograma para la variable aleatoria de epidemia de gripe del ejemplo 10.1.3.

www.FreeLibros.com

Valor esperado

¡EXPLORE!

Encuentre el valor esperado de la variable aleatoria X del ejemplo 10.1.3 usando una calculadora graficadora. Para hacer esto, introduzca en L1 los números de estudiantes enfermos y en L2 los correspondientes números de días. Entonces Sea L3 = L2 ÷ 30, sea L4 = L1 * L3, y sea L5 la suma acumulada de L4. ¿El valor está cerca de 5?

Para la epidemia de gripe del ejemplo 10.1.3, ¿cuántos estudiantes se esperaría que estuvieran enfermos en un día escogido al azar en abril? De los cálculos del ejemplo, se sabe que 0 estudiantes estuvieron enfermos 4/30 del tiempo durante el mes, 1 estudiante estuvo enfermo 3/30 del tiempo, 2 estudiantes estuvieron enfermos 1/30 del tiempo, y así sucesivamente. Por tanto, se calcula el número esperado de estudiantes enfermos en nuestro día seleccionado al azar evaluando la suma ponderada

$$\begin{aligned} &0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) + 4 \cdot P(X=4) \\ &\qquad + 5 \cdot P(X=5) + 6 \cdot P(X=6) + 7 \cdot P(X=7) + 8 \cdot P(X=8) \\ &= 0\left(\frac{4}{30}\right) + 1\left(\frac{3}{30}\right) + 2\left(\frac{1}{30}\right) + 3(0) + 4(0) + 5(0) + 6\left(\frac{12}{30}\right) + 7\left(\frac{8}{30}\right) + 8\left(\frac{2}{30}\right) \\ &= \frac{149}{30} \approx 5 \end{aligned}$$

Por tanto, si se escogiera al azar, repetidamente, días de abril, en promedio se esperaría encontrar unos 5 estudiantes enfermos.

Lo que se ha calculado en esta ilustración es el *valor esperado* de la variable aleatoria X que representa el número de estudiantes que estuvieron enfermos en un día seleccionado al azar, en abril. A continuación se da la definición de valor esperado.

Valor esperado de una variable aleatoria discreta finita ■ Sea X una variable aleatoria discreta finita, con valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y sea p la función de probabilidad de X, de modo que $p(x_k) = P(X = x_k)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Entonces el valor esperado de X está dado por la suma ponderada

$$E(X) = x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \cdots + x_n p(x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, p(x_k)$$

El *promedio aritmético* o *media* de un conjunto de valores se encuentra sumando los valores y dividiendo entre el número de valores en la suma. Intuitivamente, la media puede ser considerada como el centro de los valores del conjunto. En tratados más avanzados de teoría de probabilidades, se demuestra que cuando un experimento se realiza repetidamente, el promedio aritmético o media de los valores observados de una variable aleatoria X se acerca cada vez más al valor esperado $E(X)$. En este sentido, el valor esperado es una medida de *tendencia central* para la variable aleatoria. El valor esperado se calcula e interpreta en los ejemplos 10.1.4 y 10.1.5.

EJEMPLO | 10.1.4

Continuando con el ejemplo 10.1.2, encuentre el valor esperado de la variable aleatoria X que represente el número de caras que aparecen cuando una moneda legal se lanza tres veces al aire.

Solución

Con el uso de la fórmula para $E(X)$ y las probabilidades halladas en el ejemplo 10.1.2, se obtiene

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + 3 \cdot P(X=3) \\ &= 0\left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

www.FreeLibros.com

Se concluye que cuando se realiza repetidamente el experimento de lanzar una moneda al aire tres veces, el número promedio de caras que aparece se acerca cada vez más a 3/2.

EJEMPLO | 10.1.5

El premio mayor de una lotería es $1 000 y también hay tres segundos premios con valor de $500 cada uno, y cinco terceros premios con valor de $100 cada uno. Suponga que se venden 10 000 billetes de lotería, uno de los cuales es de usted. ¿Cuánto estaría usted dispuesto a pagar por su billete?

Solución

Un precio justo a pagar sería el valor esperado, $E(X)$, de la variable aleatoria X que representa el premio de un billete seleccionado al azar. Esto es así porque, si la lotería se realizara un gran número de veces, y usted pagara cada vez $E(X)$ dólares por un billete, entonces el promedio de sus ganancias o pérdidas sería aproximadamente 0.

Calculando las probabilidades de premio, se tiene que

$$p(1\,000) = P(X = 1\,000) = \frac{1}{10\,000} \quad \text{porque sólo 1 billete de 10 000 gana \$1 000}$$

$$p(500) = P(X = 500) = \frac{3}{10\,000} \quad \text{porque 3 de los 10 000 billetes ganan \$500}$$

$$p(100) = P(X = 100) = \frac{5}{10\,000} \quad \text{porque 5 de los 10 000 billetes ganan \$100}$$

$$p(0) = P(X = 0) = \frac{9\,991}{10\,000} \quad \text{porque los otros 9 991 billetes no ganan nada}$$

Con el uso de esta información, se llega a que el valor esperado de X es

$$\begin{aligned} E(X) &= 0\,p(0) + 100\,p(100) + 500\,p(500) + 1{,}000\,p(1\,000) \\ &= 0\left(\frac{9\,991}{10\,000}\right) + 100\left(\frac{5}{10\,000}\right) + 500\left(\frac{3}{10\,000}\right) + 1{,}000\left(\frac{1}{10\,000}\right) \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

Se deduce que cuanto más y más de los 10 000 billetes disponibles se compren, el promedio de la cantidad a ganar se acerca más y más a $0.30. Por tanto, un precio justo para su billete es 30 centavos.

Varianza y desviación estándar

Una vez que haya encontrado el valor esperado de una variable aleatoria X, se puede conocer más acerca de X examinando la forma en que sus valores se dispersan alrededor del valor esperado. A continuación se introduce la noción de *varianza* de una variable aleatoria, que es pequeña cuando los valores de la variable aleatoria son cercanos a su valor esperado, y grande cuando estos valores se dispersan ampliamente alrededor del valor esperado. En este sentido, la varianza es una medida de *dispersión*, al igual que la raíz cuadrada de la varianza, que recibe el nombre de *desviación estándar*.

www.FreeLibros.com

Varianza y desviación estándar de una variable aleatoria discreta finita ■ Sea X una variable aleatoria discreta, finita, con valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y valor esperado $E(X) = \mu$, y sea p la función de probabilidad para X, de modo que $p(x_k) = P(X = x_k)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Entonces la **varianza** de X, denotada como $\text{Var}(X)$, es la suma ponderada

$$\text{Var}(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot p(x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot p(x_2) + \cdots + (x_n - \mu)^2 \cdot p(x_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)^2 \cdot p(x_k)$$

La raíz cuadrada de la varianza se llama **desviación estándar** de X y se denota como $\sigma(X)$; esto es,

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Nótese que la varianza $\text{Var}(X)$ de una variable aleatoria discreta X es la suma ponderada de cuadrados $(x_k - \mu)^2 p_k$, de las diferencias entre la media $\mu = E(X)$ y los valores x_k de X. En este sentido, la varianza mide la desviación de X respecto a su media μ. Uno se puede preguntar por qué esta desviación no se mide con simplemente sumar las diferencias ponderadas $(x_k - \mu)p_k$ sin elevar al cuadrado, pero es que esta suma $\sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu)p_k$ siempre es 0 (véase el problema 46).

EJEMPLO | 10.1.6

Encuentre la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria X que representa el número de caras que aparecen cuando se lanza una moneda al aire tres veces.

Solución

En el ejemplo 10.1.4, se mostró que el valor esperado de X satisface $E(X) = 3/2$. Por tanto, la varianza de X está dada por

$$\text{Var}(X) = \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

La desviación estándar se halla calculando la raíz cuadrada de la varianza, de modo que

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Una *variable aleatoria discreta infinita* X es aquella cuyos valores $x_1, x_2, \ldots$ forman una sucesión infinita. Si la asignación de probabilidad para esta variable aleatoria es $p(x_k) = P(X = x_k)$, entonces el valor esperado de X está dado por la serie infinita

$$E(X) = x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k)$$

www.FreeLibros.com

Si despejamos $\mu = E(X)$, la varianza de esta variable aleatoria X está dada por la serie infinita

$$\text{Var}(X) = (x_1 - \mu)^2 \cdot p(x_1) + (x_2 - \mu)^2 \cdot p(x_2) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - \mu)^2 \cdot p(x_k)$$

y, como antes, la desviación estándar de X está dada por $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$. Estas fórmulas se usarán en el siguiente análisis de variables aleatorias geométricas.

Variables aleatorias geométricas

Ciertos experimentos aleatorios que se presentan en la modelación se pueden caracterizar como que tienen dos posibles resultados, tradicionalmente llamados **éxito** o **fracaso,** y son realizados repetidamente hasta alcanzar el primer éxito. Por ejemplo, una moneda puede ser lanzada al aire varias veces hasta que aparezca la primera cruz, o los chips de computadora recién fabricados pueden examinarse hasta hallar un chip defectuoso. En estas situaciones, la variable aleatoria X que cuenta el número de repeticiones necesarias para obtener el primer éxito se conoce como **variable aleatoria geométrica.**

Una variable aleatoria geométrica puede tomar cualquier valor entero positivo, de modo que es discreta pero no finita. Para cualquier entero positivo n, la probabilidad de que $X = n$ es la probabilidad de que los primeros $n - 1$ intentos del experimento resulten en fracaso y el n-ésimo intento sea un éxito:

$$\underbrace{\text{FF} \cdots \text{F}}_{n-1 \text{ fracasos}} \cdot \underbrace{\text{S}}_{\text{primeros éxitos}}$$

Si, en cada intento, la probabilidad de éxito es p, entonces la probabilidad de fracaso debe ser $1 - p$, de modo que la probabilidad de $n - 1$ fracasos seguida por 1 éxito es el producto

$$\underbrace{[(1-p)(1-p)\cdots(1-p)]}_{n-1 \text{ fracasos}} \cdot \underbrace{p}_{\text{éxitos}} = (1-p)^{n-1}p$$

Esto es,

$$P(X = n) = (1 - p)^{n-1}p$$

Si $p = 1$, el éxito ocurre de inmediato, mientras que si $p = 0$ el éxito es imposible. De otro modo, donde $0 < p < 1$, se espera que por último se presente el éxito si el experimento se repite indefinidamente, de modo que $P(X \geq 1)$ debe ser 1. Para verificar que $P(X \geq 1) = 1$, se calcula esta probabilidad sumando todas las probabilidades $P(X = n)$ para $n = 1, 2, \ldots$. Esto lleva a la siguiente serie geométrica infinita, que se suma usando la fórmula de series geométricas de la página 665, de la sección 9.1:

$$\begin{aligned}
P(X \geq 1) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(X = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1}p \\
&= p + (1-p)p + (1-p)^2p + \cdots \\
&= p[1 + (1-p) + (1-p)^2 + \cdots] \\
&= p \sum_{n=0}^{\infty} (1-p)^n \\
&= \frac{p}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1
\end{aligned}$$

www.FreeLibros.com

Nótese que en el último paso, se ha empleado la fórmula de serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$ con $a = p$ y $r = 1 - p$, que es válida porque $0 < p < 1$ implica que $0 < 1 - p < 1$.

La variable aleatoria X tal que $P(X = n) = (1 - p)^{n-1}p$ se llama **variable aleatoria geométrica con parámetro *p*.** El histograma para los primeros siete valores de una variable aleatoria geométrica con parámetro $p = 0.5$ se muestra en la figura 10.3. Usando técnicas para trabajar con series de potencias desarrolladas en el capítulo 9 (véase el ejercicio 45), se puede demostrar que una variable aleatoria geométrica X con parámetro p tiene valor esperado

$$E(X) = \frac{1}{p}.$$

Es posible usar cálculos semejantes, pero ligeramente más complicados, para demostrar que X tiene varianza

$$\text{Var}(X) = \frac{1 - p}{p^2}.$$

En los ejemplos 10.1.7 al 10.1.9 se examinan aplicaciones de variables aleatorias geométricas.

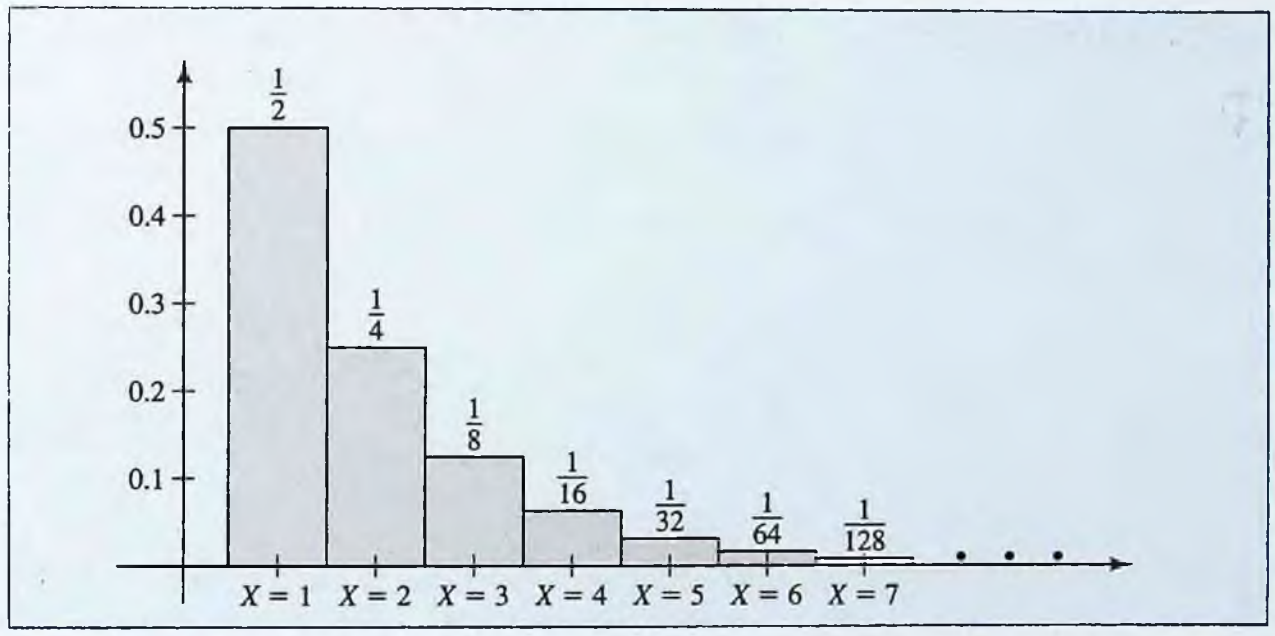


FIGURA 10.3 Histograma para la variable aleatoria geométrica con parámetro $p = 0.5$.

EJEMPLO | 10.1.7

En un proceso industrial, se muestrean artículos repetidamente hasta que se encuentra uno de ellos defectuoso. La compañía dice que cualquier artículo de su producción tiene 100 veces más probabilidades de estar en buenas condiciones que defectuoso. Suponiendo que lo dicho por la compañía sea cierto, encuentre lo siguiente:

a) La probabilidad de que un artículo escogido al azar sea defectuoso.

b) La probabilidad de que se necesitan exactamente 100 muestreos antes de hallar un artículo defectuoso.

c) El número esperado de muestreos antes de hallar un artículo defectuoso.

Solución

a) Si p es la probabilidad de encontrar un artículo defectuoso, entonces $1 - p$ es la probabilidad de encontrar un artículo en buenas condiciones, y la compañía dice que

$$1 - p = 100p$$

www.FreeLibros.com

de modo que

$$p = \frac{1}{101} \approx 0.0099$$

b) Sea X la variable aleatoria geométrica que cuenta el número de artículos que deben ser muestreados antes de hallar uno de ellos defectuoso. La probabilidad de que sean necesarios exactamente 100 muestreos antes de hallar un artículo defectuoso es

$$P(X = 100) = (1 - p)^{100-1} \cdot p \approx (1 - 0.0099)^{99}(0.0099) \approx 0.0037$$

c) Usando la fórmula $E(X) = 1/p$ para el valor esperado de una variable aleatoria geométrica de parámetro p, se encuentra que, como $p = 1/101$, el número de muestreos esperado es

$$E(p) = \frac{1}{1/101} = 101$$

Esto es, si el muestreo aleatorio se realiza repetidamente, en promedio se espera hallar el primer artículo defectuoso en el muestreo 101.

EJEMPLO | 10.1.8

Suponga que una moneda legal se lanza al aire repetidamente hasta que aparezca la primera cara. Encuentre cada uno de los siguientes valores:

a) La probabilidad de que sea necesario lanzar la moneda al aire exactamente tres veces para que aparezca la primera cara.

b) La probabilidad de que aparezca una cara dentro de los primeros tres tiros de la moneda.

c) La probabilidad de que sea necesario lanzar la moneda al aire más de tres veces para que aparezca la primera cara.

d) El número esperado de veces que es necesario lanzar la moneda al aire para que aparezca la primera cara.

Solución

Sea X la variable aleatoria que representa el número de veces que hay que lanzar al aire la moneda para que aparezca la primera cara. Ésta es una variable aleatoria geométrica con parámetro $p = \frac{1}{2}$, por lo cual

$$P(X = n) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

a) La probabilidad requerida es $P(X = 3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

b) En la moneda aparece una cara dentro de los primeros tres tiros si aparece una cara en el tiro 1, en el tiro 2 o en el tiro 3. Éste es un evento $X \leq 3$, y se tiene

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \\ &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

c) El evento $X > 3$ de que la moneda deba ser lanzada al aire más de tres veces para que aparezca la primera cara es el complemento del evento $X \leq 3$ de que

¡EXPLORE!

Algunas calculadoras graficadoras tienen ya integradas funciones de densidad de probabilidad. En los modelos TI-83 y TI-84, presione **2nd VARS** para obtener la pantalla **DISTR**, que contiene una lista de funciones de densidad de probabilidades continuas y discretas. Encuentre las probabilidades en los incisos *a*) y *b*) del ejemplo 10.1.8 usando **D:geometpdf(** y **E:geometpdf(**. ¿Obtiene usted los mismos valores que en la solución?

www.FreeLibros.com

aparezca una cara dentro de los primeros tres tiros, de modo que se tiene $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$. Como en el inciso *b*), se ha encontrado que $P(X \leq 3) = 7/8$, se deduce que

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

d) Con el uso de la fórmula para el valor esperado de una variable aleatoria geométrica con parámetro $p = \frac{1}{2}$, se halla que $E(X) = 1/p = 1/(\frac{1}{2}) = 2$. En consecuencia, si se hace repetidamente este experimento aleatorio, en promedio se debe esperar que sea necesario lanzar al aire la moneda sólo dos veces para que aparezca la primera cara.

EJEMPLO | 10.1.9

En cierto juego de mesa entre dos personas, que se juega con un dado, cada jugador necesita tirar un seis para empezar a jugar. Usted y su oponente toman turno para tirar el dado. Encuentre la probabilidad de que usted tire primero un seis, si es usted quién comienza lanzando el dado.

Solución

En este contexto, el *éxito* es tirar un seis y el *fracaso* es tirar cualquiera de los otros cinco números positivos. En consecuencia, la probabilidad de éxito es $p = 1/6$ y la probabilidad de fracaso es $1 - p = 5/6$. Sea X la variable aleatoria que cuenta el número del tiro en el que aparece el primer seis. El primer seis se presentará en uno de los tiros de usted, si X es impar y en uno de los tiros de su oponente si X es par. Por tanto, la probabilidad de que usted tire el primer seis es

$$\begin{aligned} P(X \text{ es non}) &= P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 5) + \cdots \\ &= \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right) + \cdots \\ &= \frac{1}{6} + \left(\frac{25}{36}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{25}{36}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right) + \cdots \\ &= \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^n \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1 - \frac{25}{36}}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{36}{11}\right) = \frac{6}{11} \approx 0.5455 \end{aligned}$$

PROBLEMAS | 10.1

En cada uno de los problemas del 1 al 10 determine si la variable aleatoria dada X es discreta o continua.

1. X cuenta el número de cruces que aparecen cuando una moneda se lanza al aire 10 veces.
2. X mide el tiempo en que una batería de linterna escogida al azar funciona bien antes de fallar.
3. X mide el peso de un estudiante de su grupo, seleccionado al azar.
4. X mide el ingreso en dólares de una persona de su comunidad, seleccionada al azar.
5. X mide el área habitable de una casa de su comunidad, seleccionada al azar.
6. X mide el tiempo que un viajero seleccionado al azar tiene que esperar hasta que llegue el siguiente trasbordo en el aeropuerto.
7. X cuenta el número de jugadores de un equipo de hockey que sufren lesiones en un juego seleccionado al azar.
8. X cuenta el número de aves de una bandada seleccionada al azar.
9. X cuenta el número de pasajeros de un avión seleccionado al azar.

www.FreeLibros.com

10. X mide la rapidez de un auto seleccionado al azar que pasa por trecho de carretera seleccionado por la policía.

En los problemas del 11 al 14 se tira un dado dos veces. En cada caso, describa el espacio muestral para el experimento aleatorio indicado.

11. Observe cuántos 6 se tiran.

12. Observe cuántos 1 y cuántos 4 se tiran.

13. Observe cuántos números pares se tiran.

14. Observe la suma de los números en los dos tiros.

En los problemas 15 al 18 se dan los resultados y asignaciones de probabilidad correspondientes para una variable aleatoria discreta X. En cada caso, encuentre el valor esperado E(X), varianza Var(X) y desviación estándar σ(X).

15.

resultados para X	0	1	2	4
probabilidad	1/8	1/8	1/4	1/2

16.

resultados para X	1	2	3	5
probabilidad	1/4	1/3	1/6	1/4

17.

resultados para X	0	2	4	6
probabilidad	1/7	3/7	2/7	1/7

18.

resultados para X	0	1	2	. . .	k	. . .
probabilidad	1/2	1/4	1/8	. . .	$1/2^{k+1}$	. . .

19. Considere el experimento aleatorio de lanzar al aire cuatro veces una moneda legal, y denote por X la variable aleatoria que cuenta el número de veces que aparecen cruces.

a) Haga una lista de todos los posibles resultados de este experimento, y del valor que X asigna a cada resultado.

b) Haga una lista de los resultados que forman el evento $(X = 3)$.

c) Haga una lista de los resultados que forman el evento $(X \leq 4)$.

d) Encuentre cada una de estas posibilidades: $P(X = 0)$, $P(X \leq 3)$, y $P(X > 3)$.

20. Considere el experimento aleatorio de tirar tres veces un dado legal, y denote por X la variable aleatoria que cuenta el número de veces que aparece un 6.

a) Haga una lista de todos los posibles resultados de este experimento y del valor que X asigna a cada resultado.

b) Haga una lista de los resultados que forman el evento $(X = 2)$.

c) Haga una lista de los resultados que forman el evento $(X < 3)$.

d) Encuentre cada una de estas posibilidades: $P(X = 0)$, $P(X \leq 2)$, and $P(X > 2)$.

21. Dibuje el histograma de probabilidad para la variable aleatoria X del problema 19. A continuación encuentre el valor esperado, varianza y desviación estándar para X.

22. Dibuje el histograma de probabilidad para la variable aleatoria X del problema 20. A continuación encuentre el valor esperado, varianza y desviación estándar de X.

23. LOTERÍA Suponga que el premio mayor en una lotería es de \$1 000 000. También hay cinco segundos premios de \$100 000, y cincuenta terceros premios de \$10 000. Si se venden 100 000 billetes, ¿cuál es el precio justo a pagar por un billete para esta lotería?

24. JUEGOS DE CASINO Una rueda de ruleta tiene 18 números rojos, 18 negros y 2 números verdes. Cada vez que se hace girar la rueda, George apuesta a que la bola caerá en un número rojo. Cuando la bola cae en rojo, él gana \$1 al casino por cada \$1 que apueste. Cuando la bola cae en un número negro o verde, él pierde su apuesta. Encuentre sus ganancias esperadas por una apuesta de \$1 al rojo.

25. JUEGOS DE CASINO George, el jugador de ruleta del problema 24, encuentra otra rueda con el mismo número de números rojos y negros pero con sólo 1 número verde. Ahora, ¿cuáles son sus ganancias esperadas por una apuesta de \$1 al rojo?

26. NEGOCIO DE RESTAURANTE La variable aleatoria X, que representa el número de pedidos diarios de langosta en un restaurante particular, tiene estas asignaciones de probabilidad:

$$P(X = 0) = 0.05,\ P(X = 1) = 0.15,$$
$$P(X = 2) = 0.20,\ P(X = 3) = 0.25,$$
$$P(X = 4) = 0.12,\ P(X = 5) = 0.13,$$
$$P(X = 6) = 0.05,\ P(X = 7) = 0.02,$$
$$P(X = 8) = 0.03$$

a) Describa el evento $(X = x)$.

b) Dibuje el histograma de esta variable aleatoria.

c) Encuentre $E(X)$, el número esperado de pedidos diarios de langosta en este restaurante.

d) Encuentre la varianza y la desviación estándar del número de pedidos diarios de langosta en el restaurante.

27. SEGURIDAD EN CARRETERAS El departamento de carreteras dio seguimiento al número de accidentes ocurridos en un tramo de diez millas de una carretera principal, todos los días durante el mes de septiembre. Encontraron que hubo:

6 días sin accidentes
8 días con un accidente
7 días con dos accidentes
2 días con tres accidentes
3 días con cuatro accidentes
0 días con cinco accidentes
2 días con seis accidentes

www.FreeLibros.com

0 días con siete accidentes
1 día con ocho accidentes
1 día con nueve accidentes

Sea X la variable aleatoria que representa el número de accidentes en un día escogido al azar en septiembre.

a) Construya un histograma para X.
b) Encuentre el valor esperado $E(X)$ y dé una interpretación a este número.
c) Encuentre la varianza y desviación estándar de X.

28. Encuentre la varianza y desviación estándar de la variable aleatoria X del ejemplo 10.1.3 que representa el número de estudiantes, en un dormitorio específico, enfermos de gripe en abril.

29. VIAJE EN AVIÓN Sea X el número de pasajeros privados de su asiento en un vuelo escogido al azar en una línea aérea comercial particular. Suponga que la probabilidad $P(X = N)$ de que N personas (para $N = 0$ a 6) pierdan su asiento está dada en la siguiente tabla.

N	0	1	2	3
$P(X = N)$	0.961	0.015	0.009	0.005

N	4	5	6
$P(X = N)$	0.004	0.004	0.002

Con base en esta información ¿cuántas personas en promedio espera usted que pierdan su asiento en un vuelo escogido al azar?

30. JUEGOS DE MESA Hay 100 fichas en un juego llamado Scrabble; 98 de estas fichas tienen impresas letras del alfabeto inglés y dos de ellas están en blanco. Cada ficha también tiene un valor, que depende de la letra impresa en ella. Las fichas en blanco no tienen valor. La tabla siguiente muestra el número de fichas que tienen el valor indicado.

Valor	Número de fichas
0	2
1	68
2	7
3	8
4	10
5	1
6	0
7	0
8	2
9	0
10	2

a) Sea X la variable aleatoria que representa el valor de una ficha de Scrabble seleccionada al azar de las 100 fichas. Dibuje el histograma de X.
b) Encuentre $E(X)$, el valor esperado de una ficha de Scrabble seleccionada al azar.

31. JUEGOS JUSTOS Un juego es **justo** si, en promedio, las ganancias de un jugador son iguales a sus pérdidas. El premio por ganar apuestas puede ser expresado en términos de las **apuestas** para el juego. Las apuestas de un juego se expresan como w a 1, que significa que por cada \$1 apostado , el jugador ganador ganará w dólares (además del \$1 apostado). Las apuestas de la forma m a n representan lo mismo que las apuestas m/n a 1; por ejemplo, una apuesta 3 a 2 es lo mismo que una apuesta 3/2 a 1. Las **apuestas justas** son aquellas que hacen que una apuesta sea un juego justo.

Para cierto juego, las apuestas son w a 1, y la probabilidad de ganar una apuesta particular es p.

a) Sea X la variable aleatoria que representa la ganancia de un jugador cuando apuesta \$1. Exprese el valor esperado $E(X)$ en términos de w.
b) Demuestre que las apuestas justa para este juego son $(1 - p)/p$ a 1.

32. Use la fórmula encontrada en el ejercicio 31 para hallar las apuestas justas para el juego de ruleta con dos números verdes, que se describe en el ejercicio 24.

33. Use la fórmula encontrada en el ejercicio 31 para hallar apuestas justas para el juego de ruleta con un número verde, que se describe en el ejercicio 25.

34. Sea X una variable aleatoria geométrica con parámetro $p = 0.4$. Calcule $P(X = n)$ para $n = 1$ a 5 y luego dibuje el histograma para los primeros cinco valores de X.

35. Sea X una variable aleatoria geométrica con parámetro $p = 0.8$. Calcule $P(X = n)$ para $n = 1$ a 8 y luego dibuje el histograma para los primeros ocho valores de X.

36. MONEDAS "CARGADAS" Una moneda "cargada" (no legal), donde hay probabilidad 0.55 de que salga cara, es lanzada al aire repetidas veces hasta que aparece una cara. Sea X la variable aleatoria que mide el número de veces que hemos lanzado al aire la moneda hasta que sale la primera cara. Encuentre:

a) La probabilidad de que sea necesario lanzar al aire la moneda exactamente tres veces para que aparece una cara.
b) La probabilidad de que en la moneda aparezca una cara dentro de los primeros tres tiros.
c) La probabilidad de que la moneda deba ser lanzada al aire más de tres veces para que aparezca la primera cara.
d) El número esperado de veces que es necesario lanzar al aire la moneda hasta que aparezca la primera cara.

www.FreeLibros.com

e) La varianza del número de veces que es necesario lanzar al aire la moneda hasta que aparezca la primera cara.

37. CONFIABILIDAD Suponga que 7% de los chips de computadora fabricados por cierta compañía están defectuosos. Un inspector de control de calidad prueba cada chip antes que éste salga de la fábrica. Usando un equipo de prueba, este inspector siempre puede detectar un chip defectuoso.

a) Encuentre la probabilidad de que un inspector pase exactamente cuatro chips como buenos antes de detectar un chip defectuoso.

b) Encuentre la probabilidad de que el inspector pase a lo sumo cuatro chips como buenos antes de detectar un chip defectuoso.

c) Encuentre la probabilidad de que el inspector pase al menos cuatro chips como buenos antes de detectar un chip defectuoso.

d) Encuentre el número esperado de chips que el inspector examina antes de detectar un chip defectuoso.

38. Demuestre que para una variable aleatoria geométrica X, el número más probable de intentos es uno. Es decir, $P(X = n)$ toma su valor máximo cuando $n = 1$, para n que toma todos los valores enteros positivos.

39. CONFIABILIDAD Suponga que una impresora particular en su escuela tiene 99.95% de probabilidad de imprimir satisfactoriamente una página seleccionada al azar de un documento, y un 0.05% de probabilidad de quedar atascada.

a) Encuentre la probabilidad de que la impresora se atascará en la décima página de un documento de diez páginas, después de imprimir las primeras nueve páginas sin atascarse.

b) ¿En qué página espera usted que la impresora se atasque cuando se imprime un documento grande?

c) Determine la probabilidad de que la impresora complete un documento de 25 páginas sin atascarse.

40. SELECCIÓN DE JURADO Los posibles miembros de un gran jurado son examinados uno por uno por la defensa y por el ministerio público acusador. Suponga que una persona seleccionada al azar del grupo del jurado tiene una probabilidad $p = 0.25$ de ser descalificada.

a) Encuentre la probabilidad de que el tercer posible miembro examinado sea el primero en ser descalificado.

b) Encuentre la probabilidad de que al menos uno de los tres primeros miembros sea descalificado.

c) Encuentre la probabilidad de que un jurado de 12 personas sea aprobado sin que ningún posible miembro sea descalificado.

41. ESTUDIOS DE POBLACIÓN Suponga que 4% de los estudiantes de una gran universidad son pelirrojos. Usted entrevista a varios estudiantes, uno por uno.

a) Encuentre la probabilidad de que el quinto estudiante entrevistado sea el primero en ser pelirrojo.

b) Encuentre la probabilidad de que al menos un estudiante pelirrojo esté entre los primeros cinco estudiantes entrevistados.

c) Encuentre la probabilidad de que no haya estudiantes pelirrojos entre los primeros 12 entrevistados.

d) En promedio, ¿cuántos estudiantes espera usted entrevistar antes de hallar uno pelirrojo?

42. JUEGOS DE OPORTUNIDADES Usted y un amigo toman turno para lanzar un dado hasta que uno de ustedes gana al tirar un tres o un cuatro. Si su amigo tira primero, encuentre la probabilidad de que sea usted el que gane.

43. NUMISMÁTICA En 1959, el diseño del reverso de las monedas de un centavo de Estados Unidos fue cambiado de uno que describía un par de tallos de trigo a uno con el monumento a Lincoln. En la actualidad, muy pocas de las monedas anteriores de a centavo están en circulación. Si sólo 0.02 de las monedas que ahora están en circulación se acuñaron antes de 1959, encuentre la probabilidad de que usted tendrá que examinar al menos 100 monedas de a centavo para hallar una con el diseño anterior. (A propósito, hay una forma fácil de abordar este problema sin usar series infinitas. Como práctica, hágalo usted de las dos formas.)

44. CONTROL DE CALIDAD Tres inspectores toman turno para verificar componentes electrónicos a medida que éstos salen de la línea de producción. Si 10% de todos los componentes producidos en la línea son defectuosos, encuentre la probabilidad de que el inspector que prueba el primer componente (y el cuarto, séptimo y así sucesivamente) es el que encuentra el primer componente defectuoso.

45. En la sección 9.3, se demostró que

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{1}{(1 - x)^2} \text{ para } -1 < x < 1$$

Use este dato para demostrar que una variable aleatoria geométrica X con parámetro p tiene valor esperado $E(X) = 1/p$.

46. Sea X una variable aleatoria con valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y denote con $\mu = E(X)$ el valor esperado de X. Demuestre que

$$(x_1 - \mu) + (x_2 - \mu) + \cdots + (x_n - \mu) = 0$$

www.FreeLibros.com

Una variable aleatoria X *sigue una* distribución zeta *si hay enteros positivos* a *y* b, *con* $b > 1$, *tales que el evento* $(X = n)$ *tiene probabilidad*

$$P(X = n) = \frac{a}{n^b}$$

para todos los enteros positivos n. *Por ejemplo, la frecuencia de aparición de palabras en inglés clasificadas según su uso sigue aproximadamente una distribución zeta. Esta definición se usa en los problemas 47 y 48.*

47. Sea X una variable aleatoria con una distribución zeta. Use el requisito de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X = n) = 1$$

para demostrar que $a = 1/\zeta(b)$, donde

$$\zeta(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^b}$$

48. INTERNET Se dice que un sitio web en Internet tiene *clasificación n* si es el n-ésimo sitio más popular. Considere el experimento aleatorio en el que alguien que navega en la Web seleccione un sitio web, y sea X la variable aleatoria que mide la clasificación del sitio web seleccionado. Estudios recientes sugieren que X sigue una distribución zeta con parámetro $b = 2$.

a) Se puede demostrar que

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Use este dato y el resultado del problema 47 para hallar una fórmula para la probabilidad $P(X = n)$ de que una visita escogida al azar en Internet sea al n-ésimo sitio más popular.

b) Encuentre la probabilidad de que una visita al azar a un sitio web sea al quinto sitio más popular.

c) Encuentre la probabilidad de que una visita al azar a un sitio web sea a uno de los tres sitios más populares.

d) Encuentre la probabilidad de que una visita al azar a un sitio web sea a un sitio no clasificado entre los cuatro más populares.

e) ¿Qué expresión representa el valor esperado de X? Use su calculadora para estimar $E(X)$ e interprete su resultado.

SECCIÓN 10.2 | Variables aleatorias continuas

En la sección 10.1 se estudiaron las variables aleatorias discretas y, en esta sección, se centrará la atención en las variables aleatorias continuas. Así como las sumas desempeñaron un importante papel para calcular probabilidad discreta, se verá que las integrales son usadas ampliamente para calcular probabilidad continua.

Por ejemplo, suponga que se determina que una bombilla eléctrica seleccionada al azar del almacen de un fabricante tiene una vida útil entre 20 y 35 horas. Si X es la variable aleatoria continua que mide la vida útil de una bombilla seleccionada al azar, entonces este evento puede ser descrito por la desigualdad $20 \leq X \leq 35$ y su probabilidad por $P(20 \leq X \leq 35)$. Del mismo modo, la probabilidad de que una bombilla eléctrica seleccionada al azar funcione durante al menos 50 horas es denotada por $P(X \geq 50)$ o por $P(50 \leq X < +\infty)$.

Una **función de densidad de probabilidad** para una variable aleatoria continua X es una función f, con la propiedad de que $f(x) \geq 0$ para toda x real, y que el área bajo la gráfica de f de $x = a$ a $x = b$ da la probabilidad $P(a \leq X \leq b)$. La gráfica de una posible función de densidad de probabilidad para la vida útil de una bombilla eléctrica aparece en la figura 10.4. Su forma refleja el hecho de que casi todas las bombillas se queman con relativa rapidez. Por ejemplo, la probabilidad de que una bombilla falle dentro de las primeras 40 horas está representada por el área (sombreada) bajo la curva entre $x = 0$ y $x = 40$. Esto es mucho mayor que el área bajo la curva entre $x = 80$ y $x = 120$, que representa la probabilidad de que la bombilla fallará entre sus 80 y 120 horas de uso.

www.FreeLibros.com

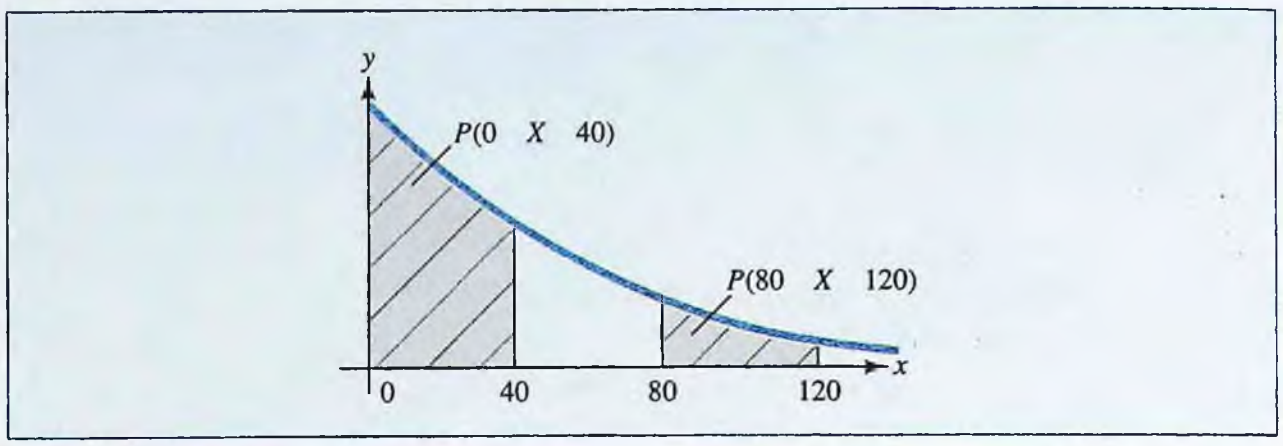


FIGURA 10.4 Posible función de densidad de probabilidad para la vida útil de una bombilla eléctrica.

La propiedad básica de las funciones de densidad de probabilidad se puede expresar también en términos de las integrales que se usarían para calcular las áreas apropiadas.

Función de densidad de probabilidad continua ■ Una función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria continua X es una función f que satisface las siguientes tres condiciones:

1. $f(x) \geq 0$ para toda x
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$
3. La probabilidad de que X se encuentre en el intervalo $a \leq X \leq b$ está dada por la integral

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Los valores de a y b de esta fórmula no tienen que ser finitos, y si uno de los dos es infinito, la correspondiente probabilidad está dada por una integral impropia. Por ejemplo, la probabilidad de que $X \geq a$ es

$$P(X \geq a) = P(a \leq X < +\infty) = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$$

La segunda condición de la definición de una función de densidad de probabilidad expresa el hecho de que como X debe tener algún valor, el evento $-\infty < X < +\infty$ es seguro que ocurrirá. Por tanto, se tiene $P(-\infty < X < +\infty) = 1$, lo cual significa que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

donde la integral impropia de la izquierda se define como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{0} f(x)\,dx + \lim_{N \to \infty} \int_{0}^{N} f(x)\,dx$$

y converge si y sólo si existen ambos límites.

www.FreeLibros.com

Cómo determinar la función de densidad de probabilidad apropiada, para una variable aleatoria, es un problema esencial en la teoría de probabilidades que está fuera del alcance de este libro. El siguiente objetivo es introducir varios tipos importantes de funciones de densidad de probabilidad que son útiles en varias aplicaciones.

Funciones de densidad de probabilidad

Una **función de densidad de probabilidad uniforme** (figura 10.5) es constante en un intervalo acotado $a \le x \le b$ y cero fuera de ese intervalo Si una variable aleatoria tiene función de densidad uniforme se dice que está **uniformemente distribuida.** En términos generales, para una variable aleatoria uniformemente distribuida, todos los valores en algún intervalo acotado son "igualmente probables." En forma más precisa, una variable aleatoria continua está uniformemente distribuida si la probabilidad de que su valor esté en un subintervalo particular del intervalo acotado, es igual a la probabilidad de que esté en cualquier otro subintervalo que tenga la misma longitud. Un ejemplo de una variable aleatoria uniformemente distribuida es el tiempo de espera de un automovilista frente a un semáforo que permanece rojo, por ejemplo, 40 segundos cada vez. Esta variable aleatoria tiene una distribución uniforme porque todos los tiempos de espera entre 0 y 40 son igualmente probables.

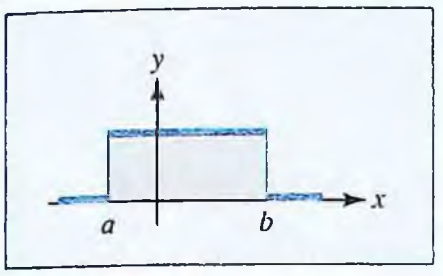


FIGURA 10.5 Función de densidad uniforme.

Si k es el valor constante de una función de densidad uniforme $f(x)$, en el intervalo $a \le x \le b$, el valor de k está determinado por el requisito de que el área total bajo la gráfica de f es igual a 1. En particular,

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \textit{porque } f(x) = 0 \textit{ fuera del intervalo } a \le x \le b$$

$$= \int_a^b k\,dx = kx\Big|_a^b = k(b-a)$$

y por tanto

$$k = \frac{1}{b-a}$$

Esta observación lleva a la siguiente fórmula para una función de densidad uniforme.

Función de densidad uniforme

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

A continuación se muestra una aplicación típica que comprende una función de densidad uniforme.

EJEMPLO | 10.2.1

Cierto semáforo permanece en rojo durante 40 segundos. Una persona llega (al azar) al semáforo y lo encuentra en rojo. Use una función de densidad uniforme apropiada para hallar la probabilidad de que tendrá que esperar al menos 15 segundos para que la luz cambie a verde.

Solución

Denote por X la variable aleatoria que mide el tiempo (en segundos) que debe esperar esa persona. Como todos los tiempos de espera entre 0 y 40 son "igualmente probables," X está uniformemente distribuida en el intervalo $0 \le x \le 40$. La correspondiente función de densidad uniforme es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{40} & \text{si } 0 \le x \le 40 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

¡EXPLORE!

Las funciones de densidad de probabilidad definidas sobre intervalos finitos son representadas fácilmente por calculadoras graficadoras con el uso de funciones indicadoras. Siguiendo el ejemplo 10.2.1 represente $f(x)$ en Y1 y calcule en la pantalla la probabilidad de esperar al menos 15 segundos para que la luz cambie a verde.

www.FreeLibros.com

y la probabilidad deseada es

$$P(15 \leq X \leq 40) = \int_{15}^{40} \frac{1}{40} dx = \frac{x}{40}\Big|_{15}^{40} = \frac{40 - 15}{40} = \frac{5}{8}$$

Funciones de densidad exponenciales

Una **función de densidad de probabilidad exponencial** es una función $f(x)$ que es cero para $x < 0$ y decrece exponencialmente para $x \geq 0$. Es decir,

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

donde A y λ son constantes positivas.

El valor de A está determinado por el requisito de que el área total bajo la gráfica de f es igual a 1. Por tanto,

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{0}^{+\infty} Ae^{-\lambda x}\, dx = \lim_{N \to +\infty} \int_{0}^{N} Ae^{-\lambda x}\, dx$$

$$= \lim_{N \to +\infty} \left(-\frac{A}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{N} \right) = \lim_{N \to +\infty} \left(-\frac{A}{\lambda} e^{-\lambda N} + \frac{A}{\lambda} \right) = \frac{A}{\lambda}$$

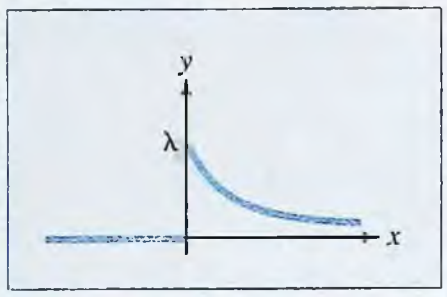


FIGURA 10.6 Una función de densidad exponencial.

y por tanto $A = \lambda$.

Este cálculo lleva a la siguiente fórmula general para una función de densidad exponencial. La gráfica correspondiente se muestra en la figura 10.6.

Función de densidad exponencial

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Si una variable aleatoria tiene función de densidad exponencial se dice que está **exponencialmente distribuida.** Como se puede ver de la gráfica de la figura 10.6, es mucho más probable que el valor de una variable aleatoria exponencialmente distribuida sea pequeño y no grande. Estas variables aleatorias incluyen la vida útil de componentes electrónicos, la duración de llamadas telefónicas, así como el intervalo entre las llegadas de aviones sucesivos en un aeropuerto. Aquí se muestra un ejemplo.

EJEMPLO | 10.2.2

Sea X una variable aleatoria que mide la duración de llamadas telefónicas en cierta ciudad y suponga que X tiene una distribución exponencial con función de densidad

$$f(t) = \begin{cases} 0.5e^{-0.5t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

donde t denota la duración (en minutos) de una llamada seleccionada al azar.

a) Encuentre la probabilidad de que una llamada seleccionada al azar dure entre 2 y 3 minutos.

b) Encuentre la probabilidad de que una llamada seleccionada al azar dure al menos 2 minutos.

¡EXPLORE!

Vea el ejemplo 10.2.2. Guarde la función $f(x)$ en Y1 como $0.5e\text{^}(-0.5X)(X \geq 0)$, usando la pantalla $[-2, 10]1$ por $[-0.1, 0.6]0.1$. Confirme numéricamente que $f(x)$ es una función de densidad de probabilidad y calcule $P(2 \leq X \leq 3)$.

www.FreeLibros.com

Solución

a) $$P(2 \le X \le 3) = \int_2^3 0.5e^{-0.5t}\,dt = -e^{-0.5t}\Big|_2^3$$
$$= -e^{-1.5} + e^{-1} \approx 0.1447$$

b) Hay dos formas de calcular esta probabilidad. El primer método es evaluar una integral impropia.

$$P(X \ge 2) = P(2 \le X < +\infty) = \int_2^{+\infty} 0.5e^{-0.5t}\,dt$$
$$= \lim_{N\to+\infty}\int_2^N 0.5e^{-0.5t}\,dt = \lim_{N\to+\infty}\left(-e^{-0.5t}\Big|_2^N\right)$$
$$= \lim_{N\to+\infty}(-e^{-0.5N} + e^{-1}) = e^{-1} \approx 0.3679$$

El segundo método es calcular 1 menos la probabilidad de que X sea menor que 2. Esto es,

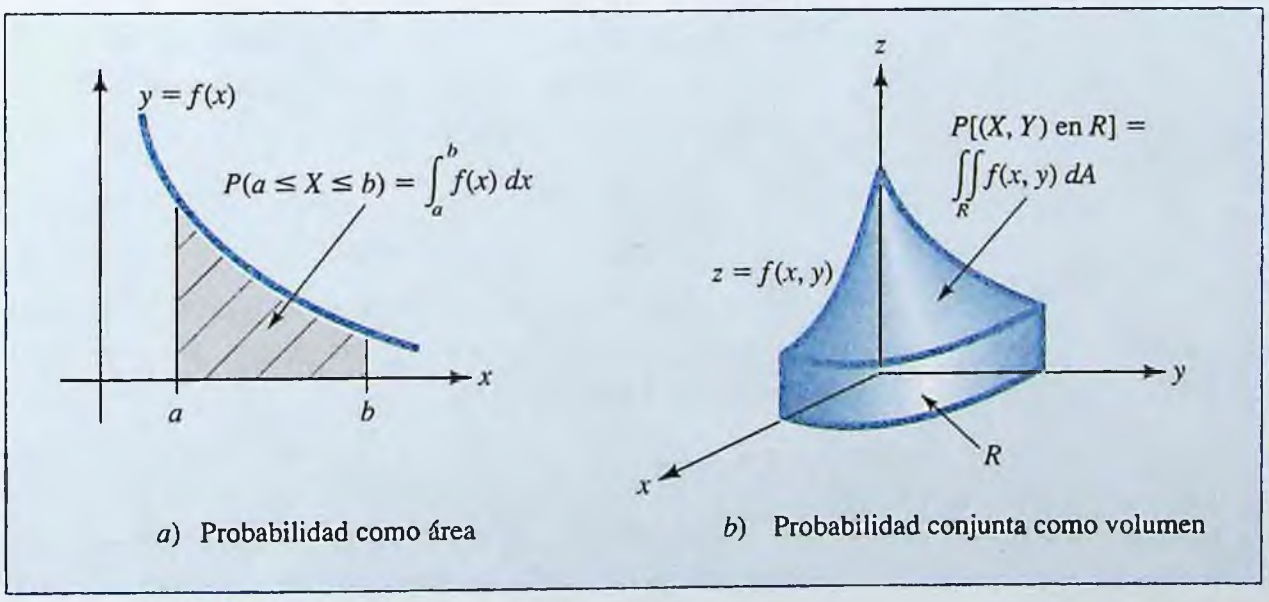
$$P(X \ge 2) = 1 - P(X < 2)$$
$$= 1 - \int_0^2 0.5e^{-0.5t}\,dt = 1 - \left(-e^{-0.5t}\Big|_0^2\right)$$
$$= 1 - (-e^{-1} + 1) = e^{-1} \approx 0.3679$$

Funciones de densidad de probabilidad conjunta

Como hemos visto, si $f(x)$ es la función densidad de probabilidad para la variable aleatoria continua X, entonces la probabilidad de que X esté entre a y b está dada por la fórmula

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

que se puede interpretar geométricamente como el área bajo la curva $y = f(x)$ sobre el intervalo $a \le x \le b$ (figura 10.7*a*).



a) Probabilidad como área

b) Probabilidad conjunta como volumen

FIGURA 10.7 Interpretación geométrica de probabilidad.

www.FreeLibros.com

REPASO

Justo-a-tiempo

Los cálculos y aplicaciones donde aparecen integrales dobles se pueden hallar en la sección 7.6.

En situaciones donde aparecen dos variables aleatorias X y Y, las probabilidades se calculan evaluando integrales dobles de una función de densidad de dos variables. En particular, se integra una función densidad de probabilidad conjunta $f(x, y)$ con estas propiedades:

1. $f(x, y) \geq 0$ para todos los puntos (x, y) del plano xy.

2. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy\, dx = 1$$

3. La probabilidad de que el par ordenado (X, Y) se encuentre en una región R está dada por

$$P[(X, Y) \text{ en } R] = \iint_R f(x, y)\, dA$$

Note que la propiedad (3), la probabilidad de que X se encuentre entre a y b, y que Y esté entre c y d, está dada por

$$P(a \leq X \leq b \quad \text{y} \quad c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$$
$$= \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx$$

En términos geométricos, la probabilidad $P[(X, Y)$ en $R]$ es el volumen bajo la superficie de densidad de probabilidad $z = f(x, y)$ que está sobre la región R (figura 10.7*b*), y la condición (2) dice que el volumen total bajo la superficie es 1.

Las técnicas para construir funciones de densidad de probabilidad conjunta a partir de datos experimentales se estudian en casi todos los textos de probabilidad y estadística. Las funciones de densidad de probabilidad conjunta se usan para estudiar confiabilidad de productos, longevidad esperada en la vida de varios factores dependientes, y otras aplicaciones. Los ejemplos 10.2.3 y 10.2.4 ilustran la forma en que se puede usar integración para calcular probabilidades cuando se conoce la función de densidad conjunta.

EJEMPLO | 10.2.3

Los detectores de humo fabricados por cierta compañía contienen dos circuitos independientes, uno fabricado en una planta en California y el otro en una planta en Ohio . Estudios de confiabilidad sugieren que si X mide la vida útil (en años) de un circuito seleccionado al azar, proveniente de la planta de California, y Y es la vida útil (en años) de un circuito seleccionado al azar de la planta de Ohio, entonces la función de densidad de probabilidad conjunta para X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.4e^{-x}e^{-0.4y} & \text{si } x \geq 0 \quad \text{y} \quad y \geq 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Si el detector de humo va a operar mientras cualquiera de sus circuitos esté en operación, encuentre la probabilidad de que un detector de humo seleccionado al azar falle antes de 1 año.

Solución

Como el detector de humo va a operar mientras cualquiera de sus circuitos esté en operación, fallará antes de 1 año si y sólo si *ambos* circuitos fallan antes de un año. Por tanto, se busca la probabilidad de que $0 \leq X \leq 1$ y $0 \leq Y \leq 1$. Los puntos (x, y), para los

www.FreeLibros.com

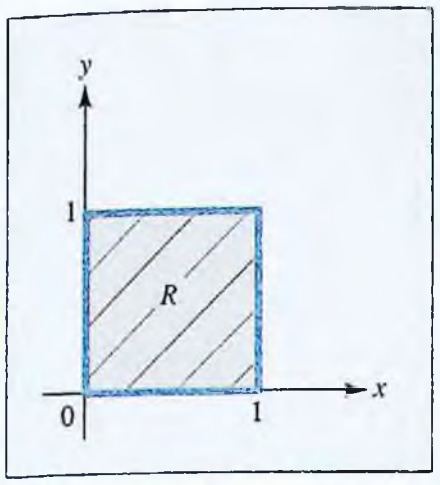


FIGURA 10.8 Cuadrado formado por todos los puntos (x, y) para los que $0 \le x \le 1$ y $\le y \le 1$.

cuales estas dos desigualdades se cumplen, están dentro y sobre la frontera del cuadrado R que se muestra en la figura 10.8. La probabilidad correspondiente es la integral doble de la función de densidad f sobre esta región R. Esto es,

$$\begin{aligned} P(0 \le X \le 1 \quad \text{y} \quad 0 \le Y \le 1) &= \int_0^1 \int_0^1 0.4e^{-x}e^{-0.4y}\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 0.4e^{-0.4y}\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} dy \\ &= 0.4(-e^{-1}+1)\int_0^1 e^{-0.4y}\,dy \\ &= 0.4(1-e^{-1})\left(\frac{e^{-0.4y}}{-0.4}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} \\ &= (1-e^{-1})(-e^{-0.4}+1) \\ &\approx 0.2084 \end{aligned}$$

En consecuencia, es aproximadamente 21% probable que un detector de humo seleccionado al azar falle antes de 1 año.

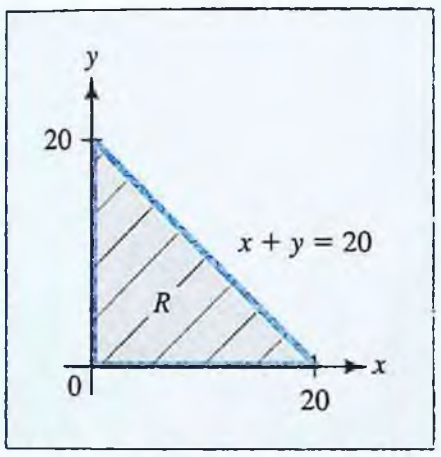


FIGURA 10.9 Triángulo formado por todos los puntos (x, y) para los cuales $x + y \le 20$.

EJEMPLO | 10.2.4

Suponga que la variable aleatoria X denota el tiempo (en minutos) que una persona está sentada en la sala de espera de cierto consultorio dental, y Y es el tiempo (en minutos) que una persona está de pie en una fila de espera en cierto banco. Usted tiene una cita con el dentista, después de lo cual planea hacer efectivo un cheque en el banco. Si $f(x, y)$ es la función conjunta de densidad de probabilidad para X y Y, escriba una integral doble que dé la probabilidad de que su tiempo *total* de espera sea de no más de 20 minutos.

Solución

El objetivo es hallar la probabilidad de que $X + Y \le 20$. Los puntos (x, y) para los cuales $x + y \le 20$ están sobre o debajo de la recta $x + y = 20$. Además, como X y Y representan cantidades no negativas, sólo estos puntos del primer cuadrante tienen significado en este contexto particular. El problema, entonces, es hallar la probabilidad de que el punto (X, Y) esté en R, donde R es la región del primer cuadrante limitada por la recta $x + y = 20$ y los ejes de coordenadas (figura 10.9). Esta probabilidad está dada por la integral doble de la función de densidad f sobre la región R. Es decir,

$$P[(X, Y) \text{ en } R] = \iint_R f(x, y)\,dA = \int_0^{20}\int_0^{20-x} f(x, y)\,dy\,dx$$

PROBLEMAS | 10.2

En los problemas del 1 al 6 determine si la función dada es una función de densidad de probabilidad.

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{10}{(x+10)^2} & \text{para } x \ge 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}e^{-2x} & \text{para } x \ge 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$

www.FreeLibros.com

3. $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}\sqrt{x} & \text{para } 0 \leq x \leq 9 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + 2x & \text{para } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

En los problemas 7 al 14 f(x) *es una función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria particular* X. *Use integración para hallar las probabilidades indicadas.*

7. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

a) $P(2 \leq X \leq 5)$
b) $P(3 \leq X \leq 4)$
c) $P(X \geq 4)$

8. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

a) $P(0 \leq X \leq 2)$
b) $P(1 \leq X \leq 2)$
c) $P(X \leq 1)$

9. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(4 - x) & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

a) $P(0 \leq X \leq 4)$
b) $P(2 \leq X \leq 3)$
c) $P(X \geq 1)$

10. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(4x - x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

a) $P(0 \leq X \leq 4)$
b) $P(1 \leq X \leq 2)$
c) $P(X \leq 1)$

11. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

a) $P(1 \leq X < +\infty)$
b) $P(1 \leq X \leq 2)$
c) $P(X \geq 2)$

12. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-x/10} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) $P(0 \leq X < +\infty)$
b) $P(X \leq 2)$
c) $P(X \geq 5)$

13. $f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) $P(X \geq 0)$
b) $P(1 \leq X \leq 2)$
c) $P(X \leq 2)$

14. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}xe^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a) $P(0 \leq X < +\infty)$
b) $P(2 \leq X \leq 4)$
c) $P(X \geq 6)$

15. VIDA ÚTIL DE UNA MÁQUINA La vida útil X de una clase particular de máquina es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{28} + \frac{3}{x^2} & \text{si } 3 \leq x \leq 7 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

donde x es el número de años que una máquina seleccionada al azar permanece en uso.

a) Encuentre la probabilidad de que una máquina seleccionada al azar sea útil durante más de 4 años.

b) Encuentre la probabilidad de que una máquina seleccionada al azar sea útil durante al menos 5 años.

c) Encuentre la probabilidad de que una máquina seleccionada al azar sea útil entre 4 y 6 años.

16. FLUJO DE TRÁNSITO Cierto semáforo permanece en rojo durante 45 segundos. Usted llega (al azar) al semáforo y lo encuentra en rojo. Use una función de densidad uniforme apropiada para hallar:

a) La probabilidad de que el semáforo cambie a verde antes de 15 segundos.

www.FreeLibros.com

b) La probabilidad de que el semáforo cambie a verde entre 5 y 10 segundos después que usted llegue.

17. VIAJE FRECUENTE Durante las horas "pico" de la mañana, los trenes suburbanos pasan cada 20 minutos por la estación cercana a su casa, en el centro de la ciudad. Usted llega (al azar) a la estación y no encuentra tren en la plataforma. Suponiendo que los trenes están pasando según su itinerario, use una función de densidad uniforme apropiada para hallar:

a) La probabilidad de que tendrá que esperar el tren al menos 8 minutos.

b) La probabilidad de que tendrá que esperar el tren entre 2 y 5 minutos.

18. PSICOLOGÍA EXPERIMENTAL Suponga que el tiempo que una rata de laboratorio tarda en recorrer cierto laberinto es medido por una variable aleatoria X, que está exponencialmente distribuida con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-x/3} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donde x es el número de minutos que una rata seleccionada al azar tarda en atravesar el laberinto.

a) Encuentre la probabilidad de que una rata seleccionada al azar tarde más de 3 minutos en atravesar el laberinto.

b) Encuentre la probabilidad de que una rata seleccionada al azar tarde entre 2 y 5 minutos en atravesar el laberinto.

19. CONFIABILIDAD DE PRODUCTO La vida útil de las bombillas eléctricas manufacturadas por cierta compañía es medida por una variable aleatoria X, con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 0.01e^{-0.01x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donde x denota la vida útil (en horas) de una bombilla seleccionada al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la vida útil de una bombilla seleccionada al azar sea entre 50 y 60 horas?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la vida útil de una bombilla seleccionada al azar no sea mayor a 60 horas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la vida útil de una bombilla seleccionada al azar sea mayor a 60 horas?

20. CONFIABILIDAD DE PRODUCTO La vida útil de un tipo particular de impresora es medida por una variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 0.02e^{-0.02x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donde x denota el número de meses que una impresora seleccionada al azar ha estado en uso.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una impresora seleccionada al azar dure entre 10 y 15 meses?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una impresora seleccionada al azar dure menos de 8 meses?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una impresora seleccionada al azar dure más de 1 año?

21. SERVICIO A CLIENTES Suponga que el tiempo X que un cliente debe pasar en una fila de espera en cierto banco es una variable aleatoria que está exponencialmente distribuida, con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x/4} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donde x es el número de minutos que un cliente seleccionado al azar pasa en una fila de espera.

a) Encuentre la probabilidad de que un cliente tenga que estar de pie en la fila al menos 8 minutos.

b) Encuentre la probabilidad de que un cliente tenga que estar de pie en la fila entre 1 y 5 minutos.

22. BIOLOGÍA Sea X una variable aleatoria que mide la edad de una célula seleccionada al azar en una población particular. Suponga que X está distribuida exponencialmente con una función de densidad de probabilidad de la forma

$$f(x) = \begin{cases} ke^{-kx} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

donde x es la edad de una célula seleccionada al azar (en días) y k es una constante positiva. Experimentos indican que es doblemente probable que una célula tenga menos de 3 días de edad, a que tenga más de 3 días de edad.

a) Use esta información para determinar k.

b) Encuentre la probabilidad de que una célula seleccionada al azar tenga al menos 5 días de edad.

23. PSICOLOGÍA EXPERIMENTAL Suponga que el tiempo que tarda una rata de laboratorio en atravesar cierto laberinto es medido por una variable aleatoria X, con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}xe^{-x/4} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donde x es el número de minutos que una rata seleccionada al azar tarda en atravesar en el laberinto.

www.FreeLibros.com

a) Encuentre la probabilidad de que una rata seleccionada al azar tarde no más de 5 minutos en atravesar el laberinto.

b) Encuentre la probabilidad de que una rata seleccionada al azar tarde al menos 10 minutos en atravesar el laberinto.

24. LLEGADAS DE AVIONES El intervalo entre llegadas de aviones sucesivos en cierto aeropuerto es medido por una variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 0.2e^{-0.2x} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

donde x es el tiempo (en minutos) entre las llegadas de un par seleccionado al azar de aviones sucesivos.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que dos aviones sucesivos seleccionados al azar lleguen antes de 5 minutos entre sí?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que dos aviones sucesivos seleccionados al azar lleguen con diferencia de no más de 6 minutos entre sí?

25. RELATO DE ESPÍAS El espía se las arregla para escapar de la "sala de pláticas" de Scélérat (problema 43, sección 9.1) y regresa sin daño a su cuartel general. Recupera su equipo y recibe orden de seguir el rastro a Coldfinger. Acercándose al bandido, cae en una trampa. Se resiste, pero finalmente se le agotan las balas y es forzado a usar su última arma, una granada de choque. Al quitarle el seguro a la granada, recuerda que hace exactamente un año que la recibió de su superior, "N", junto con unas manoplas metálicas, por el día de San Valentín. Cuando la granada hacía un arco en el aire hacia el enemigo, también recuerda, con menos cariño, que esta clase particular de granada tiene una garantía de un año y que su vida útil X es una variable aleatoria exponencialmente distribuida con función de densidad de probabilidad

$$f(t) = \begin{cases} 0.08e^{-0.08t} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

donde t es el número de meses desde que la granada salió de la fábrica de municiones. Suponiendo que la granada era nueva cuando el espía la recibió y que había sido escogida al azar del almacén de la fábrica, ¿cuál es la probabilidad de que el espía expire junto con la garantía?

26. MEDICINA Sea X la variable aleatoria que representa el número de años que un paciente con un tipo particular de cáncer vive después de recibir terapia de radiación. Suponga que X tiene una distribución exponencial con parámetro k. Una investigación indica que un paciente con este tipo de cáncer tiene un 80% de probabilidad de vivir al menos cinco años después de iniciar la terapia de radiación.

a) Use esta información para determinar k.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente con cáncer viva al menos 10 años después de iniciar terapia de radiación?

27. TRANSPORTE Suponga que el monorriel del aeropuerto Libertad de Newark a la ciudad de Nueva York sale cada hora. Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo que una persona que llega al azar a la terminal del monorriel deba esperar hasta que salga el siguiente tren. Suponga que X tiene una distribución uniforme.

a) Encuentre la función de densidad de probabilidad para X.

b) Encuentre la probabilidad de que una persona tenga que esperar el siguiente tren a Nueva York, al menos 45 minutos.

c) Encuentre la probabilidad de que una persona tenga que esperar el siguiente tren entre 5 y 15 minutos.

28. ENTRETENIMIENTO Una película de 2 horas se exhibe continuamente en un teatro local. Usted sale al teatro sin ver primero las horas de exhibición. Use una función de densidad uniforme apropiada para hallar la probabilidad de que usted llegará al teatro dentro de un intervalo de no más de 10 minutos de diferencia con el comienzo de la película (antes o después).

29. ECOLOGÍA TROPICAL Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo (en horas) entre visitas sucesivas de colibríes para alimentarse en las flores de una planta tropical particular. Suponga que X está distribuida exponencialmente con parámetro $k = 0.5$. Encuentre la probabilidad de que el tiempo entre la llegada de colibríes sucesivos sea mayor a dos horas.

30. Suponga que la función conjunta de densidad de probabilidad para las variables aleatorias no negativas X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-2x}e^{-y} & \text{si } x \geq 0 \text{ y } y \geq 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

a) Encuentre la probabilidad que $0 \leq X \leq 1$ y $1 \leq Y \leq 2$.

b) Encuentre la probabilidad de que $2X + Y \leq 1$.

31. Suponga que la función de densidad de probabilidad conjunta para las variables aleatorias no negativas X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{6}e^{-x/2}e^{-y/3} & \text{si } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

a) Encuentre la probabilidad de que $1 \leq X \leq 2$ y $0 \leq Y \leq 2$.

b) Encuentre la probabilidad de que $X + Y \leq 1$.

www.FreeLibros.com

32. Suponga que la función de densidad de probabilidad conjunta para las variables aleatorias X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x-y} & \text{si } x \geq 0 \text{ y } y \geq 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de que (X, Y) esté en la región rectangular R con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$ y $(1, 2)$.

33. ATENCIÓN MÉDICA Suponga que las variables aleatorias X y Y miden el tiempo (en días) que un paciente permanece en un hospital después de una cirugía de abdomen y ortopédica, respectivamente. El lunes, la paciente de la cama 107A es sometido a apendectomía de emergencia mientras que a su compañero de cuarto, cama 107B, le hacen una operación ortopédica para la reparación de un cartílago roto en una rodilla. Suponga que la función de densidad de probabilidad conjunta para X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{12} e^{-x/4} e^{-y/3} & \text{si } x \geq 0 \text{ y } y \geq 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos pacientes salgan del hospital antes de tres días?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de los pacientes esté todavía en el hospital después de 3 días?

34. PROTECCIÓN DE GARANTÍA Cierto aparato electrodoméstico formado por dos componentes electrónicos independientes estará en servicio mientras al menos uno de sus componentes funcione. El aparato lleva una garantía del fabricante que asegura cambiarlo si el aparato falla antes de 1 año, a partir de la fecha de compra. Sea la variable aleatoria X la medida de la vida útil (en años) del primer componente, y Y mide la vida útil (también en años) del segundo componente; suponga que la función conjunta de densidad de probabilidad para X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} e^{-x/2} e^{-y/2} & \text{si } x \geq 0 \text{ y } y \geq 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Usted compra uno de estos aparatos, seleccionado al azar del almacén del fabricante. Encuentre la probabilidad de que la garantía expire antes que su aparato falle. [*Sugerencia:* Usted busca la probabilidad de que el aparato *no falle* durante el primer año. ¿Cómo está esto relacionado con la probabilidad de que el aparato *falle* durante este periodo?

35. ADMINISTRACIÓN DE TIEMPO Suponga que la variable aleatoria X mide el tiempo (en minutos) que una persona pasa en la sala de espera del consultorio de un médico, y que Y mide el tiempo necesario para un examen médico completo (también en minutos). Usted llega al consultorio para el examen médico 50 minutos antes de su cita. Si la distribución de probabilidad conjunta para X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{500} e^{-x/10} e^{-y/50} & \text{si } x \geq 0 \text{ y } y \geq 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

encuentre la probabilidad de que saldrá del examen tarde para su cita. [*Sugerencia:* La probabilidad que usted busca es 1 - probabilidad de estar a tiempo.]

36. POBLACIONES DE INSECTOS Los entomólogos están estudiando dos especies de insectos que interactúan dentro del mismo ecosistema. Sea X la variable aleatoria que mide la población de la especia A y Y mide la población de la especie B. Una investigación indica que la función conjunta de densidad de probabilidad para X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x-y} & \text{si } x \geq 0 \text{ y } y \geq 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

¿Cuál es la probabilidad de que el tamaño de la población de la especie A sea mayor al de la especie B?

La mediana *de una variable aleatoria X es el número real* m *tal que* $P(X \leq m) = 1/2$. *Esta definición se usa en los problemas 37 al 40.*

37. Encuentre la mediana del tiempo de que debe esperar que el semáforo cambie a verde en el ejemplo 10.2.1.

38. Encuentre la mediana de la duración de la llamada telefónica del ejemplo 10.2.2.

39. Encuentre la mediana de una variable aleatoria uniformemente distribuida sobre el intervalo $A \leq x \leq B$.

40. Encuentre la mediana de una variable aleatoria que tiene una distribución exponencial con parámetro λ.

41. La *función de confiabilidad* $r(x)$ de un componente electrónico es la probabilidad de que el componente continúe funcionando más de x días. Suponga que la vida útil de un componente es medido por una variable aleatoria X con una función de densidad de probabilidad $f(x)$.

a) Encuentre una fórmula para $r(x)$ en términos de $f(x)$.

b) Suponga que la vida útil (días) de un chip de memoria tiene una distribución exponencial con un parámetro $\lambda = 20$. Encuentre $r(10)$, la probabilidad de que el chip de memoria continúe en operación durante más de 10 días.

www.FreeLibros.com

Una variable aleatoria continua X *tiene una distribución de Pareto si su función de densidad de probabilidad tiene la forma*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\lambda^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq \lambda \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

donde a *y* λ *son parámetros (números reales positivos). La distribución de Pareto se usa a veces para modelar la distribución de ingresos en una sociedad. En los problemas 42 y 43 aparece la distribución de Pareto.*

42. Verifique que para todos los números positivos a y λ, la región bajo la gráfica de la función de densidad de probabilidad de Pareto $f(x)$ tiene área 1, como se requiere en todas las funciones de densidad de probabilidad.

43. Suponga que X es una variable aleatoria que tiene una distribución de Pareto con parámetro $a = 1$ y $\lambda = 1.2$.

a) Dibuje la gráfica de la función $f(x)$ de densidad de probabilidad para X.

b) Encuentre la probabilidad $P(10 \leq X \leq 20)$.

c) Lea un artículo sobre la distribución de Pareto y escriba un párrafo sobre la forma en que se puede utilizar.

SECCIÓN 10.3 | Valor esperado y varianza de variables aleatorias continuas

Suponga que los investigadores médicos han determinado que cuando se usa un nuevo medicamento con pacientes que sufren de cierta clase de cáncer, el número de años X que un paciente vive después de recibir el medicamento es una variable aleatoria continua, con una función $s(x)$ de densidad de probabilidad particular. En promedio, ¿cuánto puede esperar vivir un paciente después de recibir el medicamento? Estudios de confiabilidad de cierto producto indican que la vida útil X del producto es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad $L(x)$. ¿Cuál es la vida útil promedio de una unidad seleccionada al azar? ¿Hasta qué punto se extienden los resultados experimentales de la prueba de confiabilidad, en relación con el promedio de vida útil? En la sección 10.1 se responden preguntas de esta naturaleza para variables aleatorias discretas, al introducir los conceptos de valor esperado y varianza para tales variables. En esta sección, se usará la integración para ampliar estos conceptos a las variables aleatorias continuas.

Valor esperado de una variable aleatoria continua

Una característica importante de una variable aleatoria es su valor "promedio". Los promedios conocidos de variables aleatorias incluyen el promedio de velocidad en carretera para un modelo de auto en particular, el promedio de tiempo de espera en el mostrador de cierta línea aérea, y el promedio de vida útil de trabajadores en una profesión de riesgo. El valor promedio de una variable aleatoria X se llama su **valor esperado** o **media** y se denota por el símbolo $E(X)$. Para variables aleatorias continuas, usted puede calcular el valor esperado a partir de la función de densidad de probabilidad usando la siguiente fórmula.

Valor esperado ■ Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad f, el valor esperado (o media) de x es

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx$$

Para ver por qué esta integral da el valor promedio de una variable aleatoria continua, primero considere el caso más sencillo en el que X es una variable aleatoria discreta que toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si cada uno de estos valores se presenta con igual frecuencia, la probabilidad de cada uno es $1/n$ y el valor promedio de X es

www.FreeLibros.com

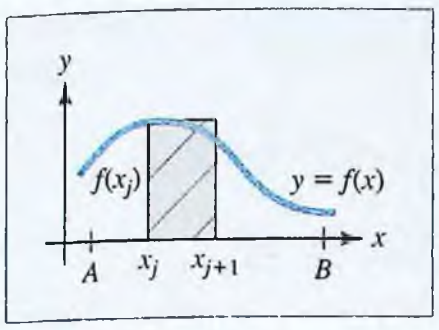


FIGURA 10.10 El j-ésimo subintervalo con un rectángulo de aproximación.

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = x_1\left(\frac{1}{n}\right) + x_2\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + x_n\left(\frac{1}{n}\right)$$

Más generalmente, si los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se presentan con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$, respectivamente, el valor promedio de X es la suma ponderada

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = \sum_{j=1}^{n} x_j p_j$$

Ahora considere el caso continuo. Para más sencillez, restrinja su atención a un intervalo acotado $A \le x \le B$. Imagine que este intervalo está dividido en n subintervalos con ancho Δx, y denote por x_j el inicio del j-ésimo subintervalo. Entonces

$$p_j = \begin{array}{c}\text{probabilidad de que } x \text{ está} \\ \text{en el } j\text{-ésimo subintervalo}\end{array} = \begin{array}{c}\text{área bajo la gráfica} \\ \text{de } f \text{ de } x_j \text{ a } x_{j+1}\end{array} \approx f(x_j)\,\Delta x$$

donde $f(x_j)\,\Delta x$ es el área de un rectángulo aproximante (figura 10.10).

Para aproximar el valor promedio de X sobre la integral $A \le x \le B$, trate X como si fuera una variable aleatoria discreta que toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$, respectivamente. Entonces

$$\begin{array}{c}\text{Valor promedio de } X \\ \text{en } A \le x \le B\end{array} \approx \sum_{j=1}^{n} x_j p_j \approx \sum_{j=1}^{n} x_j f(x_j)\,\Delta x$$

El valor promedio real de X sobre el intervalo $A \le x \le B$ es el límite de esta suma aproximante cuando n crece sin límite. Es decir,

$$\begin{array}{c}\text{Valor promedio de } X \\ \text{en } A \le x \le B\end{array} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} x_j f(x_j)\,\Delta x = \int_A^B x f(x)\,dx$$

Una extensión de este argumento muestra que

$$\begin{array}{c}\text{Valor promedio de } X \\ \text{en } -\infty < x < \infty\end{array} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

que es la fórmula para el valor esperado de una variable aleatoria continua.

Cálculo del valor esperado

Para obtener una mejor idea del valor esperado de una variable aleatoria continua X, considere la función densidad de probabilidad para X como que describe la distribución de masa en una viga apoyada sobre el eje x. Entonces el valor esperado de X es el punto en el que la viga está en equilibrio. Si la gráfica de la función densidad es simétrica, el valor esperado es el punto de simetría, como se ilustra en la figura 10.11.

El uso de la fórmula integral para calcular el valor esperado de una variable aleatoria continua se ilustra en los siguientes dos ejemplos.

EJEMPLO | 10.3.1

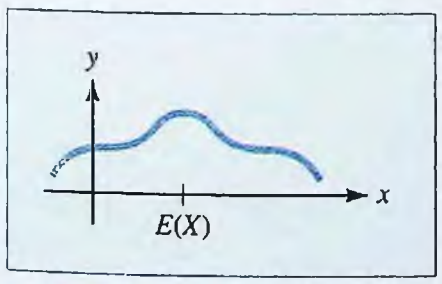


FIGURA 10.11 Valor esperado de una variable aleatoria simétrica.

Continuando con el ejemplo 10.2.1, cierto semáforo permanece en rojo durante 40 segundos a la vez. Usted llega (al azar) al semáforo y lo encuentra en rojo. Denote por X la variable aleatoria que mide el tiempo (en segundos) que debe esperar para que cambie la luz y suponga que X está distribuida uniformemente con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{40} & \text{si } 0 \le x \le 40 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

¿Cuánto debe usted esperar para que el semáforo cambie a verde?

www.FreeLibros.com

Solución

El valor esperado de X es

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{0}^{40} \frac{x}{40}\,dx = \frac{x^2}{80}\Big|_0^{40} = \frac{1\,600}{80} = 20$$

Por tanto, el promedio de tiempo de espera en el semáforo en rojo es de 20 segundos, conclusión que no debe ser sorpresivo porque la variable aleatoria está uniformemente distribuida entre 0 y 40.

EJEMPLO | 10.3.2

Continuando con el ejemplo 10.2.2, sea X la variable aleatoria que mide la duración de llamadas telefónicas en cierta ciudad y suponga que X está distribuida exponencialmente con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 0.5e^{-0.5x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

¿Cuánto espera usted que dure una llamada telefónica seleccionada al azar?

Solución

El valor esperado de X es

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} 0.5xe^{-0.5x}\,dx$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int_0^N 0.5xe^{-0.5x}\,dx$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(-xe^{-0.5x}\Big|_0^N + \int_0^N e^{-0.5x}\,dx \right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(-xe^{-0.5x} - 2e^{-0.5x} \right)\Big|_0^N$$

$$= \lim_{N\to\infty} (-Ne^{-0.5N} - 2e^{-0.5N} + 2)$$

$$= 2$$

Por tanto, la duración esperada (promedio) de llamadas telefónicas en la ciudad es 2 minutos.

¡EXPLORE!

Vea el ejemplo 10.3.2. Introduzca 0.5X * e^(−0.5X)(X≥0) en Y1 en el editor de ecuaciones de su calculadora graficadora, usando la pantalla [0, 30]1 por [−0.1, 4].1. Aproxime el valor de la integral impropia de X = 0 a ∞, ajustando el límite inferior de integración a 0, y el límite superior a 10, 20 y 30, sucesivamente. ¿A qué valor parecen estar aproximándose estos resultados? ¿Cuál es la importancia de este valor?

Varianza de una variable aleatoria continua

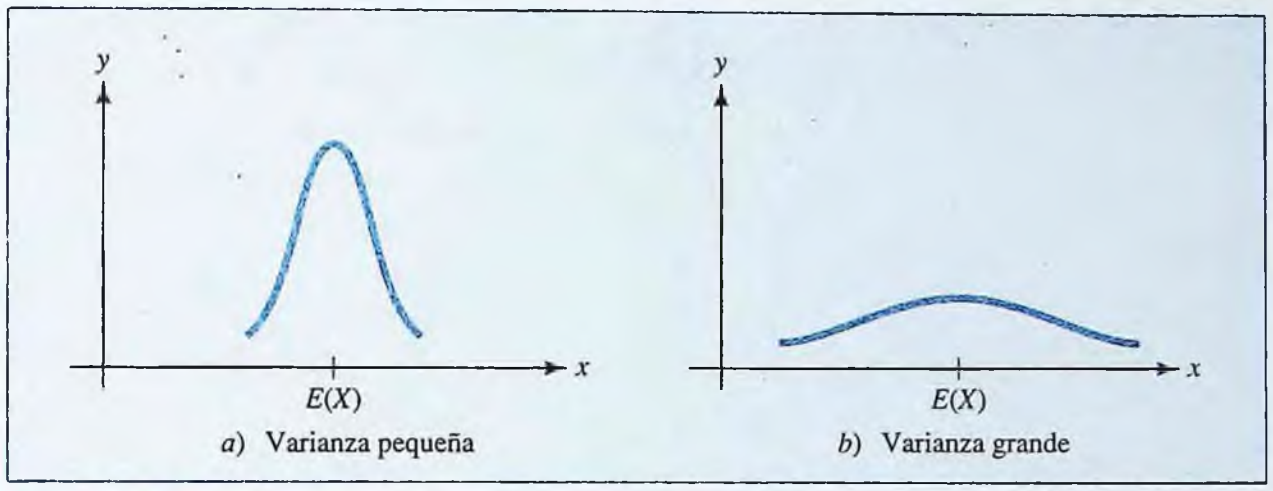
El valor esperado o media de una variable aleatoria la da el centro de su distribución. Otro concepto útil para describir la distribución de una variable es la **varianza,** pues indica qué tan dispersa está la distribución. Esto es, la varianza mide la tendencia de los valores de una variable aleatoria para agruparse alrededor de su media. A continuación se muestra la definición.

Varianza ■ Si X es una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad f, la varianza de X es

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x)\,dx$$

www.FreeLibros.com

La definición de la varianza no es tan misteriosa como puede parecer a primera vista. Nótese que la fórmula para la varianza es la misma que la de valor esperado, excepto que x ha sido sustituida por la expresión $[x - E(X)^2]$, que representa el cuadrado de la desviación de x respecto a la media $E(X)$. La varianza, por tanto, es simplemente el valor esperado o promedio del cuadrado de las desviaciones de los valores de X respecto a la media. Si los valores de X tienden a agruparse alrededor de la media como en la figura 10.12*a*, casi todas las desviaciones respecto a la media serán pequeñas y la varianza, que es el promedio de los cuadrados de estas desviaciones, también será pequeña. Por otra parte, si los valores de la variable aleatoria están ampliamente dispersos como en la figura 10.12*b*, habrá numerosas desviaciones grandes respecto a la media y la varianza será grande.



a) Varianza pequeña *b*) Varianza grande

FIGURA 10.12 Varianza de una variable aleatoria continua como medida de la dispersión de una distribución.

Cálculo de la varianza

Como se acaba de ver, la fórmula

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x)\, dx$$

que define la varianza se interpreta fácilmente como una medida de dispersión de la distribución de X. No obstante, con excepción de las funciones de densidad más sencillas, esta fórmula es engorrosa para el cálculo real de la varianza. Esto es porque el término $x - E(X)$ debe elevarse al cuadrado y multiplicarse por $f(x)$ antes de hacer la integración. A continuación se muestra una fórmula equivalente para la varianza, que es más fácil de usar para fines de cómputo.

Fórmula equivalente para varianza

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx - [E(X)]^2$$

La deducción de esta fórmula es sencilla. Comprende la expansión del integrando de la definición de la varianza y el reacomodo de los términos resultantes hasta que quede la nueva fórmula. Al leer estos pasos, el estudiante debe recordar que el valor esperado $E(X)$ es una constante y puede ser sacado de las integrales por la regla del factor constante.

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x)\, dx \quad \textit{definición de varianza}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{x^2 - 2xE(X) + [E(X)]^2\right\} f(x)\, dx \quad \textit{integrando expandido}$$

www.FreeLibros.com

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - 2E(X)\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx + [E(X)]^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

por la regla de la suma y la regla de múltiplo constante

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx\right] - 2E(X)\cdot E(X) + [E(X)]^2(1)$$

usando la definición de $E(X)$ y el hecho de que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - [E(X)]^2$$

Esta fórmula se usa para calcular varianza en los ejemplos 10.3.3 y 10.3.4.

EJEMPLO | 10.3.3

Encuentre la varianza de la variable aleatoria X, uniformemente distribuida del ejemplo 10.3.1 con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{40} & \text{si } 0 \le x \le 40 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Solución

El primer paso es calcular $E(X)$. Esto se hizo en el ejemplo 10.3.1, donde encontramos $E(X) = 20$. Con el uso de este valor en la fórmula de la varianza, obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - [E(X)]^2 \\ &= \int_0^{40} \frac{x^2}{40}\,dx - 400 = \frac{x^3}{120}\Big|_0^{40} - 400 \\ &= \frac{64\,000}{120} - 400 = \frac{16\,000}{120} = \frac{400}{3} \end{aligned}$$

EJEMPLO | 10.3.4

Encuentre la varianza de la variable aleatoria X, exponencialmente distribuida del ejemplo 10.3.2 con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 0.5e^{-0.5x} & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Solución

Usando el valor $E(X) = 2$ obtenido en el ejemplo 10.3.2, e integrando por partes dos veces, se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - [E(X)]^2 \\ &= \int_0^{\infty} 0.5x^2 e^{-0.5x}\,dx - 4 \\ &= \lim_{N\to\infty} \int_0^{N} 0.5x^2 e^{-0.5x}\,dx - 4 \end{aligned}$$

www.FreeLibros.com

$$= \lim_{N\to\infty}\left(-x^2e^{-0.5x}\Big|_0^N + 2\int_0^N xe^{-0.5x}\,dx\right) - 4$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[(-x^2e^{-0.5x} - 4xe^{-0.5x})\Big|_0^N + 4\int_0^N e^{-0.5x}\,dx\right] - 4$$

$$= \lim_{N\to\infty}(-x^2 - 4x - 8)e^{-0.5x}\Big|_0^N - 4$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[(-N^2 - 4N - 8)e^{-0.5N} + 8\right] - 4$$

$$= 4$$

Valor esperado para una distribución de probabilidad conjunta

Si X y Y son variables aleatorias continuas con función de densidad de probabilidad conjunta $f(x, y)$, entonces los valores esperados de X y Y están dados por las integrales

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y)\,dA \quad \text{y} \quad E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y)\,dA$$

En el ejemplo 10.3.5 se calcula el valor esperado de una de las variables aleatorias del ejemplo 10.2.3.

EJEMPLO | 10.3.5

Detectores de humo manufacturados por cierta compañía contienen dos circuitos independientes, uno fabricado en la planta de California y el otro en la planta de Ohio. Estudios de confiabilidad sugieren que si X mide la vida útil (en años) de un circuito seleccionado al azar de la planta de California y Y mide la vida útil (en años) de un circuito seleccionado al azar de la planta de Ohio, entonces la función conjunta de densidad de probabilidad para X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.4e^{-x}e^{-0.4y} & \text{si } x \geq 0 \text{ y } y \geq 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

¿Cuánto se espera que dure un circuito seleccionado al azar de la planta de Ohio?

Solución

Se desea calcular el valor esperado de la variable aleatoria Y; es decir,

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y(0.4e^{-x}e^{-0.4y})\,dx\,dy = \int_0^{+\infty} 0.4ye^{-0.4y}\left(\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx\right)dy$$

$$= \int_0^{+\infty} 0.4ye^{-0.4y}\left[\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{e^{-x}}{-1}\right)\Big|_{x=0}^{x=N}\right]dy$$

$$= \int_0^{+\infty} 0.4ye^{-0.4y}(1)\,dy \qquad \textit{porque } \lim_{N\to+0} -(e^{-N} - e^0) = 1$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left(-ye^{-0.4y} + \frac{e^{-0.4y}}{-0.4}\right)\Big|_{y=0}^{y=N} \qquad \textit{integrando por partes: } u = 0.4y \quad dv = e^{-0.4y}\,dy$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left[(-Ne^{-0.4N} - 2.5e^{-0.4N}) - (0 - 2.5)\right]$$

$$\approx 2.5 \qquad \textit{porque } \lim_{N\to+0}(-N - 2.5)e^{-0.4N} = 0$$

Por tanto, se espera que un circuito seleccionado al azar de la planta de Ohio dure aproximadamente 2.5 años.

www.FreeLibros.com

PROBLEMAS | 10.3

En los problemas del 1 al 10 se da la función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria continua X. *En cada caso, encuentre el valor esperado* E(X) *y la varianza* Var(X) *de* X.

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } 2 \le x \le 5 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(4 - x) & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

4. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(4x - x^2) & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4} & \text{si } 1 \le x < \infty \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-x/10} & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} 4e^{-4x} & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

9. $f(x) = \begin{cases} 20(x^3 - x^4) & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

En los problemas 11 al 14, se da la función de densidad de probabilidad conjunta f(x, y) *para dos variables aleatorias continuas* X *y* Y. *En cada caso, encuentre los valores esperados* E(X) *y* E(Y).

11. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x/2} e^{-y} & \text{si } x \ge 0 \text{ y } y \ge 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

12. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{-2x} e^{-y/6} & \text{si } x \ge 0 \text{ y } y \ge 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

13. $f(x, y) = \begin{cases} ye^{-x-y} & \text{si } x \ge 0 \text{ y } y \ge 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

14. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{24}{5} x(1 - y) & \text{si } 0 \le y \le x \text{ y } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

15. VIDA ÚTIL DE UNA MÁQUINA La vida útil X de una clase particular de máquina es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{28} + \frac{3}{x^2} & \text{si } 3 \le x \le 7 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

donde x es el número de años que una máquina seleccionada al azar permanece en uso. ¿Cuál es la vida útil esperada de la máquina?

16. FLUJO DE TRÁNSITO Cierto semáforo permanece en rojo durante 45 minutos cada vez. Usted llega (al azar) al semáforo y lo encuentre en rojo. Use una función de densidad uniforme apropiada para hallar el valor esperado del tiempo de espera para los autos que llegan al semáforo con luz roja.

17. VIAJE FRECUENTE Durante las horas "pico" de la mañana, los trenes suburbanos que van al centro de la ciudad pasan cada 20 minutos por la estación cercana a su casa. Usted llega (al azar) a la estación y no encuentra tren en la plataforma. Suponiendo que los trenes están pasando a tiempo, use una función de densidad uniforme apropiada para hallar el valor esperado del tiempo de espera para los pasajeros que llegan a la estación cuando no hay un tren en la plataforma.

18. LLEGADAS DE AVIONES El intervalo entre llegadas de aviones sucesivos en cierto aeropuerto es medido por una variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 0.2e^{-0.2x} & \text{para } x \ge 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases}$$

donde x es el tiempo (en minutos) entre las llegadas de un par de aviones sucesivos seleccionado al azar. Si usted llega al aeropuerto justo a tiempo para ver que un avión aterriza, ¿cuánto debe esperar para la llegada del siguiente vuelo?

www.FreeLibros.com

19. **CONFIABILIDAD DE PRODUCTO** La vida útil de un tipo particular de impresora es medida por una variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 0.05e^{-0.05x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donde x denota el número de meses que una impresora seleccionada al azar ha estado en uso. ¿Cuál es la vida esperada de una impresora seleccionada al azar?

20. **SERVICIO A CLIENTES** Suponga que el tiempo X que un cliente debe pasar en una fila de espera en cierto banco es una variable aleatoria que está exponencialmente distribuida, con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-x/4} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donde x es el número de minutos que un cliente seleccionado al azar pasa en una fila de espera. Encuentre el valor esperado del tiempo de espera para los clientes en el banco.

21. **INVESTIGACIÓN MÉDICA** Un grupo de pacientes con una enfermedad potencialmente mortal ha estado siendo tratado con un medicamento experimental. Suponga que el tiempo de supervivencia X para un paciente que recibe el medicamento es una variable aleatoria exponencialmente distribuida con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

donde x es el número de años que un paciente vive después de recibir el medicamento.

a) Una investigación indica que el tiempo esperado de supervivencia para un paciente que recibe el medicamento es de 5 años. Con base en esta información, ¿cuál es λ?

b) Usando el valor de λ determinado en el inciso *a*), ¿cuál es la probabilidad de que un paciente seleccionado al azar viva por lo menos 2 años?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente seleccionado al azar viva más de 7 años?

22. **PSICOLOGÍA EXPERIMENTAL** Suponga que el tiempo que tarda una rata de laboratorio en recorrer cierto laberinto es medido por una variable aleatoria X que está distribuida con función de densidad de probabilidad de la forma

$$f(x) = \begin{cases} axe^{-bx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

donde x es el número de minutos que una rata seleccionada al azar tarda en el laberinto y a y b son números positivos. Experimentos indican que, en promedio, una rata tardará 6 minutos en recorrer el laberinto.

a) Use la información dada para hallar a y b. [*Sugerencia:* ¿Por qué debe ser cierto que $a/b^2 = 1$ y $2a/b^3 = 6$?]

b) ¿Es más probable que la rata pase menos de 5 minutos en el laberinto o más de 7 minutos?

23. **VIROLOGÍA** Un instituto de investigación para la salud pública ha identificado un nuevo virus mortal. Para estudiar el virus, investigadores consideran un modelo en el que se supone que la esperanza de vida de un individuo, escogido de una muestra de población del virus, es una variable aleatoria X distribuida con función de densidad de la forma

$$f(x) = \begin{cases} Ae^{-bx} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

donde x es el tiempo (en semanas) y A y b son constantes positivas. Experimentos sugieren que después de una semana, 90% de la población aún está viva.

a) Use esta información para hallar A y b.

b) ¿Qué porcentaje de la población de la muestra vive durante 10 semanas?

c) ¿Cuánto tiempo tarda en morir 90% de la población de la muestra?

d) ¿Cuál es el tiempo de vida esperada de un virus seleccionado al azar de la población?

e) ¿Cuál es la varianza de X? Interprete este resultado.

24. **APRENDIZAJE** Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo que un estudiante de cálculo, seleccionado al azar en mi universidad, pasa estudiando el tema a diario. Suponga que X está distribuida con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5}{324}\sqrt{x}\,(9 - x) & \text{para } 0 \leq x \leq 9 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

donde x es el número de horas que el alumno estudia a diario.

a) Dibuje la gráfica de la función de densidad $f(x)$.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante de cálculo, seleccionado al azar, estudie al menos 2 horas por día?

c) En promedio, ¿cuánto debo esperar que mis alumnos estudien cálculo al día?

25. **ECOLOGÍA TROPICAL** Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo (en horas) entre visitas sucesivas de colibríes para alimentarse en las flores de una planta tropical particular. Suponga que X está distribuida exponencialmente con parámetro $\lambda = 0.5$. Si un colibrí acaba de dejar una flor que usted está observando, ¿cuánto tiempo espera usted aguardar para que llegue el siguiente colibrí?

26. ¿Cuál es la varianza de la variable aleatoria X del problema 25?

www.FreeLibros.com

27. Demuestre que una variable aleatoria X uniformemente distribuida con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

tiene valor esperado

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

28. Demuestre que la variable aleatoria uniformemente distribuida del problema 27 tiene varianza

$$\text{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

29. Demuestre que una variable aleatoria exponencialmente distribuida X con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

tiene valor esperado $E(X) = 1/\lambda$.

30. Demuestre que la variable aleatoria exponencialmente distribuida del problema 29 tiene una varianza $\text{Var}(X) = 1/\lambda^2$.

31. INTERNET Suponga que, durante las horas de la tarde, el tiempo entre accesos sucesivos a una popular página Web puede estar representado por una variable aleatoria X exponencialmente distribuida, cuyo valor esperado es $E(X) = 0.5$ segundos.

a) Use el resultado del problema 29 para hallar la función de densidad de probabilidad $f(x)$, para X.

b) Encuentre la probabilidad de que el tiempo entre accesos sucesivos a la página Web sea más de un segundo.

c) Encuentre la probabilidad de que el tiempo entre accesos sucesivos a la página Web sea entre $\frac{1}{4}$ de segundo y $\frac{1}{2}$ segundo.

32. TELECOMUNICACIONES Suponga que durante las horas hábiles, el tiempo entre llamadas inalámbricas sucesivas a una conmutador de red puede ser representado por una variable aleatoria X, exponencialmente distribuida, con valor esperado $E(X) = 0.01$ segundos.

a) Use el resultado del problema 29 para hallar la función de densidad de probabilidad para X.

b) Encuentre la probabilidad de que el tiempo entre la entrada de llamadas inalámbricas sucesivas al conmutador sea más de 0.05 segundos.

c) Encuentre la probabilidad de que el tiempo entre la entrada de llamadas inalámbricas sucesivas al conmutador sea entre 0.05 segundos y 0.08 segundos.

33. ATENCIÓN MÉDICA Suponga que las variables aleatorias X y Y miden el tiempo (en días) que un paciente está ingresado en el hospital después de una cirugía abdominal y una ortopédica, respectivamente. El lunes, el paciente de la cama 107A es sometido a una apendectomía de emergencia mientras que su compañero de cuarto, en la cama 107B es operado para repararle el cartílago roto de una rodilla. Suponga que la función de densidad de probabilidad conjunta para X y Y es

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{12} e^{-x/4} e^{-y/3} & \text{si } x \ge 0 \text{ y } y \ge 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

¿Cuánto tiempo espera estar en el hospital cada paciente?

34. ADMINISTRACIÓN DE TIEMPO Considere que la variable aleatoria X mide el tiempo (en minutos) que una persona pasa en la sala de espera del consultorio de un médico, y considere que Y mide el tiempo necesario para el examen físico completo (también en minutos). Suponga que la función de densidad de probabilidad conjunta para X y Y es

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{500} e^{-x/10} e^{-y/50} & \text{si } x \ge 0 \text{ y } y \ge 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

¿Cuánto tiempo espera usted pasar en la sala de espera? ¿Es esto más o menos que el tiempo que usted espera pasar en su examen físico?

35. ANÁLISIS DE COSTOS Un producto está formado por dos componentes, A y B, que se manufacturan por separado. Para estimar el costo de mano de obra para el proceso, el fabricante asigna una variable aleatoria X para medir el número de horas-trabajador necesario durante un turno de 8 horas, para producir cada unidad del componente A, así como otra variable aleatoria Y para medir el número de horas-trabajador necesario para producir cada unidad del componente B. Un análisis sugiere asignar, a X y Y, la función de densidad de probabilidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{5\,120}(x^2 + xy + 2y^2) \text{ para } 0 \le x \le 8, 0 \le y \le 8 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el número total de horas-trabajador necesario para producir ambos componentes sea menor a 8 horas?

www.FreeLibros.com

b) ¿Cuántas horas-trabajador debe esperar el fabricante que sean necesarias para producir una unidad del componente *A*? ¿Una unidad del componente *B*?

c) Suponga que los trabajadores asignados a producir el componente *A* reciben $20 por hora. ¿Cuál es el costo esperado de producir una unidad completa (combinada) del producto?

36. Recuerde, de la sección 10.2, que una variable aleatoria continua *X* tiene una distribución de Pareto si su función de densidad de probabilidad tiene la forma

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a\lambda^a}{x^{a+1}} & \text{si } x \geq \lambda \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

donde a y λ son números reales positivos.

a) Encuentre el valor esperado $E(X)$ para $a > 1$.

b) Encuentre la varianza $\text{Var}(X)$ para $a > 2$.

SECCIÓN 10.4 Distribuciones de probabilidad normal y de Poisson

En esta sección se introducen dos importantes familias de distribuciones de probabilidad, una continua y otra discreta. Se comienza analizando distribuciones normales, que son continuas y que son presumiblemente las más conocidas y más ampliamente usadas de todas las distribuciones de probabilidad. A continuación se examinan distribuciones de Poisson, las cuales son discretas y un poco más angostas en alcance que las distribuciones normales, pero son sumamente útiles para modelar ciertos fenómenos. Se considerarán problemas computacionales y aplicaciones prácticas donde aparecen estos dos tipos de distribución.

Distribuciones normales

Una **función de densidad normal** es de la forma

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

donde μ y σ son números reales, con $\sigma > 0$. Una variable aleatoria *X* con función de densidad de esta forma se llama **variable aleatoria normal** y se dice que sus valores están **normalmente distribuidos.** La gráfica de una función de densidad normal se llama **curva normal** o, menos formalmente, "curva campana", por su forma distintiva (véase figura 10.13).

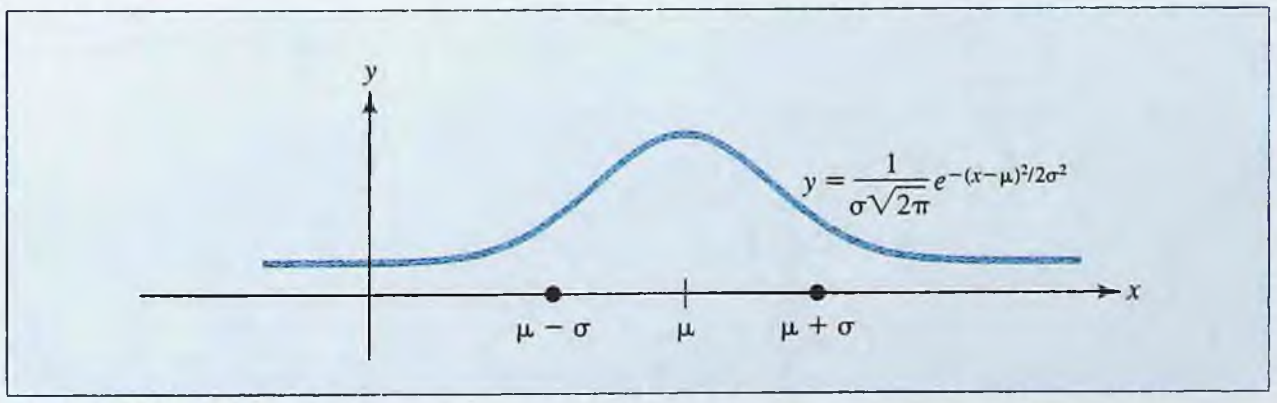


FIGURA 10.13 "Curva campana," o gráfica de una función de densidad normal.

Históricamente, la distribución normal fue introducida primero en 1733 por el matemático francés Abraham de Moivre, quien la utilizó para estudiar los resultados de ciertos juegos de azar. Siguieron otras aplicaciones. Por ejemplo, el científico belga Adolf Quetelet demostró que la estatura y medidas del pecho, tomadas a soldados franceses y escoceses estaban normalmente distribuidas, aproximadamente.

www.FreeLibros.com

De hecho, una razón fundamental de la importancia de la distribución normal es que muchas variables aleatorias de interés práctico se comportan como si sus distribuciones fueran normales o esencialmente normales. Ejemplos de magnitudes que resultan bien aproximadas por distribuciones normales incluyen al tiempo hasta la primera falla de un producto, la estatura de personas de una edad y género particulares, la ingestión de calorías de un oso gris, el número de ataques de tiburones en un período dado, la esperanza de vida de un organismo y la concentración de metales pesados en la sangre. Además, la distribución normal aparece con frecuencia en estudios psicológicos y educacionales. Los ejemplos incluyen variables como la clasificación de satisfacción en el trabajo de los empleados de una compañía, la capacidad de lectura de niños de una edad particular, el número de delitos de cierto tipo cometidos anualmente, así como el número de palabras que una persona puede memorizar durante un tiempo determinado. Por último, otras distribuciones importantes se pueden aproximar en términos de distribuciones normales. En realidad, un resultado clave en la teoría de probabilidades, llamado *teorema central de límite*, indica que la media muestral basada en un muestreo aleatorio de un gran número de observaciones independientes, tomadas de una distribución determinada (por ejemplo exponencial, geométrica) está aproximadamente normalmente distribuida.

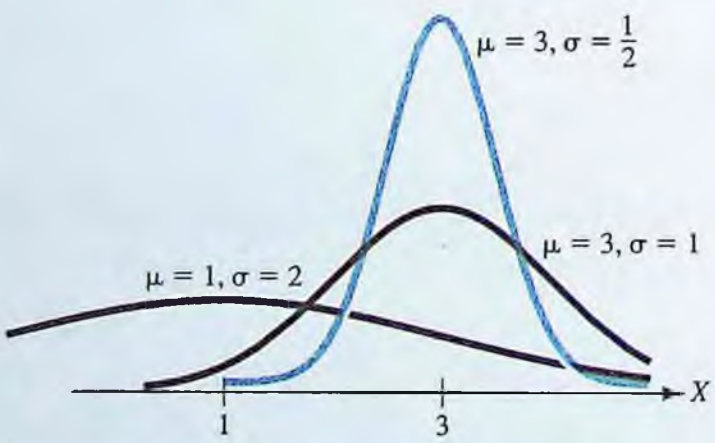
El siguiente objetivo es examinar algunas de las características y propiedades de la función de densidad normal. Primero, recuerde que cualquier función de densidad de probabilidad $f(x)$ debe satisfacer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$. Con el uso de los métodos especiales de sustitución estudiados en casi todos los textos de cálculo para ingeniería, se puede demostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx = \sigma\sqrt{2\pi}$$

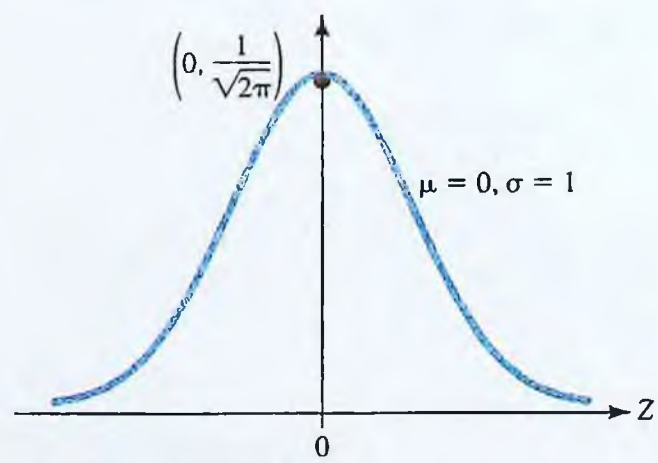
lo cual significa que

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx = 1$$

como se pide. Ya se ha mencionado la forma de campana de la gráfica de la función de densidad normal, pero la "campana" puede ser más plana o más picuda, dependiendo de los parámetros μ y σ. En la figura 10.14*a* se ilustran tres curvas normales diferentes. La gráfica de una función de densidad normal es simétrica alrededor de la recta vertical $x = \mu$, y con el uso de los métodos de derivación del capítulo 3 (véase el problema 60), se puede demostrar que la gráfica siempre tiene su punto más alto en $x = \mu$ y los puntos de inflexión en $x = \mu + \sigma$ y $x = \mu - \sigma$. La curva de densidad normal particular con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ se llama *curva normal estándar*, y su gráfica se ve en la figura 10.14*b*.



a) Tres curvas normales, con diferentes opciones de μ y σ



b) Curva normal estándar: $\mu = 0$ y $\sigma = 1$

FIGURA 10.14 Gráficas de varias funciones de densidad normal (curvas normales).

www.FreeLibros.com

Los parámetros μ y σ que aparecen en la función de densidad normal están estrechamente relacionados con el valor esperado, la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria normal asociada, como se resume en el siguiente recuadro.

Fórmulas para el valor esperado, varianza y desviación estándar de una variable aleatoria normal ■ Para una variable aleatoria normal X con función de densidad

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

se tiene

Valor esperado	$E(X) = \mu$
Varianza	$\text{Var}(X) = \sigma^2$
Desviación estándar	$\sqrt{\text{Var}(X)} = \sigma$

La mayor parte del área bajo una curva normal se encuentra relativamente cerca de la media μ. De hecho, se puede demostrar que cerca de 68.3% de los datos normalmente distribuidos están a una distancia no mayor de una desviación estándar de la media μ, y que casi todos los datos (99.7%) está una distancia no mayor de tres desviaciones estándar de μ. Estas observaciones son parte de la **regla empírica** resumida en el siguiente recuadro y que se muestra en la figura 10.15. El análisis del ejemplo 10.4.1 es típico de la forma en que puede ser usada la regla empírica para llegar rápidamente a conclusiones importantes acerca de datos normalmente distribuidos.

Regla empírica para el área bajo una curva normal
Para cualquier curva normal:

1. Casi 68.3% del área bajo la curva está entre $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$; es decir, una distancia no mayor de una desviación estándar de la media.
2. Casi 95.4% del área bajo la curva está entre $\mu - 2\sigma$ y $\mu + 2\sigma$; es decir, una distancia no mayor de dos desviaciones estándar de la media.
3. Casi 99.7% del área bajo la curva está entre $\mu - 3\sigma$ y $\mu + 3\sigma$; es decir, una distancia no mayor de tres desviaciones estándar de la media.

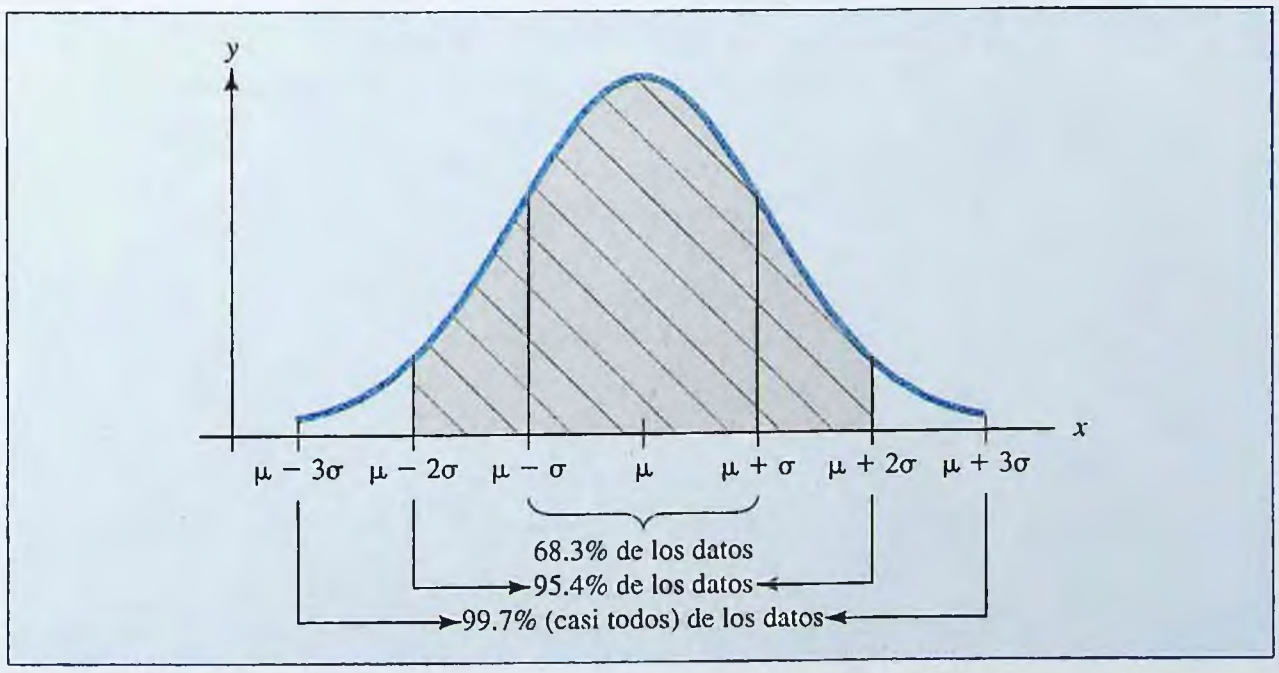


FIGURA 10.15 Regla empírica para datos normalmente distribuidos.

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 10.4.1

La estatura de mujeres entre 18 y 24 años de edad, en Estados Unidos, está normalmente distribuida con una media de 65.5 pulgadas y una desviación estándar de 2.5 pulgadas. Determine la distribución de estas estaturas usando la regla empírica.

Solución

Con el uso de la regla empírica, vemos que 68.3% de todas las mujeres en Estados Unidos tienen una estatura entre $65.5 - 2.5 = 63.0$ pulgadas y $65.5 + 2.5 = 68.0$ pulgadas, 95.4% de todas las mujeres en Estados Unidos tienen una estatura entre $65.5 - 2(2.5) = 60.5$ pulgadas y $65.5 + 2(2.5) = 70.5$ pulgadas, y 99.7% de todas las mujeres en Estados Unidos tienen una estatura entre $65.5 - 3(2.5) = 58.0$ pulgadas y $65.5 + 3(2.5) = 73.0$ pulgadas.

Cálculos donde se usa la distribución normal estándar

Es frecuente que cálculos donde aparecen distribuciones normales se efectúen con respecto a la variable normal estándar, es decir, la variable aleatoria normal con media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 1$. Es práctica común denotar por Z la variable normal estándar. Nótese que la función de densidad para Z es

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

La gráfica de Z es simétrica alrededor del eje y, con su máximo en $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$, como ya se vio en la figura 10.14.

Para calcular la probabilidad $P(a \leq Z \leq b)$ de que la variable aleatoria normal estándar Z se encuentre entre a y b, es necesario evaluar la integral

$$P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b S(x)\, dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$$

La mala noticia es que no hay antiderivada para la función de densidad normal estándar $S(x)$, de modo que no se puede calcular la probabilidad pedida directamente usando el teorema fundamental de cálculo. La buena noticia es que como el cálculo de estas probabilidades es tan importante, se puede hacer en casi todas las calculadoras científicas o con el uso de tablas como la de la tabla 10.1, página 749. Note que la tabla 10.1 da probabilidades de la forma $P(Z \leq b)$ o, lo que es equivalente, el área bajo la curva de densidad normal estándar a la izquierda de la recta vertical $x = b$. Estas probabilidades se pueden combinar entonces algebraicamente para obtener probabilidades de la forma $P(a \leq Z \leq b$, como se ilustra en el ejemplo 10.4.2.

EJEMPLO | 10.4.2

Suponga que la variable aleatoria Z tiene distribución normal estándar. Encuentre las siguientes probabilidades.

a) $P(Z \leq 1)$ **b)** $P(Z \geq 0.03)$ **c)** $P(Z \leq -1.87)$

d) $P(-1.87 \leq Z \leq 1)$ **e)** $P(Z \leq 4.7)$

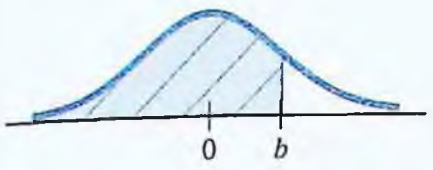
Solución

a) $P(Z \leq 1)$ es el área bajo la curva normal a la izquierda de $b = 1$ (figura 10.16*a*). Al buscar $b = 1$ en la tabla, se encuentra que

$$P(Z \leq 1) = 0.8413$$

www.FreeLibros.com

TABLA 10.1 Áreas bajo la curva normal estándar a la izquierda de los valores positivos $P(Z \leq b)$



b	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

FUENTE: *Introduction to the Theory of Statistics*, 3d ed., A. M. Mood, F. A. Graybill y D. C. Boes, Copyright © 1974 por McGraw-Hill,. Inc. usado con permiso de McGraw-Hill Book Company.

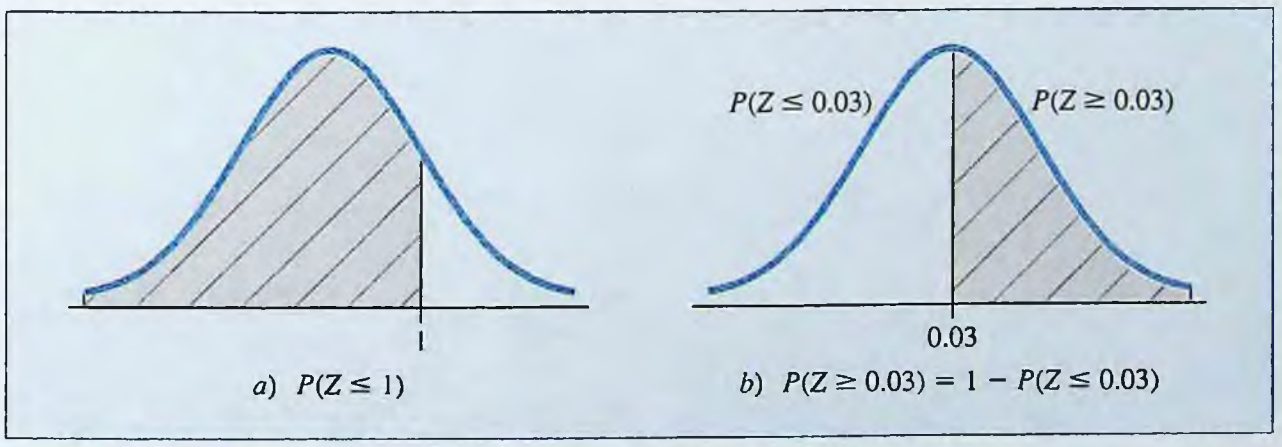


FIGURA 10.16 Probabilidad como área bajo la curva de densidad normal estándar.

www.FreeLibros.com

b) $P(Z \geq 0.03)$ es el área bajo la curva a la derecha de 0.03 (figura 10.16*b*). Como la tabla sólo da áreas a la *izquierda* de valores de Z, no se puede obtener esta área directamente de la tabla. Entonces, se usa el hecho de que

$$P(Z \geq 0.03) = 1 - P(Z \leq 0.03)$$

Esto es, el área a la derecha de 0.03 es 1 menos el área a la izquierda de 0.03. De la tabla se obtiene

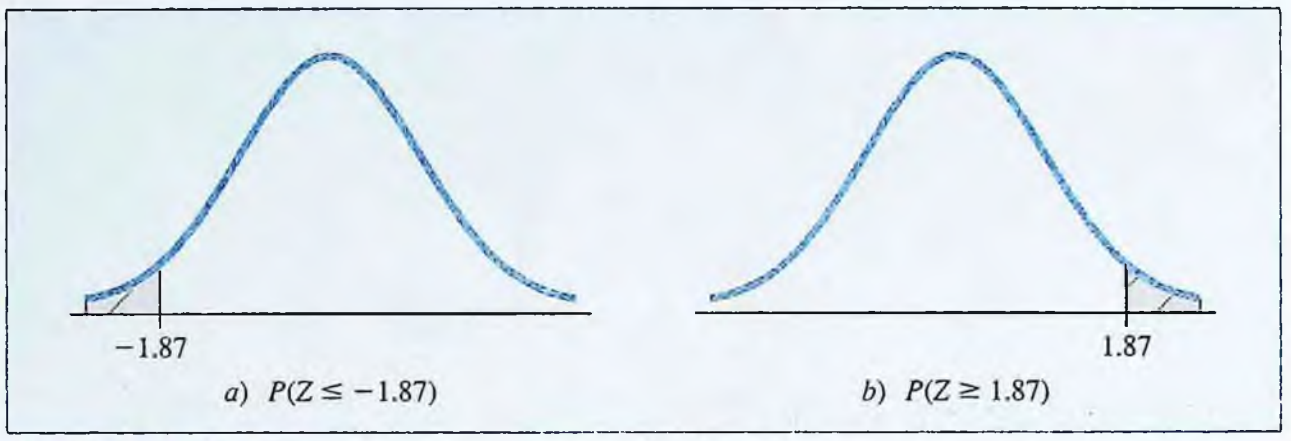
$$P(Z \leq 0.03) = 0.5120$$

y por tanto

$$P(Z \geq 0.03) = 1 - 0.5120 = 0.4880$$

c) $P(Z \leq -1.87)$ es el área bajo la curva a la izquierda de –1.87 (figura 10.17*a*). Como la curva es simétrica, esto es lo mismo que el área a la derecha de 1.87 (figura 10.17*b*). Esto es

$$P(Z \leq -1.87) = P(Z \geq 1.87)$$



a) $P(Z \leq -1.87)$ *b)* $P(Z \geq 1.87)$

FIGURA 10.17 $P(Z \leq -1.87) = P(Z \geq 1.87) = 1 - P(Z \leq 1.87)$.

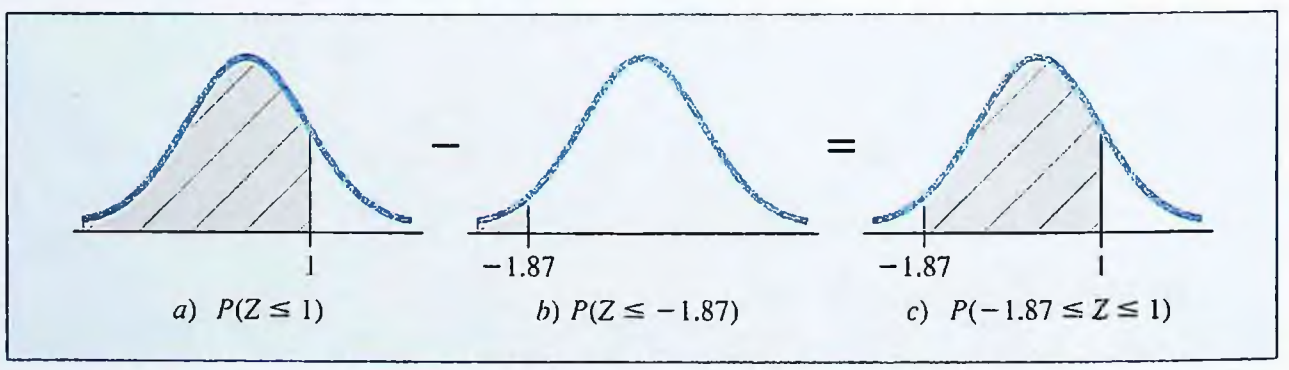
Procediendo como en el inciso *b*), se obtiene

$$P(Z \geq 1.87) = 1 - P(Z \leq 1.87) = 1 - 0.9693 = 0.0307$$

Por tanto, $P(Z \leq -1.87) = 0.0307$.

d) $P(-1.87 \leq Z \leq 1)$ es el área bajo la curva entre –1.87 y 1 (figura 10.18*c*). Esto se puede calcular restando el área a la izquierda de –1.87 (figura 10.18*b*) del área a la izquierda de 1 (figura 10.18*a*). Usando los resultados de los incisos *a*) y *c*), se encuentra que

$$\begin{aligned} P(-1.87 \leq Z \leq 1) &= P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1.87) \\ &= 0.8413 - 0.0307 = 0.8106 \end{aligned}$$



a) $P(Z \leq 1)$ *b)* $P(Z \leq -1.87)$ *c)* $P(-1.87 \leq Z \leq 1)$

FIGURA 10.18 $P(-1.87 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -1.87)$.

www.FreeLibros.com

e) $P(Z \leq 4.7)$ es el área bajo la curva a la izquierda de 4.7. Sin embargo, la tabla sólo cubre los valores $-3.49 \leq Z \leq 3.49$. De hecho, fuera del intervalo $-3 \leq Z \leq 3$, la curva está tan cerca del eje x que prácticamente no hay área bajo ella (figura 10.19). Como casi toda el área bajo la curva está a la izquierda de 4.7, se tiene, aproximadamente, $P(Z \leq 4.7) \approx 1$.

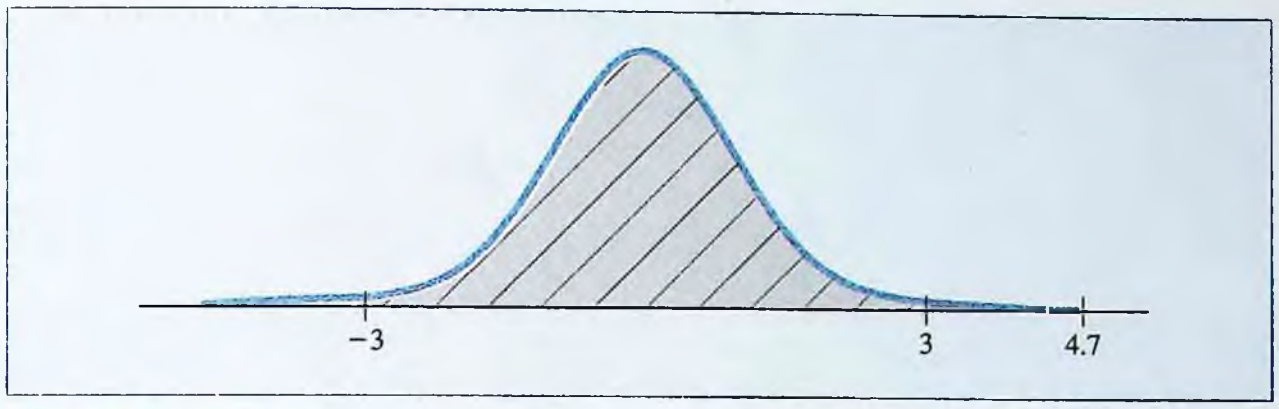


FIGURA 10.19 Prácticamente no hay área a la derecha de 4.7, por lo que $P(Z \leq 4.7) \approx 1$.

El ejemplo 10.4.3 ilustra la forma de usar la tabla para hallar valores de Z correspondientes a probabilidades dadas.

EJEMPLO | 10.4.3

a) Encuentre el valor de b tal que $P(Z \leq b) = 0.9$.
b) Encuentre el valor de b tal que $P(Z \geq b) = 0.01$.
c) Encuentre el valor de b tal que $P(Z \leq b) = 0.1$.
d) Encuentre el número positivo b tal que $P(-b \leq Z \leq b) = 0.95$.

Solución

a) Se busca el valor de b con la propiedad de que el área a la izquierda de b sea 0.9 (figura 10.20*a*). Buscando en las columnas de área de la tabla normal, no se encuentra una entrada igual a 0.9, de modo que se selecciona la entrada más cercana a ella, 0.8997, que corresponde a un valor de b de 1.28. Esto es, redondeado a 2 lugares decimales, $P(Z \leq 1.28) = 0.9$, y por tanto el valor requerido es (aproximadamente) $b = 1.28$.

b) Se busca el valor de b con la propiedad de que el área a su derecha sea 0.01 o, lo que es equivalente, el área a su izquierda sea 0.99 (figura 10.20*b*). Buscando en la tabla, se encuentra que 0.9901 es el área más cercana a 0.99, y por tanto se toma el valor correspondiente, $b = 2.33$.

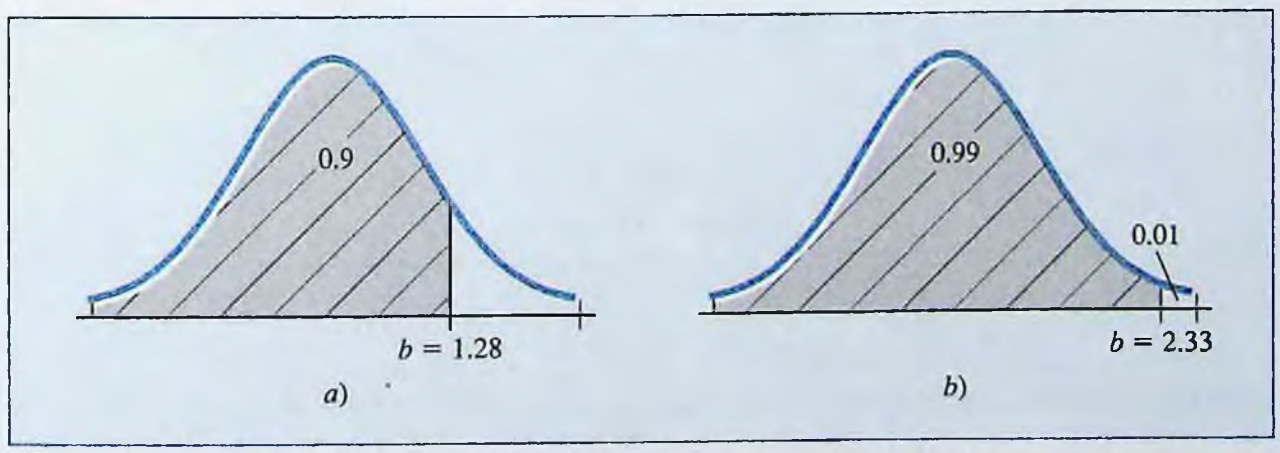


FIGURA 10.20 *a)* $P(Z \leq b) = 0.9$ y *b)* $P(Z \geq b) = 0.01$.

www.FreeLibros.com

c) Se busca el valor de b de modo que el área a la izquierda de b sea 0.1 (figura 10.21). Como el área bajo la curva a la izquierda de 0 es 0.5, se deduce que el valor deseado de b es menor a 0 y no aparece en la tabla. Si se procede indirectamente, primero se encuentra el valor de b con la propiedad de que el área a su derecha es 0.1. De modo equivalente, éste es también el valor de b para el cual el área a la izquierda es 0.9, y del inciso *a*), se sabe que este valor es 1.28. Por simetría, el valor de b que se busca es el negativo de este, es decir, el valor de b tal que $P(Z \leq b) = 0.1$ es $b = -1.28$.

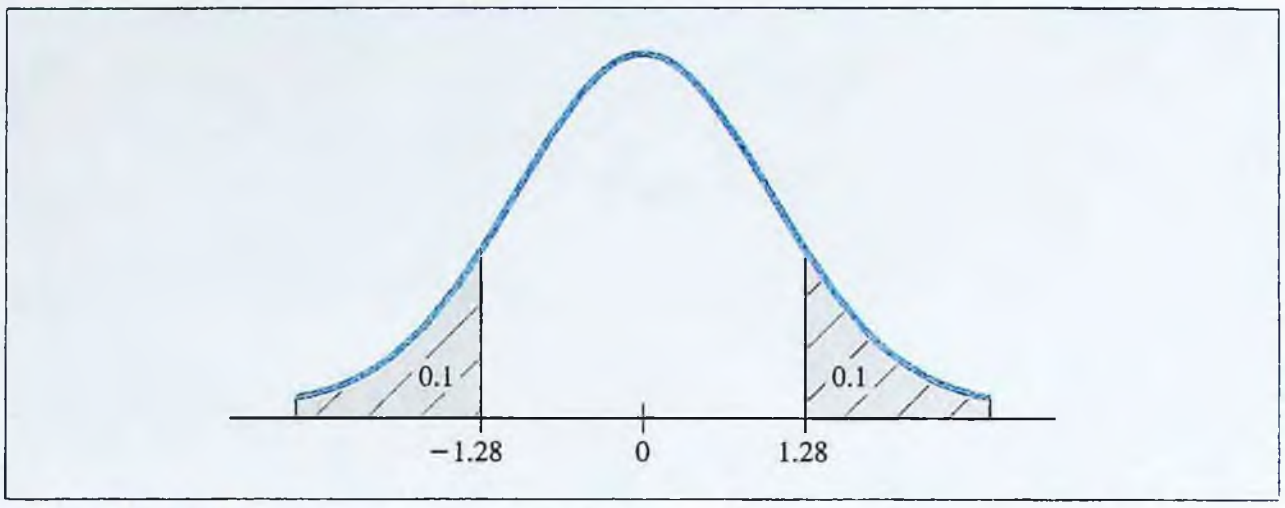


FIGURA 10.21 $P(Z \leq b) = 0.1$ cuando $b = -1.28$.

d) Se busca el valor b de Z de modo que el área a su izquierda sea

$$0.95 + \frac{1}{2}(1 - 0.95) = 0.95 + 0.025 = 0.975$$

(vea la figura 10.22). De la tabla 10.1, se encuentra que $b = 1.96$.

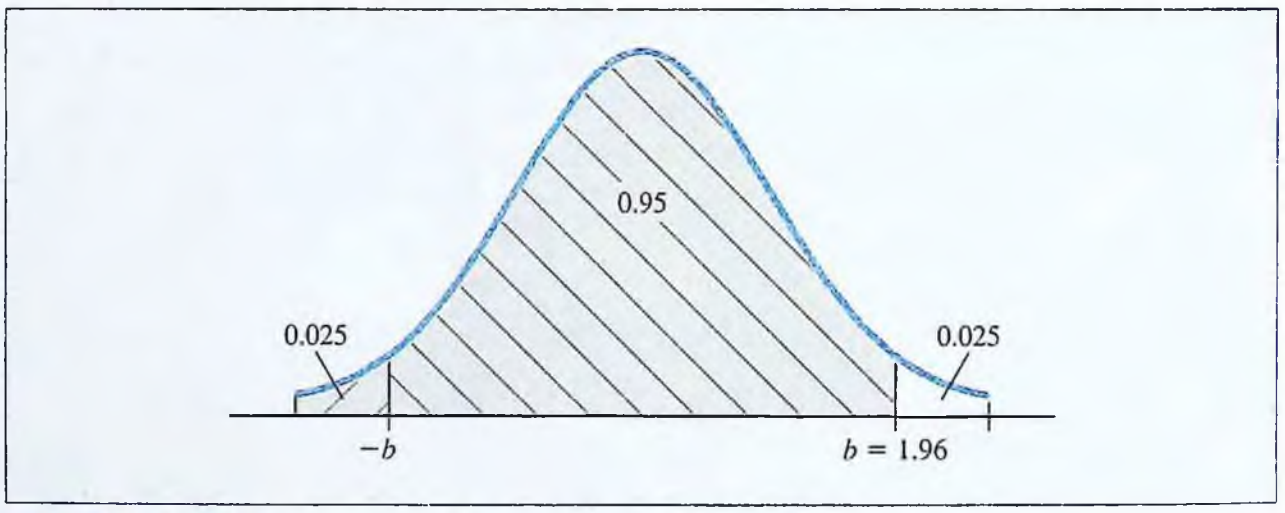


FIGURA 10.22 $P(-b \leq Z \leq b) = 0.95$ cuando $b = 1.96$.

Otras distribuciones normales

El estudiante no encontrará tablas de $P(X \leq b)$ para variables normales no estándar. Para calcular $P(a \leq X \leq b)$ se usa la tabla para la variable normal estándar junto con las transformaciones mostradas en el recuadro.

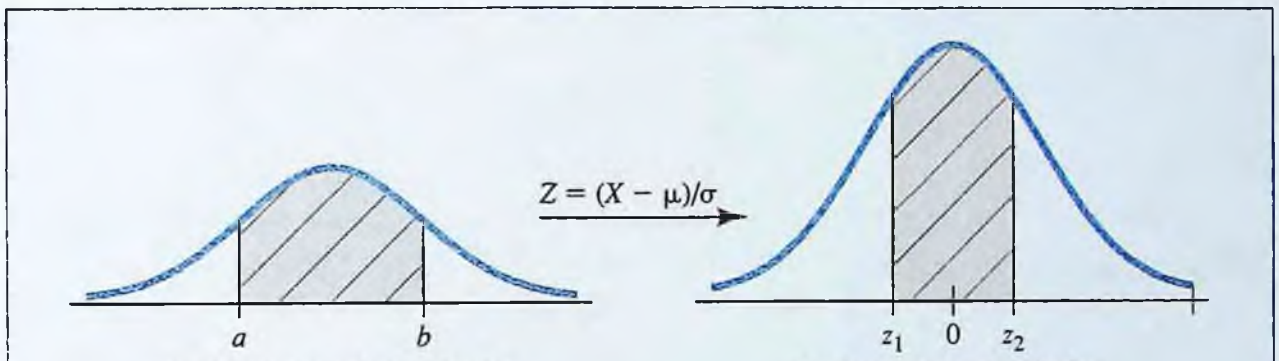
www.FreeLibros.com

Transformación de una distribución normal no estándar a forma estándar

Si la variable aleatoria X tiene una distribución normal con media μ y desviación estándar σ, entonces la variable transformada $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ tiene una distribución normal estándar. Además, se tiene

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

Geométricamente, este resultado dice que el área bajo la curva normal con media μ y desviación estándar σ entre a y b es igual al área bajo la curva normal estándar entre $z_1 = \dfrac{a - \mu}{\sigma}$ y $z_2 = \dfrac{b - \mu}{\sigma}$. Esto se ilustra en la figura 10.23.



a) Curva normal no estándar *b*) Curva normal estándar

FIGURA 10.23 El área bajo la curva normal no estándar entre a y b es igual al área bajo la curva normal estándar entre z_1 y z_2.

Para ver por qué se cumple esto, recuerde que

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\, dx$$

y transforme la integral de la derecha usando este cambio de variable:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$dz = \frac{1}{\sigma}\, dx$$

límites de integración

cuando $x = a$, entonces $z = (a - \mu)/\sigma$
cuando $x = b$, entonces $z = (b - \mu)/\sigma$

Sustituyendo, se encuentra que

$$\int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-[(x-\mu)^2/\sigma^2]/2}\, dx = \int_{(a-\mu)/\sigma}^{(b-\mu)/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz$$

$$= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right)$$

El uso de esta transformación se ilustra en el ejemplo 10.4.4.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Algunas calculadoras graficadoras tienen capacidad para mostrar soluciones a problemas de probabilidad normal por medio de sombreado de gráficas. En los modelos TI-83 y TI-84, esta posibilidad se puede hallar en la tecla **DISTR**, en el menú **DRAW**, **1:ShadeNorm**(límite inferior, límite superior, μ, σ). Use esa función para reproducir los cálculos del ejemplo 10.4.4.

EJEMPLO | 10.4.4N

Suponga que X tiene una distribución normal con $\mu = 20$ y $\sigma = 4$. Encuentre las siguientes probabilidades:

a) $P(X \leq 26)$ **b)** $P(X \geq 18)$ **c)** $P(15 \leq X \leq 21)$

Solución

En cada caso, se aplica la fórmula $Z = (X - \mu)/\sigma$ y luego usamos los valores de la tabla 10.1.

a) $$P(X \leq 26) = P\left[Z \leq \frac{26 - 20}{4}\right] = P(Z \leq 1.5) = 0.9332$$

b) $$P(x \geq 18) = P\left[Z \geq \frac{18 - 20}{4}\right] = P(Z \geq -0.5) = 0.6915$$

c) $$P(15 \leq X \leq 21) = P\left[\frac{15 - 20}{4} \leq Z \leq \frac{21 - 20}{4}\right]$$
$$= P(-1.25 \leq Z \leq 0.25)$$
$$= 0.5987 - 0.1056 = 0.4931$$

Aplicaciones de la distribución normal

A continuación, se examinarán varias situaciones prácticas en las que se puede usar la distribución normal. El primer ejemplo se refiere a errores aleatorios hechos por dispositivos de medición.

EJEMPLO | 10.4.5

En una báscula particular, se hacen errores de medición que están normalmente distribuidos con $\mu = 0$ y $\sigma = 0.1$ onzas. Si se pesa un objeto sobre esta báscula, ¿cuál es la probabilidad de que el error de medición no sea mayor a 0.15 onzas?

Solución

Denote por X el error de medición que se hace cuando un objeto se pesa sobre la báscula. El objetivo es hallar $P(-0.15 \leq X \leq 0.15)$. Como $\mu = 0$ y $\sigma = 0.1$, se transforma a Z usando la fórmula $Z = \dfrac{X - 0}{0.1}$ y se encuentra que

$$P(-0.15 \leq X \leq 0.15) = P\left(\frac{-0.15 - 0}{0.1} \leq Z \leq \frac{0.15 - 0}{0.1}\right)$$
$$= P(-1.5 \leq Z \leq 1.5) = 0.8664$$

Es decir, hay 87% de probabilidad que el error en medición no sea mayor a 0.15 onzas.

EJEMPLO | 10.4.6

El número de piezas de pan que puede vender en un día cierto supermercado está normalmente distribuido con $\mu = 1\,000$ panes y $\sigma = 100$ panes. Si el mercado tiene en existencia 1 200 panes en un día determinado, ¿cuál es la probabilidad de que las piezas se vendan antes de terminar el día?

www.FreeLibros.com

Solución

Si X denota el número de piezas de pan que se pueden vender durante un día, entonces X está normalmente distribuida con $\mu = 1\,000$ y $\sigma = 100$. Se desea hallar $P(X \geq 1\,200)$. Transformando a Z y usando la tabla, se obtiene

$$P(X \geq 1\,200) = P\left(Z \geq \frac{1\,200 - 1\,000}{100}\right) = P(Z \geq 2) = 0.0228$$

Por tanto, hay alrededor de 2% de probabilidad de que en el mercado se agoten las piezas de pan antes de que acabe el día.

EJEMPLO | 10.4.7

Las longitudes de truchas en cierto lago están normalmente distribuidas con una media de 7 pulgadas y una desviación estándar de 2 pulgadas. Si el departamento de caza y pesca quisiera que los pescadores se quedaran sólo con el 20% de las truchas más grandes, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo para los pescadores?

Solución

Denote por X la longitud de una trucha seleccionada al azar y por c el tamaño mínimo para un pescador. Como sólo el 20% son para pescadores, c debe satisfacer la ecuación $P(X \geq c) = 0.2$. Usando $\mu = 7$ y $\sigma = 2$, se transforma a Z y se obtiene

$$P\left(Z \geq \frac{c-7}{2}\right) = 0.2 \qquad \text{o} \qquad P\left(Z \leq \frac{c-7}{2}\right) = 0.8$$

De la tabla 10.1 se encuentra que

$$P(Z \leq 0.84) = 0.8$$

Por tanto,

$$\frac{c-7}{2} = 0.84 \qquad \text{o} \qquad c = 8.68$$

Se concluye que el departamento de caza y pesca debe fijar en 8.68 como el tamaño mínimo para los pescadores.

Distribuciones de Poisson

¡EXPLORE!

La distribución de Poisson también aparece en varios modelos de calculadoras graficadoras como función ya integrada. Adapte los programas de calculadora para histograma hallados en la sección ¡Explore! Actualización de este capítulo para producir un programa semejante a la distribución de probabilidad de Poisson.

A continuación se examinará la distribución de Poisson, la cual es una distribución discreta que lleva ese nombre en honor al matemático francés del siglo XIX, Siméon Denis Poisson. Aun cuando Poisson introdujo esta distribución en una obra teórica realizada en 1837, su primera aplicación práctica fue hecha en 1898 por Ladislaus Josephowitsch Bortkiewicz, quien la utilizó para estudiar los fallecimientos de soldados prusianos por patadas de caballos, un evento relativamente raro. Desde entonces, las distribuciones de Poisson han sido una importante herramienta para modelar otros eventos raros, por ejemplo el número de personas sobre las que han caído rayos durante un año, o el número de sustituciones que han ocurrido en una secuencia particular de aminoácidos en un periodo de un millón de años. En forma más general, las distribuciones de Poisson se utilizan para modelar cantidad de sucesos o eventos en tiempo o espacio, por ejemplo el número de clientes que llegan a una tienda durante una hora, o el número de errores tipográficos en una página de un libro particular, o la densidad de árboles con tronco de tamaño fijo en un gran bosque, o el número de colonias de bacteria en una caja de Petri.

Se dice que una variable aleatoria discreta X tiene **distribución de Poisson** con parámetro λ ($\lambda > 0$) si X describe un experimento cuyos posibles resultados son los

www.FreeLibros.com

enteros no negativos $n = 0, 1, 2, \ldots$, y a cada entero no negativo n, al evento $(X = n)$ se asigna la probabilidad

$$P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Para verificar que esto satisface los requisitos de una asignación de probabilidad, se debe demostrar que $P(X = n) \geq 0$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ y que $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) = 1$. La condición $P(X = n) \geq 0$ para toda n está satisfecha porque $\lambda > 0$ y $e^{-\lambda} > 0$. Para demostrar que las asignaciones de probabilidad de la distribución suman 1, es necesario usar la expansión de la serie de Taylor $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ desarrollada en la sección 9.3. Nótese que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots \\
&= \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} + \cdots \\
&= e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots\right) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda} \quad \textit{porque } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} \textit{ es la serie de Taylor para } e^{\lambda} \\
&= 1
\end{aligned}$$

El uso de la distribución de Poisson se ilustra en los ejemplos 10.4.8 y 10.4.9.

EJEMPLO | 10.4.8

Un botánico, que investiga los patrones de crecimiento de una clase particular de orquídea, modela el número de plantas de orquídea por metro cuadrado como variable aleatoria X con una distribución de Poisson. Si la distribución tiene parámetro $\lambda = 0.2$, encuentre

a) La probabilidad de que no haya plantas de orquídeas dentro de un metro cuadrado seleccionado al azar.

b) La probabilidad de que no haya más de una planta de orquídea dentro de un metro cuadrado seleccionado al azar.

Solución

a) La probabilidad de que no haya plantas de orquídea es

$$P(X = 0) = \frac{(0.2)^0}{0!} e^{-0.2} = e^{-0.2} \qquad \textit{porque } (0.2)^0 = 1 \text{ y } 0! = 1$$
$$\approx 0.82$$

b) El evento de que no haya más de una planta de orquídea es $(X \leq 1)$, y la probabilidad de este evento es

$$\begin{aligned}
P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) &= \frac{(0.2)^0}{0!} e^{-0.2} + \frac{(0.2)^1}{1!} e^{-0.2} \\
&= (1 + 0.2)e^{-0.2} \\
&\approx 0.98
\end{aligned}$$

Por tanto, no es probable que el metro cuadrado seleccionado al azar contenga muchas orquídeas.

www.FreeLibros.com

EJEMPLO 10.4.9

El número de accidentes mensuales en una industria particular puede ser modelado como una variable aleatoria X con una distribución de Poisson, si los accidentes industriales tienden a ocurrir independientemente entre sí, a un ritmo casi constante. Suponga que estudios realizados indican que hay sólo un 10% de probabilidad de que no ocurran accidentes durante un mes escogido al azar.

a) Determine el parámetro λ para la distribución.

b) Encuentre la probabilidad de que ocurran al menos tres accidentes durante un mes seleccionado al azar.

Solución

a) Como hay un 10% de probabilidad de que no ocurran accidentes, se tiene

$$P(X = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = 0.10$$

$$e^{-\lambda} = 0.10 \qquad \textit{porque } \lambda^0 = 1 \textit{ y } 0! = 1$$

Tomando logaritmos en ambos lados de esta ecuación, se obtiene

$$\ln(e^{-\lambda}) = \ln(0.10)$$
$$-\lambda = -2.3$$

de modo que el parámetro es $\lambda = 2.3$.

b) El evento de que ocurran al menos tres accidentes industriales es $(X \geq 3)$, y la probabilidad de este evento satisface la ecuación

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3)$$

donde $(X < 3)$ es el evento complementario de que ocurran menos de tres acci dentes. Se calcula que

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$
$$= \frac{(2.3)^0}{0!} e^{-2.3} + \frac{(2.3)^1}{1!} e^{-2.3} + \frac{(2.3)^2}{2!} e^{-2.3}$$
$$\approx 0.6$$

de modo que

$$P(X \geq 3) \approx 1 - 0.6 = 0.4$$

Por tanto, hay aproximadamente un 40% de probabilidad de que ocurran al menos tres accidentes.

Si la variable aleatoria X tiene distribución de Poisson con parámetro λ, entonces el valor esperado de X *es* $E(X) = \lambda$. Para demostrar que esto es cierto, nótese que

$$E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, P(X = n) \qquad \textit{definición de valor esperado}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \right) \qquad \textit{definición de la distribución de Poisson}$$

$$= 0 \cdot \left(\frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} \right) + 1 \cdot \left(\frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} \right) + 2 \cdot \left(\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} \right) + \cdots + n \cdot \left(\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \right) + \cdots$$

www.FreeLibros.com

$$= \lambda e^{-\lambda} + \frac{\lambda^2}{1} e^{-\lambda} + \frac{\lambda^3}{2!} e^{-\lambda} + \cdots \qquad \textit{porque } \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left[1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots \right] \qquad \textit{factorice } \lambda e^{-\lambda} \textit{ de cada término}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \qquad \textit{porque } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \textit{ es la serie de Taylor para } e^{\lambda}$$

$$= \lambda \qquad \textit{porque } e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Se deja como ejercicio (problema 58) la demostración de que la varianza de X también es igual a λ. Para resumir:

Valor esperado, varianza y desviación estándar de una variable aleatoria con una distribución de Poisson ▪ Si la variable aleatoria X tiene una distribución de Poisson con parámetro λ, entonces

$$P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

y

Valor esperado	$E(X) = \lambda$
Varianza	$\text{Var}(X) = \lambda$
Desviación estándar	$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\lambda}$

EJEMPLO | 10.4.10

Suponga que el número de llamadas de vendedores por teléfono que usted recibe, durante la hora de tomar comida, en un día seleccionado al azar, sigue una distribución de Poisson y que, en promedio, usted espera recibir tres de esas llamadas.

a) ¿Cuál es el parámetro λ de la distribución?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que usted reciba exactamente tres llamadas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que usted reciba más de tres llamadas?

Solución

a) Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de llamadas que usted recibe durante una hora de comida seleccionada al azar. Interprete la afirmación de que "en promedio, usted espera recibir tres llamadas" lo que quiere decir que el valor esperado de X es 3. Por tanto, $E(X) = \lambda = 3$.

b) La probabilidad de que usted reciba exactamente tres llamadas es

$$P(X = 3) = \frac{3^3 e^{-3}}{3!} \approx 0.22$$

c) El evento de que usted reciba más de tres llamadas es $(X > 3)$, y la probabilidad de este evento satisface que

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3)$$

www.FreeLibros.com

donde $(X \leq 3)$ es el evento complementario de que no se reciben más de tres llamadas. Se calcula que

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \frac{3^0 e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 e^{-3}}{1!} + \frac{3^2 e^{-3}}{2!} + \frac{3^3 e^{-3}}{3!} \\ &\approx 0.647 \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} P(X > 3) &= 1 - P(X \leq 3) \approx 1 - 0.647 \\ &= 0.353 \end{aligned}$$

Por tanto, es aproximadamente 35% probable que usted reciba más de tres llamadas de vendedores por teléfono durante una hora de comida escogida al azar.

PROBLEMAS | 10.4

En los problemas 1 al 4, está dada la función de densidad f(x) *de una variable aleatoria* X. *En cada caso, encuentre el valor esperado* E(X), *la varianza Var*(X), *y la desviación estándar* σ.

1. $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/8}$

2. $f(x) = \dfrac{1}{7\sqrt{2\pi}} e^{-(x-3)^2/98}$

3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-(x+1)^2/6}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x+6)^2/2}$

En los problemas 5 al 10 encuentre la probabilidad indicada suponiendo que la variable aleatoria Z *tiene una distribución normal estándar.*

5. $P(Z \leq 1.24)$

6. $P(Z \leq -1.20)$

7. $P(Z \leq 4.26)$

8. $P(Z \geq 0.19)$

9. $P(-1 \leq Z \leq 1)$

10. $P(-1.20 \leq Z \leq 4.26)$

En los problemas 11 al 14 encuentre el valor apropiado de b *para la probabilidad dada, suponiendo que la variable aleatoria* Z *tiene una distribución normal estándar.*

11. $P(Z \leq b) = 0.8413$

12. $P(Z \geq b) = 0.2266$

13. $P(Z \leq b) = 0.8643$

14. $P(-b \leq Z \leq b) = 0.9544$

15. Suponga que X tiene una distribución normal con $\mu = 60$ y $\sigma = 4$. Encuentre las siguientes probabilidades:

a) $P(X \geq 68)$
b) $P(X \geq 60)$
c) $P(56 \leq X \leq 64)$
d) $P(X \leq 40)$

16. Suponga que X tiene una distribución normal con $\mu = 35$ y $\sigma = 3$. Encuentre las siguientes probabilidades:

a) $P(X \geq 38)$ *b*) $P(X \geq 35)$
c) $P(32 \leq X \leq 38)$ *d*) $P(X \leq 20)$

17. Suponga que X tiene una distribución normal con $\mu = 4$ y $\sigma = 0.5$. Para cada una de las siguientes probabilidades, encuentre el valor apropiado de x:

a) $P(X \geq x) = 0.0228$
b) $P(X \leq x) = 0.1587$

18. Suponga que X tiene una distribución normal con $\mu = 5$ y $\sigma = 0.6$. Para cada una de las siguientes probabilidades, encuentre el valor apropiado de x:

a) $P(5 - x \leq X \leq 5 + x) = 0.6826$
b) $P(X \leq x) = 0.6$

www.FreeLibros.com

19. Una variable aleatoria X tiene una distribución normal con $\mu = 15$ y $\sigma = 4$. Usando la regla empírica, encuentre:
a) $P(11 \leq X \leq 19)$
b) $P(7 \leq X \leq 23)$

20. Una variable aleatoria X tiene distribución normal con $\mu = 18$ y $\sigma = 3$. Usando la regla empírica, encuentre:
a) $P(15 < X < 21)$
b) $P(9 \leq X \leq 27)$

21. Suponga que X es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = 3$. Dé la fórmula exacta y el valor a tres lugares decimales para estas probabilidades.
a) $P(X = 1)$ *b*) $P(X = 3)$
c) $P(X = 4)$ *d*) $P(X = 8)$

22. Suponga que X es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\lambda = 3/2$. Dé la fórmula exacta y el valor a tres lugares decimales para estas probabilidades.
a) $P(X = 0)$ *b*) $P(X = 1)$
c) $P(X = 3)$ *d*) $P(X = 5)$

23. Dibuje el histograma para la variable aleatoria de Poisson con $\lambda = 2$. Muestre 5 rectángulos.

24. Dibuje el histograma para la variable aleatoria de Poisson con $\lambda = 1/2$. Muestre 5 rectángulos.

25. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Explique su respuesta.
a) Si X tiene una distribución normal, entonces
$$P(X \geq 2.1) = P(X \leq -2.1)$$
b) Si Z tiene una distribución normal estándar, entonces
$$P(Z \geq 2.1) = P(Z \leq -2.1)$$

26. Decida si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Explique su respuesta.
a) Si X tiene una distribución normal con $\mu = 8$, entonces
$$P(X \geq 8.21) = P(X \leq 7.79)$$
b) Si X tiene una distribución normal, entonces la probabilidad de que su valor estará a no más de 1.5 desviaciones estándar de la media es alrededor de 0.87.

27. MEDICINA VETERINARIA Los pesos de los perros lebreles adultos están normalmente distribuidos con $\mu = 50$ y desviación estándar de $\sigma = 5$ libras. Use la regla empírica para describir esta distribución de pesos.

28. PRUEBAS ACADÉMICAS Las calificaciones de cierto examen están normalmente distribuidas con $\mu = 78$ y desviación estándar de $\sigma = 7$. Use la regla empírica para describir la distribución de estas calificaciones.

29. COMPENSACIÓN A EMPLEADOS Los ingresos de los trabajadores de la industria en cierta región están normalmente distribuidos con una media de \$42 500 y una desviación estándar de \$3 000. Encuentre la probabilidad de que un trabajador seleccionado al azar tenga un ingreso entre \$41 000 y \$44 000.

30. AMINISTRACIÓN DE UN PRODUCTO Una compañía dedicada a la venta de carnes produce salchichas de longitudes normalmente distribuidas, con una longitud media de 4 pulgadas y desviación estándar de 0.2 pulgadas. Encuentre la fracción de salchichas que miden menos de 3.5 pulgadas de largo.

31. CONTROL DE CALIDAD Cierta compañía produce frascos de vidrio. En promedio, los frascos son de 1 cuarto de galón pero hay alguna variación entre ellos. Suponga que los volúmenes están normalmente distribuidos con desviación estándar de $\sigma = 0.01$ de cuarto de galón.
a) Encuentre la probabilidad de que un frasco escogido al azar tenga capacidad entre 0.98 y 1.02 cuartos de galón.
b) Encuentre la fracción de frascos que tienen capacidad menor a 0.97 de cuarto de galón.

32. CONTROL DE CALIDAD La resistencia a la ruptura de cierto tipo de cuerda está normalmente distribuida. Si, en promedio, la cuerda tiene una resistencia a la ruptura de 1 200 libras con desviación estándar de 100 libras, encuentre la probabilidad de que una cuerda seleccionada al azar se rompa bajo un esfuerzo violento de menos de 1 000 libras.

33. AGRICULTURA Cierta granja productora de zanahorias es famosa por cultivar zanahorias de longitud casi idéntica. Si la longitud está normalmente distribuida con media de 5 pulgadas, ¿cuál debe ser la desviación estándar si 99% de las zanahorias miden entre 4.9 y 5.1 pulgadas de largo?

34. AGRICULTURA Suponga que el peso de una manzana Granny Smith de una huerta particular está normalmente distribuida, con un peso de 10 onzas y desviación estándar de 1 onza.
a) Encuentre la probabilidad de que una manzana Granny Smith de esta huerta pese al menos 9 onzas.
b) Encuentre la probabilidad de que una manzana Granny Smith de esta huerta pese entre 8 y 12 onzas.
c) Encuentre el peso tal que 99% de todas las manzanas Granny Smith de esta huerta tengan más de este peso.

35. PRUEBA ACADÉMICA Suponga que a todos los alumnos de cuarto grado de cierta escuela son enseñados a leer por el mismo método y que, al final del año, son examinados para conocer su rapidez de lectura. Suponga que la rapidez de lectura está normalmente distribuida y que la rapidez promedio de lectura es 150 palabras por minuto con desviación estándar de 25 palabras por minuto; encuentre el porcentaje de estudiantes que leen más de 180 palabras por minuto.

www.FreeLibros.com

36. PRUEBA ACADÉMICA Las calificaciones en un examen de psicología están normalmente distribuidas con una media de 75 y una desviación estándar de 10.

a) Si para pasar se necesita una calificación de al menos 60, encuentre la fracción de estudiantes que pasan el examen.

b) Si el maestro desea pasar 70% de quienes toman el examen, ¿cuál debe ser la calificación mínima?

c) ¿Qué tan alta debe ser la calificación de alguien para estar en la cúspide de 10%?

37. PATRONES SOCIALES Cierto club está celebrando una reunión. Hay 1 000 socios que asistirán, pero sólo hay 200 asientos. Se decide que los socios de mayor edad tengan asientos. Suponga que la edad de los socios está normalmente distribuida. Si el promedio de edad de los socios es de 40 con una desviación estándar de 5, encuentre la edad de la persona más joven que alcanzará asiento.

38. MEDICINA VETERINARIA Los pesos de gatitos domésticos sanos de 10 semanas de nacidos siguen una distribución normal con un peso medio de 24.5 onzas y desviación estándar de 5.25 onzas. Encuentre los intervalos simétricos alrededor de la media de 24.5 onzas que incluya los pesos de 68.3%, 95.4% y 99.7% de los gatitos domésticos de 10 semanas, respectivamente.

39. MEDICINA VETERINARIA Utilice la información del problema 38 para hallar

a) El porcentaje de gatitos domésticos sanos de 10 semanas de nacidos que pesan más de 32 onzas.

b) El peso que es excedido por exactamente 90% de los gatitos domésticos de 10 semanas de nacidos.

40. MEDICINA PEDIÁTRICA El nivel de colesterol en niños sigue una distribución normal con un nivel medio de 175 mg/dL y una desviación estándar de 35 mg/dL. Encuentre los intervalos simétricos alrededor de la media de 175 mg/dL que incluya los niveles de colesterol de 68.3%, 95.4% y 99.7% respectivamente de todos los niños.

41. MEDICINA PEDIÁTRICA Usando la información del problema 40, encuentre

a) El porcentaje de niños con nivel de colesterol arriba de 225 mg/dL.

b) El nivel de colesterol excedido por 98% de los niños.

42. MANEJO DE DESECHOS Suponga que la cantidad de basura que desecha cada mes una familia en Estados Unidos sigue una distribución normal con un promedio de 225 libras y una desviación estándar de 19 libras.

a) Encuentre el porcentaje de familias que desecha más de 250 libras de basura al mes.

b) Encuentre el porcentaje de familias que desecha menos de 100 libras de basura al mes.

c) Encuentre el porcentaje de familias que desecha entre 250 y 300 libras de basura al mes.

d) Encuentre el peso de basura desechada al mes por las familias que producen el 5% más alto de basura.

e) Encuentre el peso de basura desechada al mes por las familias que producen el mínimo 10% de basura.

43. MEDICINA El periodo de gestación en seres humanos sigue aproximadamente una distribución normal con una media de 266 días y una desviación estándar de 16 días. Encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes.

a) Un periodo de gestación mayor a 290 días.

b) Un periodo de gestación menor a 260 días.

c) Un periodo de gestación entre 260 y 280 días.

44. MEDICINA Suponga que el periodo de gestación en seres humanos sigue una distribución normal con una media de 266 días y una desviación estándar de 16 días. Encuentre el valor de A en cada uno de los casos siguientes:

a) La probabilidad es de 0.33 de que un periodo de gestación sea menor a A días.

b) La probabilidad es de 0.74 de que un periodo de gestación sea menor a A días.

c) La probabilidad es de 0.5 de que un periodo de gestación sea de entre $266 - A$ y $266 + A$ días.

45. MANUFACTURA Suponga que el peso que una planta procesadora pone en cada lata de chícharos está normalmente distribuido, con una media de 10 onzas y una desviación estándar de 0.05 onzas. El departamento de control de calidad de la fábrica ha especificado que una lata puede contener al menos 9.9 onzas, para que los consumidores no se sientan engañados, pero no más de 10.15 onzas para asegurarse de que la lata no está llena de más. ¿Cuál es la probabilidad de que una lata seleccionada al azar de la línea de producción cumpla estas especificaciones?

46. MANUFACTURA Cuando se construye cierto tipo de máquina, se inserta una varilla metálica en un agujero redondo de 6.2 centímetros. Si el diámetro de la varilla es mayor a 6.2 centímetros, la varilla no puede usarse. Encuentre el porcentaje de varillas que no pueden usarse en el ensamble de la máquina, si el diámetro de estas varillas sigue una distribución normal con una media de 6.05 centímetros y una desviación estándar de 0.1 centímetros.

www.FreeLibros.com

47. PRONÓSTICO DEL CLIMA Hace mucho frío en Duluth, Minnesota, durante el invierno. Suponga que en enero, la temperatura diaria mínima en Duluth tiene una distribución normal con una media de –1.6°F y una desviación estándar de 8°F.

a) Encuentre la probabilidad de que durante un día en enero, la temperatura diaria mínima en Duluth se encuentre entre 0° y 10°. ¿Cuál es la probabilidad de que la temperatura diaria mínima esté entre –5° y 5°?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que durante un día en enero, la temperatura diaria mínima en Duluth sea mayor a 5°?

c) Encuentre la probabilidad de que durante un día en enero, la temperatura diaria mínima en Duluth sea menor a 5°.

48. ENCUESTAS POLÍTICAS Un encuestador político anuncia que el senador Able lleva la delantera a su oponente, el señor Baker, por 51.2% a 48.8%, donde el error en los resultados de la encuesta está normalmente distribuido con una media de 0 puntos porcentuales y una desviación estándar de 3 puntos porcentuales.

a) Encuentre la probabilidad de que el señor Baker esté en realidad a la cabeza. [*Sugerencia:* ¿Qué tan grande debe ser el error en la parte del senador Able para que cambie la ventaja? Suponga que no hay abstención de votos.]

b) Encuentre la probabilidad de que la ventaja del senador Able sea en realidad al menos 3 puntos porcentuales en lugar de los indicados 2.4.

c) Investigue procedimientos de encuestas y escriba un párrafo sobre si usted piensa que las encuestas políticas dan información útil y confiable.

49. CONTROL DE CALIDAD Un fabricante necesita arandelas que midan entre 0.18 y 0.22 de pulgada de grueso. Cualquier otro grosor hace que no se pueda usar la arandela. El taller de máquinas A vende arandelas en $1.00 el millar, y los grosores de sus arandelas están modelados como una variable aleatoria normal con $\mu = 0.2$ de pulgada y $\sigma = 0.010$ de pulgada. El taller de máquinas B vende arandelas en $0.90 el millar, y los grosores de sus arandelas también están modelados como una variable aleatoria normal, pero con $\mu = 0.2$ de pulgada y $\sigma = 0.011$ de pulgada. Usando el precio por arandelas útil como criterio, ¿cuál taller ofrece al fabricante la mejor opción?

50. CONTROL DE CALIDAD Suponga, en el problema 49, que el taller de máquinas C desea competir por el contrato de arandelas. Su modelo de control de calidad está basado en la suposición de que el grosor de sus arandelas está normalmente distribuido con media $\mu = 0.195$ de pulgada y desviación estándar $\sigma = 0.009$ de pulgada. ¿Cuál es el precio máximo p que pueden cobrar por millar de arandelas, para que el precio por arandela útil sea mejor que las ofertas de la competencia, los talleres de máquinas A y B?

51. PRUEBA DE MEDICAMENTO El tiempo de recuperación de los pacientes con erupción cutánea Goleta está normalmente distribuido con una media de 11 días y desviación estándar de 2 días.

a) Encuentre la probabilidad de que un paciente tarde entre 10 y 18 días en recuperarse.

b) Acme Drugs dice que su tratamiento de erupción cutánea Goleta acelera la recuperación. Un paciente toma el medicamento Acme y se recupera en 9 días. ¿Está usted impresionado? [*Sugerencia:* ¿Cuál es la probabilidad de que el paciente se hubiera recuperado en 9 días o menos sin el medicamento?]

c) Otro paciente toma el medicamento Acme y se recupera en 6 días. Ahora, ¿está usted impresionado?

d) La prueba real del medicamento comprende la realización de experimentos cuidadosamente vigilados que usan un gran número de sujetos, con el objetivo de alcanzar resultados consistentes que sean estadísticamente "significativos." Investigue las políticas para certificación de medicinas requerido por la Food and Drug Administration (FDA) y escriba un párrafo sobre estas políticas. ¿Piensa usted que la FDA tiene argumentos para ser tan estricta?

52. ATAQUES DE TIBURONES Suponga que el número de ataques de tiburones en aguas costeras de Estados Unidos sigue una distribución de Poisson con una media de 0.3 ataques de tiburones por día.

a) ¿Cuál es el parámetro λ de la distribución?

b) Encuentre la probabilidad de que en un día seleccionado al azar, no haya ataques de tiburones.

c) Encuentre la probabilidad de que en un día seleccionado al azar, haya al menos dos ataques de tiburones.

53. BACTERIOLOGÍA Suponga que el número de bacteria *Escherichia coli* en una muestra de agua tomada de una playa en Nueva Jersey sigue una distribución de Poisson con una media de 6.1 bacterias por milímetro cúbico de agua.

a) ¿Cuál es el parámetro λ de la distribución?

b) Encuentre la probabilidad de que una muestra aleatoria de un milímetro cúbico de agua no contenga bacterias *E. Coli*.

www.FreeLibros.com

c) Encuentre la probabilidad de que una muestra aleatoria de 1 milímetro cúbico de agua contenga exactamente tres bacterias de *E. Coli*.

d) Encuentre la probabilidad de que una muestra aleatoria de 1 milímetro cúbico de agua contenga menos de seis bacterias de *E. Coli*.

54. CONTROL DE ENFERMEDADES Suponga que el número de personas que mueren de hepatitis A cada año sigue una distribución de Poisson, y que un promedio de tres personas por 100 000 muere de hepatitis A cada año en Estados Unidos.

a) Encuentre la probabilidad de que en una ciudad estadounidense de 100 000 habitantes no fallezca ninguna persona por hepatitis A durante un año seleccionado al azar.

b) Encuentre la probabilidad de que en una ciudad estadounidense de 100 000 habitantes no fallezcan más de 4 personas por hepatitis A durante un año seleccionado al azar.

c) Encuentre la probabilidad de que en una ciudad estadounidense de 100 000 habitantes, al menos cinco personas fallezcan por hepatitis A durante un año seleccionado al azar.

55. CONTROL DE ENFERMEDADES Con el uso de la información del problema 54, en un año seleccionado al azar, ¿cuánto más es probable que al menos una persona fallezca por hepatitis A en una ciudad estadounidense de 1 000 000 de habitantes que en una ciudad de 100 000?

56. NUTRICIÓN Suponga que una panadería hace un lote de 2 400 galletas de chispas de chocolate, usando un total de 12 000 chispas de chocolate. La variable aleatoria X que representa el número de chispas de chocolate en una galleta se puede modelar usando una distribución de Poisson con parámetro

$$\lambda = \frac{12\,000}{2\,400} = 5$$

a) Encuentre la probabilidad de que una galleta tenga exactamente cinco chispas de chocolate.

b) Encuentre la probabilidad de que una galleta no tenga chispas de chocolate.

c) Encuentre la probabilidad de que una galleta tenga tres o menos chispas de chocolate.

d) Encuentre la probabilidad de que una galleta tenga siete o más chispas de chocolate.

57. ACCESOS A UN SITIO WEB Suponga que el número de accesos a un popular sitio web en un periodo de 1 minuto sigue una distribución de Poisson. Se estima que hay un 5% de probabilidad de que no haya accesos durante el periodo.

a) Encuentre el parámetro λ para la distribución.

b) Encuentre la probabilidad de que durante un periodo de 1 minuto seleccionado al azar, haya exactamente cinco accesos.

c) Encuentre la probabilidad de que el sitio web reciba no más de cinco accesos durante un periodo de 1 minuto.

d) Encuentre la probabilidad de que el sitio web reciba al menos un acceso durante un periodo de 1 minuto.

e) Determine el número más probable de accesos que reciba el sitio web durante un intervalo de 1 minuto.

58. Demuestre que una variable aleatoria de Poisson X con parámetro λ tiene varianza $\text{Var}(X) = \lambda$.

59. Usando los métodos de trazado de curvas del capítulo 3, verifique que la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

tiene un máximo absoluto en $x = 0$ y puntos de inflexión en $x = 1$ y $x = -1$.

60. Generalice el resultado del problema 59 al verificar que la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

tiene un máximo absoluto en $x = \mu$ y puntos de inflexión en $x = \mu + \sigma$ y $x = \mu - \sigma$.

61. Verifique que los datos normalmente distribuidos tienen 95.4% de probabilidad de estar a no más de 2 desviaciones estándar de la media y 99.7% de probabilidad de estar a no más de 3 desviaciones estándar de la media.

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Términos importantes, símbolos y fórmulas

Experimento aleatorio (710)
Espacio muestral (710)
Evento: (710)
- Evento simple
- Evento cierto
- Evento imposible

Variable aleatoria: (710)
- Discreta
- Discreta finita
- Continua

Asignación de probabilidad: (711)

$$0 \le P(s_k) \le 1$$

$$P(s_1) + P(s_2) + \cdots + P(s_n) = 1$$

Función de probabilidad (712)
Histograma (713)
Características de una variable aleatoria discreta X:
- Evento $(X = x_k)$ (711)
- Probabilidad $p(x_k) = P(X = x_k)$ (712)
- Valor esperado

$$\mu = E(X) = \Sigma x_k\, p(x_k) \quad (715)$$

Varianza

$$\text{Var}(X) = \sum (x_k - \mu)^2 \cdot p(x_k) \quad (717)$$

- Desviación estándar

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} \quad (717)$$

Variable aleatoria geométrica X: (718)
- Probabilidad (p es probabilidad de éxito)

$$P(X = n) = (1 - p)^{n-1}p \quad (718)$$

- Valor esperado $E(X) = 1/p$ (719)
- Varianza $\text{Var}(X) = (1 - p)/p^2$ (719)

Apuestas justas (problema 31) (723)
Función $f(x)$ de densidad de probabilidad para la variable aleatoria continua X: (726)

$$f(x) \ge 0 \text{ para toda } x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Función de densidad uniforme:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)} & \text{si } a \le x \le b \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Función de densidad exponencial: (728)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Función de densidad de probabilidad conjunta $f(x, y)$, para variables aleatorias X y Y: (729)

$$f(x,y) \ge 0 \text{ para todas } (x,y)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dA = 1$$

$$P\,[(X, Y) \text{ en } R] = \iint_R f(x, y)\, dA$$

Características de una variable aleatoria continua X:
- Valor esperado

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \quad (736)$$

- Varianza

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x)\, dx \quad (738)$$

Valores esperados para una función de densidad de probabilidad conjunta $f(x, y)$: (741)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y)\, dA$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y)\, dA$$

Características de una variable aleatoria normal X:
- Función de densidad de probabilidad normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad (747)$$

- Valor esperado $E(X) = \mu$ (747)
- Varianza $\text{Var}(X) = \sigma$ (747)
- Desviación estándar $s(X) = \sigma$ (747)

Regla empírica para el área bajo una curva normal (747)
Distribución normal estándar ($\mu = 0$, $\sigma = 1$) (748)
Transformación a forma normal estándar (753)
Características de una variable aleatoria con distribución de Poisson X con parámetro λ:
- Probabilidad

$$P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!}\, e^{-\lambda} \quad (756)$$

- Valor esperado $E(X) = \lambda$ (758)
- Varianza $\text{Var}(X) = \lambda$ (758)
- Desviación estándar $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$ (758)

www.FreeLibros.com

Revisión del capítulo 10

1. Los resultados y asignaciones de probabilidad correspondientes para una variable aleatoria discreta X aparecen en la siguiente tabla. Dibuje el histograma para X. A continuación encuentre el valor esperado $E(X)$, la varianza $\text{Var}(X)$ y la desviación estándar $\sigma(X)$.

resultados para X	0	1	2	3	4
probabilidad	1/6	1/6	1/5	2/5	1/15

2. En cada caso, determine si la función dada es una función de densidad de probabilidad

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2e^{-x/2} & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

3. La función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria particular X es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-x/3} & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Encuentre cada una de las siguientes probabilidades:

a) $P(2 \le X \le 3)$ *b)* $P(X \ge 3)$

4. La función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria particular X es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{36}(6x - x^2) & \text{si } 0 \le x \le 6 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Encuentre el valor esperado $E(X)$ y varianza $\text{Var}(X)$ para X.

5. Suponga que la variable aleatoria Z tiene una distribución normal estándar. Encuentre estas probabilidades:

a) $P(Z \ge 0.85)$ *b)* $P(-1.30 \le Z \le 3.25)$

6. Una variable aleatoria X tiene una distribución normal con media de $\mu = 12$ y desviación estándar $\sigma = 2$. Use la regla empírica para hallar

a) $P(10 \le X \le 14)$ *b)* $P(8 \le X \le 16)$

7. MANTENIMIENTO La falla de cierto componente clave cerrará la operación de un sistema hasta que se instale un nuevo componente. Si el tiempo de instalación está uniformemente distribuido de 1 a 4 horas, ¿cuál es la probabilidad de que el sistema sea inoperable por al menos 2 horas?

8. CONTROL DE CALIDAD Suponga que 5% de los artículos producidos por cierta compañía están defectuosos. Un inspector de control de calidad prueba cada uno de los artículos antes que salgan de la fábrica. Encuentre la probabilidad de que el inspector pase al menos cinco artículos antes de detectar un artículo defectuoso.

9. MEDICINA Sea X la variable aleatoria que representa el número de años que una persona, de un grupo de prueba con cierto tipo de cáncer agresivo, viva después de recibir un medicamento experimental. Suponga que X tiene una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 0.5$.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una víctima de cáncer seleccionada al azar, de este grupo, sobreviva al menos 3 años después de empezar terapia con el medicamento?

b) Encuentre el valor esperado de X. Describa lo que representa $E(X)$.

10. PRUEBA ACADÉMICA Para satisfacer los requisitos de ingreso a la academia de policía, un candidato debe clasificar en el 20% más alto en un examen de admisión. Suponiendo que las calificaciones del examen están normalmente distribuidas y la calificación promedio en la prueba es de 150 puntos, con una desviación estándar de 24 puntos, encuentre la calificación mínima para llenar los requisitos.

11. CONTROL DE ANIMALES Suponga que el número de personas que mueren cada año por mordidas de perro sigue una distribución de Poisson y que, en promedio, cinco personas por millón mueren cada año por esta causa en Estados Unidos. Encuentre la probabilidad de que al menos cinco personas mueran por mordeduras de perro en una ciudad estadounidense de 1 millón de habitantes, durante un año seleccionado al azar.

12. PROTECCIÓN DE GARANTÍA Un aparato importante contiene dos componentes que son vitales para su operación, en el sentido de que si falla cualquiera de los dos, el aparato queda inutilizado. Considere que la variable aleatoria X mide la vida útil (en años) del primer componente y que Y mide la vida útil del segundo componente (también en años). Suponga que la función conjunta de densidad de probabilidad para X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.1e^{-x/2}\,e^{-y/5} & \text{si } x \ge 0 \text{ y } y \ge 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

a) Encuentre la probabilidad de que el aparato falle dentro de los primeros cinco años.

b) ¿Cuál componente, de un aparato seleccionado al azar, espera usted que dure más tiempo? ¿Cuánto tiempo más?

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Problemas de repaso

En los problemas 1 y 2 aparecen los resultados y correspondientes asignaciones de probabilidad para una variable aleatoria discreta X. *Dibuje el histograma para* X. *Después encuentre el valor esperado* E(X), *la varianza* Var(X) *y la desviación estándar* σ(X).

1.

resultados para X	1	2	3	4	5
probabilidad	1/9	2/9	1/3	1/9	2/9

2.

resultados para X	0	2	4	6	8
probabilidad	1/8	3/8	1/4	1/8	1/8

En cada uno de los problemas 3 al 6 determine si la variable aleatoria X *dada es discreta o continua. Si es discreta, especifique si es finita.*

3. X cuenta el número de huevos puestos por una mosca de la fruta escogida al azar.

4. X mide la distancia que vuela un avión seleccionado al azar de una línea aérea particular.

5. X mide el salario anual de un jugador seleccionado al azar en un equipo particular de béisbol de ligas mayores.

6. X cuenta el número de libros de la biblioteca de un maestro seleccionado al azar en una escuela.

En los problemas 7 al 10 f(x) *es una función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria continua particular* X. *En cada caso, encuentre las probabilidades indicadas.*

7. $f(x) = \begin{cases} 1/5 & \text{si } 3 \le x \le 8 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

$P(2 \le X \le 7)$ y $P(X \ge 5)$

8. $f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si } x \ge 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

$P(1 \le X \le 3)$ y $P(X \ge 2)$

9. $f(x) = \begin{cases} 0.75x(2x - x^2) & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

$P(X \le 1)$ y $P(1 \le X \le 3)$

10. $f(x) = \begin{cases} 0.25xe^{-x/2} & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$

$P(X \ge 2)$ y $P(0 \le X \le 3)$

11. Encuentre el valor esperado $E(X)$ y la varianza Var(X) para la variable aleatoria X del problema 9.

12. Encuentre el valor esperado $E(X)$ y la varianza Var(X) para la variable aleatoria X del problema 10.

13. Encuentre el número c para que la siguiente función $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} cxe^{-x/4} & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

14. Encuentre un número c a fin de que la siguiente función $f(x)$ sea una función de densidad de probabilidad:

$$f(x) = \begin{cases} c/x^4 & \text{si } x \ge 1 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

15. Si la variable aleatoria X está normalmente distribuida con media $\mu = 7$ y desviación estándar $\sigma = 2$, ¿cuál es $P(X \ge 9)$?

16. Encuentre b si $P(Z \ge b) = 0.73$, donde Z es una variable aleatoria con distribución normal estándar ($\mu = 0, \sigma = 1$).

17. ADMINISTRACIÓN DE PORTAFOLIOS Louise estima que hay una probabilidad de 0.6 de que cierta acción en su cartera de valores suba de precio 25%. Ella también piensa que la probabilidad es de 0.25 de que subirá sólo 10%, y que la probabilidad es de 0.15 de que bajará 10%. ¿Qué porcentaje de rendimiento debe ella esperar de esta acción?

18. ENTRENAMIENTO MILITAR Como parte de su entrenamiento, a un paracaidista se le exige saltar en un área circular marcada en el terreno. Un blanco de tiro que ocupa 10% del círculo está marcado como 10, y hay otros tres círculos, numerados 5, 3 y 1 que, respectivamente, ocupan 20%, 30% y 40% del área total del blanco de tiro. Suponiendo que un recluta aterriza en una posición aleatoria dentro del blanco de tiro, ¿qué calificación debe esperar que se le otorgue?

19. LOTERÍA La probabilidad de ganar \$100 en una lotería particular es de 0.08, la probabilidad de ganar \$20 es de 0.12, la probabilidad de ganar \$5 es de 0.2 y la probabilidad de perder es de 0.6. ¿Cuál es el precio justo a pagar por un billete de lotería?

20. RUEDA DE LA FORTUNA Una rueda de la fortuna está dividida en 20 sectores de igual área. La rueda se hace girar y se hace un pago según el color de la región en la que cae el indicador. Una región es de color oro y paga \$50 cuando se le acierta; cinco regiones son azules y pagan \$25; y otras cuatro regiones son rojas y pagan \$10. Las 10 regiones restantes son negras y no pagan nada. ¿Estaría usted dispuesto a pagar \$10 por jugar este juego?

21. PEDIATRÍA Hay 200 niños en cierta escuela, y el peso de los niños es una variable aleatoria X que está normalmente distribuida con media $\mu = 80$ libras y desviación estándar $\sigma = 7$ libras.

a) ¿Cuántos niños pesan más de 90 libras?

www.FreeLibros.com

b) ¿Cuántos niños pesan menos de 70 libras?
c) ¿Cuántos niños pesan exactamente 80 libras?

22. CONFIABILIDAD DE UN PRODUCTO Componentes electrónicos hechos por cierto proceso tienen un tiempo para fallar que es medido por una variable aleatoria normal. Si el tiempo medio para fallar es de 15 000 horas, con una desviación estándar de 800 horas, ¿cuál es la probabilidad de que un componente seleccionado al azar dure no más de 10 000 horas?

23. CONTROL DE CALIDAD Un fabricante de juguetes hace pelotas de hule huecas. El grosor de la capa exterior de ellas está normalmente distribuido con media de 0.03 milímetros y desviación estándar de 0.0015 milímetros. ¿Cuál es la probabilidad de que la capa exterior de una pelota seleccionada al azar mida menos de 0.025 milímetros de grueso?

24. ADMINISTRACIÓN DE TIEMPO Cada 45 minutos, una panadería saca un lote recién horneado de galletas de chispas de chocolate. Usted llega (al azar) a la panadería, a la espera de comprar una galleta acabada de hacer. Use una función de densidad uniforme apropiada para hallar la probabilidad de que usted llega no más de 5 minutos (antes o después) del momento en que las galletas salen del horno.

25. DEMOGRAFÍA Un estudio, recientemente encargado por el alcalde de una gran ciudad, indica que el número de años que un residente actual continuará viviendo en la ciudad puede modelarse como una variable aleatoria exponencial, con función de densidad de probabilidad

$$f(t) = \begin{cases} 0.4e^{-0.4t} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

a) Encuentre la probabilidad de que un residente seleccionado al azar se mude en no más de 10 años.

b) Encuentre la probabilidad de que un residente seleccionado al azar permanezca en la ciudad durante más de 20 años.

c) ¿Cuánto tiempo debe esperarse que permanezca en la ciudad un residente seleccionado al azar?

26. CONTROL DE TRÁNSITO Suponga que el tiempo (en minutos) entre las llegadas de autos sucesivos a una caseta de peaje está medido por la variable aleatoria X, con función de densidad de probabilidad

$$f(t) = \begin{cases} 0.5e^{-0.5t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

a. Encuentre la probabilidad de que un par de autos sucesivos, seleccionados al azar, lleguen a la caseta de peaje con al menos 6 minutos de diferencia.

b) Encuentre el promedio de tiempo entre las llegadas de autos sucesivos a la caseta de peaje.

27. ADMINISTRACIÓN DE TRÁNSITO La distancia (en pies) entre autos sucesivos en una autopista está modelada por la variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 0.25xe^{-x/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

a) Encuentre la probabilidad de que un par de autos seleccionados al azar disten menos de 10 pies uno del otro.

b) ¿Cuál es la distancia promedio entre autos sucesivos en una autopista?

28. ADMINISTRACIÓN DE TRÁNSITO Suponga que la variable aleatoria X del problema 27 está normalmente distribuida con media $\mu = 12$ pies y desviación estándar $\sigma = 4$ pies. Ahora ¿cuál es la probabilidad de que un par de autos seleccionado al azar disten menos de 10 pies uno del otro?

29. PÓLIZA DE SEGUROS Una compañía de seguros cobra \$10 000 por una póliza que asegura contra cierta clase de accidente y paga \$100 000 si ocurre el accidente. Suponga que se estima que la probabilidad de que ocurra el accidente es $p = 0.02$. Sea X la variable aleatoria que mide la utilidad de la compañía de seguros en cada póliza que vende.

a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad para X?
b) ¿Cuál es la utilidad esperada de la compañía por póliza vendida?
c) ¿Cuál debe ser el cobro de la compañía por póliza para que duplique su utilidad esperada por póliza?

30. SALUD PERSONAL Jack decide ponerse a dieta durante 6 semanas, con la meta de bajar entre 10 y 15 libras. Con base en su configuración física y metabolismo, su médico determina que el peso que bajará puede ser modelado por una variable aleatoria continua X con función de densidad de probabilidad $f(x)$, de la forma

$$f(x) = \begin{cases} k(x-10)^2 & \text{para } 10 \leq x \leq 15 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Si el modelo del médico es válido, ¿cuánto peso debe esperar perder Jack? [*Sugerencia:* Primero determine el valor de la constante k.]

31. ADMINISTRACIÓN DE PESQUERÍA El gerente de una pesquería determina que la edad X (en semanas) a la que muere cierta especie de peces sigue una distribución exponencial con función de densidad de probabilidad

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Algunas observaciones indican que es doblemente probable que un pez seleccionado al azar muera durante el primer periodo de 10 semanas que durante las siguientes 10 semanas (de la semana 10 a la 20).

a) ¿Cuál es λ?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un pez seleccionado al azar muera dentro de las primeras 5 semanas?

c) ¿Cuál es el tiempo de vida esperado de un pez seleccionado al azar?

32. METALURGIA La proporción de impurezas por peso en muestras de mineral de cobre tomadas de una mina particular está medida por una variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 21x^2(1 - \sqrt{x}) & \text{para } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de impurezas en una muestra seleccionada al azar sea menor al 5%?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de impurezas sea mayor al 50%?

c) ¿Qué proporción de impurezas se espera hallar en una muestra seleccionada al azar?

33. BEBIDAS Suponga que el volumen de soda en una botella producida en una planta particular está normalmente distribuida con una media de 12 onzas y una desviación estándar de 0.05 onzas.

a) Encuentre la probabilidad de que una botella llenada en esta planta contenga al menos 11.8 onzas.

b) Encuentre el volumen de soda para que 95% de todas las botellas llenadas en esta planta contenga menos de esta cantidad.

34. CONTROL DE CALIDAD Un fabricante de automóviles dice que sus nuevos autos rinden un promedio de 30 millas por galón en tránsito en la ciudad. Suponga que lo dicho por el fabricante es correcto y que el rendimiento en millas está normalmente distribuido, con desviación estándar de 2 millas por galón.

a) Encuentre la probabilidad de que un auto seleccionado al azar rinda menos de 25 millas por galón.

b) Si se prueban dos autos, ¿cuál es la probabilidad de que ambos rindan menos de 25 millas por galón?

35. PRUEBA ACADÉMICA Los resultados de un examen de cálculo están normalmente distribuidos con una media de 72.3 y una desviación estándar de 16.4. Encuentre la probabilidad de que la calificación de un estudiante escogido al azar sea entre 50 y 75. Si hay 82 estudiantes en un grupo, ¿aproximadamente cuántos obtienen calificaciones entre 50 y 75?

36. MEDICINA Suponga que el número de niños que mueren cada año de leucemia sigue una distribución de Poisson y que, en promedio, 7.3 niños por 100 000 mueren de leucemia. Para una ciudad con 100 000 niños, encuentre la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:

a) Exactamente siete niños de la ciudad mueren de leucemia cada año.

b) Menos de dos niños de la ciudad mueren de leucemia cada año.

c) Más de cinco niños de la ciudad mueren de leucemia cada año.

37. ECOLOGÍA El nivel de pH de un líquido mide su acidez y es una medida importante en el estudio de los efectos de la lluvia ácida. Suponga que se realiza una prueba bajo condiciones controladas que permiten registrar el cambio de pH en un lago particular como resultado de la lluvia ácida. Sea X una variable aleatoria que mide el pH de una muestra de agua tomada del lago, y suponga que X tiene la función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} 0.75(x - 4)(6 - x) & \text{para } 4 \le x \le 6 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

a) Encuentre la probabilidad de que el pH de una muestra seleccionada al azar sea al menos 5.

b) Encuentre el pH esperado de una muestra seleccionada al azar.

38. MEDICINA DEPORTIVA Suponga que el número de lesiones que sufre un equipo durante un juego ordinario de futbol sigue una distribución de Poisson con un promedio de 2.5 lesiones.

a) Encuentre la probabilidad de que durante un juego escogido al azar, el equipo sufra exactamente dos lesiones.

b) Encuentre la probabilidad de que durante un juego seleccionado al azar, el equipo no sufra lesiones.

c) Encuentre la probabilidad de que durante un juego seleccionado al azar, el equipo sufra al menos una lesión.

39. ENTREGA DE PAQUETERÍA Suponga que el número de paquetes para entrega de un día para otro, que recibe una compañía durante un día hábil sigue una distribución de Poisson y que, en promedio, la compañía recibe cuatro paquetes de esta clase al día.

a) Encuentre la probabilidad de que la compañía reciba exactamente cuatro paquetes para entrega de un día para otro, en un día hábil seleccionado al azar.

b) Encuentre la probabilidad de que la compañía no reciba ningún paquete para entrega de un día para otro, en un día hábil seleccionado al azar.

www.FreeLibros.com

c) Encuentre la probabilidad de que la compañía reciba menos de cuatro paquetes para entrega de un día para otro, en un día hábil seleccionado al azar.

40. PERIODISMO Suponga que el número de errores tipográficos en una página de un periódico local sigue una distribución de Poisson con un promedio de 2.5 errores por página.

a) Encuentre la probabilidad de que una página seleccionada al azar no tenga errores tipográficos.

b) Encuentre la probabilidad de que una página seleccionada al azar tenga al menos 1 error tipográfico.

c) Encuentre la probabilidad de que una página seleccionada al azar tenga al menos 3 errores tipográficos.

d) Encuentre la probabilidad de que una página seleccionada al azar tenga menos de 3 errores tipográficos.

41. ACCIDENTES EN CARRETERAS Un reporte modela el número de accidentes automovilísticos en una carretera particular como una variable aleatoria con distribución de Poisson. Suponga que se encuentra que, en promedio, hay un accidente cada 10 horas.

a) Encuentre la probabilidad de que no haya accidentes en esta carretera durante un periodo de 24 horas seleccionado al azar.

b) Encuentre la probabilidad de que haya al menos un accidente en esta carretera durante un periodo de 24 horas seleccionado al azar.

c) Encuentre la probabilidad de que no haya accidentes en esta carretera durante una hora seleccionada al azar.

42. SALUD PÚBLICA Como parte de una campaña para combatir una nueva variedad de gripe, autoridades de salud pública están planeando vacunar a 1 millón de personas. Se estima que la probabilidad de que un individuo tenga una mala reacción a la vacuna es de 0.0005. Suponga que el número de personas vacunadas que han tenido malas reacciones a la vacuna está modelada por una variable aleatoria con una distribución de Poisson.

a) ¿Cuál es λ para la distribución?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que del millón de personas vacunadas, exactamente 5 tengan una mala reacción?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que del millón de personas vacunadas, más de 10 tengan una mala reacción?

43. EFICIENCIA DE MANO DE OBRA Una compañía desea examinar la eficiencia de dos miembros de su personal de mayor antigüedad, Jack y Jill, que trabajan independientemente uno del otro. Sean X y Y variables aleatorias que miden la proporción de la semana hábil que Jack y Jill, respectivamente, pasan en realidad cumpliendo con su trabajo. Suponga que la función de densidad de probabilidad conjunta para X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.4(2x + 3y) & \text{si } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

a) Verifique que $f(x, y)$ satisface los requisitos para ser una función de densidad de probabilidad conjunta.

b) Encuentre la probabilidad de que Jack pase menos de la mitad de su tiempo trabajando, en tanto que Jill pasa más de la mitad de su tiempo trabajando.

c) Encuentre la probabilidad de que Jack y Jill, cada uno, pasen al menos 80% de su semana hábil realizando sus trabajos asignados.

d) Encuentre la probabilidad de que Jack y Jill trabajen menos de una semana hábil completa. [*Sugerencia:* Éste es el evento que $X + Y < 1$.]

44. EFICIENCIA LABORAL Para la situación descrita en el problema 43, encuentre los valores esperados de X y Y. La compañía espera que sus empleados de más antigüedad pasen al menos 75% de su tiempo realizando su trabajo. ¿Están ya sea Jack o Jill en riesgo de recibir una reprimenda?

45. ADMINISTRACIÓN DEL TIEMPO Suponga que la variable aleatoria X mide el tiempo (en minutos) que una persona está en fila de espera en cierto banco, y que Y mide la duración (en minutos) de una transacción de rutina en la ventanilla de la cajera. Suponga que la función de densidad de probabilidad conjunta para X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} 0.125e^{-x/4}\, e^{-y/2} & \text{si } x \ge 0 \text{ y } y \ge 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna actividad tome más de 5 minutos?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona complete su gestión en el banco (ambas actividades) en no más de 8 minutos?

46. VENTAS DE SEGUROS Sea X una variable aleatoria que mide el tiempo (en minutos) que una persona emplea con un agente en la selección de una póliza de seguro de vida, y sea Y una variable que mide el tiempo (en minutos) que el agente pasa en la elaboración de papeleo una vez que el cliente haya seleccionado una póliza. Suponga que la función de densidad de probabilidad conjunta para X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{300}\, e^{-x/30}\, e^{-y/10} & \text{para } x \ge 0, y \ge 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

RESUMEN DEL CAPÍTULO

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

a) Encuentre la probabilidad de que la selección de una póliza tome más de 20 minutos.

b) Encuentre la probabilidad de que toda la transacción (selección de póliza y papeleo) tome más de media hora.

c) ¿Cuánto tiempo más esperaría usted pasar en la selección de la póliza y completar el papeleo?

47. ADMINISTRACIÓN DE TIEMPO Un tranvía llega a una parada de tranvías en un momento X seleccionado al azar en un período de 1 hora, y un turista llega independientemente a la misma parada también en un momento Y seleccionado al azar, dentro de la misma hora. El turista tiene la paciencia de esperar el tranvía hasta 20 minutos antes de llamar un taxi. La función conjunta de densidad de probabilidad para X y Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el tranvía tarde más de 20 minutos en llegar?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el turista llegue después que el tranvía?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el turista tome el tranvía? [*Sugerencia:* El evento de que esto ocurra tiene la forma

$$Y + a \le X \le Y + b$$

para los números apropiados a y b.]

48. ROTACIÓN LEGISLATIVA Un modelo matemático en ciencias políticas[1] dice que el tiempo en el desempeño como legislador puede ser modelado como una variable aleatoria X que está exponencialmente distribuida con función de densidad de probabilidad

$$N(t) = \begin{cases} ce^{-ct} & \text{para } t \ge 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

donde t es el número de años de servicio continuo, y c es una constante positiva que depende de la naturaleza y carácter del organismo legislativo.

a) Para la Cámara de Representantes de Estados Unidos, se encontró que $c = 0.0866$. Encuentre la probabilidad de que un miembro de la Cámara seleccionado al azar se desempeñe en el cargo al menos 6 años.

b) Para la Cámara de los Comunes de Inglaterra, se encontró que $c = 0.135$. ¿Cuál es la probabilidad de que un miembro de este organismo se desempeñe en el cargo al menos 6 años?

c) El módulo citado en la nota al pie de este problema también muestra la forma en que la función de densidad, dada líneas antes, se puede usar para estimar cuántos miembros del Comité Central Soviético pudo haber sido purgado por Nikita Khruschev en el periodo 1956-1961. Lea este módulo y escriba un párrafo sobre si usted piensa o no que el método de análisis es válido.

49. ELIMINACIÓN DE DESECHOS PELIGROSOS Es posible usar métodos probabilísticas para estudiar la efectividad de procedimientos de eliminación de desechos peligrosos. El riesgo por agentes carcinógenos asociados con un suelo contaminado cerca de una fábrica puede ser medido por una cantidad llamada *factor de pendiente*. Suponga que el factor de pendiente en un sitio particular de eliminación está modelado por una variable aleatoria X con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{5.36}{(x + 5.36)^2} & \text{si } x \ge 0 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

de manera que

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

es la probabilidad de desarrollar cáncer por el suelo en el que el factor de pendiente es un número entre a y b.

a) Calcule la probabilidad de que una persona contraiga cáncer por una muestra de suelo recolectada al azar, cuyo factor de pendiente sea menor a 2.

b) Calcule la probabilidad de que una persona contraiga cáncer por una muestra de suelo cuyo factor de pendiente sea mayor a 10.

c) ¿Cuál es el valor esperado de pendiente de una muestra de suelo recolectada al azar en este lugar de eliminación de desechos?

d) Modelos reales de investigación que comprenden agentes carcinógenos industriales a veces usan funciones más complicadas de densidad de probabilidad que la considerada en este problema. Lea un artículo sobre el uso de métodos estadísticos al determinar riesgo por agentes carcinógenos y escriba un párrafo que resuma estos métodos.[2]

[1] "Exponential Models for Legislative Turnover", por Thomas W. Casstevens. *UMAP Modules 1978: Tools for teaching*, Consortium for Mathematics and its Applications, Inc., Lexington, MA, 1979.

[2] El lector puede iniciar su investigación con el texto *Hazardous Waste Management*, de M. D. LaGrega, P. L. Buckingham y J. C. Evans; McGraw-Hill, Inc., Nueva York, 1994, pp. 872-880.

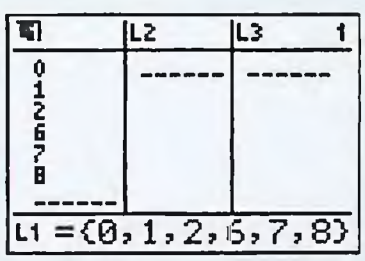
www.FreeLibros.com

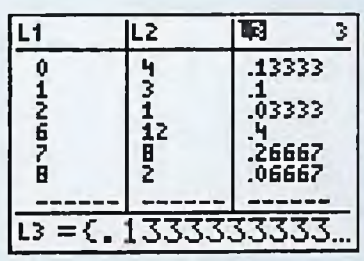
En el sitio web especificado en el libro, www.mhhe.com/hoffmann, es posible tener acceso a las soluciones completas para todas las secciones ¡EXPLORE! de este libro.

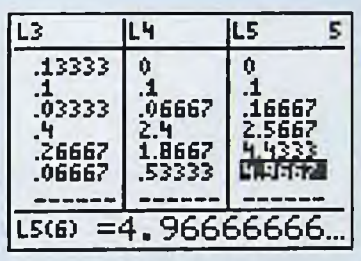
Solución para el ¡Explore! de la página 715

Encuentre el valor esperado de la variable aleatoria X del ejemplo 10.1.3 usando una calculadora graficadora. Borre las listas L1 a la L5, si es necesario, e introduzca los números de estudiantes enfermos en la lista L1. Como no hay días cuando 3, 4 o 5 estudiantes estuvieron enfermos, puede omitir estos valores como se muestra en la pantalla izquierda siguiente. A continuación introduzca los números correspondientes de días en la lista L2. Ponga la probabilidad de cada número de estudiantes enfermos en la lista L3 y haga L3 = L2 ÷ 30. Estos valores se muestran en la pantalla de en medio de líneas más adelante; éstas son las formas decimales de probabilidades halladas en el ejemplo 10.1.3.

A continuación multiplique cada número de estudiantes enfermos por su probabilidad y ponga el resultado en la lista L4 haciendo L4 = L1 × L3. Éstos son los valores que se suman en la página 715. Para hallar la suma, haga L5 = cumSum(L4) donde **6:cumSum(** se encuentra bajo el menú **OPS** de **LIST (2nd STAT).** El valor final en L5 es la suma de todos los valores en L4 y es el valor esperado de la variable aleatoria X que representa el número de estudiantes enfermos en un día determinado. Este valor es cercano a 5, como se muestra en la página 715.



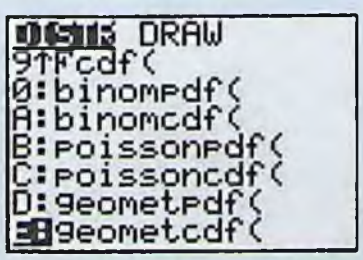


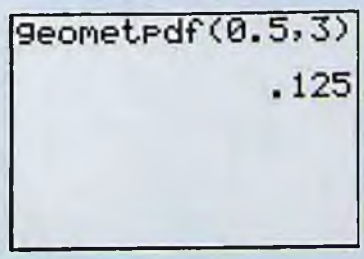


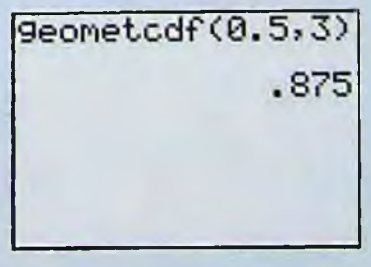
Solución para el ¡Explore! de la página 720

Encuentre las probabilidades en los incisos *a*) y *b*) del ejemplo 10.1.8 usando su calculadora graficadora. Las funciones apropiadas son **D:geometpdf(** y **E.geometcdf(** que se hallan bajo **DISTR (2nd VARS)** como se muestra en la pantalla izquierda siguiente. Para hallar la probabilidad de que tenemos que lanzar al aire la moneda exactamente tres veces hasta que salga una cara, use geometpdf(p, n) donde p es la probabilidad de éxito en cualquier intento determinado y el primer éxito ocurre en el n-ésimo intento. La siguiente pantalla de en medio muestra geometcdf(0.5, 3), donde $p = 0.5$ es la probabilidad de que salga una cara en cualquier tiro.

Para encontrar la probabilidad de que la moneda salga cara dentro de los primeros tres tiros use geometpdf (p, n) donde p es la probabilidad de tener éxito en cualquier tiro y el primer éxito ocurre en σ antes en el n-ésimo intento. Esta probabilidad es la suma de las probabilidades de que salgan caras por primera vez en el primer tiro, el segundo tiro y el tercer tiro. Estas probabilidades son las formas decimales de las probabilidades halladas en los incisos *a*) y *b*) del ejemplo 10.1.8.





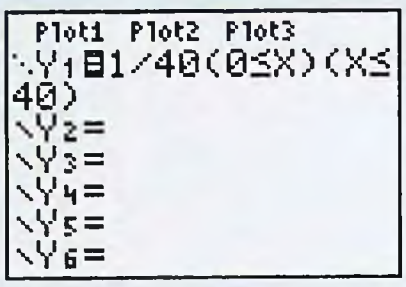


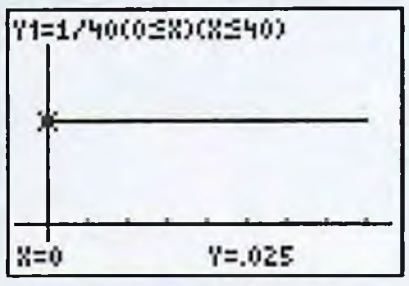
www.FreeLibros.com

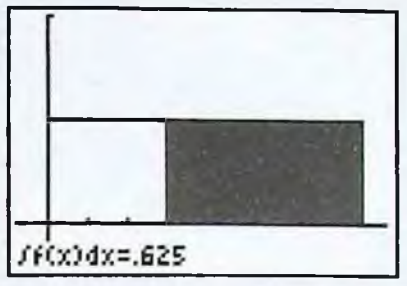
¡EXPLORE! ACTUALIZACIÓN

Solución al ¡Explore! de la página 727

Siguiendo el ejemplo 10.2.1, guarde $f(x)$ en Y1 como se ve a continuación, usando la pantalla [0, 47]5 por [−0.01, 0.05].01 y un modo de gráfica por puntos para evitar rectas verticales en el extremo de la gráfica. El área bajo esta función de densidad uniforme de $x = 15$ a 40 es .625 = 5/8, como se ve gráficamente en la pantalla derecha.

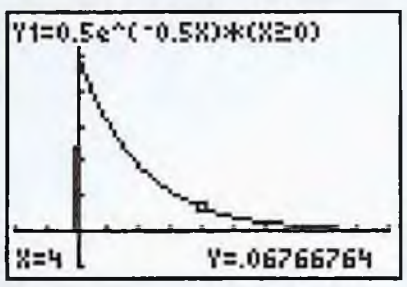


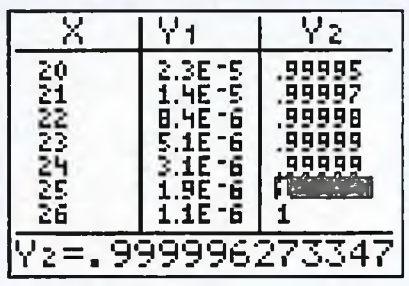


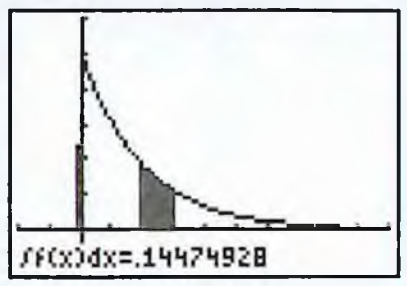


Solución al ¡Explore! de la página 728

Siguiendo el ejemplo 10.2.2, ponga Y1 = 0.5e ^ (−0.5X)(X ≥ 0), usando la pantalla [−2,10]1 por [−0.1, 0.6].1. La gráfica de Y1 se muestra a continuación en la pantalla izquierda. Ahora escriba Y2 = **fnInt(Y1, X, 0, X)** y observe la tabla de valores para Y2 para valores de X, empezando en X = 20 en incrementos unitarios. Nótese que Y2 es aproximadamente 1 cuando X = 25. La función de integración numérica se puede usar para confirmar que P(2 ≤ X ≤ 3) = 0.1447.

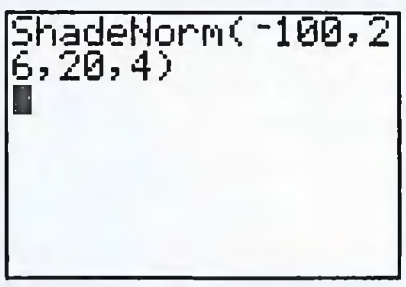


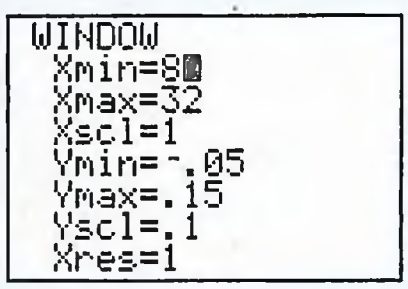


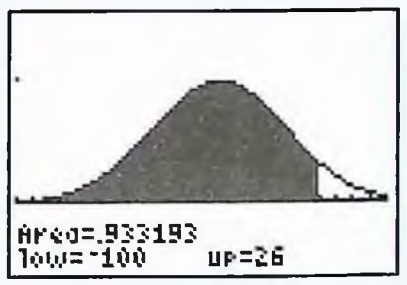


Solución al ¡Explore! de la página 754

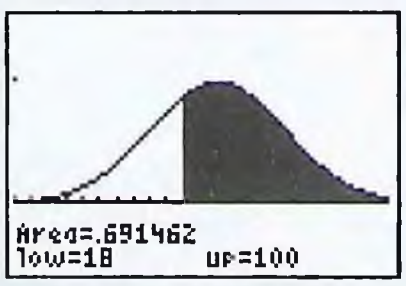
En los modelos TI-83 y TI-84, encuentre **1: ShadeNorm**(límite inferior, límite superior, μ, σ) del menú **DRAW** de la tecla **DISTR** (**2nd VARS**). Para el inciso *a*) del ejemplo 10.4.4, escriba ShadeNorm(−100, 26, 20, 4), donde μ = 20, σ = 4, y el límite inferior es −100, número negativo suficientemente grande. Use la pantalla [8, 32]1 por [−0.05, 0.15].1.

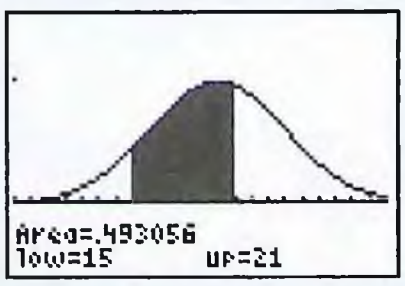






Para el inciso *b*), escriba **ShadeNorm**(18, 100, 20, 4) y, para el inciso *c*), escriba **ShadeNorm**(15, 21, 20, 4). Las siguientes pantallas muestran los resultados. Es importante borrar la pantalla previa (al presionar **1:ClrDraw**) antes de hacer el siguiente cálculo.





www.FreeLibros.com

REFLEXIONE ACERCA DE...



CONFIABILIDAD

¿Cómo se puede determinar la probabilidad de que una rodilla artificial dure más de 20 años? Se puede contestar esta pregunta si se tiene una distribución de probabilidad para el tiempo que funciona una rodilla artificial antes de fallar. Pero, ¿qué tipo de distribución es apropiado para hallar la vida útil de una rodilla artificial? En este ensayo, se presentan modelos de probabilidad que se pueden usar para estudiar la confiabilidad, o vida útil, de sistemas. El estudio de confiabilidad es importante porque todos los sistemas hechos por el hombre, desde simples componentes hasta sistemas complejos, en última instancia acaban por fallar. Lo mismo se cumple para sistemas biológicos, ya que los organismos vivientes tienen vidas de duración finita. Numerosas preguntas prácticas implican la determinación de confiabilidad de un sistema, ya sea hecho por el hombre o biológico.



Con el uso de lo ya aprendido sobre probabilidades, podemos empezar el estudio de la confiabilidad. Dado un sistema particular, se hace que la variable aleatoria X denote el tiempo que el sistema opera correctamente antes de fallar, suponiendo que fue puesto en servicio en el tiempo $t = 0$. Se puede contestar a muchas preguntas prácticas como es, por ejemplo, hallar el tiempo promedio que un sistema opera hasta que falla, así como la probabilidad de que un sistema opera al menos un tiempo especificado estudiando las propiedades de la variable aleatoria X. En estudios de confiabilidad, se hace uso de varias funciones importantes relacionadas con X. Primero, se hace que $f(t)$ denote la función de densidad de probabilidad de X. Entonces, la probabilidad de que el sistema falle antes del tiempo t es

$$F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$$

Se llama $F(t)$ a la **función de distribución acumulada** de X. La función de densidad de probabilidad $f(t)$ es la derivada de la distribución acumulada $F(t)$ (esto se sigue de una de las dos partes del teorema fundamental de cálculo). Es decir,

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t)$$

Para estudiar situaciones donde aparece la confiabilidad, introducimos la función $R(t)$, que con toda propiedad recibe el nombre de **función de confiabilidad** $R(t)$. Ésta es la probabilidad de que el sistema siga en operación después del tiempo t, es decir,

$$R(t) = P(X > t)$$

www.FreeLibros.com

REFLEXIONE ACERCA DE...

Nótese que $R(t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - F(t)$ y que si se conoce cualquiera de las tres funciones $f(t)$, $F(t)$ y $R(t)$, se puede fácilmente hallar las otras dos funciones.

Dada la función de confiabilidad asociada con la variable aleatoria X, se quiere hallar la frecuencia a la que ocurren las fallas en un momento particular t. Éste debe ser el límite cuando s tiende a cero de la probabilidad de que falle el sistema durante las s unidades de tiempo que siguen al tiempo t, dividido entre s. Es decir, la frecuencia de fallo en el tiempo t es

$$\lim_{s \to 0} \frac{\text{probabilidad de fallo en el intervalo de } t \text{ a } t + s}{s}$$

Para hallar esta frecuencia de fallo, primero se observa que la probabilidad de que un sistema que está operando en un momento t continúe operando durante las s unidades de tiempo que siguen inmediatamente al momento t es la proporción de sistemas que estaba trabajando en el momento t y que continúan funcionando en el momento $t + s$. Esta proporción es

$$\frac{P(t < X \leq t + s)}{P(t < X)} = \frac{F(t + s) - F(t)}{R(t)}$$

En consecuencia, la frecuencia de fallo en el momento t es

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} \frac{F(t + s) - F(t)}{R(t)} = \frac{1}{R(t)} \lim_{s \to \infty} \frac{F(t + s) - F(t)}{s} = \frac{F'(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

Esto lleva a definir la **función de frecuencia de fallo** $r(t)$, que representa la frecuencia de fallo en el tiempo t del sistema que se estudia, por

$$r(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

Se deduce que una vez que se conocen las tres funciones $f(t)$, $F(t)$ y $R(t)$, también se puede hallar $r(t)$. Además, dada la función de frecuencia de fallo $r(t)$, es posible hallar la función de confiabilidad usando la ecuación

$$R(t) = e^{-\int_0^t r(x)\,dx} \tag{1}$$

Para ver por qué tiene lugar la ecuación (1), nótese primero que como $R(t) = 1 - F(t)$, se tiene $R'(t) = -F'(t)$. Es más, como $f(t) = F'(t)$, se deduce que

$$r(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{F'(t)}{R(t)} = \frac{-R'(t)}{R(t)}$$

Esto implica que

$$-\int_0^t r(x)\,dx = \int_0^t \left[-\frac{R'(x)}{R(x)}\right] dx = \ln R(t) - \ln R(0) = \ln R(t) - \ln 1 = \ln R(t)$$

donde se aplica el hecho de que $R(0) = P(X > 0) = 1$. Ahora se puede concluir que $e^{-\int_0^t r(x)\,dx} = e^{\ln R(t)} = R(t)$.

Cuando se modela la confiabilidad de un sistema, se hacen ciertas suposiciones acerca de la frecuencia de fallo. El modelo más sencillo para la confiabilidad de un sistema supone que el sistema tiene una frecuencia constante de fallo. Se deja como ejercicio (pregunta 1) usar la ecuación (1) para demostrar que si $r(t) = \lambda$ donde $\lambda > 0$, entonces $f(t)$ tiene una distribución exponencial, suponiendo que una frecuencia de fallo constante produce un modelo matemático sencillo que usa la distribución exponencial. No obstante, las frecuencias de fallo de la mayor parte, pero no de todos, los productos biológicos y los hechos por el hombre no son constantes. En la práctica, innumerables sistemas tienen frecuencia de fallo que aumentan con el tiempo. Por ejemplo, las rodillas artificiales se desgastan a un ritmo más rápido que como se desgastan sus componentes. Los autos más viejos sufren de una más alta frecuencia de fallo que los nuevos, cuando envejecen sus motores, transmisiones y otros sistemas. Muchos componentes electrónicos que son puestos en servicio después de un periodo inicial de operación exhiben bajas frecuencias de fallo durante un tiempo, pero luego se degradan. Incluso un programa de computadora experimenta crecientes frecuencias de fallo.

www.FreeLibros.com

Por ejemplo, es menos probable que falle una PC Windows que se acaba de reiniciar que otra que ha estado en servicio ya un día. Organismos vivientes también tienen una más elevada frecuencia de fallo (o mortalidad) a medida que envejecen. Es más probable que una persona de 100 años muera al año siguiente, a que muera una persona de 50 años en este periodo. También nótese que, para algunos sistemas, las frecuencias de fallo disminuyen con el tiempo, como es el caso de algunos componentes mecánicos cuyos fallos son causados principalmente por defectos de manufactura. Estos componentes fallan al principio a una frecuencia mayor, pero una vez que los componentes con fallas ya han fallado, esta frecuencia disminuye.

¿Cómo podemos modelar crecientes frecuencias de fallo, así como frecuencias decrecientes de fallo, respecto al tiempo? La búsqueda de modelos adecuados desafió a matemáticos e ingenieros durante muchos años. Después de extensos estudios, se encontró que una clase muy amplia de aplicaciones pueden ser modeladas con precisión si se usa una función de frecuencia de fallo de la forma

$$r(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$$

donde α y β son constantes positivas. Esta función se ve muy complicada, pero con una cuidadosa selección de los valores de α y β, ingenieros y científicos han tenido éxito usando funciones de frecuencia de fallo de esta forma en gran cantidad de aplicaciones. Nótese que la función $r(t)$ es una función creciente cuando $\beta > 1$; valores de β mayores a 1 se usan en modelos donde la frecuencia de fallo aumenta con el tiempo. La falla $r(t)$ es una función decreciente cuando $0 < \beta < 1$; valores de β menores a 1 se usan en modelos donde la frecuencia de fallo disminuye con el tiempo. Cuando $\beta = 1$, hay una frecuencia de falla constante. El uso de esta función para $r(t)$ implica (véase la pregunta 4) que la función de confiabilidad $R(t)$ está dada por

$$R(t) = e^{-\alpha t^{\beta}}$$

y que la función de distribución acumulada está dada por

$$F(t) = 1 - e^{-\alpha t^{\beta}}$$

para $t > 0$. Al derivar $F(t)$, podemos hallar la función de densidad de probabilidad. Esto es,

$$f(t) = F'(t) = \alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t^{\beta}}$$

Una variable aleatoria X con esta función de densidad de probabilidad se dice que sigue una **distribución de Weibull** con parámetros α y β, donde $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Esta distribución tiene amplio uso en estudios de confiabilidad y en muchos otros modelos. Se le ha dado ese nombre por su inventor, Waloddi Weibull, que en 1939 introdujo la distribución que lleva su nombre. Weibull fue un científico, inventor y estadístico sueco. También dio valiosa asesoría en proyectos para la empresa Saab y para la Fuerza Aérea de Estados Unidos. En la figura 1 se muestran las gráficas de $f(t)$ para tres diferentes distribuciones Weibull. En estas tres distribuciones, el parámetro α es igual a 0.5 mientras que el parámetro β toma valores de 1, 2 y 3, respectivamente.

Ahora se puede regresar a la pregunta de modelar la vida útil de una rodilla artificial. Suponga que se ha demostrado que la vida útil de una rodilla artificial, después de ser implantada, se puede modelar usando una distribución de Weibull con parámetros $\alpha = 0.0000939$ (medida en años) y $\beta = 3$. Esto significa que $R(t) = e^{-0.0000939t^3}$. Ahora es posible contestar la pregunta planteada al principio de este ensayo usando la fórmula que se ha encontrado para la función de confiabilidad para una distribución de Weibull. Se calcula que la probabilidad de que una rodilla artificial dure más de 20 años es $R(20) = e^{-0.0000939 \cdot 20^3} \approx 0.472$.

Los modelos de Weibull se han usado para resolver gran variedad de problemas de diferentes disciplinas. Por ejemplo, la distribución de Weibull se ha empleado para determinar los costos esperados de bombear arena para renovar playas dañadas por

www.FreeLibros.com

REFLEXIONE ACERCA DE...

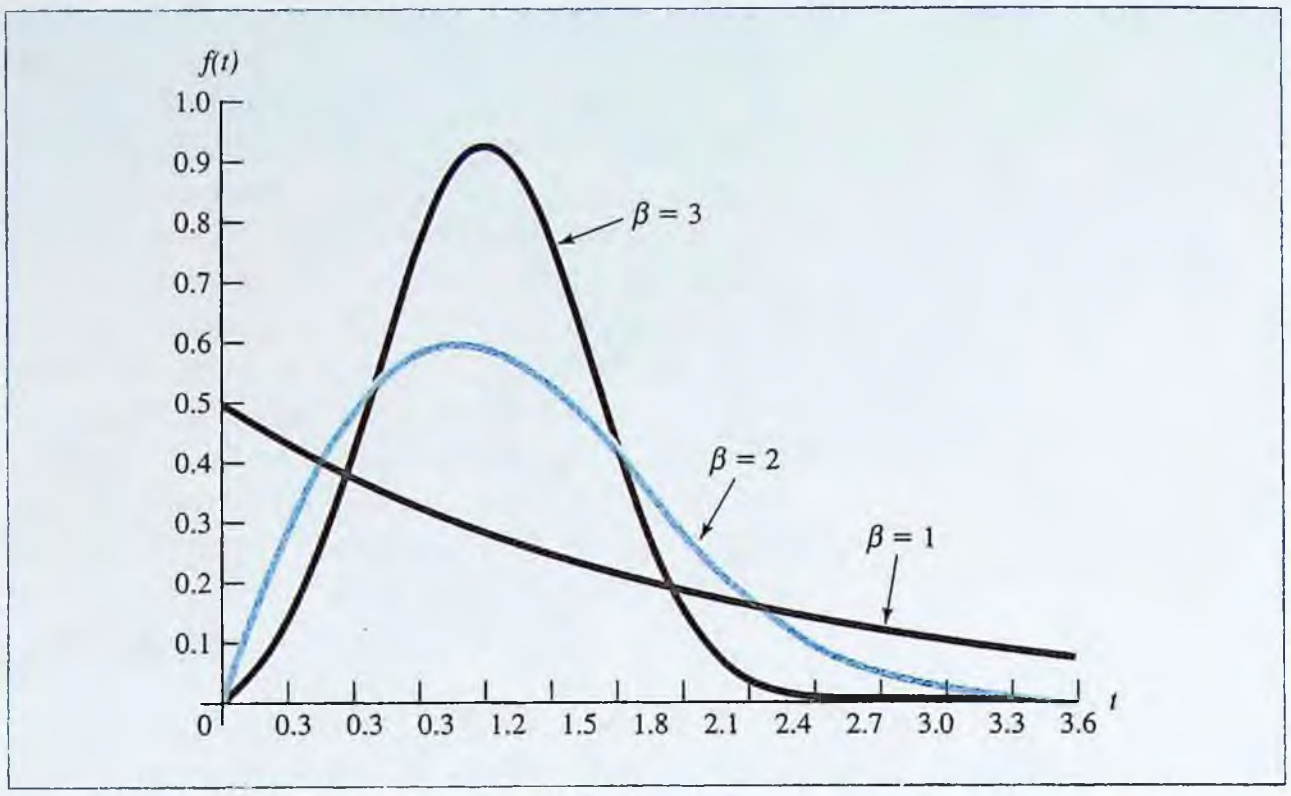


FIGURA 1 Tres gráficas de función de densidad de Weibull, con parámetros α =0.5 en cada caso y β = 1, 2 y 3.

Fuente: Steven Nahmias, *Production and Operations Analysis*, 4a ed.© 2001. The McGraw-Hill Companies, Inc. N. Y.

huracanes, para determinar qué tan eficientes son los nuevos tratamientos para el cáncer, para establecer primas para pólizas de seguros, para hallar la mejor mezcla de especies de árboles que deben plantarse en la producción de papel, para establecer procedimientos de conservación para sustituir el alumbrado de calles en una ciudad, para estimar el riesgo de que una plataforma marina de perforación caiga si está diseñada para soportar olas hasta de cierta altura, para determinar la viabilidad de molinos de viento, para determinar la mejor estrategia de volar minerales con dinamita, para manejar inventarios de piezas de repuesto y para estudiar conflictos en la unión de carriles en una carretera. También se han empleado para estudiar el límite de elasticidad y la resistencia del acero a la fatiga, la resistencia a la tracción de fibras ópticas, la pureza del carbón, el tamaño de gotitas en aerosoles, la corrosión crateriforme en tubos, el tiempo que un organismo tarda en morir después de su exposición a carcinógenos, en la fractura de concretos, la rapidez de cambios tecnológicos, la resistencia del vidrio a la fractura, el tamaño de témpanos de hielo flotantes, la altura de olas, la frecuencia de inundaciones y temblores, las fluctuaciones de temperatura, cantidades de precipitación, el tamaño de gotas, los tiempos de entrega de inventarios y distribuciones de rapidez de viento, entre otras cosas.

Para muchos sistemas complejos, la frecuencia de fallo no es una función creciente ni decreciente. En lugar de esto, la frecuencia de fallo parece una tina, como se ve en la figura 2. Cuando el producto es joven, los defectos de manufactura producen una elevada frecuencia inicial de fallos en la fase de fallas prematuras. Una vez que han fallado los componentes malos, la frecuencia de falla permanece relativamente constante hasta que el sistema alcanza una fase donde empieza a desgastarse y aumenta la frecuencia de fallo. Para construir modelos donde la frecuencia de fallo parece una tina se necesitan funciones más complicadas que las introducidas aquí. Para conocer más acerca de estos modelos, invitamos a consultar libros dedicados a la teoría de la confiabilidad.

www.FreeLibros.com

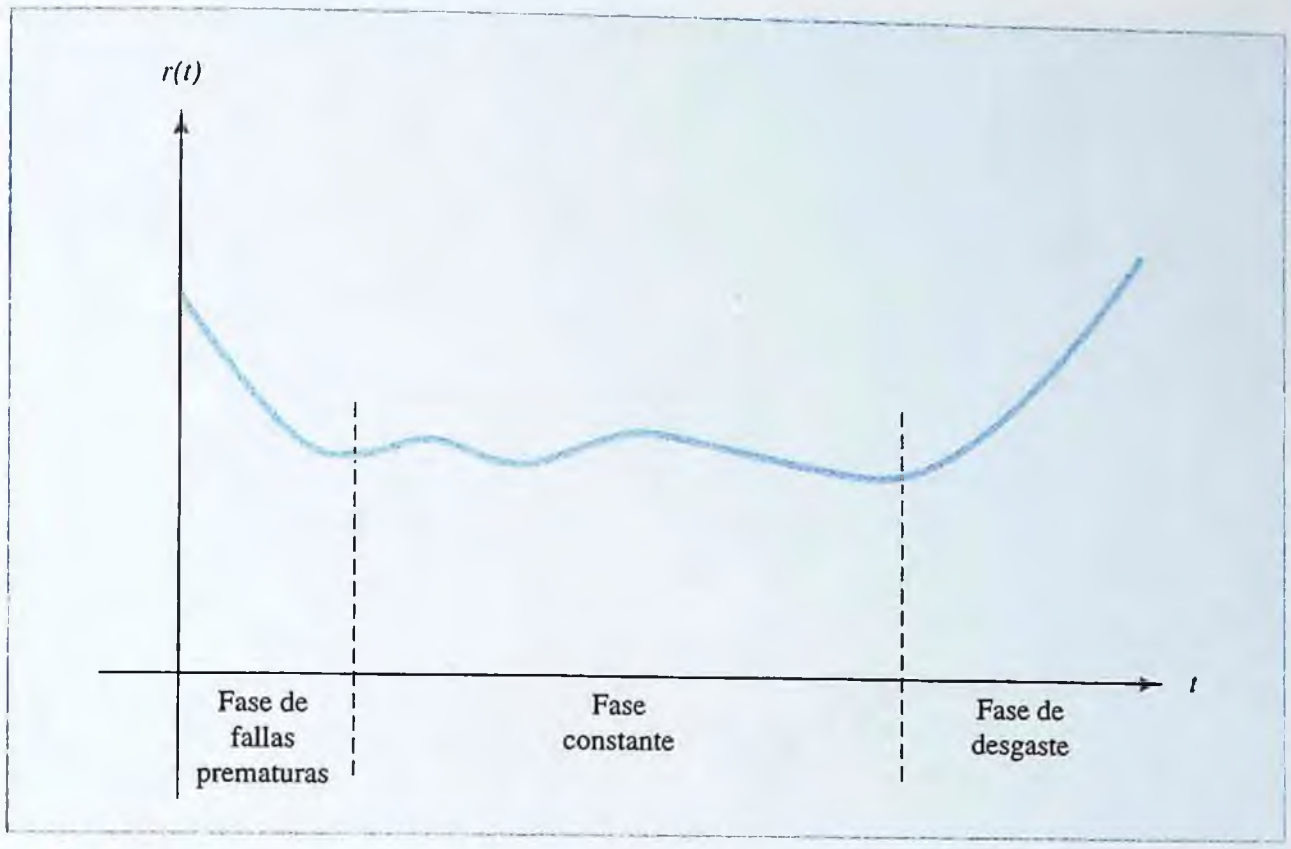


FIGURA 2 Gráfica de una función de frecuencia de falla típica, en forma de tina, para un sistema complejo.

Fuente: Steven Nahmias, *Production and Operations Analysis*. The McGraw-Hill Companies, New York, 2001.

Preguntas

1. Suponga que la función de falla es una constante positiva, es decir, $r(t) = \lambda$ para $\lambda > 0$. Demuestre que la función de confiabilidad $R(t)$ satisface la ecuación diferencial separable $R'(t) = -\lambda R(t)$. Resuelva esta ecuación diferencial para hallar $R(t)$. ¿Qué clase de función $f(t)$ de densidad de probabilidad corresponde a $R(t)$ en este caso?
2. Demuestre que cuando el parámetro b en una distribución de Weibull satisface $\beta = 1$, entonces la distribución es exponencial.
3. Suponga que la variable aleatoria X que representa el tiempo de fallo de un sistema (el tiempo que funciona hasta que falla) tiene una distribución exponencial.
   a) Demuestre que la probabilidad de que un sistema, que está funcionando en el momento t y fallará en las siguientes s unidades de tiempo, no depende de t. Esto es, la probabilidad de que falle el sistema en un tiempo particular no depende de cuánto tiempo ha estado trabajando.
   b) La propiedad del inciso *a*) se describe diciendo que *una variable aleatoria exponencial no tiene memoria*. Demuestre que una variable aleatoria geométrica tampoco tiene memoria.
4. Verifique que la ecuación dada para la función de confiabilidad $R(t)$ para una distribución de Weibull con parámetros α y β es correcta.
5. Suponga que la función de confiabilidad para un modelo de computadora es $R(t) = e^{-0.008t^{1.98}}$. Encuentre la función de frecuencia de fallo para estas computadoras.
6. Suponga que la función de frecuencia de fallo para un modelo de copiadora es $r(t) = 3.11t^{1.5}$, con tiempo medido en meses. Encuentre la probabilidad de que una de estas copiadoras continúe en servicio durante al menos 6 meses.

www.FreeLibros.com

REFLEXIONE ACERCA DE...

7. Encuentre la probabilidad de que la rodilla artificial estudiada en el texto dure al menos 30 años.
8. Sea $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$, donde $\alpha > 0$. Demuestre que si la variable aleatoria X tiene una distribución de Weibull con parámetros α y β, entonces

$$E(X) = \alpha^{-1/\beta}\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

y

$$\text{Var}(X) = \alpha^{-2/\beta}\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - [E(X)]^2$$

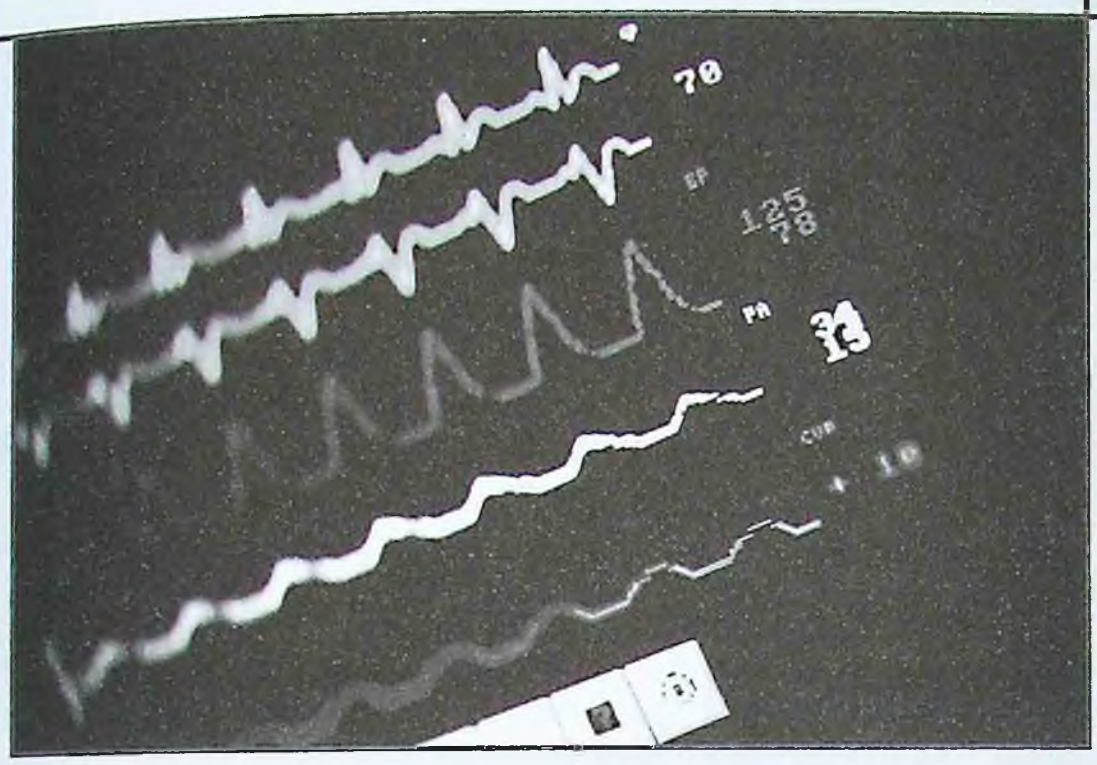
Referencias

Steven Nahmias, *Production and Operations Analysis*, 4a. ed., The McGraw-Hill Companies, Inc., New York, NY, 2001.

Wallace R. Blischke y D. N. Prabhakar Murthy, *Reliability: Modeling, Prediction, and Optimization*, John Wiley and Sons, New York, 2000.

www.FreeLibros.com

CAPÍTULO 11



El comportamiento periódico, como por ejemplo la forma de un electrocardiograma, puede ser modelado usando funciones trigonométricas.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1 Las funciones trigonométricas
2 Derivación e integración de funciones trigonométricas
3 Aplicaciones adicionales de las funciones trigonométricas
Resumen del capítulo
Términos, símbolos y fórmulas importantes
Revisión del capítulo 11
Problemas de repaso
¡Explore! Actualización
Reflexione acerca de...

www.FreeLibros.com

SECCIÓN 11.1 | Las funciones trigonométricas

En este capítulo se introducen algunas funciones que se usan frecuentemente en las ciencias naturales para estudiar fenómenos periódicos o rítmicos, como por ejemplo, las oscilaciones, el movimiento periódico de los planetas, y el ciclo respiratorio y el ritmo cardiaco de los animales. Estas funciones están relacionadas con la medición de ángulos y por esta razón desempeñan un importante papel en ciertas áreas como la arquitectura, la navegación y la agrimensura.

Ángulos

Un **ángulo** se forma cuando un segmento de recta del plano se hace girar respecto a otro alrededor de su extremo común. Se dice que el ángulo resultante es un **ángulo positivo** si la rotación es en dirección contraria al giro de las manecillas del reloj, y **ángulo negativo** si la rotación es en la dirección del giro de las manecillas del reloj. La situación se ilustra en la figura 11.1.



FIGURA 11.1 Ángulos positivo y negativo.

Medición de ángulos

Es probable que el lector ya esté familiarizado con el uso de grados para medir ángulos. Un **grado** es la cantidad en la que un segmento de recta debe girar para que su extremo libre trace $\frac{1}{360}$ de vuelta completa. Así, por ejemplo, una vuelta completa en el sentido contrario a las manecillas del reloj, que genera todo un círculo, contiene 360°, la mitad de una vuelta completa en sentido contrario a las manecillas del reloj contiene 180°, y un sexto de rotación completa en ese sentido contiene 60°. En la figura 11.2 se muestran algunos ángulos importantes.

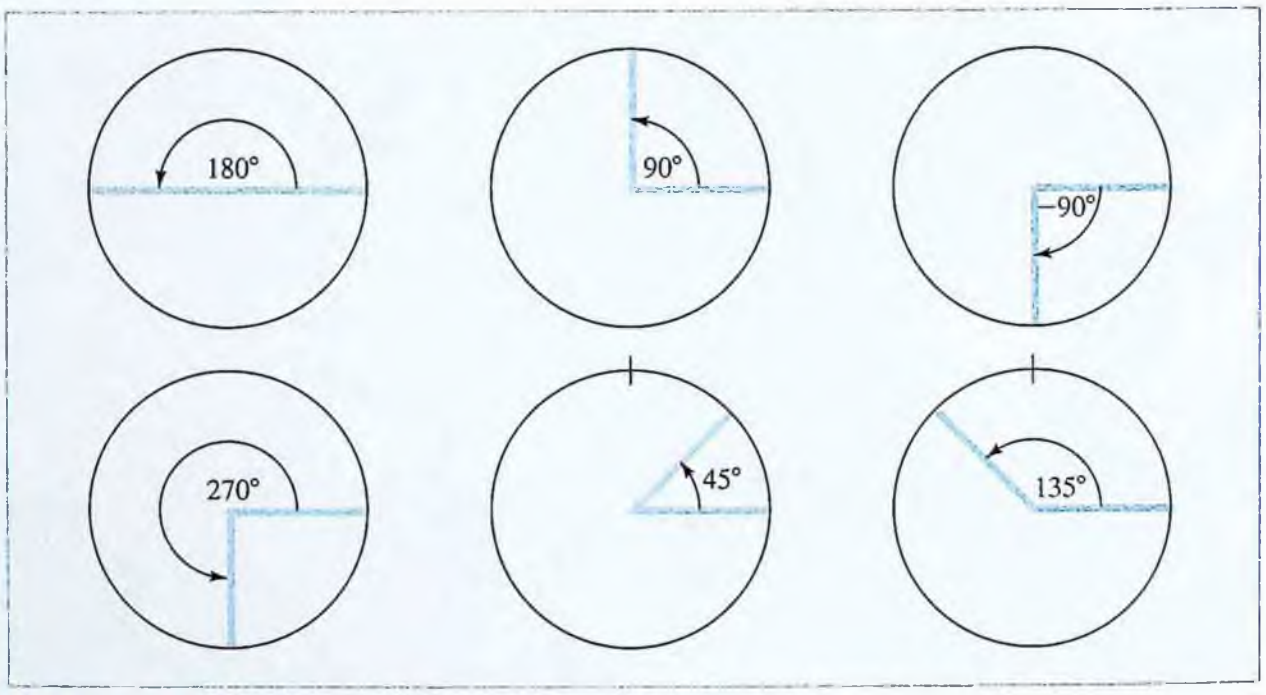


FIGURA 11.2 Ángulos medidos en grados.

Medida en radianes

Aun cuando la medición de ángulos en grados es práctica para numerosas aplicaciones geométricas, hay otra unidad de medición de ángulos llamada **radián** que lleva a

www.FreeLibros.com

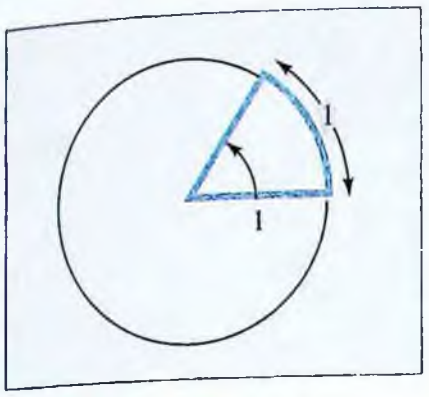


FIGURA 11.3 Ángulo de un radián.

reglas más sencillas para la derivación e integración de funciones trigonométricas. Un radián se define como la magnitud de la rotación que debe dar un segmento de recta de longitud unitaria, de modo que su extremo libre trace un arco de circunferencia de longitud unitaria. La situación se ilustra en la figura 11.3.

La circunferencia total de un círculo de radio 1 es 2π, por lo cual un ángulo de 2π radianes es igual a 360°, un ángulo de π radianes es igual a 180° y, en general, la relación entre radianes y grados está dada por la siguiente fórmula de conversión.

Fórmula de conversión

$$\frac{\text{grados}}{180} = \frac{\text{radianes}}{\pi}$$

El uso de esta fórmula está ilustrado en el ejemplo 11.1.1.

¡EXPLORE!

Use su calculadora graficadora para convertir 43°32′ a radianes; úsela también para convertir $\frac{\pi}{7}$ radianes a grados.

EJEMPLO | 11.1.1

a) Convierta 45° a radianes.

b) Convierta $\frac{\pi}{6}$ radianes a grados.

Solución

a) De la proporción $\frac{45}{180} = \frac{\text{radianes}}{\pi}$, se deduce que 45° es equivalente a $\frac{\pi}{4}$ radianes.

b) De la proporción $\frac{\text{grados}}{180} = \frac{\pi/6}{\pi}$ se deduce que $\frac{\pi}{6}$ radianes es equivalente a $\frac{180°}{6} = 30°$.

Para facilitar el trabajo, en la figura 11.4 se muestran seis de los ángulos más importantes junto con sus medidas en grados y en radianes.

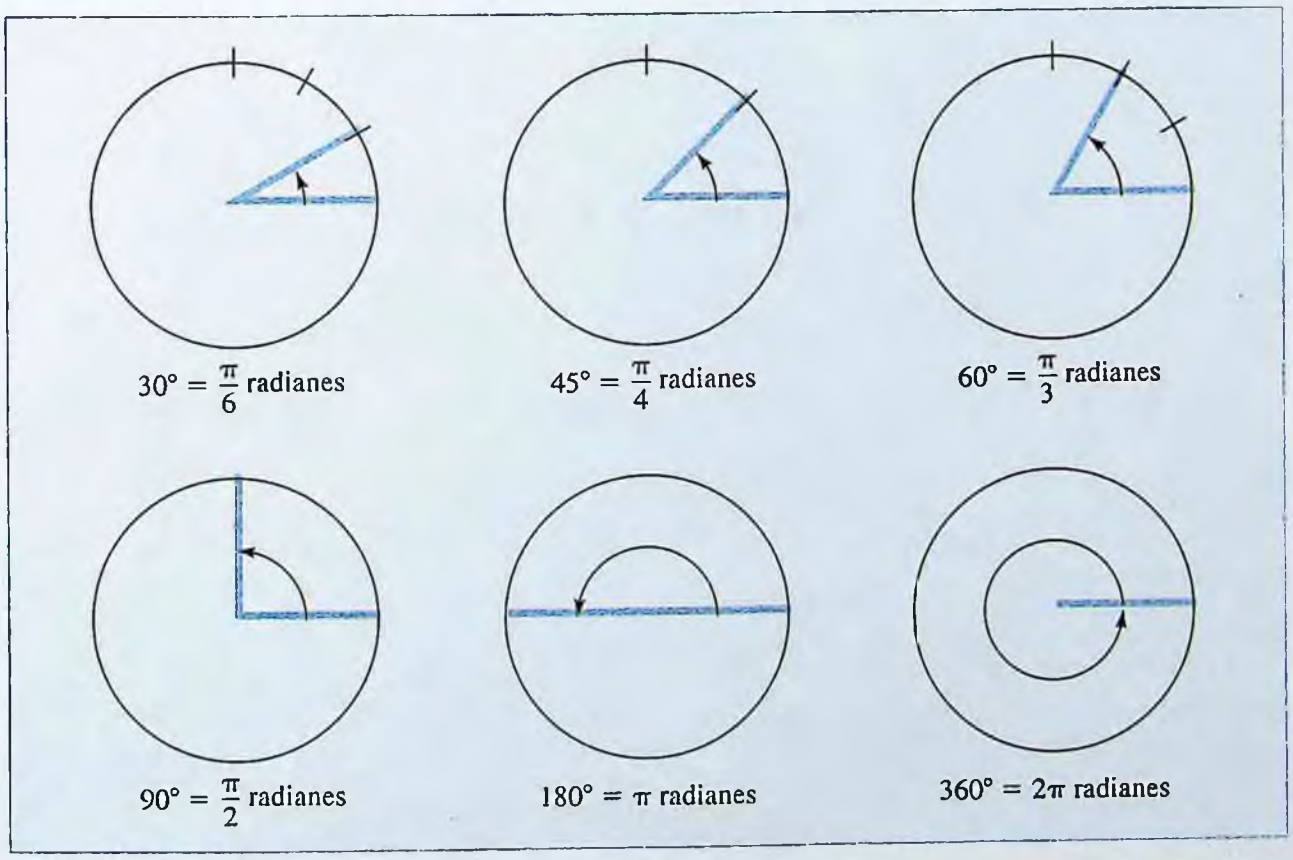


FIGURA 11.4 Los seis ángulos más importantes en grados y en radianes.

www.FreeLibros.com

El seno y el coseno

Suponga que el segmento de recta que une los puntos (0, 0) y (1, 0) sobre el eje x se hace girar un ángulo de θ radianes, de modo que el extremo libre del segmento se mueve de (1, 0) a un punto (x, y) como en la figura 11.5. Las coordenadas x y y del punto (x, y) se conocen, respectivamente, como el **coseno** y **seno** del ángulo θ. El símbolo cos θ se utiliza para denotar el coseno de θ, y sen θ se usa para denotar su seno.

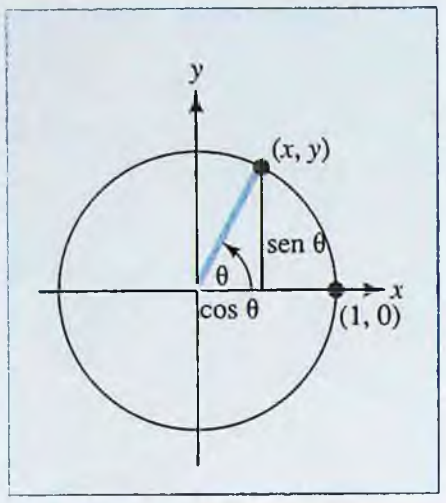


FIGURA 11.5 Seno y coseno de un ángulo.

El seno y el coseno ■ Para cualquier ángulo θ,

$$\cos \theta = x \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} \theta = y$$

donde (x, y) es el punto al que es llevado (1, 0) por una rotación de θ radianes alrededor del origen.

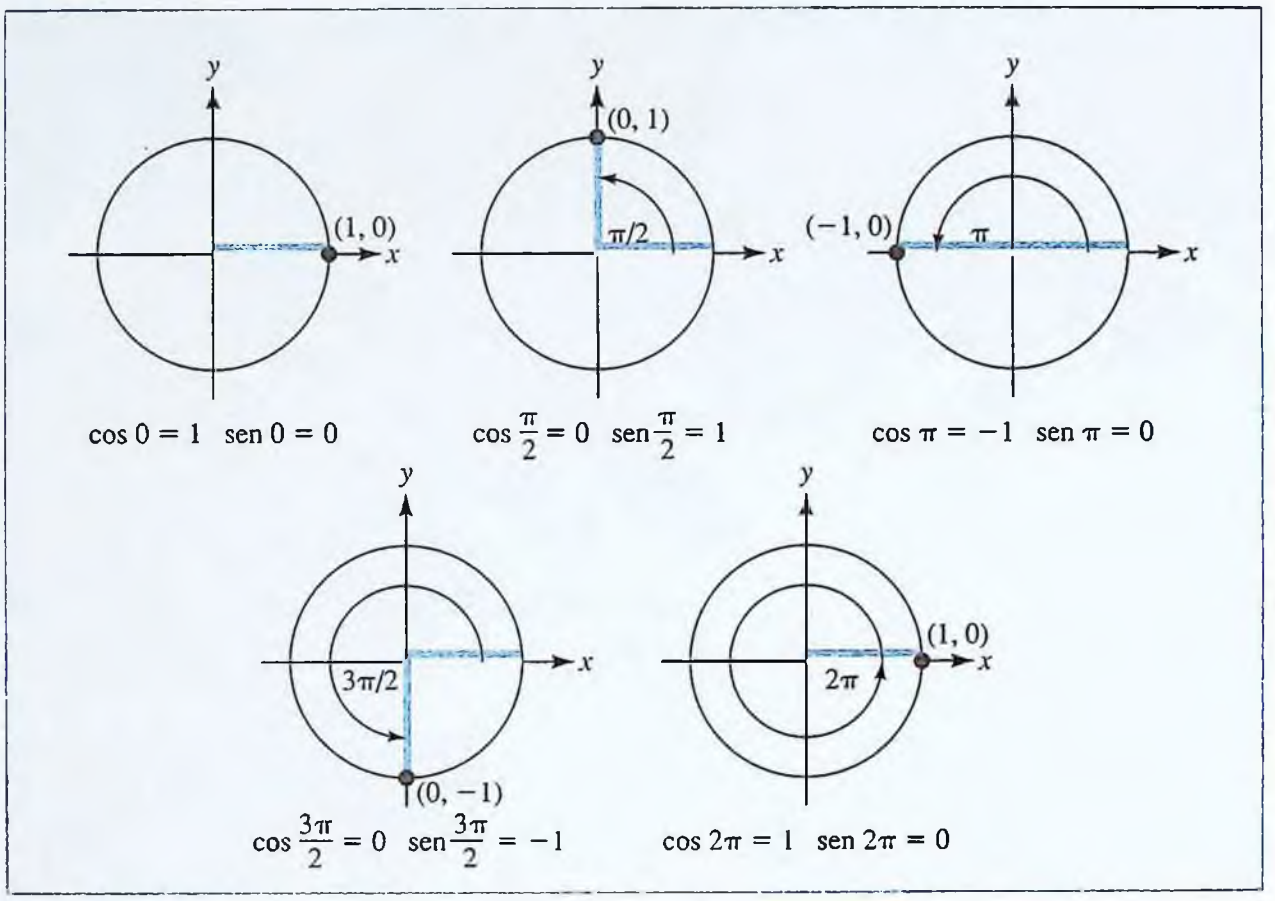


FIGURA 11.6 Seno y coseno de múltiplos de $\frac{\pi}{2}$.

Los valores de seno y coseno para múltiplos de $\frac{\pi}{2}$ se pueden leer de la figura 11.6 y se resumen en la siguiente tabla:

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\cos\theta$	1	0	−1	0	1
$\operatorname{sen}\theta$	0	1	0	−1	0

¡EXPLORE!

Use su calculadora graficadora para hallar cos (-1.3π), sen 189.4° y cos 256°35′.

El seno y coseno de unos pocos de otros ángulos importantes también son fáciles de obtener geométricamente, como veremos en breve. Para otros ángulos, use la tabla III y el final de este libro, o su calculadora, para hallar el seno y coseno.

www.FreeLibros.com

Propiedades elementales del seno y el coseno

Como hay 2π radianes en una rotación completa, se deduce que

$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta \qquad \text{y} \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$

Es decir, las funciones seno y coseno son **periódicas** con periodo 2π. La situación se ilustra en la figura 11.7.

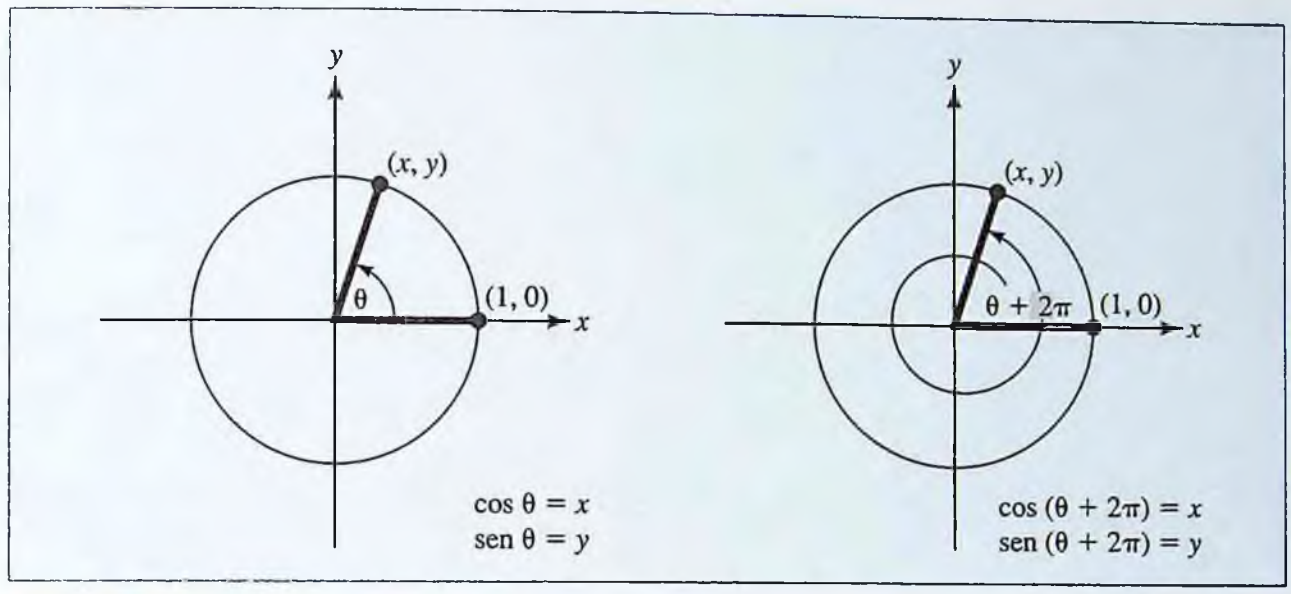


FIGURA 11.7 Periodicidad de sen θ y cos θ.

Como los ángulos negativos corresponden a rotaciones en el sentido del giro de las manecillas de un reloj, se deduce que

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \text{y} \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

Esto se ilustra en la figura 11.8.

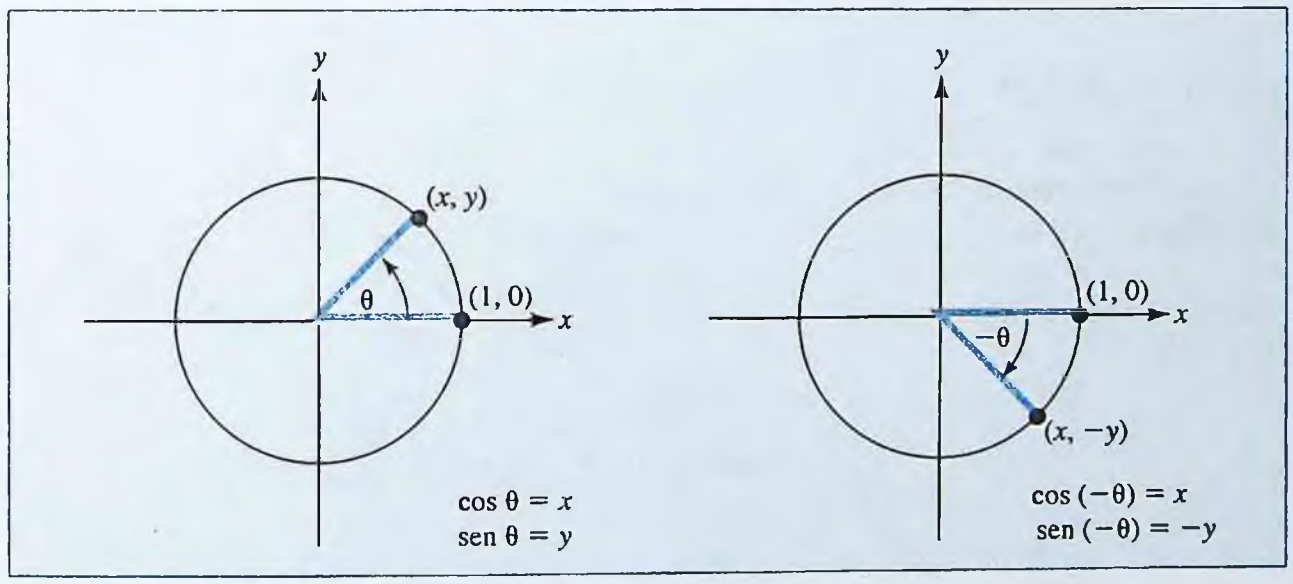


FIGURA 11.8 Seno y coseno de ángulos negativos.

Propiedades del seno y el coseno

$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta \qquad \text{y} \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$
$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \text{y} \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

El uso de estas propiedades se ilustra en el ejemplo 11.1.2.

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 11.1.2

Evalúe las siguientes expresiones.

a) $\cos(-\pi)$ **b)** $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **c)** $\cos 3\pi$ **d)** $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}$

Solución

a) Como $\cos \pi = -1$, se deduce que

$$\cos(-\pi) = \cos \pi = -1$$

b) Como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, se deduce que

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = -1$$

c) Como $3\pi = \pi + 2\pi$ y $\cos \pi = -1$, se deduce que

$$\cos 3\pi = \cos(\pi + 2\pi) = \cos \pi = -1$$

d) Como $\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, se deduce que

$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$$

Gráficas de sen θ y cos θ

De las definiciones de seno y coseno es obvio que cuando θ va de 0 a 2π, la función sen θ oscila entre 1 y -1, empezando con sen $0 = 0$, y la función cos θ oscila entre 1 y -1, empezando con $\cos 0 = 1$. Esta observación, junto con las propiedades elementales previamente obtenidas, sugiere que las gráficas de las funciones sen θ y cos θ semejan las curvas de las figuras 11.9 y 11.10, respectivamente.

¡EXPLORE!

Grafique la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ usando la pantalla **ZTrig** en el menú de teclas **ZOOM**. Trace $f(x)$ para x cerca pero menos de $\pi/2$. También determine $\lim_{x\to\pi} \operatorname{sen} x$.

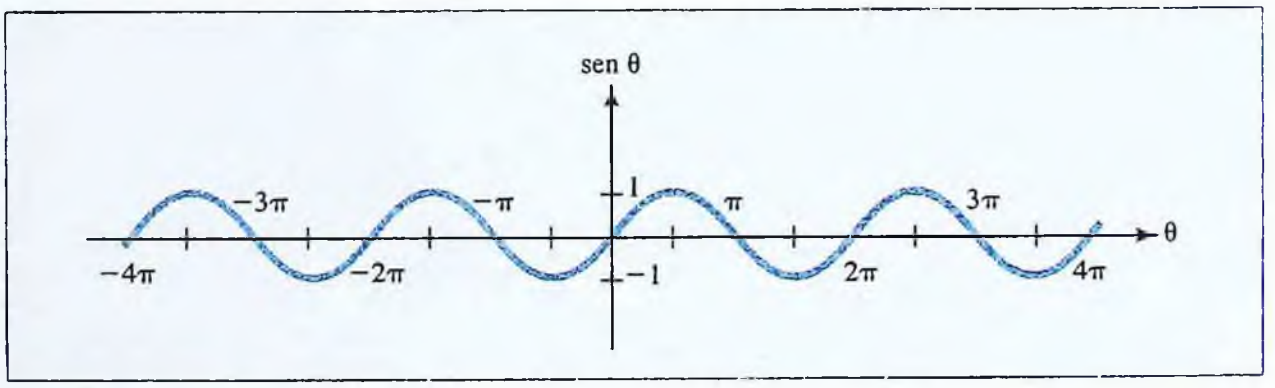


FIGURA 11.9 Gráfica de sen θ.

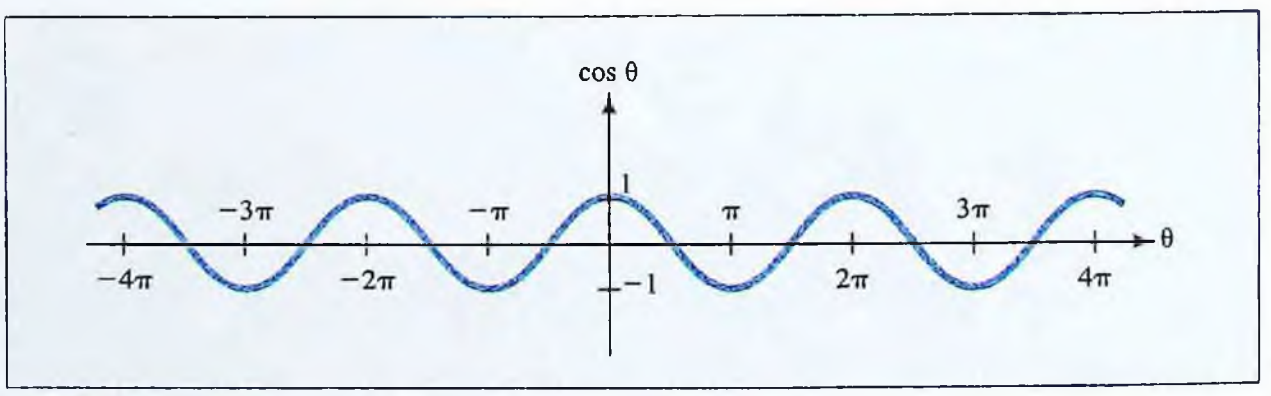


FIGURA 11.10 Gráfica de cos θ.

www.FreeLibros.com

Otras funciones trigonométricas

Otras cuatro útiles funciones trigonométricas se pueden definir en términos del seno y coseno como sigue.

Tangente, cotangente, secante y cosecante ▣ Para cualquier ángulo θ,

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

siempre que los denominadores no sean cero.

¡EXPLORE!

Grafique $f(x) = \tan x$ usando la pantalla **ZTrig** del menú de teclas **ZOOM**. Trace $f(x)$ para x cerca pero no igual a $\pi/2$ y determine $\lim_{x\to\pi/2^-} \tan x$

EJEMPLO 11.1.3

Evalúe las siguientes expresiones.

a) $\tan\pi$ ***b)*** $\cot\dfrac{\pi}{2}$ ***c)*** $\sec(-\pi)$ ***d)*** $\csc\left(-\dfrac{5\pi}{2}\right)$

Solución

a) Como $\operatorname{sen}\pi = 0$ y $\cos\pi = -1$, se deduce que

$$\tan\pi = \frac{\operatorname{sen}\pi}{\cos\pi} = \frac{0}{-1} = 0$$

b) Como $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1$ y $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, se deduce que

$$\cot\frac{\pi}{2} = \frac{\cos(\pi/2)}{\operatorname{sen}(\pi/2)} = \frac{0}{1} = 0$$

c) Como $\cos\pi = -1$, se deduce que

$$\sec(-\pi) = \frac{1}{\cos(-\pi)} = \frac{1}{\cos\pi} = -1$$

d) Como $\dfrac{5\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi$ y $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1$, se deduce que

$$\csc\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{sen}(-5\pi/2)} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(5\pi/2)} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\pi/2)} = -1$$

Triángulos rectángulos

Si el lector ya ha estudiado trigonometría, puede recordar las siguientes definiciones de seno, coseno y tangente basadas en las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo como el de la figura 11.11.

www.FreeLibros.com

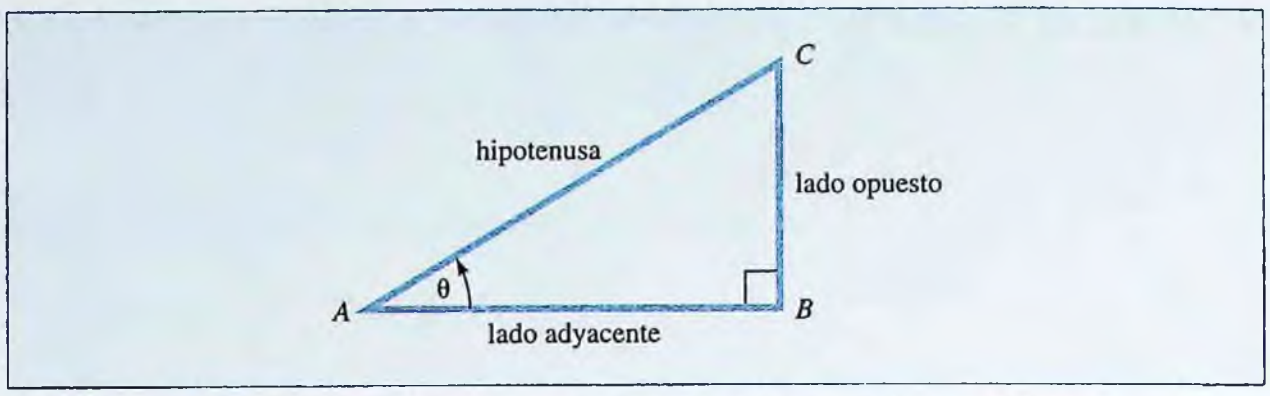


FIGURA 11.11 Triángulo empleado para definir funciones trigonométricas.

Trigonometría de triángulos rectángulos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}}$$

Las definiciones de funciones trigonométricas que se han visto en esta sección, y que comprenden las coordenadas de puntos en un círculo de radio 1, son equivalentes a las definiciones de trigonometría. Para ver esto, superponga un sistema de coordenadas xy sobre el triángulo ABC como se ve en la figura 11.12 y dibuje el círculo de radio 1 que está centrado en el origen.

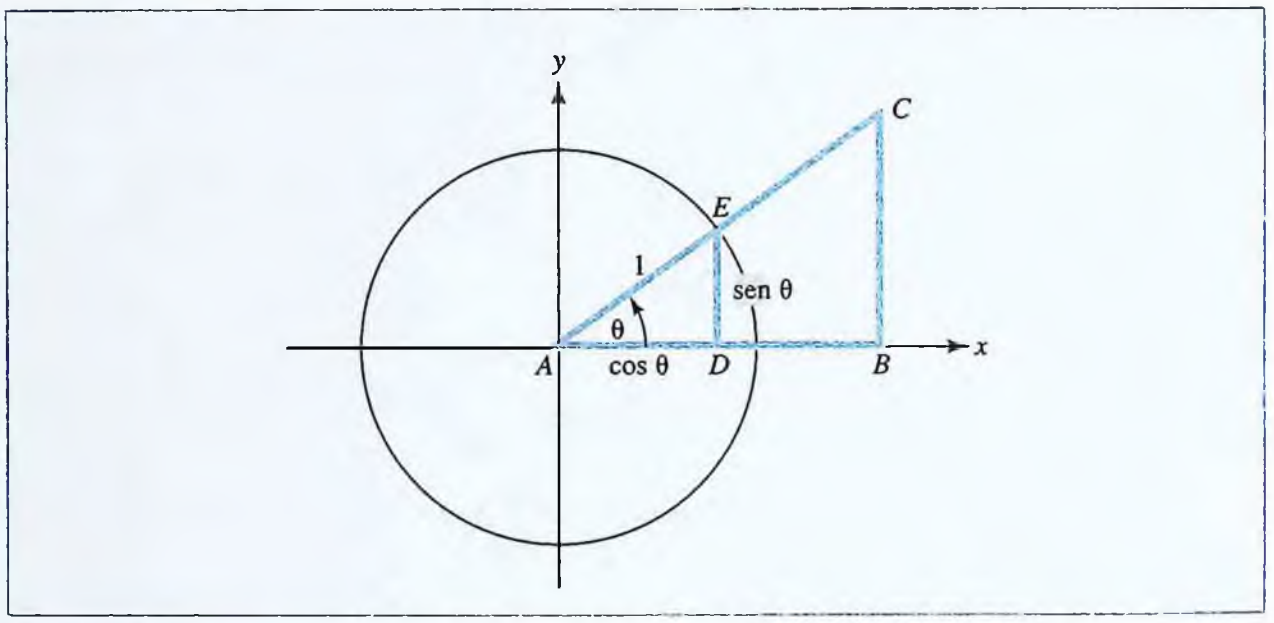


FIGURA 11.12 Triángulos semejantes.

Como ABC y ADE son triángulos semejantes, se tiene que

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

Pero la longitud AD es la coordenada x del punto E sobre el círculo, y por tanto, por la definición del coseno, $AD = \cos\theta$. Además,

$$AE = 1 \qquad AB = \text{lado adyacente} \qquad \text{y} \qquad AC = \text{hipotenusa}$$

www.FreeLibros.com

Por tanto,

$$\cos\theta = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \text{o} \qquad \cos\theta = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}}.$$

Como práctica acostúmbrese a que argumentos similares conduzcan a las fórmulas para seno y tangente

Cálculos con triángulos rectángulos

Numerosos cálculos donde aparecen funciones trigonométricas se pueden realizar fácil y rápidamente con ayuda de triángulos rectángulos apropiados. Por ejemplo, del bien conocido triángulo de 30-60-90 de la figura 11.13 se puede ver de inmediato que

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

o bien, usando medidas en radianes,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

A continuación se da un ejemplo que ilustra aún mejor el uso de triángulos rectángulos.

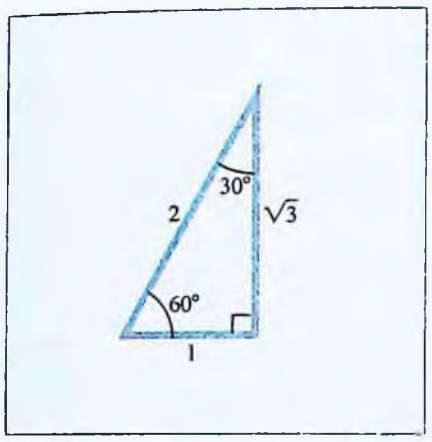


FIGURA 11.13 Un triángulo 30-60-90.

EJEMPLO | 11.1.4

Encuentre $\tan\theta$ si $\sec\theta = \frac{3}{2}$.

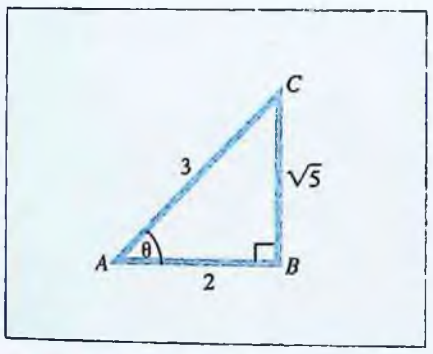


FIGURA 11.14 Triángulo rectángulo para el ejemplo 11.1.4.

Solución

Como $$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adyacente}}$$

empezamos por dibujar un triángulo rectángulo (figura 11.14) en el que la hipotenusa tiene longitud 3 y el lado adyacente al ángulo θ tiene longitud 2.

Por el teorema de Pitágoras,

$$\text{longitud de } BC = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

y por tanto $$\tan\theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Con el uso de triángulos rectángulos apropiados y las definiciones y propiedades elementales del seno y el coseno, ahora encuentre el seno y el coseno de los ángulos que aparecen en la siguiente tabla, que son frecuentemente empleados.

Tabla de valores de seno y coseno frecuentemente empleados

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$\operatorname{sen}\theta$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1

www.FreeLibros.com

Identidades trigonométricas

Una **identidad** es una ecuación que se cumple para todos los valores de su variable o variables. Las identidades que comprenden funciones trigonométricas se denominan **identidades trigonométricas** y se pueden usar para simplificar expresiones trigonométricas. El lector ya ha visto algunas identidades trigonométricas elementales en esta sección. Por ejemplo, las fórmulas

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$

son identidades porque son válidas para todos los valores de θ. Casi todos los textos de trigonometría contienen listas con docenas de identidades trigonométricas; por fortuna, en este libro se necesitarán sólo unas pocas de ellas.

Una de las identidades trigonométricas más importantes y bien conocidas es consecuencia sencilla del teorema de Pitágoras. Esta identidad expresa que

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

donde $\operatorname{sen}^2\theta$ representa $(\operatorname{sen}\theta)^2$ y $\cos^2\theta$ representa $(\cos\theta)^2$. Para ver por qué es válida esta identidad, vea la figura 11.15, que muestra un punto (x, y) en un círculo de radio 1. Por definición,

$$y = \operatorname{sen}\theta \qquad \text{y} \qquad x = \cos\theta$$

y, por el teorema de Pitágoras,

$$y^2 + x^2 = 1$$

de donde la identidad se deduce de inmediato.

REPASO

Justo-a-tiempo

Nótese que cualquier punto (x, y) sobre el círculo satisface a $y^2 + x^2 = 1$

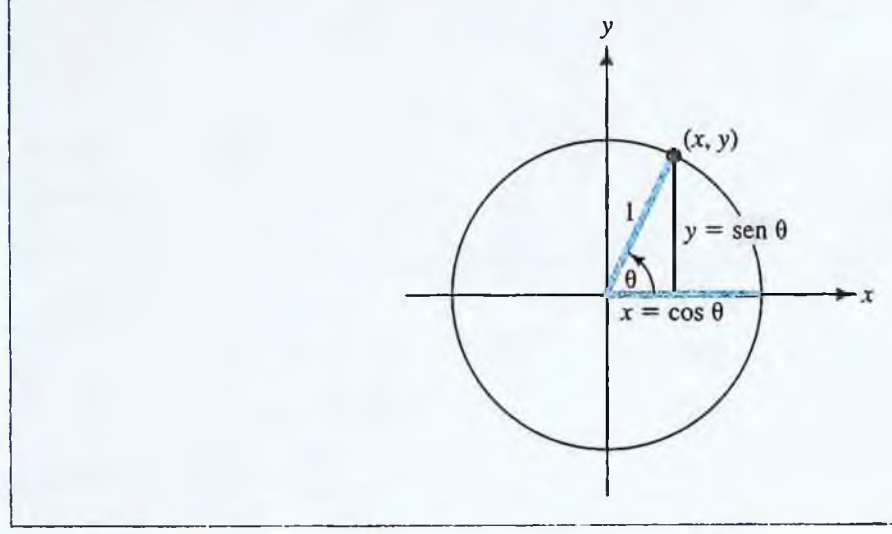


FIGURA 11.15 La identidad $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

Identidad pitagórica para seno y coseno ■ Para cualquier ángulo θ,

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Las siguientes fórmulas para el seno y el coseno de la suma de dos ángulos son particularmente útiles. En casi todos los textos de trigonometría se pueden hallar pruebas de estas identidades, pero aquí las omitiremos.

Fórmulas para seno y coseno de la suma de dos ángulos ■ Para cualesquier ángulos A y B

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

y

$$\cos(A + B) = \operatorname{sen} A \cos B - \cos A \operatorname{sen} B$$

www.FreeLibros.com

Si los ángulos A y B de las fórmulas para la suma de ángulos son iguales, las identidades se pueden rescribir como sigue.

Fórmulas para seno y coseno del ángulo duplo ■ Para cualquier ángulo θ,

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$
$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

Algunas de estas identidades trigonométricas se emplearán en la sección 11.2 para deducir las fórmulas para las derivadas de las funciones seno y coseno. También se pueden usar en la solución de ciertas ecuaciones trigonométricas, como se ilustra en el ejemplo 11.1.5.

EJEMPLO | 11.1.5

Encuentre todos los valores de θ en el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ que satisfacen la ecuación $\operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta + \operatorname{sen} \theta = 0$.

Solución

Use la identidad pitagórica

$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \qquad \text{o} \qquad \cos^2 \theta = 1 - \operatorname{sen}^2 \theta$$

para rescribir la ecuación original sin ningún término coseno como

$$\operatorname{sen}^2 \theta - (1 - \operatorname{sen}^2 \theta) + \operatorname{sen} \theta = 0$$

o bien

$$2 \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{sen} \theta - 1 = 0$$

y factorice para obtener

$$(2 \operatorname{sen} \theta - 1)(\operatorname{sen} \theta + 1) = 0$$

Las únicas soluciones de

$$2 \operatorname{sen} \theta - 1 = 0 \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$$

en el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$ son

$$\theta = \frac{\pi}{6} \qquad \text{y} \qquad \theta = \frac{5\pi}{6}$$

y la única solución de

$$\operatorname{sen} \theta + 1 = 0 \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen} \theta = -1$$

en el intervalo es

$$\theta = \frac{3\pi}{2}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación original en el intervalo especificado son $\theta = \frac{\pi}{6}, \theta = \frac{5\pi}{6}$, y $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

¡EXPLORE!

Vea el ejemplo 11.1.5. Introduzca $Y1=\operatorname{sen}(X)^2-\cos(X)^2+\operatorname{sen}(X)$ en el editor de ecuaciones de su calculadora graficadora. Grafique usando la pantalla $[0, 2\pi]\pi/2$ por $[-2, 2].5$. Use la tecla **TRACE** o las funciones para hallar raíces de su calculadora, para hallar los puntos donde la gráfica de la función corta al eje x. Compare sus resultados con los calculados en el ejemplo.

www.FreeLibros.com

Aplicación Es frecuente que en fenómenos naturales aparezcan formas cíclicas que pueden ser descritas por funciones trigonométricas. En el ejemplo 11.1.6, se examina una aplicación médica. En las secciones 11.2 y 11.3 se examinarán más aplicaciones de modelación donde aparecen derivación e integración de funciones trigonométricas.

EJEMPLO | 11.1.6

Un aparato de observación de signos vitales de un paciente hospitalizado proporciona información que sugiere modelar la presión sanguínea del paciente con la función trigonométrica

$$P(t) = 108 + 27 \cos 8t$$

donde el tiempo t se mide en segundos y P está en milímetros de mercurio.

a) ¿Cuál es la presión (sistólica) máxima P_s del paciente? ¿Cuál es la presión (diastólica) mínima P_d?

b) Una pulsación es el intervalo entre picos sistólicos sucesivos. ¿Cuál es la frecuencia cardiaca del paciente (pulsaciones por minuto)?

Solución

a) Cuando $\cos 8t = 1$, la función de presión sanguínea tiene su valor máximo de

$$P_s = 108 + 27(1) = 135$$

Cuando $\cos 8t = -1$, la función de presión sanguínea tiene su valor mínimo de

$$P_d = 108 + 27(-1) = 81$$

b) La presión sistólica se presenta cuando $\cos 8t = 1$. Como la función coseno se repite cada 2π radianes, se deduce que cada pulsación toma t_h segundos, donde

$$8t_h = 2\pi$$
$$t_h = \pi/4$$

Por tanto, el número de pulsaciones que ocurre por minuto está dado por el producto

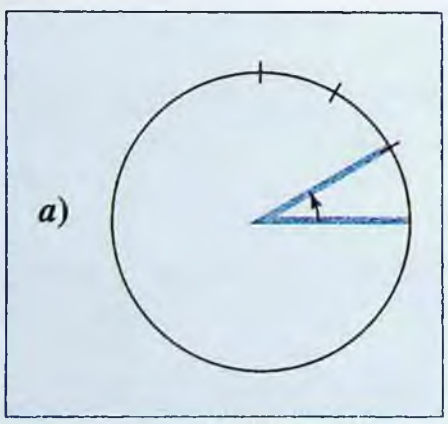
$$\left(\frac{\text{pulsación}}{\pi/4 \text{ segundos}}\right)\left(\frac{60 \text{ segundos}}{\text{minuto}}\right) = \frac{(60)(4)}{\pi} \approx 76.4$$

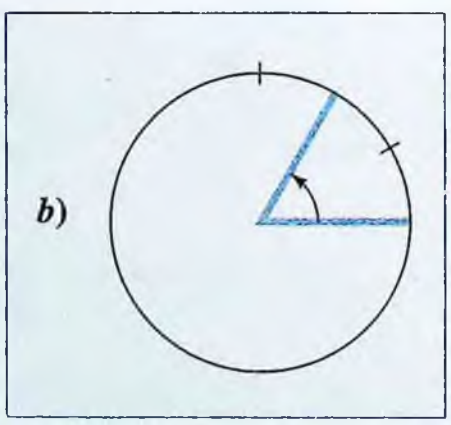
Se concluye que la frecuencia cardiaca es aproximadamente 76 pulsaciones por minuto.

PROBLEMAS | 11.1

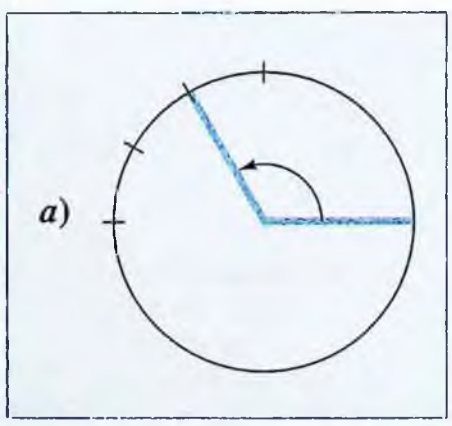
En los problemas 1 al 4 especifique el número de grados en cada ángulo indicado.

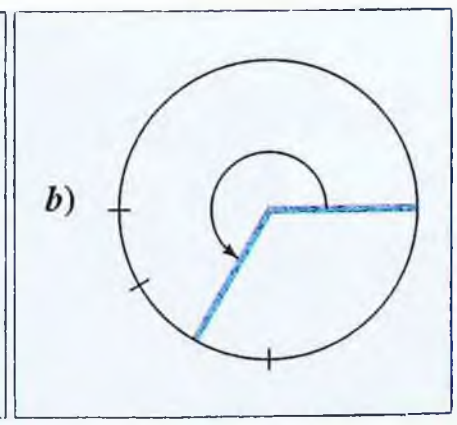
1.





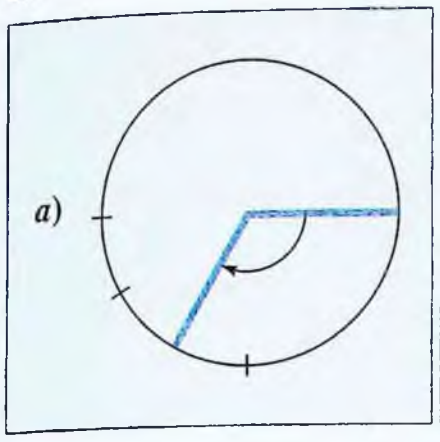
2.

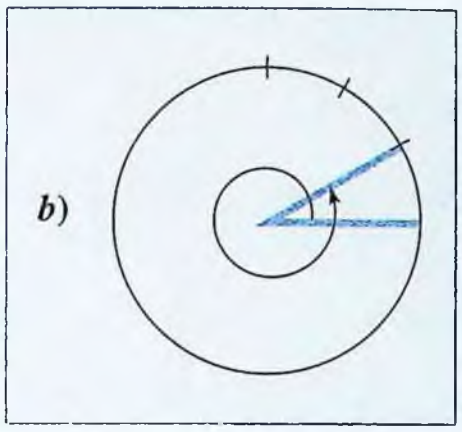




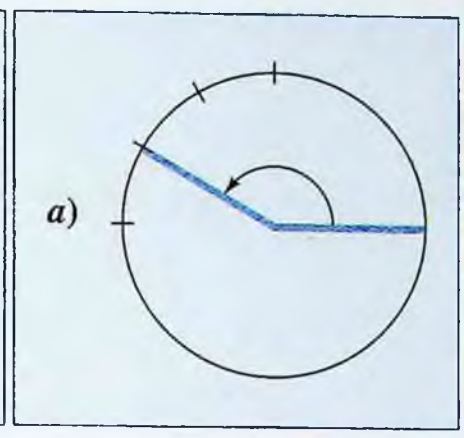
www.FreeLibros.com

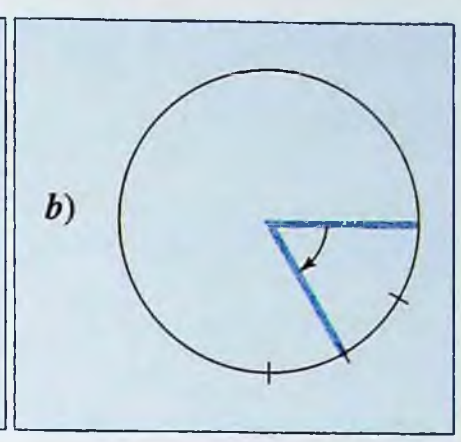
3.





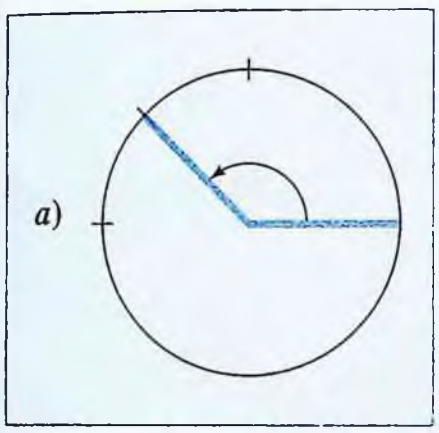
4.

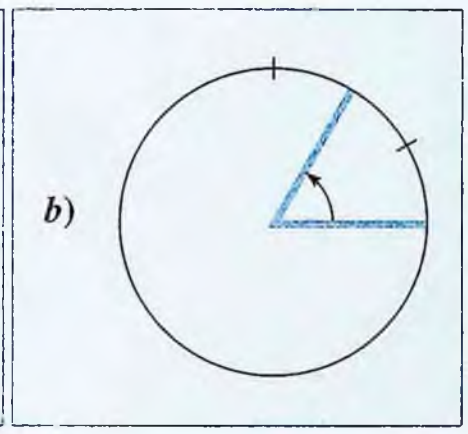




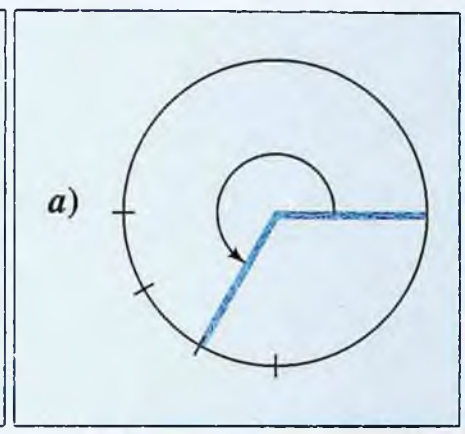
En los problemas 5 al 8 especifique el número de radianes en cada ángulo indicado.

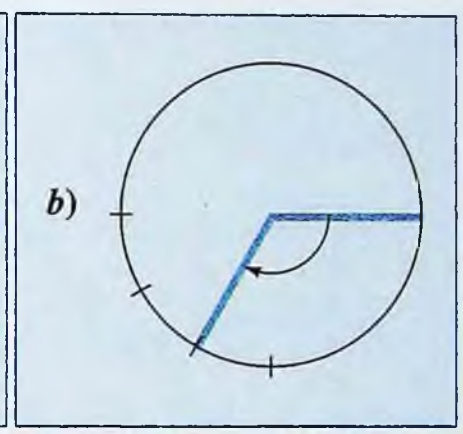
5.



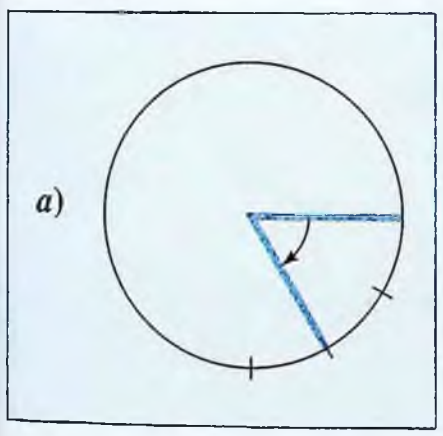


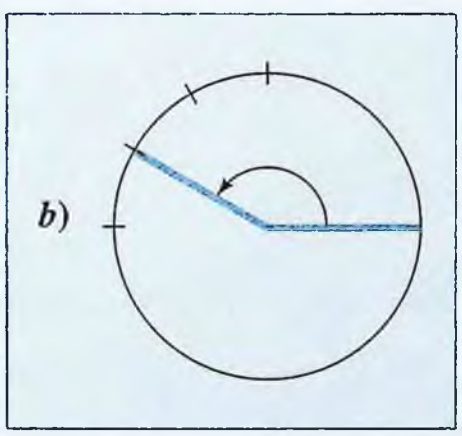
6.



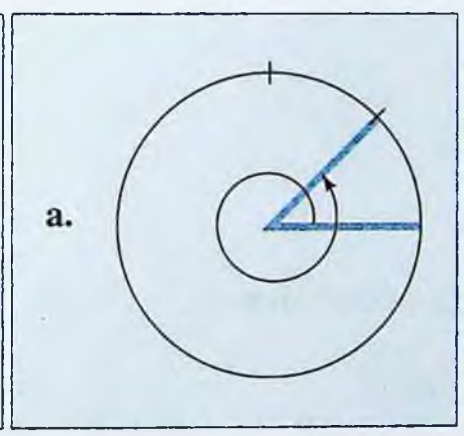


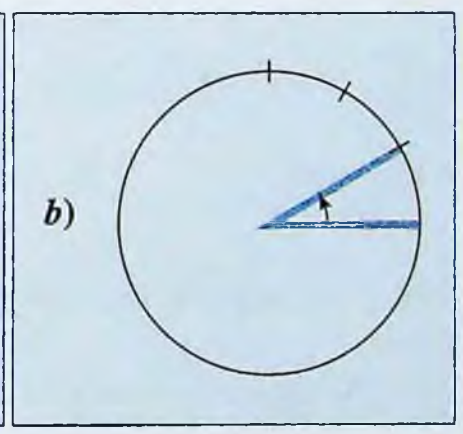
7.





8.





En los problemas 9 al 12 muestre gráficamente los ángulos indicados.

9. *a*) 60° *b*) 120°

10. *a*) −45° *b*) 135°

11. *a*) 45° *b*) −150°

12. *a*) 240° *b*) 405°

En los problemas 13 al 16 muestre gráficamente los ángulos con la medida indicada en radianes.

13. *a*) $3\pi/4$ *b*) $-2\pi/3$

14. *a*) $-\pi/6$ *b*) $5\pi/6$

15. *a*) $-5\pi/3$ *b*) $3\pi/2$

16. *a*) $-5\pi/4$ *b*) $7\pi/6$

En los problemas 17 al 20, convierta los ángulos indicados de grados a radianes.

17. *a*) 15° *b*) −240°

18. *a*) 30° *b*) 270°

19. *a*) 135° *b*) 540°

20. *a*) −150° *b*) 1°

www.FreeLibros.com

En los problemas 21 al 24 convierta los ángulos indicados de radianes a grados.

21. *a*) $5\pi/6$ *b*) $-\pi/12$

22. *a*) $2\pi/3$ *b*) $-3\pi/4$

23. *a*) 3π *b*) 1

24. *a*) 3 *b*) $13\pi/12$

En los problemas 25 al 44, evalúe la expresión dada sin usar la calculadora ni la tabla III del Apéndice.

25. $\cos \frac{7\pi}{2}$

26. $\operatorname{sen} 5\pi$

27. $\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{2}\right)$

28. $\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$

29. $\cot \frac{5\pi}{2}$

30. $\sec 3\pi$

31. $\csc\left(-\frac{7\pi}{2}\right)$

32. $\tan(-\pi)$

33. $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

34. $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

35. $\operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$

36. $\cos \frac{7\pi}{3}$

37. $\cot \frac{\pi}{3}$

38. $\sec \frac{\pi}{3}$

39. $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

40. $\cot\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$

41. $\csc \frac{2\pi}{3}$

42. $\tan \frac{\pi}{6}$

43. $\sec \frac{5\pi}{4}$

44. $\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$

45. Use un triángulo rectángulo para hallar $\cos \frac{\pi}{3}$ y $\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$.

46. Use un triángulo rectángulo para hallar $\cos \frac{\pi}{4}$ y $\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$.

47. Complete la siguiente tabla:

θ	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
$\operatorname{sen}\theta$								
$\cos\theta$								

48. Encuentre $\tan\theta$ si $\sec\theta = \frac{5}{4}$.

49. Encuentre $\tan\theta$ si $\csc\theta = \frac{5}{3}$.

50. Encuentre $\cos\theta$ si $\tan\theta = \frac{3}{4}$.

51. Encuentre $\tan\theta$ si $\cos\theta = \frac{3}{5}$.

52. Encuentre $\operatorname{sen}\theta$ si $\tan\theta = \frac{2}{3}$.

53. Encuentre $\sec\theta$ si $\cot\theta = \frac{4}{3}$.

www.FreeLibros.com

En los problemas 54 al 61 encuentre todos los valores de θ del intervalo especificado que satisfagan la ecuación dada.

54. $\cos\theta - \operatorname{sen} 2\theta = 0;\ 0 \le \theta \le 2\pi$

55. $3\operatorname{sen}^2\theta + \cos 2\theta = 2;\ 0 \le \theta \le 2\pi$

56. $\operatorname{sen} 2\theta = \sqrt{3}\cos\theta;\ 0 \le \theta \le \pi$

57. $\cos 2\theta = \cos\theta;\ 0 \le \theta \le \pi$

58. $2\cos^2\theta = \operatorname{sen} 2\theta;\ 0 \le \theta \le \pi$

59. $3\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2;\ 0 \le \theta \le \pi$

60. $2\cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta = 1;\ 0 \le \theta \le \pi$

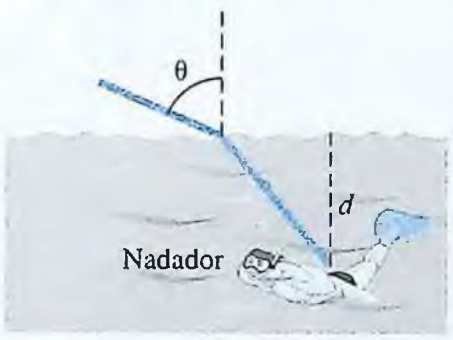
61. $\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + \cos\theta = 0;\ 0 \le \theta \le \pi$

62. REFRACCIÓN DE LUZ POR AGUA Un hombre está nadando a una profundidad d bajo el agua, pero, debido a que la luz es refractada por el agua, su profundidad *s aparente* es menor a d. En física,[1] se demuestra que si el hombre es visto desde un ángulo de incidencia θ, entonces

$$s = \frac{3d\cos\theta}{\sqrt{7 + 9\cos^2\theta}}$$

a) Si $d = 3$ metros y $\theta = 31°$, ¿cuál es la profundidad aparente del hombre?

b) Si la profundidad real es $d = 1.9$ metros, ¿qué ángulo de incidencia da una profundidad aparente de $s = 1.12$ metros?



PROBLEMA 62

63. BIORRITMO Jake piensa que su bienestar emocional varía periódicamente con el tiempo t en forma tal que el modelo se repite cada 28 días. Es decir, suponiendo que su estado emocional fuera neutro al nacer, su nivel emocional t días después será

$$E(t) = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{28}\right)$$

donde E_0 es su nivel emocional máximo.

a) ¿Cuál será el nivel emocional de Jake cuando cumpla 21 años? (Ignore los años bisiestos.)

b) Jake también piensa que su estado de bienestar físico sigue un modelo periódico semejante, sólo que esta vez el modelo se repite cada 23 días. Si P_0 es el nivel máximo de bienestar físico de Jake, encuentre una fórmula para su estado físico en el tiempo t y determine su nivel cuando Jake cumpla 21 años.

c) ¿Cuántos días después del cumpleaños 21 de Jake debe él esperar que sus ciclos emocional y físico esperados estén *ambos* a niveles máximos?

[1] R. A. Serway, *Physics*, 3a ed., Saunders, Filadelfia, 1992, p. 1007.

64. UTILIDAD Suponga que una compañía determina que la utilidad P (en cientos de dólares) obtenida por sus ventas durante la semana t (para $1 \le t \le 52$) de un año particular puede ser modelado por la función trigonométrica

$$P(t) = 75 + 55\cos\left[\frac{\pi(t - 15)}{26}\right]$$

a) ¿Cuál es la máxima utilidad semanal? ¿Cuándo se presenta?

b) ¿Cuál es la mínima utilidad semanal? ¿Cuándo se presenta?

65. MEDICINA Un aparato que observa la presión sanguínea de un paciente (medida en milímetros de mercurio) indica que la presión *sistólica* (máxima) es 130, mientras que la presión *diastólica* (mínima) es 82. El mismo paciente tiene una frecuencia cardiaca de 79 pulsaciones por minuto. Suponga que t segundos después de una lectura sistólica, la presión sanguínea es $P(t)$, donde P está modelada por una función de la forma

$$P(t) = A + B\cos kt$$

donde A, B y k son constantes positivas.

a) Use la información dada para hallar A, B y k.

b) ¿Cuál es la presión sanguínea del paciente después de 1 minuto?

66. A partir de las fórmulas de seno y coseno de la suma de dos ángulos, deduzca la fórmula para la tangente de la suma

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

67. Use la fórmula del seno de la suma para deducir la identidad

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

68. Use la fórmula del coseno de la suma para deducir la identidad

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\theta$$

69. Dé argumentos geométricos usando las coordenadas de puntos sobre un círculo de radio 1, para demostrar por qué las identidades de los problemas 67 y 68 son válidas.

70. Empezando con la identidad $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, deduzca la identidad $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$.

www.FreeLibros.com

SECCIÓN 11.2 Derivación e integración de funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son relativamente fácil de derivar e integrar, y en esta sección se obtendrán fórmulas para derivadas e integrales donde aparecen estas funciones. Se ilustrará el uso de estas fórmulas en el cálculo de razones de cambio, áreas y valor promedio. Luego, en la sección 11.3, se examinarán otra variedad de aplicaciones.

Fórmulas para las derivadas de seno y coseno

A continuación se muestran las fórmulas para las derivadas del seno y el coseno. Como estas fórmulas se usan con frecuencia junto con la regla de la cadena, también se indica la versión generalizada de cada fórmula. La demostración de la fórmula del seno se dará al final de esta sección, una vez que hayamos tenido oportunidad de ver la forma en que se usan las fórmulas en la práctica.

Derivadas del seno y el coseno ■ Si t se mide en radianes, entonces

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t) = \cos t \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dt}(\cos t) = -\operatorname{sen} t$$

y de acuerdo con la regla de la cadena, si $u = u(t)$ es una función derivable

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} u) = \cos u \frac{du}{dt} \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dt}(\cos u) = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dt}$$

¡EXPLORE!

Vea el ejemplo 11.2.1. Introduzca Y1 = sen(3X + 1) del editor de ecuaciones de su calculadora graficadora y grafique usando la pantalla $[-\pi, \pi]\pi/4$ por $[-2, 2].25$. Use la función de derivación numérica de su calculadora para hallar $f'(x)$ en $x = \pi/4$. ¿Por qué es negativa esta derivada? También encuentre y muestre la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = \pi/4$.

A continuación se muestran algunos ejemplos que ilustran el uso de estas fórmulas.

EJEMPLO | 11.2.1

Derive la función $f(t) = \operatorname{sen}(3t + 1)$.

Solución

Con el uso de la regla de la cadena para la función seno con $u(t) = 3t + 1$, se obtiene

$$f'(t) = 3 \cos(3t + 1)$$

EJEMPLO | 11.2.2

Derive la función $f(t) = \cos^2 t$.

Solución

Como

$$\cos^2 t = (\cos t)^2$$

se usa la regla de la cadena para potencias y la fórmula para la derivada del coseno para obtener

$$f'(t) = 2 \cos t\,(-\operatorname{sen} t) = -2 \cos t \operatorname{sen} t$$

REPASO

Justo-a-tiempo

La n potencia de $\cos x$ se escribe como $\cos^n x$; es decir,

$$(\cos x)^n = \cos^n x$$

Del mismo modo,

$$(\operatorname{sen} x)^n = \operatorname{sen}^n x$$

y

$$(\tan x)^n = \tan^n x$$

EJEMPLO | 11.2.3

Un cuerpo se mueve a lo largo de una recta en forma tal que en el momento t su posición está dada por $x = \operatorname{sen}(\pi - 3t) + \cos(\pi t)$. ¿Dónde está el cuerpo y cuáles son su velocidad y su aceleración en el momento $t = 0$?

www.FreeLibros.com

Solución

La posición del cuerpo en el momento $t = 0$ está dada por

$$x(0) = \text{sen } [\pi - 3(0)] + \cos [\pi(0)] = 0 + 1 = 1$$

La velocidad del cuerpo es

$$\begin{aligned} v(t) = x'(t) &= \cos (\pi - 3t)(-3) + [-\text{sen } (\pi t)(\pi)] \\ &= -3 \cos (\pi - 3t) - \pi \text{ sen } (\pi t) \end{aligned}$$

y su aceleración es

$$\begin{aligned} a(t) = v'(t) &= -3[-\text{sen } (\pi - 3t)(-3)] - \pi \cos (\pi t)(\pi) \\ &= -9 \text{ sen } (\pi - 3t) - \pi^2 \cos (\pi t) \end{aligned}$$

Por tanto, la velocidad y aceleración en el momento $t = 0$ son

$$v(0) = -3 \cos [\pi - 3(0)] - \pi \text{ sen } [\pi(0)] = -3(-1) - \pi(0) = 3$$

y

$$a(0) = -9 \text{ sen } [\pi - 3(0)] - \pi^2 \cos [\pi(0)] = -9(0) - \pi^2(1) = -\pi^2$$

Derivadas de otras funciones trigonométricas

Las fórmulas de derivación para el seno y el coseno se pueden usar para obtener fórmulas para las derivadas de otras funciones trigonométricas. Por ejemplo, la fórmula de la derivada de la tangente se puede obtener usando la regla de cociente como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\tan t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\text{sen } t}{\cos t}\right) \\ &= \frac{\cos t\,(\cos t) - \text{sen } t\,(-\text{sen } t)}{\cos^2 t} && \textit{regla del cociente} \\ &= \frac{\cos^2 t + \text{sen}^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t} && \textit{porque } \textit{sen}^2 t + \textit{cos}^2 t = 1 \\ &= \sec^2 t && \textit{porque sec } t = 1/\textit{cos } t \end{aligned}$$

Análogamente, se puede demostrar que

$$\frac{d}{dt}(\sec t) = \sec t \tan t$$

(véase el problema 54).

Derivadas de la tangente y la secante ■ Si t se mide en radianes, entonces

$$\frac{d}{dt}(\tan t) = \sec^2 t \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dt}(\sec t) = \sec t \tan t$$

y si $u = u(t)$ es una función derivable de t, entonces

$$\frac{d}{dt}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dt} \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dt}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dt}$$

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | 11.2.4

Derive la función $f(t) = \tan(t^2) + \sec(1 - 3t)$.

Solución

Usando la regla de la cadena, se obtiene

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{d}{dt}[\tan(t^2)] + \frac{d}{dt}[\sec(1 - 3t)] \\ &= \left[\sec^2(t^2)\right]\frac{d}{dt}(t^2) + \left[\sec(1 - 3t)\tan(1 - 3t)\right]\frac{d}{dt}(1 - 3t) \\ &= \left[\sec^2(t^2)\right](2t) + \left[\sec(1 - 3t)\tan(1 - 3t)\right](-3) \\ &= 2t\sec^2(t^2) - 3\sec(1 - 3t)\tan(1 - 3t) \end{aligned}$$

EJEMPLO | 11.2.5

Un observador ve que un avión se aproxima con una rapidez de 400 millas por hora y a una altitud de 4 millas. ¿A qué ritmo está cambiando la elevación de la línea de vista del observador, con respecto al tiempo, cuando la distancia horizontal entre el avión y el observador es 3 millas?

Solución

Denote por x la distancia horizontal entre el avión y el observador, por t el tiempo (en horas) y dibuje un diagrama que represente la situación como en la figura 11.16.

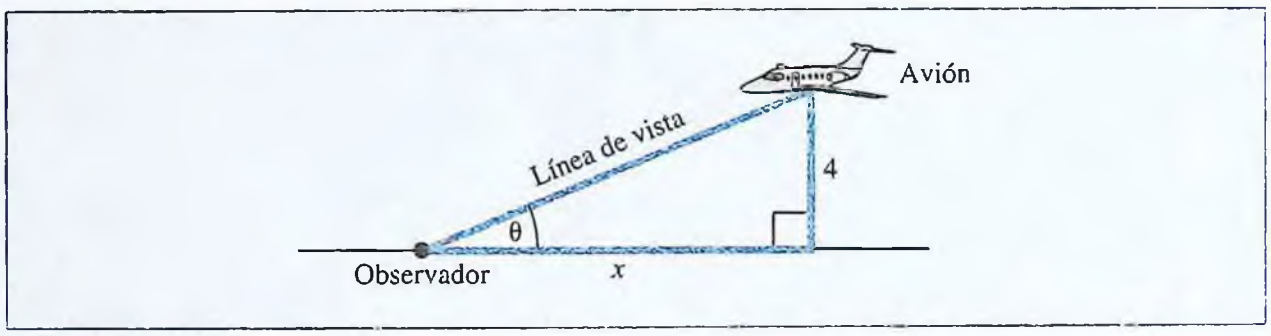


FIGURA 11.16 Observación de un avión que se aproxima.

Se sabe que $\frac{dx}{dt} = -400$ (el signo menos indica que la distancia x es decreciente), y el objetivo es hallar $\frac{d\theta}{dt}$ cuando $x = 3$. Del triángulo rectángulo de la figura 11.16 se observa que

$$\tan\theta = \frac{4}{x}$$

Se deriva ambos miembros de esta ecuación con respecto a t (recordando el uso de la regla de la cadena) para obtener

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = -\frac{4}{x^2}\frac{dx}{dt}$$

o bien

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{4}{x^2}\cos^2\theta\,\frac{dx}{dt}$$

www.FreeLibros.com

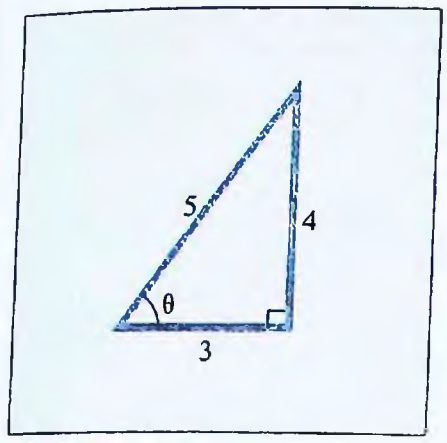


FIGURA 11.17 Triángulo para el cálculo de cos θ cuando $x = 3$.

Los valores de x y $\frac{dx}{dt}$ están dados. Se obtiene el valor de $\cos^2 \theta$ cuando $x = 3$ del triángulo rectángulo de la figura 11.17. En particular, cuando $x = 3$,

$$\cos^2 \theta = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

Sustituyendo $x = 3$, $\frac{dx}{dt} = -400$, y $\cos^2 \theta = \frac{9}{25}$ en la fórmula para $\frac{d\theta}{dt}$, se obtienen

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{4}{9}\left(\frac{9}{25}\right)(-400) = 64 \text{ radianes por hora}$$

Integrales de las funciones trigonométricas

Como la integral indefinida de una función $f(t)$ está determinada por una antiderivada de $f(t)$, cada una de las fórmulas de derivación para funciones trigonométricas que se acaban de obtener corresponde a una fórmula de integración. Por ejemplo, como $(\text{sen } u)' = \cos u$, se tiene

$$\int \cos u \, du = \text{sen } u + C$$

Fórmulas de integración para funciones trigonométricas

$$\int \cos u \, du = \text{sen } u + C$$

$$\int \text{sen } u \, du = -\cos u + C$$

$$\int \sec^2 u \, du = \tan u + C$$

$$\int \sec u \tan u \, du = \sec u + C$$

EJEMPLO | 11.2.6

Encuentre las siguientes integrales:

a) $\int \sec t \, (\sec t + \tan t) \, dt$ **b)** $\int x \, \text{sen } (x^2) \, dx$

Solución

a) Se tiene

$$\int \sec t \, (\sec t + \tan t) \, dt = \int \sec^2 t \, dt + \int \sec t \tan t \, dt$$
$$= \tan t + \sec t + C$$

b) Use la sustitución $u = x^2$, $du = 2x \, dx$. Entonces

$$\int x \, \text{sen } (x^2) \, dx = \int \text{sen } (x^2) \, (x \, dx)$$

www.FreeLibros.com

$$= \int \operatorname{sen} u \left(\frac{1}{2}\, du\right) = \frac{1}{2}[-\cos u] + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C$$

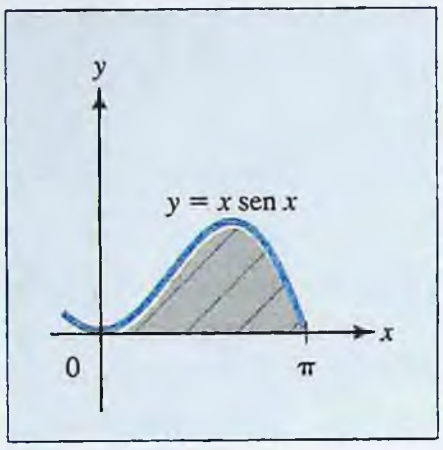


FIGURA 11.18 Área bajo $y = x \operatorname{sen} x$ para $0 \le x \le \pi$.

EJEMPLO | 11.2.7

Encuentre el área de la región bajo la curva $y = x \operatorname{sen} x$, entre las rectas $x = 0$ y $x = \pi$ (vea la figura 11.18).

Solución

El área está dada por la integral definida $A = \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\, dx$. Para evaluar esta integral, se debe integrar por partes, como sigue (recuerde la sección 1, capítulo 6):

$$u = x \qquad dv = \operatorname{sen} x\, dx$$
$$du = dx \qquad v = -\cos x$$

de modo que

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = x(-\cos x) - \int (-\cos x)\, dx$$
$$= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

Por tanto, el área es

$$A = \int_0^{\pi} x \operatorname{sen} x\, dx = (-x\cos x + \operatorname{sen} x)\Big|_0^{\pi}$$
$$= [-\pi\cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi)] - [-(0)\cos(0) + \operatorname{sen}(0)]$$
$$= [-\pi(-1) + 0] - [0] = \pi \quad \text{unidades cuadradas}$$

¡EXPLORE!

Vea el ejemplo 11.2.7. Haga Y1 = X sen(X) en el editor de ecuaciones de su calculadora graficadora y grafique usando la pantalla $[-\pi/2, 3\pi/2]\pi/2$ por $[-1, 2].25$. Use las funciones de integración de su calculadora para calcular el área bajo la curva entre $x = 0$ y $x = \pi$.

Modelación de fenómenos periódicos

Un *fenómeno periódico* es aquel que ocurre repetidamente en ciclos. El movimiento de un péndulo, el subir y bajar de las mareas, y los ritmos cardiacos del metabolismo humano son ejemplos de fenómenos periódicos.

Es frecuente que fenómenos periódicos sean modelados por funciones trigonométricas de una de estas formas generales:

$$s(t) = a + b \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{p}(t - d)\right] \quad \text{o} \quad c(t) = a + b\cos\left[\frac{2\pi}{p}(t - d)\right]$$

Para esta función,

p es el *periodo* y $1/p$ es la *frecuencia*.

b es la *amplitud*.

d es *el cambio de fase*.

a es la *traslación vertical*.

El periodo p es la longitud de un ciclo de forma que $f(t + p) = f(t)$, para toda t (véase el problema 57), lo cual significa que la gráfica de $f(t)$ sobre el intervalo $[0, p]$ es la misma que la gráfica sobre $[kp, (k + 1)p]$ para $k = 1, 2, \ldots$. La frecuencia $1/p$

www.FreeLibros.com

proporciona una medida de cuántas veces se repiten los ciclos. La amplitud b mide la dispersión vertical en la gráfica de $f(t)$ de manera que $|2b|$ es la diferencia entre los valores máximo y mínimo de $f(t)$. El cambio de fase d y la traslación vertical a determinan el desplazamiento de la gráfica de $f(t)$ de la posición de una curva de seno o coseno estándar.

Por ejemplo, la función

$$f(t) = 3 + 0.5 \text{ sen } \pi(t - 1)$$

tiene periodo $p = 2$, frecuencia 1/2, amplitud 0.5, traslación de fase 1 y traslación vertical 3. La gráfica de esta función se muestra en la figura 11.19.

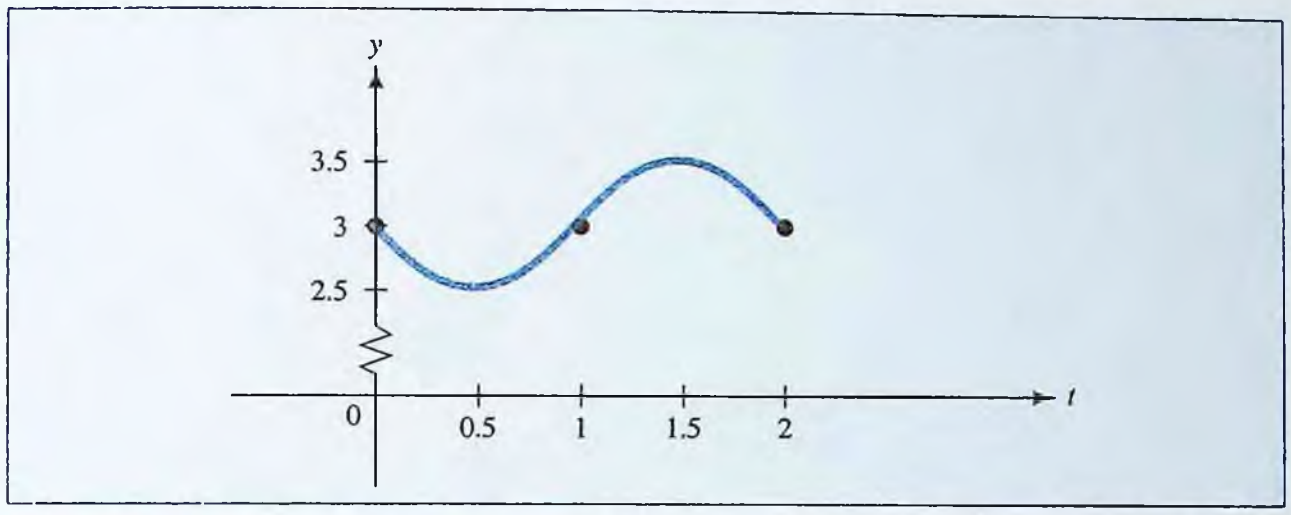


FIGURA 11.19 La gráfica de la función periódica $f(t) = 3 + 0.5 \text{ sen } \pi\ (t + 1)$.

A continuación se muestra un ejemplo que ilustra la forma en que se pueden usar funciones periódicas para estudiar ventas de productos estacionales.

EJEMPLO | 11.2.8

Suponga que el número de trajes de baño vendidos en una tienda en las playas de Nueva Jersey, durante la semana t de un año particular, está modelado por la función

$$B(t) = 40 + 36 \cos\left[\frac{\pi}{52}(t - 24)\right] \quad \text{para } 1 \leq t \leq 52$$

a) ¿Durante qué semana son máximas las ventas?

b) ¿Con qué frecuencia cambian las ventas al final del año (cuando $t = 52$)?

c) La experiencia anterior indica que el periodo de máximas ventas es entre las semanas 20 y 33. Encuentre el promedio de ventas semanales durante este periodo.

Solución

La gráfica de la función de ventas se ilustra en la figura 11.19.

a) Las ventas son máximas cuando $\cos\left[\frac{\pi}{52}(t - 24)\right] = 1$, y durante el intervalo $1 \leq t \leq 52$, esto ocurre sólo cuando $t = 24$. Por tanto, las ventas máximas se presentan durante la semana 24, cuando se venden $B(24) = 40 + 36 = 76$ trajes de baño.

b) Para determinar la frecuencia de cambio de ventas con respecto al tiempo, derivamos $B(t)$:

$$B'(t) = 36\left\{-\text{sen}\left[\frac{\pi}{52}(t - 24)\right]\left(\frac{\pi}{52}\right)\right\} = -\frac{9\pi}{13}\text{sen}\left[\frac{\pi}{52}(t - 24)\right]$$

www.FreeLibros.com

Sustituyendo $t = 52$ en esta función de frecuencia, encontramos que

$$B'(52) = -\frac{9\pi}{13}\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{52}(52 - 24)\right] = -\frac{9\pi}{13}\operatorname{sen}\left(\frac{28\pi}{52}\right) \approx -2.16$$

En consecuencia, al final del año, las ventas están disminuyendo a razón de aproximadamente 2 trajes por semana.

c) El promedio de ventas dentro del periodo máximo $20 \leq t \leq 33$ está dado por la integral

$$\begin{aligned} AV &= \frac{1}{33 - 20}\int_{20}^{33} 40 + 36\cos\left[\frac{\pi}{52}(t - 24)\right] dt \\ &= \frac{1}{13}\left\{40t + 36\left(\frac{52}{\pi}\right)\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{52}(t - 24)\right]\right\}\Bigg|_{20}^{33} \\ &= \frac{1}{13}\left\{40(33) + 36\left(\frac{52}{\pi}\right)\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{52}(33 - 24)\right]\right\} \\ &\quad -\frac{1}{13}\left\{40(20) + 36\left(\frac{52}{\pi}\right)\operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{52}(20 - 24)\right]\right\} \\ &\approx \frac{1}{13}[1\,628.27 - 657.40] \approx 74.68 \end{aligned}$$

Por tanto, las ventas durante el periodo de mayor venta promedian casi 75 trajes por semana.

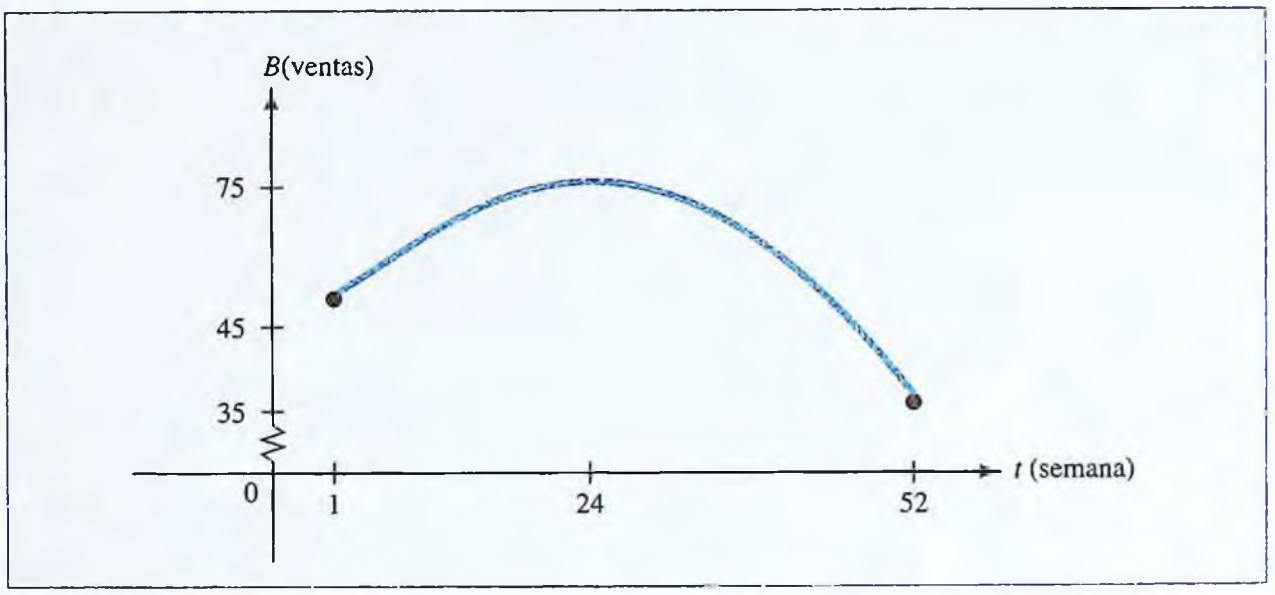


FIGURA 11.20 Gráfica de la función de ventas $B(t) = 40 + 36\cos\left[\frac{\pi}{52}(t - 24)\right]$.

Las funciones periódicas también desempeñan un importante papel en las ecuaciones diferenciales. En el ejemplo 11.2.9 se resuelve una ecuación diferencial para contestar una pregunta acerca de una población biológica.

EJEMPLO | 11.2.9

El tamaño de una población animal a veces varía con las estaciones. Suponga que $P(t)$ es la población de un rebaño de mamíferos grandes en el momento t (meses) y que

$$\frac{dP}{dt} = 12\operatorname{sen}(0.1\pi t)$$

Si la población inicialmente es de 3 000, ¿cuál será su tamaño un año después?

www.FreeLibros.com

Solución

Separando las variables e integrando, se obtiene

$$\int dP = \int 12 \operatorname{sen}(0.1\pi t)\, dt$$

$$P(t) = 12\left(\frac{10}{\pi}\right)[-\cos(0.1\pi t)] + C \approx -38.2 \cos(0.1\pi t) + C$$

Como $P(0) = 3\,000$, se encuentra que

$$P(0) = 3\,000 \approx -38.2 \cos(0) + C = -38.2 + C$$

$$C \approx 3\,000 + 38.2 = 3\,038.2$$

y la población en el momento t es

$$P(t) \approx -38.2 \cos(0.1\pi t) + 3\,038.2$$

Por tanto, después de 1 año ($t = 12$ meses) se tiene

$$P(12) \approx -38.2 \cos[0.1\pi(12)] + 3\,038.2$$

$$\approx 3\,069.1$$

de modo que la población aumenta a unos 3 069 durante el año.

La prueba de que $\frac{d}{dt} \operatorname{sen} t = \cos t$

Como la función $f(t) = \operatorname{sen} t$ no está relacionada con ninguna de las funciones cuyas derivadas se obtuvieron en capítulos anteriores, para hallar la derivada en este caso será necesario regresar a la *definición* de la derivada (del capítulo 2, sección 1). En términos de t, la definición expresa que

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Efectuando los cálculos requeridos para $f(t) = \operatorname{sen} t$, es necesario usar la fórmula del seno de la suma

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cos B + \cos A \operatorname{sen} B$$

de la sección precedente así como la siguiente información acerca del comportamiento de sen t y cos t cuando t tiende a cero.

Dos límites importantes para seno y coseno ▪ Si t se mide en radianes, entonces

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

y

$$\lim_{t \to 0} \frac{\cos t - 1}{t} = 0$$

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Grafique $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ usando la pantalla $[-\pi, \pi]\pi/4$ por $[-1.5, 1.5].5$. Use **ZOOM** y **TRACE** para investigar $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Ahora ya es posible obtener la fórmula de derivación para sen t:

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t+h) - \operatorname{sen} t}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[\operatorname{sen} t \cos h + \cos t \operatorname{sen} h] - \operatorname{sen} t}{h} \qquad \textit{fórmula del seno de la suma}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\operatorname{sen} t)[\cos h - 1] + (\cos t)\operatorname{sen} h}{h}$$

$$= (\operatorname{sen} t) \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + (\cos t) \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \qquad \textit{los límites afectan sólo a } h\textit{, no a } t$$

$$= (\operatorname{sen} t)(0) + (\cos t)(1) = \cos t$$

Esto es,

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} t) = \cos t$$

La fórmula de derivación para el coseno se puede obtener en forma parecida (vea el problema 53.)

PROBLEMAS | 11.2

En los problemas 1 al 20 derive la función dada.

1. $f(t) = \operatorname{sen} 3t$
2. $f(t) = \cos 2t$
3. $f(t) = \operatorname{sen}(1 - 2t)$
4. $f(t) = \operatorname{sen} t^2$
5. $f(t) = \cos(t^3 + 1)$
6. $f(t) = \operatorname{sen}^2 t$
7. $f(t) = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right)$
8. $f(t) = \operatorname{sen}(2t + 1)^2$
9. $f(x) = \cos(1 + 3x)^2$
10. $f(x) = e^{-x} \operatorname{sen} x$
11. $f(u) = e^{-u/2} \cos 2\pi u$
12. $f(u) = \dfrac{\cos u}{1 - \cos u}$
13. $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1 + \operatorname{sen} t}$
14. $f(t) = \tan(5t + 2)$
15. $f(t) = \tan(1 - t^3)$
16. $f(t) = \tan^2 t$
17. $f(t) = \sec\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\pi t\right)$
18. $f(t) = \sec(\pi - 4t)^2$
19. $f(t) = \ln \operatorname{sen}^2 t$
20. $f(t) = \ln \tan^2 t$

En los problemas 21 al 30 encuentre la integral indicada.

21. $\displaystyle\int \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt$
22. $\displaystyle\int [\operatorname{sen} t + \cos 2t]\, dt$
23. $\displaystyle\int x \cos(1 - 3x^2)\, dx$
24. $\displaystyle\int [\tan^2 x + \sec^2 x]\, dx$
25. $\displaystyle\int x \cos(2x)\, dx$
26. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}\, dx$

www.FreeLibros.com

27. $\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$

28. $\int \sqrt{\cos x} \operatorname{sen} x \, dx$

29. $\int x \operatorname{sen} x \, dx$

30. $\int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx$

En los problemas 31 al 34 determine el periodo p, *la amplitud* b, *el cambio de fase* d, *la traslación vertical* a *de la función trigonométrica dada* f(t). *A continuación dibuje la gráfica de* f(t).

31. $f(t) = 2 + 1.5 \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2}(t - 1)\right]$

32. $f(t) = -1 + 2 \cos\left[\frac{\pi}{3}(t - 3)\right]$

33. $f(t) = 3 - \cos\left[2\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

34. $f(t) = 5 - 3 \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{4}(t + 1)\right]$

En los problemas 35 y 36 encuentre el área entre las curvas dadas sobre el intervalo indicado.

35. $y = \operatorname{sen}(\pi x/2)$ y $y = \cos(\pi x)$; $0 \le x \le 1/3$

36. $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos(\pi - x)$; $0 \le x \le \pi/2$

En los problemas 37 y 38 resuelva la ecuación diferencial dada sujeta a la condición inicial indicada.

37. $\frac{dy}{dt} = \frac{\operatorname{sen}(2t)}{y + 1}$; $y(0) = 1$

38. $\frac{dx}{dt} = x^2 \cos t$; $x(\pi) = 1$

39. CLIMA El promedio de temperatura t horas después de la medianoche en cierta ciudad está dado por la fórmula

$$T(t) = 60 + 12 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{10} - \frac{5}{6}\right)$$

¿Con qué frecuencia está cambiando la temperatura al mediodía? ¿El clima es más caluroso o más fresco en ese momento?

40. VENTAS Suponga que el número de esquíes vendidos por una tienda de artículos deportivos durante la semana t, después de empezar un año particular, está modelado por la función

$$S(t) = 125 - 120 \cos\left[\frac{\pi(t - 18)}{26}\right]$$

para $1 \le t \le 52$.

a) ¿Durante qué semana se vende el máximo número de esquíes? ¿Cuál es el número máximo?

b) ¿Cuál es la razón de cambio de las ventas al final del año (cuando $t = 52$)?

41. DISEÑO DE JARDINES Un jardín está limitado por los ejes positivos x y y, así como por una vereda empedrada que sigue la curva

$$y = 50 \operatorname{sen}(0.3x + 1) + 10 \cos(0.6x + 2)$$

donde x y y se miden en pies.

a) Utilice la función de gráficas de su calculadora para trazar la gráfica de la vereda. ¿Cuáles son los puntos extremos de la vereda (los puntos donde corta a los ejes x y y)?

b) Encuentre el área del jardín.

42. CONTAMINACIÓN Un estudio indica que en un día típico de primavera, el nivel de contaminación del aire en cierta gran ciudad es

$$P(t) = 1.5 + 18t - 0.75t^2 + 0.92 \operatorname{sen}(2t + 1)$$

unidades, donde t ($0 \le t \le 24$) es el número de horas después de la medianoche.

a) Encuentre la razón de cambio del nivel de contaminación en cada uno de los siguientes momentos: $t = 0$, $t = 9$, $t = 12$ y $t = 24$.

b) Si el amanecer es a las 5:00 a. m, y el crepúsculo a las 6:00 p.m., ¿cuál es el nivel promedio de contaminación entre el amanecer y el crepúsculo?

c) Utilice la función de gráficas de su calculadora para graficar $P(t)$ para $0 \le t \le 24$. ¿Cuándo ocurre el máximo nivel de contaminación? ¿Y el nivel mínimo?

43. BIOLOGÍA Suponga que una biomasa $B(t)$ cambia con respecto al tiempo t (horas) a razón de

$$\frac{dB}{dt} = \sqrt{t} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{\sqrt{4}}\right)$$

en un periodo de 24 horas, $0 \le t \le 24$. Si la biomasa es B_0 en el momento $t = 0$, ¿cuál es su tamaño en el momento $t = 24$?

44. MEDICINA Suponga que el metabolismo humano desecha fosfato periódicamente a razón de

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cos\left[\frac{\pi}{12}(t - 6)\right]$$

gramos por hora en el tiempo t (horas) en un periodo de 24 horas ($0 \le t \le 24$), donde $P(t)$

www.FreeLibros.com

es la cantidad de fosfato en el cuerpo en el momento t.

a) ¿Cuándo se presenta el nivel máximo de fosfato?, ¿y el mínimo?

b) Si el cuerpo de un paciente particular contiene 380 gramos de fosfato en el momento $t = 0$, ¿cuánto fosfato contiene 24 horas después?

45. METABOLISMO DE LOS HOMBRES Suponga que la temperatura del cuerpo (en °F) de un hombre particular t horas después de la medianoche (para $0 \le x \le 24$) está dada por la función

$$T(t) = 98.1 + 0.6 \cos\left[\frac{\pi(t - 15)}{24}\right]$$

a) ¿Cuáles son las temperaturas corporales máxima y mínima y en qué momentos ocurren?

b) ¿Con qué razón está cambiando la temperatura del hombre al mediodía?

c) ¿En qué momento la temperatura corporal del hombre está aumentando más rápidamente?

46. METABOLISMO DE LAS MUJERES La temperatura corporal de una mujer es afectada por dos ciclos diferentes, un ciclo diario y un ciclo mensual. Suponga que la temperatura corporal $T(x)$ en °C en una mujer x días, después del inicio de un ciclo mensual, está modelada por la fórmula

$$T(x) = 37 + 0.3 \cos\left[\frac{2\pi(x - 15)}{28}\right] + 0.4 \cos[2\pi(x - 0.6)]$$

para $0 \le x \le 28$.

a) ¿Con qué rapidez está cambiando la temperatura del cuerpo cuando $t = 15$?, ¿y cuando $t = 28$?

b) ¿Cuál es el promedio de temperatura corporal de la mujer en el periodo de 28 días?

47. VENTAS Las ventas de cierto producto satisfacen la ecuación

$$S(t) = 27.5 + 11.2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{5}\right) + 2.3 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$$

donde t es el tiempo en meses medido desde enero, y S se mide en miles de unidades.

a) Encuentre la razón de cambio de las ventas a mitad del año ($t = 6$). ¿Aumentan o disminuyen en ese momento?

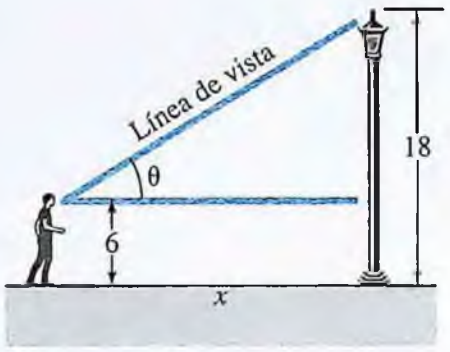
b) Encuentre el promedio de ventas de todo el año ($0 \le t \le 12$).

48. ÁREA Y VOLUMEN Sea R la región limitada por las curvas $y = \operatorname{sen} t$ y $y = \cos t$ para $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.

a) Encuentre el área de R.

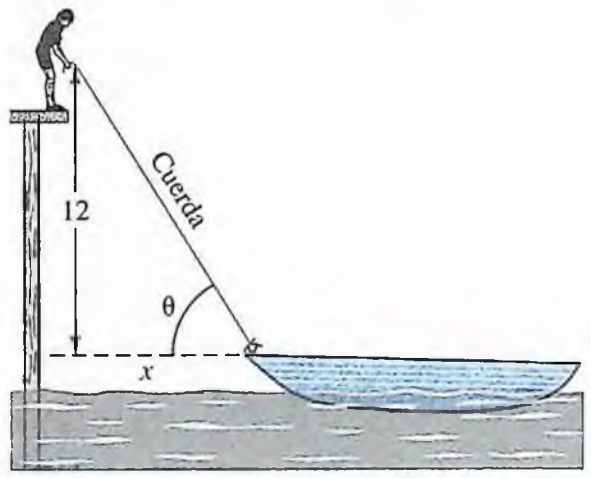
b) Encuentre el volumen del sólido formado al girar R alrededor del eje x. [*Sugerencia:* Esto es más fácil de lo que parece.]

49. TASAS RELACIONADAS Una persona de 6 pies de estatura observa un farol de 18 pies de altura cuando camina hacia ese farol a una rapidez de 5 pies por segundo. ¿Con qué razón está cambiando el ángulo de elevación de la línea de vista de la persona, con respecto al tiempo cuando la persona está a 9 pies de la base del farol?



PROBLEMA 49

50. TASAS RELACIONADAS Un hombre está de pie en el extremo de un pilar, a 12 pies sobre un bote de remos, y tira de la cuerda atada al bote a razón de 4 pies de cuerda por minuto. Con respecto al tiempo, ¿con qué razón está cambiando el ángulo que la cuerda forma con la superficie del agua cuando el bote está a 16 pies del pilar?



PROBLEMA 50

51. TASAS RELACIONADAS Una persona observa un avión que se aproxima a 500 millas por hora y a una altitud de 3 millas. ¿Con qué frecuencia está cambiando el ángulo de elevación de la línea de vista del observador, con respecto al tiempo t, cuando la distancia horizontal entre el avión y el observador es de 4 millas?

52. Use la función de gráficas de su calculadora para hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x + \operatorname{sen} x$ en el punto donde $x = 1.5$ (radianes).

53. Use la definición de la derivada para demostrar que

$$\frac{d}{dt}(\cos t) = -\operatorname{sen} t.$$

www.FreeLibros.com

54. Use las fórmulas de derivación para sen t y cos t para demostrar que:

a) $\dfrac{d}{dt}\sec t = \sec t \tan t$

b) $\dfrac{d}{dt}\cot t = -\csc^2 t$

c) $\dfrac{d}{dt}\csc t = -\csc t \cot t$

55. Use la función de gráficas de su calculadora para trazar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$$

A continuación use TRACE y ZOOM para investigar el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

(*Sugerencia:* Use la pantalla $[-\pi, \pi]\pi/4$ por $[-1, 1]1/2$.)

56. Repita el problema 55 para la función $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$.

57. Demuestre que $f(t + p) = f(t)$ para toda t, donde

a) $f(t) = a + b \operatorname{sen}\left[\dfrac{2\pi}{p}(t - d)\right]$

b) $f(t) = a + b \cos\left[\dfrac{2\pi}{p}(t - d)\right]$

[*Sugerencia:* Use las identidades

$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A$

$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$]

SECCIÓN 11.3 Aplicaciones adicionales de las funciones trigonométricas

En esta sección se verá una toma de muestras de aplicaciones en donde aparece la optimización de funciones trigonométricas. Para resolver problemas de este tipo, proceda como en la sección 5 del capítulo 3. En particular:

1. Construya una función que represente la magnitud que debe ser optimizada en términos de una variable conveniente.
2. Identifique el intervalo en el que la función tiene una interpretación práctica.
3. Derive la función e iguale a cero la derivada para hallar los puntos críticos.
4. Compare los valores de la función en los puntos críticos del intervalo y en los puntos extremos (o use la prueba de la segunda derivada) para verificar que se ha encontrado el extremo absoluto deseado.

EJEMPLO 11.3.1

Dos lados de un triángulo miden 4 pulgadas de largo. ¿Cuál debe ser el ángulo entre estos lados para hacer que el área del triángulo sea máxima?

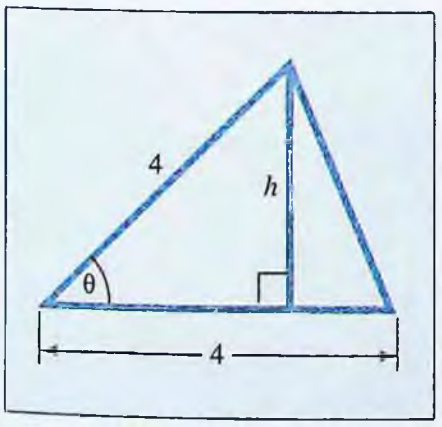


FIGURA 11.21 Triángulo para el ejemplo 11.3.1.

Solución

El triángulo se muestra en la figura 11.21. En general, el área de un triángulo está dada por la fórmula

$$\text{Área} = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$$

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Grafique $f(x) = 8 \operatorname{sen} x$ usando una pantalla de $[0, \pi]\pi/4$ por $[-10, 10]1$. Use **TRACE** y **ZOOM** para hallar el máximo absoluto de esta función sobre este intervalo. Compare con la solución hallada en el ejemplo 11.3.1.

En este caso, $\text{base} = 4$

y, como $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{h}{4}$, $\quad \text{altura} = h = 4 \operatorname{sen}\theta$

En consecuencia, el área del triángulo está dada por la función

$$A(\theta) = \frac{1}{2}(4)(4 \operatorname{sen}\theta) = 8 \operatorname{sen}\theta$$

Debido a que en el contexto de este problema son significativos sólo valores de θ entre $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ radianes, el objetivo es hallar el máximo absoluto de la función $A(\theta)$ en el intervalo $0 \le \theta \le \pi$.

La derivada de $A(\theta)$ es

$$A'(\theta) = 8 \cos\theta$$

REPASO

Recuerde que $\operatorname{sen} 0 = 0$ y $\cos 0 = 1$, y que $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ y $\cos(\pi/2) = 0$.

Justo-a-tiempo

que es cero en el intervalo $0 \le \theta \le \pi$ sólo cuando $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Comparando

$$A(0) = 8 \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$A\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 8(1) = 8$$

$$A(\pi) = 8 \operatorname{sen}\pi = 0$$

se concluye que el área se hace máxima cuando el ángulo θ mide $\dfrac{\pi}{2}$ radianes (o 90°); es decir, cuando el triángulo es un triángulo rectángulo.

Iluminación desde una fuente de luz

EJEMPLO | 11.3.2

Una lámpara con altura ajustable cuelga directamente sobre el centro de una mesa circular de cocina que mide 8 pies de diámetro. La iluminación en el borde de la mesa es directamente proporcional al coseno del ángulo θ, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d, donde θ y d son como se muestra en la figura 11.22. ¿Qué tan cerca de la mesa debe colocarse la lámpara para maximizar la iluminación al borde de la mesa?

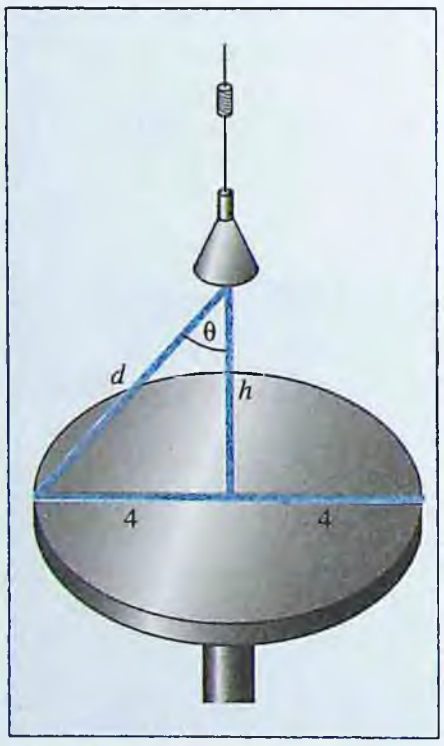


FIGURA 11.22 Lámpara colgante y mesa para el ejemplo 11.3.2.

Solución

Sea L la iluminación en el borde de la mesa. Entonces,

$$L = \frac{k \cos\theta}{d^2}$$

donde k es una constante de proporcionalidad (positiva). Además, en el triángulo rectángulo de la figura 11.22, se tiene que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{4}{d} \qquad \text{o} \qquad d = \frac{4}{\operatorname{sen}\theta}$$

Por tanto, $$L(\theta) = \frac{k \cos\theta}{(4/\operatorname{sen}\theta)^2} = \frac{k}{16} \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta$$

Únicamente los valores de θ entre 0 y $\dfrac{\pi}{2}$ radianes son significativos en el contexto de este problema. Por tanto el objetivo es hallar el máximo absoluto de la función $L(\theta)$ en el intervalo $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.

www.FreeLibros.com

¡EXPLORE!

Vea el ejemplo 11.3.2. Haga Y1 = cos(X)sen(X)² en el editor de ecuaciones de su calculadora graficadora. Esto es esencialmente igual que la función $L(\theta)$. Grafique usando la pantalla $[-\pi, 3\pi/2]\pi/2$ por $[-1, 2].25$. Use las funciones de hallar máximo de su calculadora para encontrar si Y1 se maximiza en el intervalo $[0, \pi/2]$. Compare este valor con las raíces de Y2 = tan(X) − $\sqrt{2}$ y Y3 = 2cos(X)² − sen(X)².

Usando la regla del producto y la regla de la cadena para derivar $L(\theta)$, se obtiene

$$L'(\theta) = \frac{k}{16}[\cos\theta\,(2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta) + \text{sen}^2\,\theta\,(-\text{sen}\,\theta)]$$

$$= \frac{k}{16}(2\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}^3\,\theta)$$

$$= \frac{k}{16}\,\text{sen}\,\theta\,(2\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta)$$

que es cero cuando

$$\text{sen}\,\theta = 0 \quad \text{o} \quad 2\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta = 0$$

El único valor de θ en el intervalo $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ para el que sen $\theta = 0$ es el punto extremo $\theta = 0$. Para resolver la ecuación

$$2\cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta = 0$$

rescríbala como

$$2\cos^2\,\theta = \text{sen}^2\,\theta$$

divida ambos lados entre $\cos^2\,\theta$

$$2 = \frac{\text{sen}^2\,\theta}{\cos^2\,\theta} = \left(\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\,\theta}\right)^2$$

y tome la raíz cuadrada de cada lado para obtener

$$\pm\sqrt{2} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\,\theta} = \tan\,\theta$$

Como sen θ y cos θ son no negativos en el intervalo $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, se puede descartar la raíz cuadrada negativa y concluir que el punto crítico se presenta cuando

$$\tan\,\theta = \sqrt{2}$$

Aun cuando no sería difícil usar una calculadora (o la tabla III del Apéndice) para hallar (o, al menos, estimar) el ángulo θ para el cual $\tan\,\theta = \sqrt{2}$, no es necesario hacerlo. En lugar de esto, véase el triángulo rectángulo de la figura 11.23, en el que

$$\tan\,\theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

y observe que

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \text{y} \quad \cos\,\theta = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

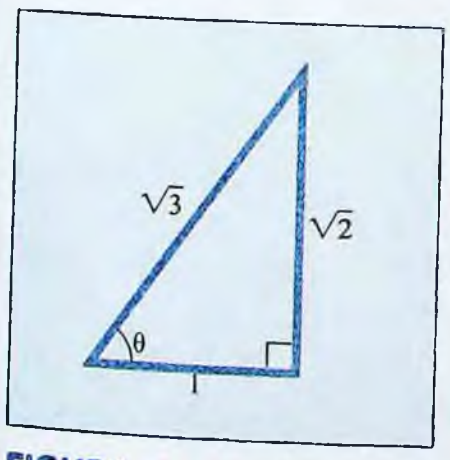


FIGURA 11.23 Triángulo rectángulo con $\tan\,\theta = \sqrt{2}$.

Sustituya estos valores en la ecuación para $L(\theta)$ para concluir que, en el punto crítico,

$$L(\theta) = \frac{k}{16}\cos\,\theta\,\text{sen}^2\,\theta = \frac{k}{16}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{k}{24\sqrt{3}}$$

www.FreeLibros.com

Compare este valor con los valores de $L(\theta)$ en los puntos extremos $\theta = 0$ y $\theta = \frac{\pi}{2}$, que son

$$L(0) = \frac{k}{16}(\cos 0)(\text{sen}^2\, 0) = 0 \qquad \textit{porque sen } 0 = 0$$

y

$$L\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{k}{16}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\left(\text{sen}^2\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \textit{porque } \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

El mayor de estos posibles valores máximos es $\frac{k}{24\sqrt{3}}$, que se alcanza cuando $\tan\theta = \sqrt{2}$.

Por último, para hallar la altura h que maximiza la iluminación L, observe en la figura 11.22 que

$$\tan\theta = \frac{4}{h}$$

Como $\tan\theta = \sqrt{2}$ cuando L es máxima, se obtiene que

$$h = \frac{4}{\tan\theta} = \frac{4}{\sqrt{2}} \approx 2.83 \text{ pies}$$

Minimización del tiempo de viaje

En el ejemplo 11.3.3, se usa el cálculo para establecer un principio general acerca de la minimización del tiempo de viaje. Como se verá más adelante, el principio se puede expresar de otro modo para dar una ley bien conocida acerca de la reflexión de luz.

EJEMPLO | 11.3.3

Dos pozos petrolíferos, A y B, se encuentran a millas y b millas mar afuera respectivamente. Un bote de motor que navega a una velocidad constante s debe transportar trabajadores del pozo A a una estación situada en la playa y luego al pozo B. Para hacer que esta operación sea eficiente en cuanto a costos, la ubicación de la estación se selecciona de manera que se minimice el tiempo total de viaje. Demuestre que en el punto P de ubicación óptima, el ángulo α entre la trayectoria de llegada del bote y la línea de la costa será igual al ángulo β entre la línea de la costa y la trayectoria de salida.

Solución

Aun cuando el objetivo es demostrar que dos ángulos son iguales, resulta que la forma más fácil de resolver este problema es hacer que la variable x represente una distancia conveniente e introducir la trigonometría sólo al final.

Empiece con un dibujo, como en la figura 11.24, y defina la variable x y la distancia constante d como se indica. Entonces, por el teorema de Pitágoras,

$$\text{distancia del primer pozo a } P = \sqrt{a^2 + x^2}$$

y

$$\text{distancia del segundo pozo a } P = \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$$

Como (para velocidad constante),

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$$

www.FreeLibros.com

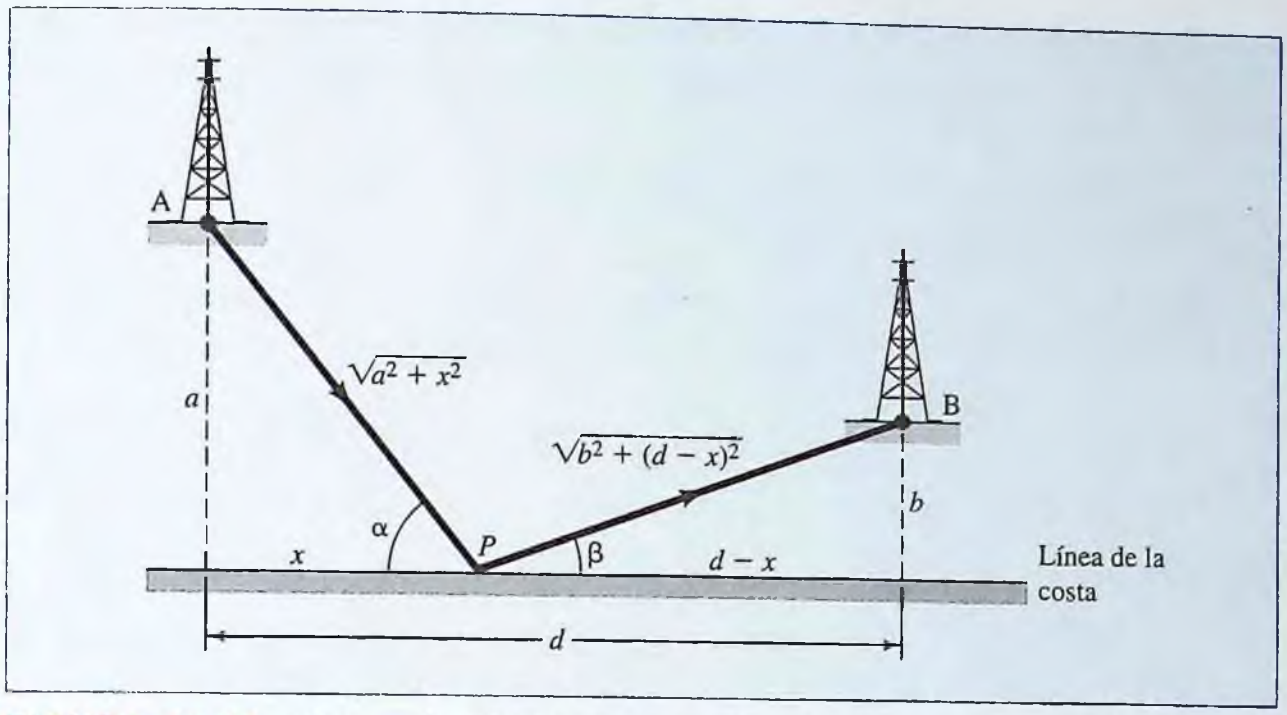


FIGURA 11.24 Trayectoria del bote desde el pozo petrolífero a la playa y al otro pozo.

REPASO

Justo-a-tiempo

Recuerde que

$$\sqrt{x} = x^{1/2},$$

de modo que

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^{1/2})$$

$$= \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

el tiempo total de viaje está dado por la función

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{s} + \frac{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}{s}$$

donde $0 \leq x \leq d$. La derivada de $T(x)$ es

$$T'(x) = \frac{x}{s\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{s\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

y haciendo $T'(x) = 0$ y multiplicando por s, se obtiene

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

Ahora observe de nuevo los triángulos rectángulos de la figura 11.24 y note que

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \cos\alpha \qquad \text{y} \qquad \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}} = \cos\beta$$

Por tanto, $T'(x) = 0$ implica que

$$\cos\alpha = \cos\beta$$

En el contexto de este problema, α y β están entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ radianes, y para ángulos en estos límites, la igualdad de los cosenos implica igualdad de los ángulos mismos. (Véase, por ejemplo, la gráfica de la función coseno de la figura 11.10.) Por tanto, $T'(x) = 0$ implica que

$$\alpha = \beta$$

Además, de la figura 11.24 debe quedar claro que sin importar cuáles sean a, b y d, hay un punto (único) P para el que $\alpha = \beta$. Se deduce que la función $T(x)$ tiene un punto crítico en el intervalo $0 \leq x \leq d$ y que, en este punto crítico, $\alpha = \beta$.

www.FreeLibros.com

REPASO

Justo-a-tiempo

Recuerde que

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$$

de modo que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-1/2})$$

$$= -\frac{1}{2}x^{-3/2}$$

Para verificar que este punto crítico es realmente el mínimo absoluto, se puede usar la prueba de la segunda derivada. Un cálculo de rutina da

$$T''(x) = \frac{a^2}{s(a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{s[b^2 + (d - x)^2]^{3/2}}$$

(Como práctica, verifique este cálculo.) Como $T''(x) > 0$ para todos los valores de x y como hay sólo un número crítico en el intervalo $0 \le x \le d$, se deduce que este punto crítico realmente corresponde al mínimo absoluto del tiempo total T en este intervalo.

Reflexión de la luz

Según el **principio de Fermat** en óptica, la luz que se desplace de un punto a otro toma la trayectoria que requiere el tiempo mínimo. Suponga (como se ilustra en la figura 11.25) que un haz de luz transmitido de una fuente en un punto A, incide en una superficie reflectora (por ejemplo un espejo) en el punto P, y luego es recibido por un observador en el punto B.

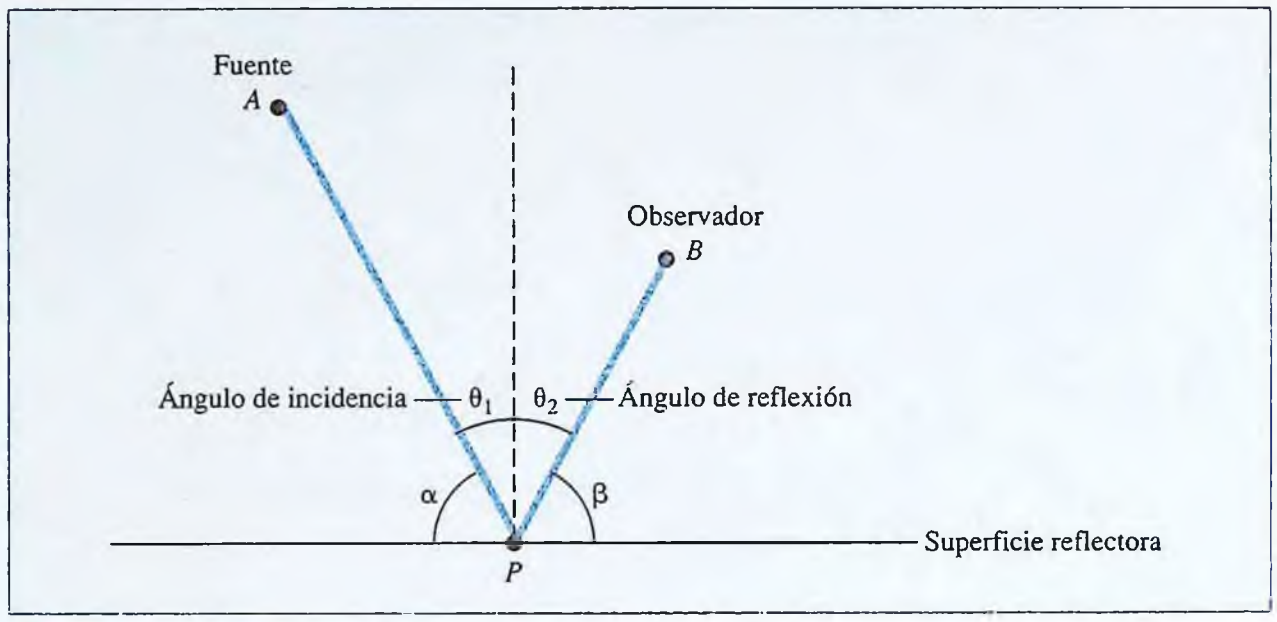


FIGURA 11.25 Reflexión de luz: $\theta_1 = \theta_2$.

En vista de que, por el principio de Fermat, la trayectoria de A a P a B minimiza el tiempo, se sigue del cálculo en el ejemplo 11.3.3 que los ángulos α y β son iguales. Esto, a su vez, implica la **ley de reflexión,** misma que expresa que el **ángulo de incidencia** (θ_1 en la figura 11.25) debe ser igual al **ángulo de reflexión** (θ_2 en la figura 11.25).

Ángulo óptimo para ramificación vascular

El sistema vascular del cuerpo humano opera en forma tal que la circulación sanguínea del corazón a los órganos, y de regreso al corazón, se logra con el menor consumo de energía posible. Por tanto, es razonable esperar que cuando una arteria se ramifica, el ángulo entre las arterias "madre" e "hija" debe minimizar la resistencia total a la circulación. En el ejemplo 11.3.4 se usa el cálculo para hallar este ángulo óptimo de ramificación.

www.FreeLibros.com

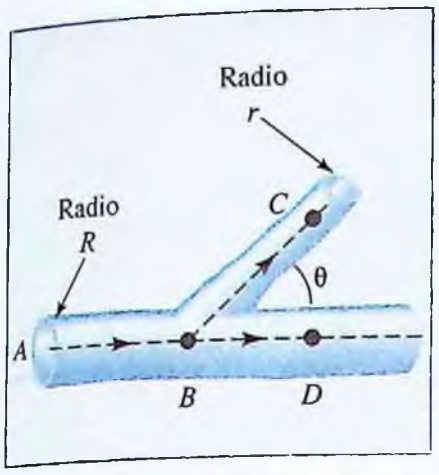


FIGURA 11.26 Ramificación vascular.

EJEMPLO | 11.3.4

La figura 11.26 muestra una pequeña arteria de radio r que se ramifica con un ángulo θ $(0 < \theta < \pi/2)$ de una arteria más grande de radio R $(R > r)$.[2] La sangre circula en la dirección de las flechas, del punto A a la rama en B y luego a los puntos C y D. Demuestre que la resistencia de la circulación sanguínea es minimizada cuando θ satisface la ecuación

$$\cos\theta = \frac{r^4}{R^4}$$

Solución

La figura 11.27 es una versión geométrica de la figura 11.26. Para mayor sencillez, suponga que C y D están situados de modo que CD es perpendicular a la recta principal que pasa por A y B, con C ubicada h unidades arriba de D. Deseamos hallar el valor del ángulo de ramificación θ que minimiza la resistencia total a la circulación de la sangre cuando pasa de A a B y luego al punto C.

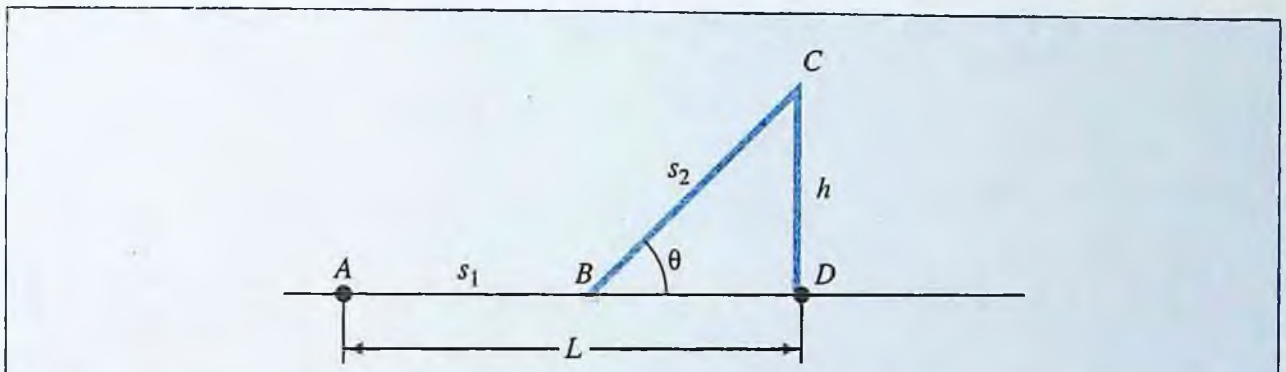


FIGURA 11.27 Minimización de la resistencia a la circulación de sangre.

Antes de resolver este problema, se debe tener una forma de medir la resistencia a la circulación sanguínea, y éste se encuentra dado por el siguiente resultado, que fue descubierto empíricamente por el fisiólogo y médico francés Jean Louis Poiseuille (1799-1869).

Ley de resistencia de Poiseuille ■ La resistencia a la circulación sanguínea en una arteria es directamente proporcional a la longitud de la arteria e inversamente proporcional a la cuarta potencia de su radio.

Según la ley de Poiseuille, la resistencia a la circulación sanguínea del punto A al punto B de la figura 11.27 es

$$F_1 = \frac{ks_1}{R^4}$$

[2] Esta aplicación está adaptada de un ejemplo del texto de E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 2a ed., Springer-Verlag, Nueva York, 1975, pp. 278-280. Como fuente original del material, el autor cita el texto de R. Rosen, *Optimality Principles in Biology*, Butterworths, Londres, 1967.

www.FreeLibros.com

y la resistencia del punto B al punto C es

$$F_2 = \frac{ks_2}{r^4}$$

donde k es una constante que depende de la viscosidad de la sangre, y s_1 y s_2 son las longitudes de las porciones de arteria de A a B y de B a C, respectivamente. Por tanto, la resistencia total a la circulación sanguínea, hasta la ramificación y a través de ésta, está dada por la suma

$$F = F_1 + F_2 = \frac{ks_1}{R^4} + \frac{ks_2}{r^4} = k\left(\frac{s_1}{R^4} + \frac{s_2}{r^4}\right)$$

A continuación escriba F como función del ángulo θ de ramificación. Para hacer esto, en la figura 11.27, observe que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{s_2} \qquad \text{y} \qquad \tan\theta = \frac{h}{L - s_1}$$

donde L es la longitud de la arteria principal de A a D. Al despejar s_1 y s_2 de estas ramificaciones, se obtiene

$$s_2 = \frac{h}{\operatorname{sen}\theta} = h\csc\theta \qquad \text{y} \qquad s_1 = L - \frac{h}{\tan\theta} = L - h\cot\theta$$

de modo que F se puede expresar como

$$F = k\left(\frac{s_1}{R^4} + \frac{s_2}{r^4}\right) = k\left(\frac{L - h\cot\theta}{R^4} + \frac{h\csc\theta}{r^4}\right)$$

En el problema 54 de la sección 2, se demostró que

$$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u\,\frac{du}{dx} \qquad \text{y} \qquad \frac{d}{dx}(\csc u) = -\cot u\csc u\,\frac{du}{dx}$$

y con el uso de estas fórmulas para derivar $F(\theta)$, se obtiene

$$F'(\theta) = k\left[\frac{-h(-\csc^2\theta)}{R^4} + \frac{h(-\csc\theta\cot\theta)}{r^4}\right]$$
$$= kh\csc\theta\left(\frac{\csc\theta}{R^4} - \frac{\cot\theta}{r^4}\right)$$

Resolviendo $F'(\theta) = 0$ para obtener todos los números críticos para F, resulta

$$\csc\theta = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{\csc\theta}{R^4} - \frac{\cot\theta}{r^4} = 0$$

Como $\csc\theta$ nunca es 0, se deduce que $F'(\theta) = 0$ sólo cuando

$$\frac{\csc\theta}{R^4} - \frac{\cot\theta}{r^4} = 0$$
$$\frac{\csc\theta}{R^4} = \frac{\cot\theta}{r^4}$$
$$\frac{1}{R^4\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta}{r^4\operatorname{sen}\theta}$$
$$\frac{r^4}{R^4} = \cos\theta$$

REPASO

Justo-a-tiempo

Recuerde que

$$1/\text{sen}\,q = \csc q$$

y

$$1/\tan q = \cot q$$

y nótese que csc q nunca es 0.

www.FreeLibros.com

Por último, si θ_0 es el ángulo agudo que satisface esta ecuación, se puede demostrar que la resistencia F tiene un mínimo absoluto cuando $\theta = \theta_0$ (véase el problema 35). En consecuencia, θ_0 es el ángulo óptimo de ramificación vascular.

PROBLEMAS | 11.3

Se dice que un cuerpo que se mueve hacia delante y hacia atrás a lo largo de una recta, experimenta un ***movimiento vibratorio*** *si su desplazamiento de la posición de equilibrio en el momento* t *está dado por una ecuación de la forma*

$$x(t) = e^{-kt}(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t)$$

donde A, B, k *y* ω *son constantes. En los problemas 1 al 6, conteste las siguientes preguntas acerca de la función dada* x(t) *con esta forma para el intervalo indicado* $a \le x \le b$:

a) Trace la gráfica de x(t). *Puede usar la función de gráficas de su calculadora.*

b) Encuentre los valores de t *para los cuales se alcanzan los valores máximo y mínimo de* x(t) *para* $a \le t \le b$.

1. $x(t) = \operatorname{sen} 2t + \cos 2t \quad \text{para } 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

2. $x(t) = 2 \operatorname{sen} 2t + 3 \cos 2t \quad \text{para } 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

3. $x(t) = 5 \operatorname{sen} 3t + 2 \cos t \quad \text{para } 0 \le t \le \pi$

4. $x(t) = 2 \operatorname{sen} t - 3 \cos 2t \quad \text{para } 0 \le t \le \pi$

5. $x(t) = e^{-t}(\operatorname{sen} t + \cos t) \quad \text{para } \dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{3\pi}{2}$

6. $x(t) = e^{-2t}(3 \operatorname{sen} 2t + 2 \cos 3t) \quad \text{para } 0 \le t \le \pi$

7. Encuentre el valor máximo de

$$f(t) = \cot t - \sqrt{2} \csc t \quad \text{para } 0 < t < \pi$$

¿tiene $f(t)$ un valor mínimo en este intervalo?

8. Encuentre el valor mínimo de

$$f(t) = 27 \sec t + 8 \csc t \quad \text{para } 0 < t < \pi/2$$

¿tiene $f(t)$ un valor máximo en este intervalo?

9. RESPIRACIÓN HUMANA Un hombre adulto típico inhala y exhala aproximadamente cada 3.5 segundos. Sea $B(t)$ el volumen (en litros) del aire en los pulmones de un hombre adulto t segundos después de exhalar. Suponga que $B(t)$ puede ser modelado por la función

$$B(t) = 0.5 - 0.4 \cos\left(\frac{\pi t}{1.75}\right)$$

a) Encuentre el volumen máximo de aire en los pulmones del sujeto y los tiempos cuando sus pulmones contienen el volumen máximo de aire.

b) Conteste las preguntas del inciso *a)* para el volumen mínimo de aire en los pulmones del sujeto.

c) Dibuje la gráfica de $B(t)$.

10. CONSUMO DE ENERGÍA Sea $H(t)$ el número de galones de petróleo empleado para calentar una casa particular en Búfalo, Nueva York, durante el mes t después de febrero de 2004. Suponga que $H(t)$ está modelado por la función

$$H(t) = 200 + 165 \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$$

a) ¿Durante qué mes es máximo el consumo de petróleo? ¿Cuál es esta cantidad máxima?

b) ¿Durante qué mes es mínimo el consumo de petróleo? ¿Cuál es esta cantidad mínima?

c) ¿Cuál es la cantidad total de petróleo que se consumirá en 2005 para la calefacción?

d) ¿Cuál es el promedio mensual de consumo de petróleo para calefacción en 2005?

11. POBLACIONES ESTACIONALES El porcentaje de muertes y el porcentaje de nacimientos de numerosas especies animales y de plantas fluctúa periódicamente con las estaciones del año. La población $P(t)$ de estas especies en el tiempo t varía a una tasa que puede ser modelada por una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dP}{dt} = (b + a \cos 2\pi t)P$$

www.FreeLibros.com

donde a y b son constantes. Resuelva esta ecuación para demostrar que

$$P(t) = P_0 e^{bt + \frac{a}{2\pi}\operatorname{sen} 2\pi t}$$

donde $P_0 = P(0)$ es la población inicial.

12. **POBLACIONES ESTACIONALES** Un rebaño de grandes mamíferos tiene una población $P(t)$ que fluctúa periódicamente con las estaciones y satisface una ecuación diferencial de la forma dada en el problema 11, donde t se mide en años. Inicialmente, hay $P(0) = 3\,000$ animales en el rebaño, y se observa que las poblaciones después de 3 meses y 6 meses, respectivamente, son

$$P(1/4) = 2\,800 \quad \text{y} \quad P(1/2) = 3\,200$$

a) Utilice esta información para determinar $P(t)$. Esto es, encuentre los parámetros a y b en la fórmula dada en el problema 11.

b) ¿Cuál será la población después de 9 meses ($t = 3/4$)? ¿Y después de 1 año?

c) Durante el primer año ($0 \le t \le 12$), ¿cuándo es máxima la población del rebaño? ¿Cuál es la población máxima?

d) Conteste las preguntas del inciso *c*) para la población mínima del rebaño.

13. **DEMANDA** Los consumidores demandan (compran) x cientos de unidades de cierta mercancía cuando el precio es $p = D(x)$ dólares por unidad, donde

$$D(x) = 10 - 2x + \operatorname{sen} \pi x$$

a) Dibuje la curva de demanda $p = D(x)$.

b) ¿Cuál es el precio promedio por unidad cuando el nivel de producción aumenta de 100 unidades a 400 unidades ($x = 1$ a $x = 4$)?

c) Encuentre el excedente de consumidores cuando se producen 400 unidades ($x = 4$).

14. **OFERTA** Un fabricante suministra x unidades de cierta mercancía al mercado cuando el precio es $p = S(x)$ cientos de dólares por unidad, donde

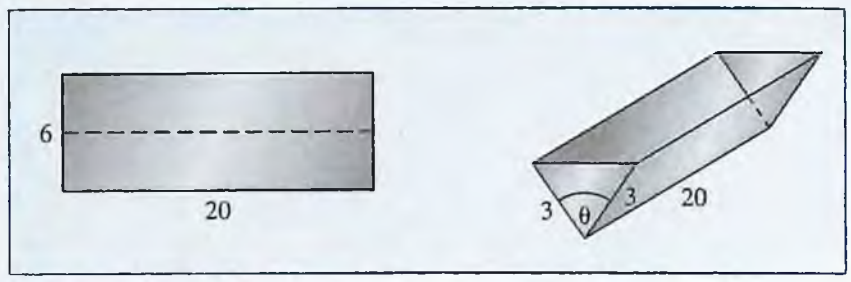
$$S(x) = 3 + 2x + 0.5 \cos \pi x$$

a) Dibuje la curva de oferta $p = S(x)$.

b) ¿Cuál es el precio promedio cuando el nivel de producción aumenta de $x = 0$ a $x = 5$?

c) ¿Cuál es el excedente de productores cuando se producen $x = 4$ unidades?

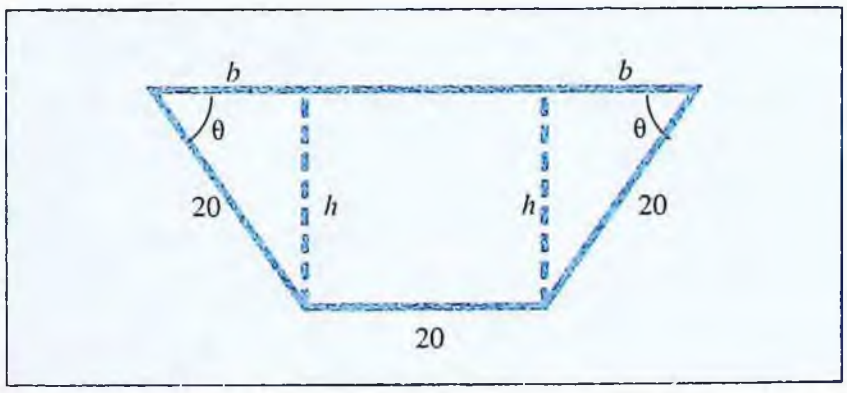
15. **CONSTRUCCIÓN** Una pieza de metal, de 20 metros de largo y 6 metros de ancho, se ha de doblar para formar un canal como se indica en la figura siguiente. ¿A qué ángulo deben encontrarse los lados para que el volumen del canal sea tan grande como sea posible? [*Sugerencia:* El volumen es la longitud del canal multiplicado por el área de su sección transversal triangular.]



PROBLEMA 15

16. **DISEÑO DE JARDINES** Un arquitecto desea construir un jardín en forma de triángulo isósceles. Los dos lados iguales deben tener longitudes de 20 pies. ¿Cuál debe ser la longitud del tercer lado para que el área del jardín sea tan grande como sea posible? ¿Cuál es el área máxima de un jardín que está diseñado con estas especificaciones?

17. **ARQUITECTURA** Un arquitecto recibe el encargo de construir un salón de juegos en forma de trapecio isósceles, como se muestra en la figura siguiente. Las dos paredes iguales (no paralelas) del salón y la más corta de las dos paredes paralelas deben medir cada una 20 pies de largo. ¿Cuál debe ser la longitud de la cuarta pared para maximizar el área del salón? ¿Cuál es el área máxima de un salón diseñado con estas especificaciones? [*Sugerencia:* Exprese el área en términos del ángulo θ que se muestra en la figura.]



PROBLEMA 17

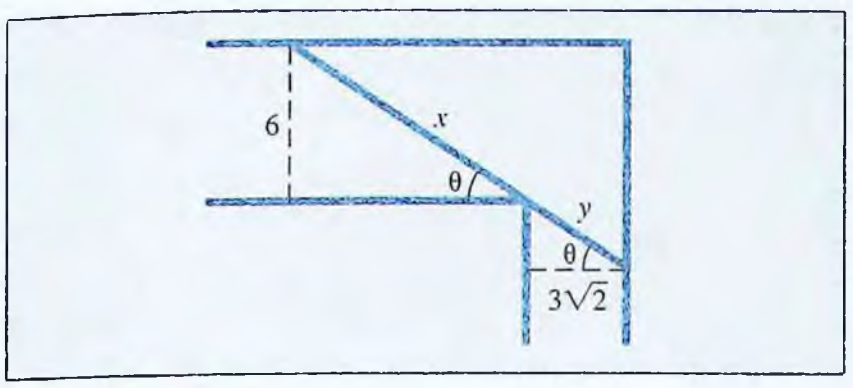
18. **CONSTRUCCIÓN** En un edificio en construcción hay un estrecho pasillo de sólo $3\sqrt{2}$ pies de ancho que da vuelta en una esquina hacia otro pasillo que mide 6 pies de ancho, como se ve en la figura siguiente. ¿Cuál es la longitud del tubo más largo que horizontalmente pueden pasar unos trabajadores alrededor de esta esquina? Ignore el diámetro del

www.FreeLibros.com

tubo. [*Sugerencia:* ¿Por qué es esto lo mismo que minimizar el claro horizontal

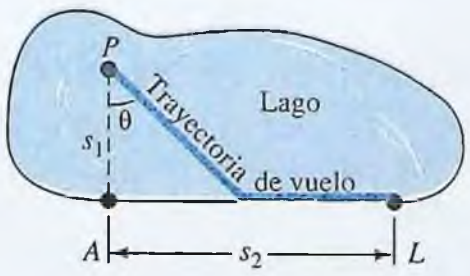
$$C(\theta) = \frac{6}{\operatorname{sen}\theta} + \frac{3\sqrt{2}}{\cos\theta}$$

en un intervalo apropiado de $a \leq \theta \leq b$?]



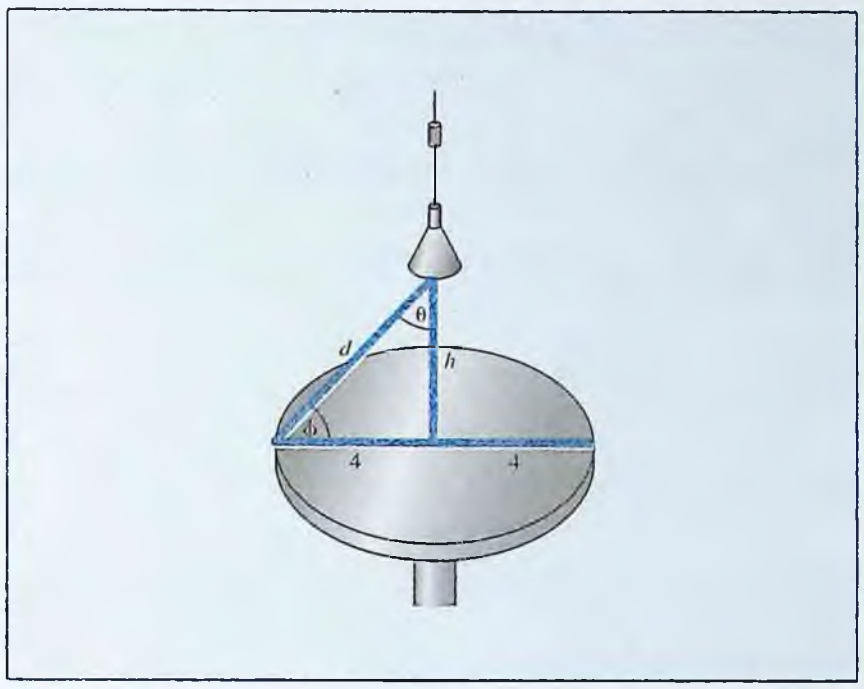
PROBLEMA 18

19. COMPORTAMIENTO DE LAS AVES Las investigaciones indican que los pichones que se dirigen a su palomar evitan volar sobre grandes cuerpos de agua, siempre que les es posible, quizá porque requieren más esfuerzo para volar por el aire pesado y frío que hay sobre el agua que por el aire cálido y más ligero sobre la tierra.[3] Suponga que un pichón se suelta desde un bote en un punto P en un lago y vuela a su palomar situado en un punto L en la orilla del lago, como se muestra en la figura siguiente. Suponga que se requieren E_w unidades de energía por milla para volar sobre el agua, y E_L unidades de energía por milla para volar sobre el terreno. Si el bote está a s_1 millas del punto A más cercano en la orilla y A está a s_2 millas del palomar L a lo largo de la orilla, ¿qué rumbo θ debe tomar el pichón desde el bote para minimizar la energía gastada para llegar a L?



PROBLEMA 19

20. ILUMINACIÓN Vuelva a trabajar el ejemplo 11.3.2, suponiendo que la iluminación es directamente proporcional al seno del ángulo ϕ y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d, donde ϕ es el ángulo al cual el rayo de luz llega a la mesa, como se muestra en la figura siguiente. Explique por qué su respuesta es igual que antes.

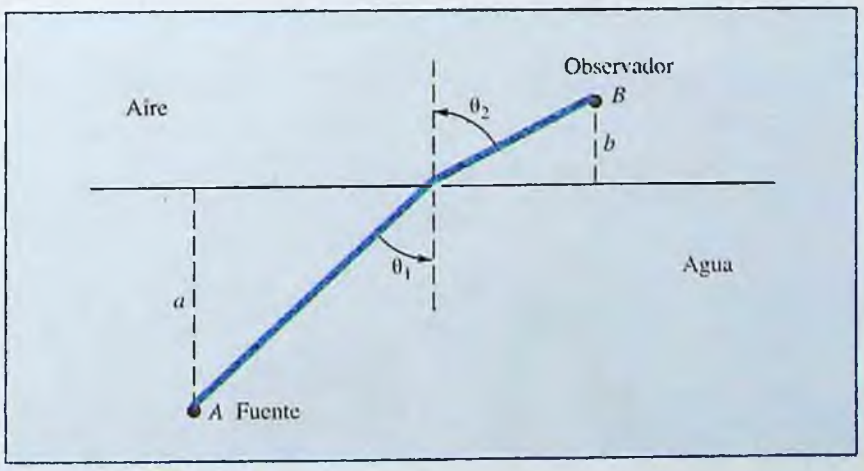


PROBLEMA 20

21. REFRACCIÓN DE LA LUZ El principio de Fermat en física expresa que la luz toma la trayectoria que requiera el mínimo tiempo de recorrido. La figura siguiente muestra un rayo de luz que es emitido desde una fuente en el punto A bajo el agua, y luego recibido por un observador en el punto B sobre la superficie del agua. Si v_1 es la velocidad de la luz en el agua y v_2 es la velocidad de la luz en el aire, use el principio de Fermat para demostrar que

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

donde θ_1 es el **ángulo de incidencia** y θ_2 es el **ángulo de refracción.** [*Sugerencia:* Use la solución al ejemplo 11.3.3 como guía. Se puede suponer, sin demostración, que el tiempo total se minimiza cuando su derivada es igual a cero.]



PROBLEMA 21

[3] Este problema está adaptado de un ejemplo del texto *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 2a. ed., de Edward Batschelet, Springer-Verlag, Nueva York, 1976, pp. 276-278.

www.FreeLibros.com

22. ÓRBITA DE UN SATÉLITE Un satélite de comunicaciones está situado a

$$r(t) = \frac{4\,831}{1 + 0.15\cos(0.06t)}$$

millas sobre el centro de la Tierra t minutos después de llegar a su órbita, como se indica en la figura siguiente.

a) Dibuje la gráfica de $r(t)$.

b) ¿Cuáles son los puntos más bajo y más alto de la órbita del satélite? (Estas posiciones se llaman *perigeo* y *apogeo*, respectivamente.)



PROBLEMA 22

23. EFICIENCIA DE ESFUERZO Un trabajador empuja una caja pesada por el piso de un almacén. Si el trabajador aplica una fuerza de magnitud F con un ángulo θ medido desde la horizontal, como se muestra en la figura siguiente, entonces usando la física se puede demostrar que

$$F = \frac{\mu W \sec\theta}{1 + \mu\tan\theta}$$

donde W es el peso de la caja y μ es el coeficiente de fricción entre la caja y la superficie del piso.

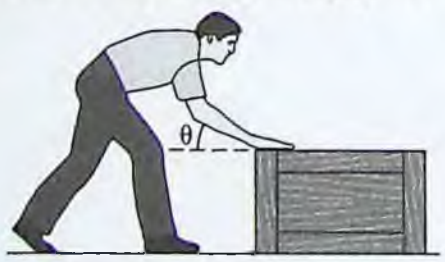
a) Para el caso donde $\mu = 0.4$ y $W = 35$ libras, encuentre los valores de F para los ángulos indicados en la tabla siguiente:

Ángulo θ	$\pi/8$	$\pi/6$	$\pi/4$	1.0	1.25	1.5
Fuerza F						

b) ¿Qué se puede decir acerca de F si $\theta = \pi/2$?

c) Dibuje la gráfica de F en el caso donde $\mu = 0.4$ y $W = 35$. El lector puede usar la función de gráficas de su calculadora. ¿Para qué ángulo θ es mínima la fuerza F?

d) En general, ¿cuál es el ángulo de mínimo esfuerzo (el ángulo que reduce F al mínimo para una selección particular de μ y W?



PROBLEMA 23

24. CLIMA Suponga que el observatorio meteorológico determina que el promedio de temperatura (°F) de cierta ciudad está dado por

$$F(t) = 45\,\text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 97)\right] + 38$$

donde t es el número de días después del 1 de enero.

a) Dibuje la gráfica de la función de temperatura $F(t)$. El lector puede usar la función de gráficas de su calculadora.

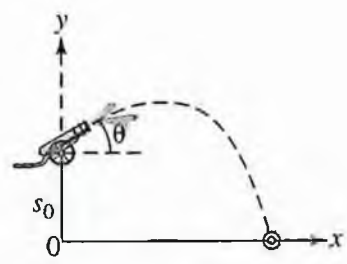
b) ¿Cuáles son las temperaturas más alta y más baja del año en esta ciudad? ¿Cuándo se presentan estas temperaturas extremas?

MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL *Suponga que un proyectil se dispara desde lo alto de un risco situado a s_0 pies de altura, con un ángulo de θ radianes y una velocidad inicial (en la boca del cañón) de v_0 ft/sec. Entonces, en física se demuestra que t segundos después, el proyectil estará en el punto (x, y), donde x y y están en pies y*

$$x = (v_0\cos\theta)t$$

$$y = -16t^2 + (v_0\,\text{sen}\,\theta)t + s_0$$

Estas fórmulas se usan en los problemas 25 al 28.



25. MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL Un proyectil es disparado desde lo alto de un risco. Dibuje la trayectoria del proyectil para cada uno de los casos descritos en la tabla siguiente. El estudiante puede usar la función de gráficas de su calculadora.

s_0 (pies)	100	100	0	0
v_0 (pies/s)	50	150	50	200
θ (radianes)	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/8$

a) Según estos resultados, ¿qué tipo de curva piensa usted que hará la trayectoria de un proyectil?

b) En cada uno de los casos citados en la tabla, encuentre el punto más alto en la trayectoria y el punto de impacto (donde la trayectoria cruza el eje x).

www.FreeLibros.com

26. ALTURA Y ALCANCE DE UN PROYECTIL

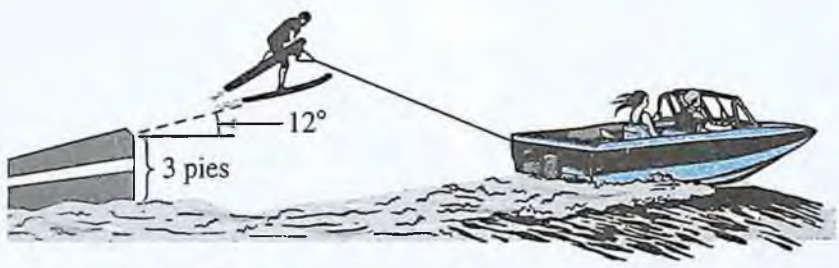
a) Encuentre una fórmula para la altura máxima alcanzada por un proyectil durante su vuelo. (Su respuesta contendrá θ y v_0.)

b) El *alcance* de un proyectil es la distancia horizontal medida desde la base del risco al punto de impacto. Encuentre una fórmula para el alcance (en términos de θ y v_0). ¿Para qué valor de θ es máximo el alcance?

27. ESQUIANDO SOBRE EL AGUA Un esquiador sobre agua está siendo remolcado por un bote de motor hacia una rampa de salto. El ángulo de la rampa es de 12° y su extremo está a 3 pies sobre el agua, como se ve en la figura siguiente.

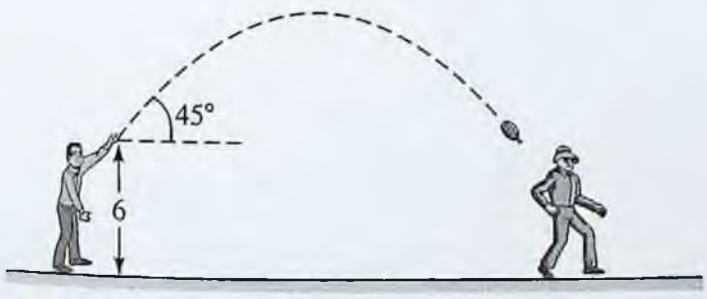
a) Si el bote de motor navega a 40 pies/s, ¿a qué distancia de la rampa cae al agua el esquiador?

b) El esquiador hace un segundo salto, con el bote navegando a una velocidad más alta. Si él cae al agua 10 pies más lejos que por el inciso *a*), ¿cuál es la nueva velocidad del bote de motor?



PROBLEMA 27

28. RELATO DE ESPÍAS Para su consuelo, la granada del espía estalla (problema 25, sección 10.2), poniendo fuera de combate a los hombres de Goldfinger. No obstante, este último no queda aturdido y lanza una granada en la dirección del espía, quien estima que su oponente suelta la granada con un ángulo de 45°, desde una altura de 6 pies y con una velocidad inicial de 50 pies/s. Una vez que la granada cae al suelo, la explosión dañará todo dentro de un radio de 10 pies de su punto de impacto. ¿A qué distancia de su enemigo debe estar el espía cuando la granada caiga al suelo, si desea escapar con vida?



PROBLEMA 28

29. MEDICINA Un *neumotacógrafo* es un aparato empleado para medir la tasa del flujo de entrada y salida del aire de los pulmones. Sea $V(t)$ el volumen de aire en los pulmones (en litros) en el momento t (segundos). Suponga que la tasa de flujo del aire está modelada por

$$V'(t) = 0.87 \text{ sen } (0.65t).$$

a) La inhalación se presenta cuando $V'(t) > 0$ y, la exhalación, cuando $V'(t) < 0$. El *periodo respiratorio* es el tiempo L necesario para inhalar y luego exhalar exactamente una vez. ¿Cuál es el valor de L?

b) ¿Qué volumen de aire se inhala durante el intervalo $0 \leq t \leq L$? ¿Es igual al volumen exhalado durante el mismo periodo?

c) Conteste las preguntas de los incisos *a*) y *b*) si la tasa de flujo del aire está modelada por

$$V'(t) = 0.87t \text{ sen } (0.65t)$$

[*Sugerencia:* Use integración por partes.]

En los problemas 30 y 31 el estudiante necesitará estas fórmulas de integración:

$$\int e^{au} \text{sen}(bu)\, du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} [a \text{ sen } (bu) - b \cos(bu)] + C$$

$$\int e^{au} \cos(bu)\, du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} [a \cos (bu) + b \text{sen}(bu)] + C$$

30. MEDICINA Repita el problema 29 para la función de tasa

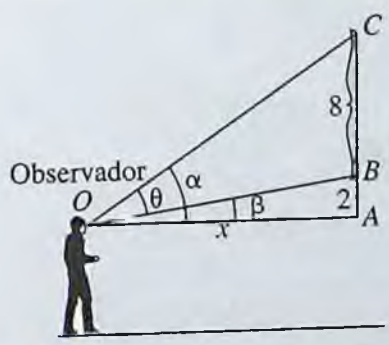
$$V'(t) = 0.31\, e^{-0.1t} \text{ sen } (0.81t)$$

31. POBLACIONES ESTACIONALES La población $P(t)$ de una especia fluctúa periódicamente con las estaciones del año en forma tal que

$$\frac{dP}{dt} = 0.03P + 0.004 \cos 2\pi t$$

donde t es el tiempo, en años. Si la población es inicialmente $P(0) = 10\,000$, ¿cuánto es 10 años después?

32. ÁNGULO ÓPTIMO DE OBSERVACIÓN Una pintura de 8 pies de alto está colgada en la pared de un museo de arte, 2 pies arriba del nivel de vista de un observador, como se ve en la figura.



PROBLEMA 32

www.FreeLibros.com

Sea θ el ángulo formado por la pintura en la vista del observador cuando éste se encuentra a x pies de la pared. Es razonable suponer que el observador tiene la mejor vista de la pintura cuando θ es lo mayor posible.

a) Sea β el ángulo $\angle AOB$ y sea α el ángulo $\angle AOC$. Utilice la identidad trigonométrica

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

para expresar tan θ en términos de x.

b) ¿A qué distancia de la pared debe estar el observador para maximizar el ángulo θ? [*Sugerencia:* Use derivación implícita en la ecuación para tan θ encontrada en el inciso *a*).]

33. ENFERMEDAD DE ALZHEIMER Una investigación[4] indica que la temperatura corporal $T(t)$ (en °C) de pacientes con enfermedad de Alzheimer fluctúa periódicamente en un periodo de 24 horas según la fórmula

$$T(t) = 37.29 + 0.46\cos\left[\frac{\pi(t - 16.37)}{12}\right]$$

donde $t (0 \le t \le 24)$ es el número de horas después de la medianoche.

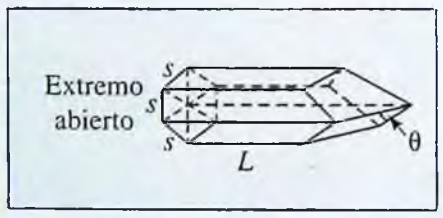
a) Encuentre la derivada $T'(t)$.

b) ¿A qué hora (u horas) durante el periodo de 24 horas se presenta la máxima temperatura corporal? ¿Cuál es la temperatura máxima?

c) Conteste las preguntas del inciso *b*) para la temperatura corporal mínima durante el periodo de 24 horas.

d) Suponga que pacientes de cierto grupo de control están despiertos de 7 a.m. a 10 p.m. ¿Cuál es el promedio de temperatura corporal de estos pacientes en este periodo en que están despiertos?

34. ÁREA SUPERFICIAL DE LA CELDA DE UNA ABEJA Una celda de un panal es un prisma hexagonal regular abierto en un extremo, con un ángulo triédrico θ en el otro, como se ve en la siguiente figura.



PROBLEMA 34

[4] "Sundowning and Circadian Rhythms in Alzheimer's Disease", por L. Volicer y otros, *American Journal of Psychiatry*, Vol.158, No.5, mayo de 2001, pp. 704-711.

Usando trigonometría[5](¡mucha!), se puede demostrar que la celda tiene un área superficial de

$$S(\theta) = 6sL + 1.5s^2(-\cot\theta + \sqrt{3}\csc\theta)$$

para $0 \le \theta \le \pi/2$, donde s es la longitud de cada lado en la base hexagonal abierta, y L es la altura del prisma.

a) Suponiendo que s y L son fijas (constantes), ¿qué ángulo minimiza el área superficial $S(\theta)$? Exprese el área mínima en términos de s y L.

b) Lea el artículo citado con este problema y escriba un párrafo sobre si usted piensa, o no, que las abejas en realidad conservan la cera construyendo sus celdas con el "ángulo de la abeja" hallado en el inciso *a*).

35. CIRCULACIÓN SANGUÍNEA Sea $F(\theta)$ la resistencia a la circulación sanguínea obtenida en el ejemplo 11.3.4; es decir,

$$F(\theta) = k\left[\frac{L - h\cot\theta}{R^4} + \frac{h\csc\theta}{r^4}\right]$$

En el ejemplo 11.3.4 se encontró la derivada $F'(\theta)$ y se demostró que $F(\theta)$ tiene su único número crítico en θ_0 donde $\cos\theta_0 = r^4/R^4$. Demuestre que $F'(\theta) < 0$ si $0 < \theta < \theta_0$ y que $F'(\theta) > 0$ si $\theta > \theta_0$. ¿Por qué esto significa que $F(\theta)$ tiene un mínimo absoluto en θ_0?

36. LUZ POLARIZADA Una onda de luz polarizada se desplaza en forma tal que su desplazamiento vertical y, en el momento t, es una función de t y de su desplazamiento horizontal x, según la fórmula

$$y(x, t) = 0.27\,\text{sen}\left(10\pi t - 3\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$$

a) Encuentre $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial y}{\partial t}$.

b) ¿Para qué puntos (x, t) queda maximizada $y(x, t)$? ¿Para qué puntos queda minimizada $y(x, t)$?

37. DISEÑO MECÁNICO Una junta cardán es un acoplamiento que se emplea en automóviles y otros sistemas mecánicos para unir ejes que giran en ángulo. En un modelo diseñado para explorar la mecánica del mecanismo de junta cardán,[6] se demuestra que

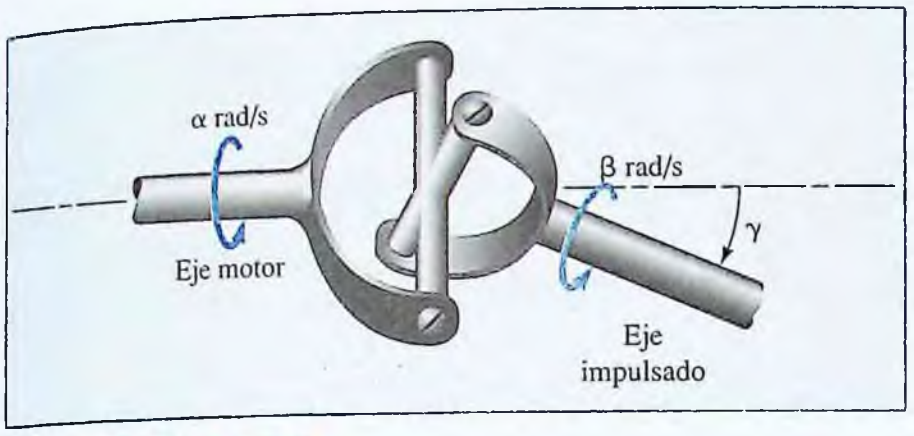
$$\beta(t) = \frac{\alpha\cos\gamma}{1 - \text{sen}^2\gamma\,\text{sen}^2(\alpha t)}$$

[5] E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 2ª ed., Springer-Verlag, Nueva York, 1976, pp. 274-276.

[6] "A Mathematical Model of a Universal Joint", por Thomas O'Neill, *UMAP Modules 1982; Tools for Teaching*, Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., Lexington, MA, 1983, pp. 393-405.

www.FreeLibros.com

donde α (rad/s) es la velocidad angular del eje de entrada (motor), $\beta(t)$ es la velocidad angular del eje de salida (impulsado), y γ es el ángulo entre los dos ejes, como se ve en la figura siguiente.



PROBLEMA 37

a) Dibuje la gráfica de $\beta(t)$ para el caso donde α y γ son constantes positivas. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo de $\beta(t)$?

b) Sea T el tiempo necesario para que el eje impulsor complete una revolución. Encuentre T y luego *establezca* una integral para el promedio de velocidad angular de salida A en el periodo $0 \le t \le T$.

c) La integral del inciso *b*) no es fácil de evaluar. Use la función de integración numérica de su calculadora para hallar la velocidad angular de salida promedio A para las opciones de α y γ dadas en la tabla siguiente:

Velocidad angular de entrada α	3	5	10	12.7
Ángulo entre los ejes γ	$\pi/12$	$\pi/6$	0.4	0.26
Velocidad de salida promedio A				

d) Con base en los resultados obtenidos en el inciso *c*), ¿cuál piensa usted que será la velocidad angular de salida promedio? ¿Tiene sentido este resultado?

e) En las páginas 398-400 del módulo UMAP citado con este problema, el autor considera el caso donde dos juntas cardán están dispuestas para compensar pulsaciones en un sistema de transmisión. Lea este material y escriba un párrafo que analice los métodos de modelado y las conclusiones del autor.

38. ÓPTICA En el estudio de difracción de Fraunhofer en óptica, un haz de luz de intensidad I_0 desde una fuente L pasa por una estrecha ranura y es difractado sobre una pantalla. Experimentos demuestran que la intensidad $I(\theta)$ de luz en la pantalla depende del ángulo θ, mostrado en la figura siguiente, en forma tal que

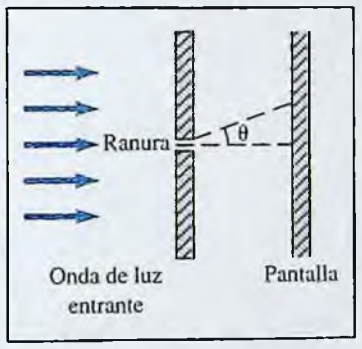
$$I = I_0\left(\frac{\operatorname{sen}(\beta/2)}{\beta/2}\right)^2$$

donde $\beta = 2\pi a \operatorname{sen}(\theta/\lambda)$, λ es la longitud de onda de la luz, y a es una constante positiva relacionada con el ancho de la ranura.

a) Encuentre $dI/d\beta$, luego use la regla de la cadena para hallar $dI/d\theta$.

b) Dibuje la gráfica de $I(\beta)$. ¿Para qué valores de β es cero la intensidad $I(\beta)$? (Los ángulos correspondientes resultan en bandas blancas en la figura de difracción.)

c) En difracción de Fraunhofer, se supone que los rayos de luz incidentes son paralelos cuando se dirigen a la ranura. Lea un artículo sobre difracción de Fraunhofer y un fenómeno relacionado llamado **difracción de Fresnel,** donde los rayos incidentes no son paralelos. Entonces escriba un párrafo sobre la forma en que la difracción afecta sistemas óptimos.



PROBLEMA 38

39. CRECIMIENTO POBLACIONAL El número $P(t)$ de garrapatas de venado por acre en un parque de Maryland puede ser modelado por la función

$$P(t) = 1\,250e^{0.3t}\left\{1.47 + 1.38\cos\left[\frac{2\pi}{365}(t - 145)\right]\right\}$$

donde t es el número de años después del año base 2000.

a) Encuentre el número de garrapatas de venado por acre en el parque en los años 2000, 2005 y 2010.

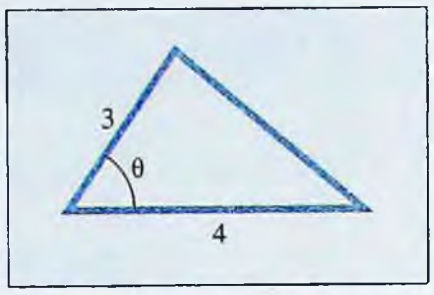
b) Encuentre la tasa de cambio del número de garrapatas de venado por acre en el parque en los años 2000, 2005 y 2010.

c) Dibuje la gráfica del número de garrapatas de venado por acre en el parque.

d) Escriba un párrafo que explique qué hay acerca de la función $P(t)$ que la hace un buen modelo para el número de garrapatas de venado por acre.

www.FreeLibros.com

40. Dos lados de un triángulo tienen longitudes 3 y 4 y están separados por un ángulo θ, como se ve en esta figura.



PROBLEMA 40

a) Demuestre que el área del triángulo está dada por $A(\theta) = 6 \operatorname{sen} \theta$ y use la función de gráficas de su calculadora para graficar $A(\theta)$ para $0 \leq \theta \leq \pi$.

b) Use **TRACE** y **ZOOM** para hallar el ángulo para el que $A(\theta)$ es maximizado para $0 \leq \theta \leq \pi$.

41. CONSUMO DE ENERGÍA El consumo doméstico de energía para calefacción de espacios es medido a veces por los llamados *días de grados de calefacción* (hdd), que se definen como $65 - T_{\text{prom}}$, donde T_{prom} es el promedio entre las temperaturas diarias alta y baja, en °F.

Suponga que el número de los hdd en Bangor, Maine, el día t de un año particular está modelado por la función

$$H(t) = 25 + 22 \cos\left[\frac{2\pi}{365}(t - 35)\right]$$

para $0 \leq t \leq 365$, donde $t = 0$ corresponde al principio del día 1 de enero.

a) ¿En qué día del año es que este modelo pronostica que se sentirá el número máximo de hdd en Bangor? ¿Cuál es este número máximo?

b) Conteste las preguntas del inciso *a*) para el número mínimo de los hdd.

c) ¿Con qué rapidez está cambiando la función $H(t)$ de consumo de energía el 1 de enero? ¿Es $H(t)$ creciente o decreciente en este tiempo? Repita para el 1 de abril ($t = 91$) y 1 de junio ($t = 152$).

d) Dibuje la gráfica de $H(t)$ para todo el año.

e) ¿Cuál es el promedio de hdd para los primeros 90 días del año (enero a marzo)? Esto da una medida del promedio diario de consumo de energía de una familia en Bangor durante el primer trimestre del año.

www.FreeLibros.com

Términos importantes, símbolos y fórmulas

Medida de un ángulo:
Medida en grados (780)
Medida en radianes (781)
Fórmula de conversión (781)

$$\frac{\text{grados}}{180} = \frac{\text{radianes}}{\pi}$$

El seno y el coseno (782)

Tabla de valores de seno y coseno frecuentemente empleados (787)

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$\operatorname{sen}\theta$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	$-1/2$	$-\sqrt{2/2}$	$-\sqrt{3}/2$	-1

Propiedades del seno y del coseno: (783)

$$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$$
$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

Gráficas de sen θ y cos θ (784)

Otras funciones trigonométricas: (785)

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

La trigonometría de ángulos rectángulos: (786)

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\cos\theta = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$
$$\tan\theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}}$$

Identidad pitágorica: (788)

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Fórmulas del ángulo suma: (788)

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen} A \cos B + \operatorname{sen} B \cos A$$
$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

Fórmulas del ángulo duplo: (789)

$$\operatorname{sen}(2A) = 2 \operatorname{sen} A \cos A$$
$$\cos(2A) = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A$$
$$= 2\cos^2 A - 1$$
$$= 1 - 2\operatorname{sen}^2 A$$

Fórmulas de derivación: (794–795)

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{sen} u(t)) = \cos u \frac{du}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}(\cos u(t)) = -\operatorname{sen} u \frac{du}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}(\tan u(t)) = \sec^2 u \frac{du}{dt}$$
$$\frac{d}{dt}(\sec u(t)) = \sec u \tan u \frac{du}{dt}$$

Fórmulas de integración: (797)

$$\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + C$$
$$\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + C$$
$$\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$$
$$\int \sec u \tan u\, du = \sec u + C$$

Modelos para fenómenos periódicos: (798)

$$s(t) = a + b \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{p}(t - d)\right]$$
$$c(t) = a + b \cos\left[\frac{2\pi}{p}(t - d)\right]$$

donde p es el periodo
$1/p$ es la frecuencia
b es la amplitud
d es el cambio de fase
a es la traslación vertical

Principio de Fermat (810)

Ley de resistencia de Poiseuille (811)

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Revisión del capítulo 11

1. Evalúe cada una de las siguientes expresiones sin usar tablas ni calculadora:

a) $\text{sen}(5\pi/6)$ *b)* $\cos(-4\pi/3)$

c) $\tan(3\pi/4)$ *d)* $\sec(-5\pi/6)$

2. Encuentre $\cos\theta$ para $0 \le \theta \le \pi/2$ dado que $\tan\theta = 2/3$.

3. Derive cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \text{sen}(2x)$ *b)* $f(x) = x\cos x$

c) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ *d)* $f(x) = x \sin(x^2)$ sen

4. Encuentre cada una de las integrales siguientes:

a) $\int \text{sen}(2x)\,dx$ *b)* $\int x\cos(x^2)\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec^2(2t)\,dt$ *d)* $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \text{sen}^2 t\cos t\,dt$

5. Encuentre todos los valores de θ tales que $\text{sen}(2\theta) = \cos\theta$ para $0 \le \theta \le \pi$.

6. Encuentre el área de la región limitada arriba por $y = \cos x$, abajo por $y = \text{sen}\,x$, y a la izquierda por el eje y.

7. A partir de la identidad $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, deduzca la identidad $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$.

8. VENTAS Las ventas mensuales de cierto producto satisfacen

$$S(t) = 19.3 + 9.4\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{6}\right) + 3.4\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$$

donde $t(0 \le t \le 12)$ es el tiempo en meses medido desde el inicio de enero y S se mide en miles de unidades.

a) ¿Con qué frecuencia están cambiando las ventas a mitad del año ($t = 6$)? ¿Aumentan o disminuyen en este tiempo?

b) ¿Cuáles son los niveles máximo y mínimo de ventas para el año? ¿En qué meses se presentan estos niveles extremos de ventas? [*Sugerencia:* Puede usar la identidad del ángulo duplo $\text{sen}(2A) = 2\text{sen}\,A\cos A$.]

9. COSTO MARGINAL Suponga que $C(x)$ es el costo (en cientos de dólares) de producir x unidades de una mercancía particular, y que el costo marginal está dado por

$$C'(x) = 3x + 2.5\,\text{sen}\,(2\pi x)$$

para $0 \le x \le 10$.

a) ¿Cuál es el costo neto de producir las primeras cinco unidades?

b) ¿Con qué rapidez está cambiando el costo cuando se producen 5 unidades? ¿En cuánto está cambiando el costo marginal a este nivel de producción?

10. METABOLISMO DE LA MUJER Suponga que la temperatura corporal (en °F) de una mujer particular, después de t días en el mes de junio, está dada por

$$T(t) = 98.3 + 0.3\cos\left[\frac{2\pi(t-15)}{28}\right] + 0.2\cos[2\pi(t-0.6)]$$

para $0 \le t \le 30$.

a) ¿Con qué rapidez está cambiando la temperatura corporal de esta mujer cuando $t = 15$?

b) ¿Cuál es el promedio de temperatura corporal de esta mujer durante el mes de junio?

11. PRESIÓN SANGUÍNEA La presión sanguínea de un paciente particular en el tiempo t (segundos) está modelada por la función

$$B(t) = 105 + 31\cos kt$$

donde k es una constante positiva y B se mide en milímetros de mercurio. Suponga que el paciente tiene una frecuencia cardiaca de 80 pulsaciones por minuto.

a) Encuentre k.

b) Con el uso del valor de k hallado en el inciso *a)*, dibuje la gráfica de $B(t)$.

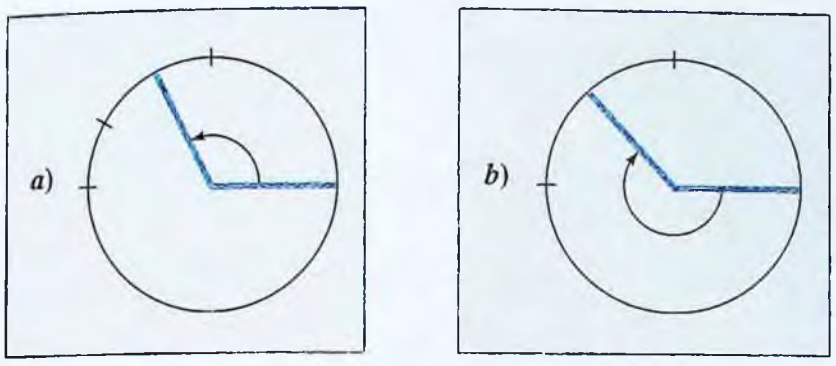
c) Determine las presiones sistólica (máxima) y diastólica (mínima) para el paciente.

d) ¿Cuál es la presión sanguínea del paciente en el momento en que ella está aumentando más rápidamente?

www.FreeLibros.com

Problemas de repaso

1. Especifique la medida en radianes y la medida en grados para cada uno de los ángulos siguientes:



2. Convierta cada una de las siguientes medidas de grados a radianes:

   a) 50° *b*) 120° *c*) −15°

3. Convierta cada una de las siguientes medidas de radianes a grados:

   a) 0.25 radián *b*) 1 radián *c*) −1.5 radianes

4. Evalúe cada una de las siguientes expresiones sin usar la tabla III ni su calculadora:

   a) $\operatorname{sen}(-5\pi/3)$ *b*) $\cos(15\pi/4)$

   c) $\sec(7\pi/3)$ *d*) $\cot(2\pi/3)$

5. Encuentre $\tan\theta$ si $\operatorname{sen}\theta = 4/5$ y $0 \le \theta \le \pi/2$.

6. Encuentre $\csc\theta$ si $\cot\theta = \sqrt{5}/2$ y $0 \le \theta \le \pi/2$.

En los problemas 7 al 10 encuentre todos los valores de θ en el intervalo especificado que satisfacen la ecuación dada.

7. $2\cos\theta + \operatorname{sen} 2\theta = 0;\ 0 \le \theta \le 2\pi$

8. $3\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta = 2;\ 0 \le \theta \le \pi$

9. $2\operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta;\ 0 \le \theta \le \pi$

10. $5\operatorname{sen}\theta - 2\cos^2\theta = 1;\ 0 \le \theta \le 2\pi$

11. A partir de las identidades

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

deduzca las identidades

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

12. A partir de las fórmulas para el seno y el coseno del ángulo duplo, deduzca una fórmula para la tangente del ángulo duplo.

13. *a*) A partir de las fórmulas para el seno y coseno de la suma, deduzca las identidades

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$$

   b) Dé argumentos geométricos para justificar las identidades del inciso *a*).

En los problemas 14 al 20 derive la función dada.

14. $f(x) = \operatorname{sen}(3x + 1)\cos x$

15. $f(x) = \cos^2 x$

16. $f(x) = \tan(3x^2 + 1)$

17. $f(x) = \tan^2(3x + 1)$

18. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$

19. $f(x) = \ln(\cos^2 x)$

20. $f(x) = e^{-2x}\cos 3x$

En los problemas 21 al 26 encuentre la integral dada.

21. $\int \operatorname{sen} 2t\, dt$

22. $\int \cos(1 - 2t)\, dt$

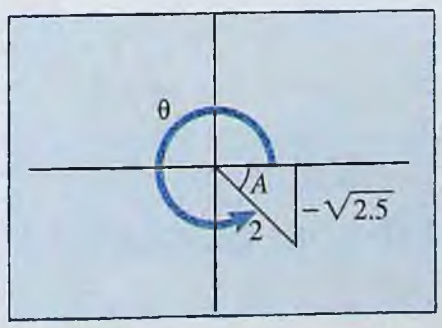
23. $\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$

24. $\int x \operatorname{sen} x\, dx$

25. $\int \dfrac{\sec^2 t}{\tan t}\, dt$

26. $\int \tan^2 t\, dt$ [*Sugerencia:* Use $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$.]

27. El ángulo θ tiene un lado terminal en el cuarto cuadrante, como se ve en la figura siguiente. Encuentre el ángulo de referencia A, en grados aproximado al segundo más cercano. A continuación encuentre el mínimo ángulo positivo θ de modo que $\csc\theta = \csc A$.



RESUMEN DEL CAPÍTULO

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL CAPÍTULO

28. En cada uno de los casos siguientes, use la función de gráficas de su calculadora para dibujar las gráficas del par de funciones $f(x)$ y $g(x)$ dadas en la misma pantalla. Describa la relación entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = 2 \operatorname{sen} x$

b) $f(x) = \cos x$ y $g(x) = 2 \cos 2x$

c) $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$

d) $f(x) = \cos x$ y $g(x) = 2 + \cos x$

29. Use su calculadora para resolver la ecuación

$2 \tan 3x - 5.87 = 2 \operatorname{sen} 2x$ para $x \leq x \leq \pi/2$

con una exactitud de tres lugares decimales.

30. Encuentre el área de la región limitada por las curvas $y = \operatorname{sen} 2x$ y $y = \cos x$ sobre el intervalo $\pi/6 \leq x \leq \pi/2$.

31. Sea R la región limitada por el eje x, la curva $y = \cos x + \operatorname{sen} x$ y las rectas $x = -\pi/2$ y $x = \pi/6$. Encuentre el volumen del sólido generado al hacer girar R alrededor del eje x.

32. *a*) Encuentre el periodo p, la amplitud b, el cambio de fase d y la traslación vertical a de la función

$$f(x) = 5.0 + 3.0 \cos\left[\frac{\pi}{4}(x - 1.5)\right]$$

b) Dibuje la gráfica de la función $f(x)$ en el inciso *a*).

33. *a*) Encuentre el periodo p, la amplitud b, el cambio de fase d y la traslación vertical a de la función

$$f(x) = 33 + 27 \cos\left[\frac{2\pi}{25}(x - 11)\right]$$

b) Dibuje la gráfica de la función $f(x)$ en el inciso *a*).

34. CLIMA La máxima temperatura diaria $T(x)$ en grados Celsius en Minneapolis el día x del año se puede modelar como

$$T(x) = 13 + 33 \cos\left[\frac{2\pi}{365}(x - 271)\right]$$

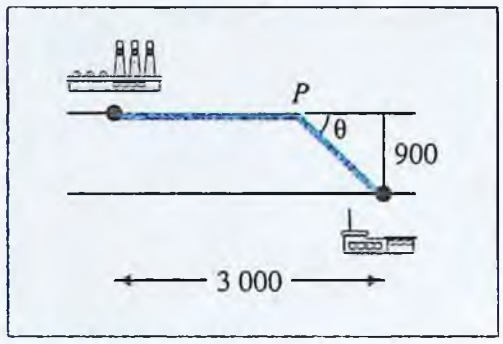
donde $x = 0$ corresponde al 1 de enero.

a) Con el uso de una calculadora, encuentre la máxima temperatura diaria en Minneapolis el primer día de enero. Repita para los primeros días de marzo, mayo, julio, septiembre y noviembre.

b) Encuentre la más alta y más baja temperatura máxima diaria en Minneapolis durante el año.

c) Dibuje la gráfica de la función $T(x)$ de la máxima temperatura diaria.

35. COSTO DE CONSTRUCCIÓN Se tiende un cable en línea recta de una planta generadora de energía eléctrica, situada a un lado de un río de 900 metros de ancho, a un punto P en el otro lado, y luego a lo largo de la margen del río a una fábrica ubicada 3 000 metros río abajo desde la planta de energía, como se ve en la figura siguiente. El costo de tender el cable bajo el agua es \$5 por metro, mientras que el costo de tender el cable en tierra es de \$4 por metro. Si θ es el ángulo (más pequeño) entre el segmento de cable bajo el río y la margen opuesta, demuestre que para la ruta que minimiza el costo total de instalación se cumple que $\cos \theta = 4/5$ (el cociente entre los costos por metro). (Se puede suponer, sin demostración, que el mínimo absoluto se obtiene cuando la derivada de la función de costo es cero.)



PROBLEMA 35

36. POBLACIONES ESTACIONALES Podemos modelar la población $P(t)$ de una especie animal o planta que fluctúa estacionalmente, usando una función de la forma $P(t) = P_0 e^{a \operatorname{sen}(2\pi t)}$, donde t es el tiempo en años y $P_0 = P(0)$ es la población inicial.

La función $P(t)$ de población satisface una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dP}{dt} = R(t)P(t)$$

donde $R(t)$ es la función de frecuencia relativa de crecimiento para la especie (tasa de nacimientos − tasa de muertes). ¿Cuánto es $R(t)$?

37. POBLACIONES ESTACIONALES Suponga que la población de mosquitos de un pantano puede ser modelada por $P(t) = 500e^{7 \operatorname{sen}(2\pi t)}$, donde t es el tiempo en años y $t = 0$ corresponde al 1 de mayo.

a) Encuentre el número de mosquitos en el pantano en el momento $t = 0.125$. Repita para los momentos $t = 0.25$, $t = 0.5$ y $t = 0.625$.

b) Encuentre la razón de cambio de la población de mosquitos en el pantano en el momento $t = 0.125$. Repita para los momentos $t = 0.25$, $t = 0.5$ y $t = 0.625$.

c) Dibuje la gráfica de $P(t)$.

38. CONTAMINACIÓN Los niveles de ozono en partes por millón (ppm) en una ciudad pueden ser modelados por la función

$$F(t) = 0.01t^3 + 0.05t^2 + 1.1t + 56 + 22 \operatorname{sen}(2\pi t)$$

donde t es el tiempo en años después de 1990.

a) Encuentre los niveles de ozono el 1 de julio de 1990. Repita para el 1 de enero de 2000, y 1 de marzo de 2005.

www.FreeLibros.com

b) Encuentre la razón de cambio del nivel de ozono en las tres fechas del inciso *a*).

c) Grafique $F(t)$ para el periodo de 1990 a 2010 $(0 \le t \le 20)$.

d) Describa el comportamiento de $F(t)$ cuando t aumenta de 0 a 20. Interprete los efectos de la parte polinomial y de la parte periódica de $F(t)$.

39. CRECIMIENTO POBLACIONAL Suponga que entran caribúes a la Arctic National Wildlife Reserve a la razón modelada por la derivada

$$C'(t) = 275 + 275 \cos\left[\frac{\pi}{6}(t - 3)\right]$$

donde $C(t)$ es el número de caribúes en la Reserva en el momento t (meses).

a) ¿Cuánto crece la población de caribúes en la Reserva durante el primer año $(0 \le t \le 12)$? ¿Qué pasa durante el segundo año $(12 \le t \le 24)$?

b) ¿Durante qué mes del año es máxima la población de caribúes? ¿Cuándo es mínima?

40. VENTAS Las ventas mensuales de alitas de pollo picantes en Los Ángeles se pueden estimar usando la función

$$B(t) = 4\,128\,500 + F_1(t) + F_2(t)$$

donde

$$F_1(t) = -841\,000 \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) - 111\,500 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$

$$F_2(t) = 234\,500 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) - 88\,000 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{3}\right)$$

y t se mide en meses, con $t = 1$ correspondiente a enero.

a) Use la fórmula para $B(t)$ para estimar el número de alitas de pollo vendidas en Los Ángeles durante junio.

b) Encuentre el promedio de ventas mensuales de alitas de pollo durante el primer año $(0 \le t \le 12)$.

41. LUZ DIURNA El número de horas de luz diurna en Nueva York para el día t del año se puede modelar usando la función

$$D(t) = 12.2 + 3.09 \cos\left[\frac{2\pi}{365}(t - 185)\right]$$

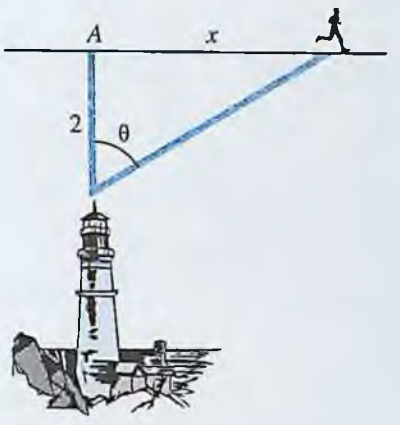
donde $t = 0$ corresponde al 1 de enero.

a) ¿Cuántas horas de luz diurna hay el 1 de enero? ¿Y el 15 de marzo $(t = 74)$? ¿El 21 de junio $(t = 172)$?

b) ¿En qué día del año es máximo el número de horas de luz diurna? ¿Cuándo ocurre el número mínimo de horas de luz diurna?

c) ¿Cuál es el número promedio de horas de luz diurna por día en todo el año $(0 \le t \le 365)$?

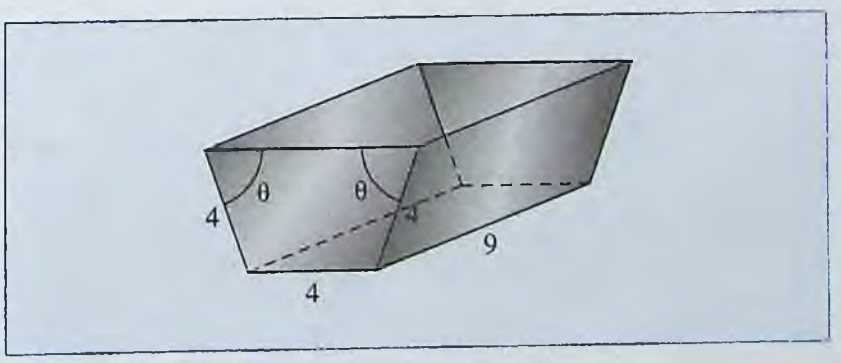
42. TASA DE CAMBIO RELATIVA El reflector giratorio de un faro, ubicado 2 millas mar afuera, está siguiendo a un deportista que corre a lo largo de la playa, como se ve en la figura siguiente. Cuando el deportista está a 1 milla del punto A en la orilla que está más cercana al faro, el reflector está girando a razón de 0.25 revoluciones por hora. ¿Con qué rapidez está corriendo el deportista en este momento? [*Sugerencia:* Como 0.25 revoluciones por hora es $\pi/2$ radianes por hora, el problema es hallar $\frac{dx}{dt}$ cuando $x = 1$ y $\frac{d\theta}{dt} = \pi/2$.]



PROBLEMA 42

43. TASA DE CAMBIO RELATIVA En víspera de año nuevo, un juerguista está observando la caída de una pelota iluminada desde lo alto de un edificio que está a 600 pies de distancia. La pelota está cayendo a razón de 20 pies por minuto. ¿Con qué rapidez está cambiando el ángulo de elevación de la línea de vista del juerguista, con respecto al tiempo, cuando la pelota está 800 pies del suelo?

44. CONSTRUCCIÓN Un canal de 9 metros de largo debe tener una sección transversal formada por un trapecio isósceles en el que la base y dos lados miden todos ellos 4 metros de largo, como se ve en la figura siguiente. ¿Con qué ángulo deben los lados del trapecio encontrar la parte horizontal para maximizar la capacidad del canal?



PROBLEMA 44

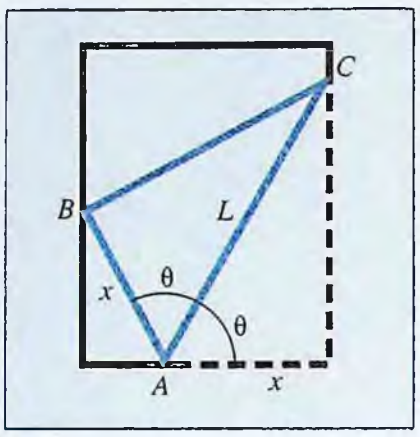
www.FreeLibros.com

45. **CONSTRUCCIÓN** Una hoja de papel que mide 8.5 pulgadas por 11 pulgadas, se dobla de modo que la esquina inferior derecha llega al borde izquierdo, formando un ángulo θ en el doblez, como se ve en la figura siguiente.

a) Exprese la longitud del doblez L como función de θ.

b) Encuentre el ángulo θ del doblez para el cual L se minimiza. ¿Cuál es la longitud mínima?

c) ¿Cuál es la mínima área del triángulo ΔABC mostrado en la figura?



PROBLEMA 45

46. Resuelva la ecuación diferencial de variables separables

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x \sec y$$

sujeta a la condición $y = 1$ cuando $x = 0$.

47. Resuelva la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \operatorname{sen} x$$

sujeta a la condición $y = 1$ cuando $x = \pi$.

(Es posible que necesite usar integración por partes.)

48. Use la función de gráficas de su calculadora para dibujar las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = e^{x-2}$ para $x \geq 0$ en la misma pantalla. Encuentre todos los puntos de intersección de las dos curvas. Sea R la región encerrada por las dos curvas.

a) Encuentre el área de la región R.

b) Encuentre el volumen del sólido formado al hacer girar la región R alrededor del eje x. [*Sugerencia:* Puede ser útil recordar la identidad $\operatorname{sen}^2 x = (1 - \cos 2x)/2$.]

c) Verifique la integración en el inciso *b*) usando la función de integración numérica de su calculadora.

49. La integral definida

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(x^2)\, dx$$

está asociada con la difracción de luz, pero el integrando $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ no tiene antiderivada.

a) Use la regla de Simpson (sección 6.3) con $n = 10$ para estimar el valor de la integral definida dada.

b) Verifique el resultado en el inciso *a*) usando la función de integración numérica de su calculadora.

50. Repita los pasos del problema 49 para la integral definida

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x^2)\, dx$$

51. Evalúe $\int \tan x\, dx$. [*Sugerencia:* Use la sustitución $u = \cos x$.]

52. *a*) Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$, donde $y = \ln(\sec x + \tan x)$.

b) Encuentre $\int \sec x\, dx$.

c) La **proyección Mercator**[7] es un procedimiento de cartografía para dibujar el mapa de la Tierra en una superficie plana, en la que las trayectorias de dirección constante de una brújula son líneas rectas. Resulta que dibujar uno de estos mapas requiere de los valores de la integral

$$\int_0^x \sec\theta\, d\theta$$

para todo $0 \leq x \leq \pi/2$. Lea el artículo citado en la nota al pie de este problema y escriba un párrafo sobre el papel desempeñado por esta integral en el desarrollo de la proyección de Mercator.

Los problemas 53 al 58 se refieren a temas desarrollados en los capítulos 7 y 9.

53. ¿Cuál es el máximo valor posible del producto

$$f(A, B, C) = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$$

dado que A, B y C son los ángulos en un triángulo? [*Sugerencia:* Puede ser útil ver que $A + B + C = \pi$.]

[7] "Mercator's World Map and Calculus", por Philip M. Tuchinsky, *UMAP Modules 1977: Tools for Teaching*, Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., Lexington, MA, 1978.

www.FreeLibros.com

54. La integral de la función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ aparece en ciertas aplicaciones de ingeniería, pero $f(x)$ no tiene antiderivada.

a) Encuentre la serie de Taylor alrededor de $x = 0$ para $\operatorname{sen} x$.

b) Use el resultado del inciso *a*) para demostrar que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Entonces integre esta serie de potencia término por término para expresar la integral definida

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

como una serie numérica infinita.

c) Estime el valor de la integral definida

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx$$

calculando la suma de los primeros cuatro términos de la serie numérica del inciso *b*).

55. **LA ECUACIÓN DE DIFUSIÓN** La siguiente ecuación, que contiene derivadas parciales de la función $u(x, t)$, se denomina *ecuación de difusión:*

$$u_t = c^2 u_{xx}$$

La ecuación de difusión se emplea para modelar una gran variedad de fenómenos físicos. Por ejemplo, en biología se usa para modelar el mecanismo para las formas de las alas de mariposa, los efectos de corrimiento genético y la respuesta de macrófagos a la presencia de bacterias en los pulmones, mientras que en física se usa para estudiar el movimiento de moléculas y la conducción térmica.

a) Demuestre que la función $u = e^{-c^2k^2t} \operatorname{sen} kx$ satisface la ecuación de difusión.

b) Lea un artículo sobre la ecuación de difusión y escriba un párrafo sobre una de sus aplicaciones.

56. **ECOLOGÍA** Modelos de temperatura del suelo son importantes en ecología, donde se emplean para estudiar fenómenos como son la penetración de hielo en el terreno. Suponga que la temperatura T del suelo en el momento t (en meses) y a una profundidad x (centímetros) está modelada por una función de la forma

$$T(x, t) = A + Be^{-kx} \operatorname{sen}(at - kx)$$

donde $a = \pi/6$ y A, B y k son constantes positivas.

a) Encuentre las derivadas parciales T_x y T_t.

b) La derivada parcial T_x mide la rapidez a la que baja la temperatura del suelo con profundidad creciente para cada momento fijo. Dé una interpretación similar para la derivada parcial T_t.

c) Demuestre que $T(x, t)$ satisface la ecuación de difusión $T_t = c^2 T_{xx}$, donde c es una constante donde aparecen B y k.

57. Use el método de multiplicadores de Lagrange para hallar el máximo valor de

$$f(x, y) = \cos x + \cos y$$

sujeto a la condición de restricción

$$y - x = \pi/4$$

58. Encuentre los valores máximo y mínimo de la función

$$f(x, y) = 2 \operatorname{sen} x + 5 \cos y$$

sobre el rectángulo R con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 5)$ y $(0, 5)$.

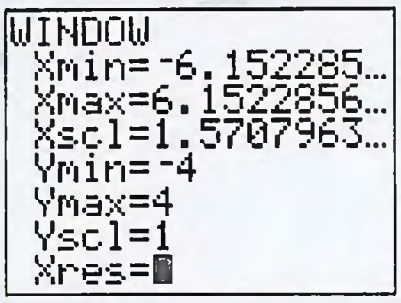
www.FreeLibros.com

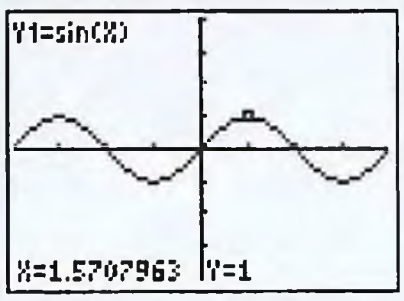
¡EXPLORE! ACTUALIZACIÓN

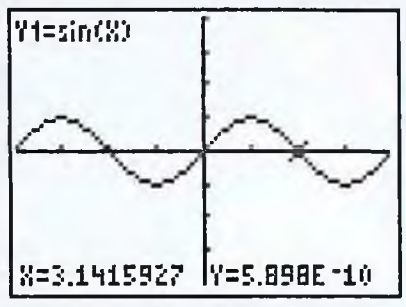
En el sitio web especificado en el libro, www.mhhe.com/hoffmann, es posible tener acceso a soluciones completas para todas las cajas ¡EXPLORE! de este libro.

Solución para el ¡Explore! de la página 784

Guarde la función $f(x) = \text{sen}(x)$ en Y1 del editor de ecuaciones de su calculadora graficadora. Grafique con el uso de la tecla **ZOOM,** opción **7:ZTrig,** que emplea una pantalla de aproximadamente $[-2\pi, 2\pi]\pi/2$ por $[-4, 4]1$, como se ve en la pantalla izquierda siguiente. Usando la tecla **TRACE**, vemos que $f(x)$ se aproxima a 1 para valores de x cercanos pero menores a $\pi/2$. También por rastreo determinamos $\lim_{x \to \pi} \text{sen}(x) = 0$ (5.898×10^{-10}es cero en la calculadora).

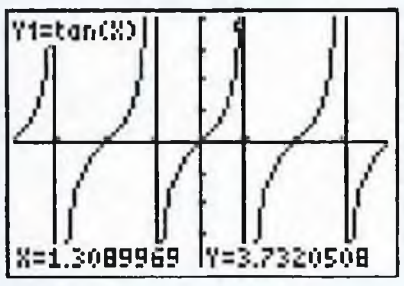


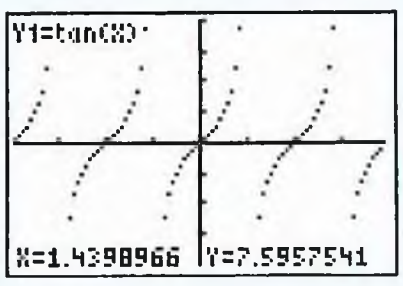




Solución para el ¡Explore! de la página 785

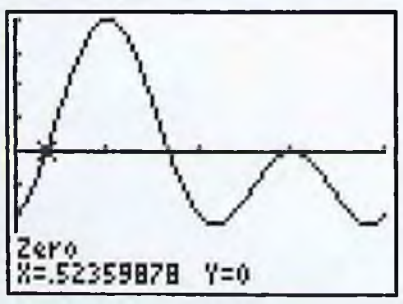
Guarde $f(x) = \tan x$ en Y1 del editor de ecuaciones de su calculadora graficadora. Grafique con el uso de la tecla **ZOOM**, opción **7:ZTrig.** Nótese que en los valores x de $\pi/2 \pm n\pi$, para números naturales n, aparecen en la gráfica líneas verticales semejantes a asíntotas. La calculadora intenta completar la gráfica de tan x en estas asíntotas. La pantalla siguiente, de en medio, muestra la gráfica de tan x en modo **dot** (punto), que no da estas líneas verticales. Pero es más difícil ver la gráfica para puntos cercanos a las asíntotas. Por ejemplo, cuando x se aproxima a $\pi/2 \approx 1.571$, tan x se hace asintóticamente grande (se aproxima a $+\infty$). Se puede escribir $\lim_{x \to \pi/2^-} \tan x = +\infty$.

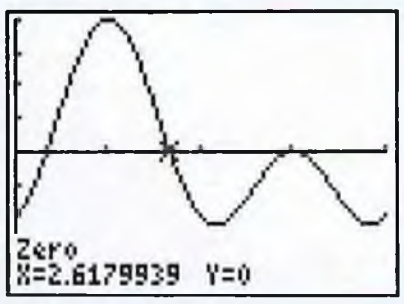


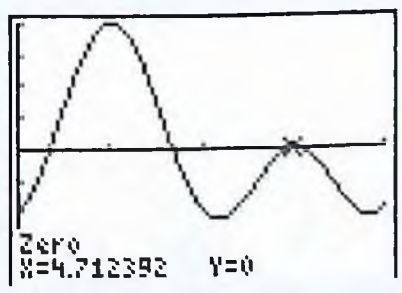


Solución para el ¡Explore! de la página 789

Vea el ejemplo 11.1.5. Escriba Y1 = sen $(X)^2$ − cos $(X)^2$ + sen (X) en el editor de ecuaciones de su calculadora graficadora. Grafique usando la pantalla $[0, 2\pi]\pi/2$ por $[-2, 2].5$. Con la función para hallar raíces de la tecla **CALC (2nd TRACE), 2:zero**, se pueden determinar las intersecciones con el eje x de $\pi/6 \approx 0.5236$, $5\pi/6 \approx 2.6180$, y $3\pi/2 \approx 4.7124$, que confirman los resultados hallados en el ejemplo.



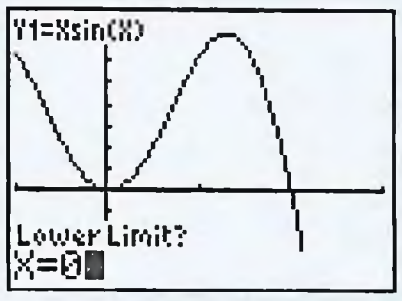


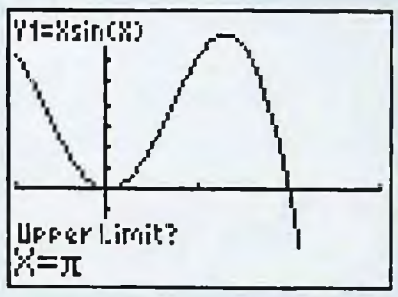


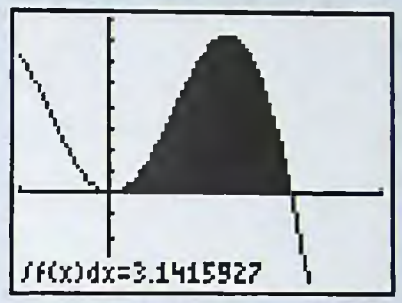
www.FreeLibros.com

Solución para el ¡Explore! de la página 798

Vea el ejemplo 11.2.7. Escriba Y1 = X sen (X) en el editor de ecuaciones de su calculadora graficadora y grafique usando la pantalla $[-\pi/2, 3\pi/2]\pi/2$ por $[-1, 2]0.25$. Acceda a la pantalla de integración gráfica a través de **CALC, 7:∫f(x)dx,** poniendo el límite inferior en $x = 0$ y el límite superior en $x = \pi$, escrito directamente. Como se ve en la siguiente pantalla de la extrema derecha, el área bajo la curva sobre el intervalo $[0, \pi]$ es π.

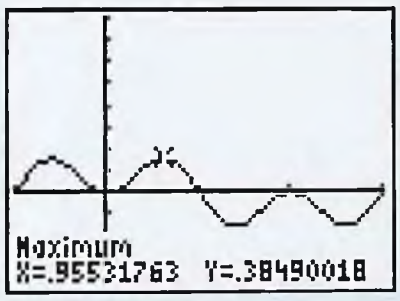


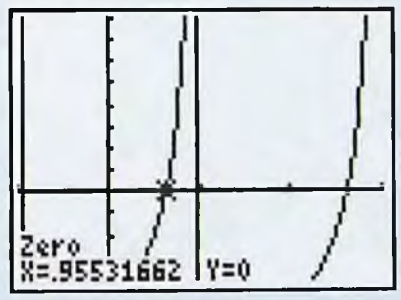


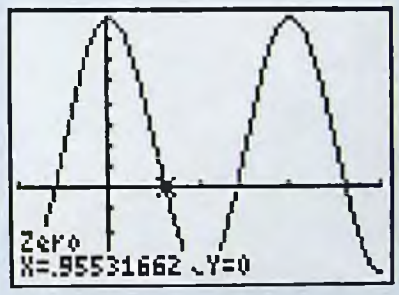


Solución para el ¡Explore! de la página 807

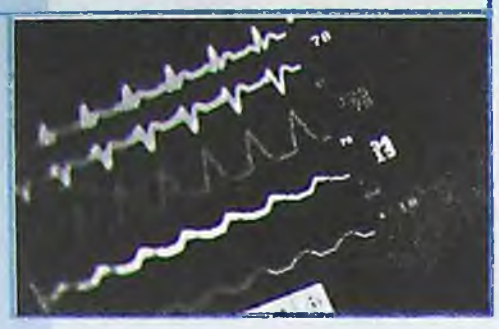
Vea el ejemplo 11.3.2. En el editor de ecuaciones de su calculadora graficadora, escriba Y1 = cos (X) sen $(X)^2$, que es $L(\theta)$ con un cambio de parámetro $k = 16$. Grafique usando la pantalla $[-\pi, 3\pi/2]\pi/2$ por $[-1, 2].25$. Usando **CALC, 4:maximum**, localizamos un valor máximo de Y1 en $x = 0.9553$ que se encuentra dentro del intervalo $[0, \pi/2]$, que sería el mismo valor x máximo que para $L(\theta)$. Ahora, usando la función **CALC, 2:zero** de su calculadora, podemos determinar que dentro del intervalo $[0, \pi/2]$ la raíz de Y2 = $\tan(X) - \sqrt{2}$, obtenida en la siguiente pantalla de en medio, así como la raíz de Y3 = $2\cos(X)^2 - \text{sen}(X)^2$, como se ve en la pantalla de la extrema derecha. Estos valores se redondean como X = 0.9553, todos los cuales concuerdan dentro del nivel de tolerancia de la calculadora, aun cuando parece que el valor de la raíz de $x = 0.95531662$ es más preciso.







www.FreeLibros.com



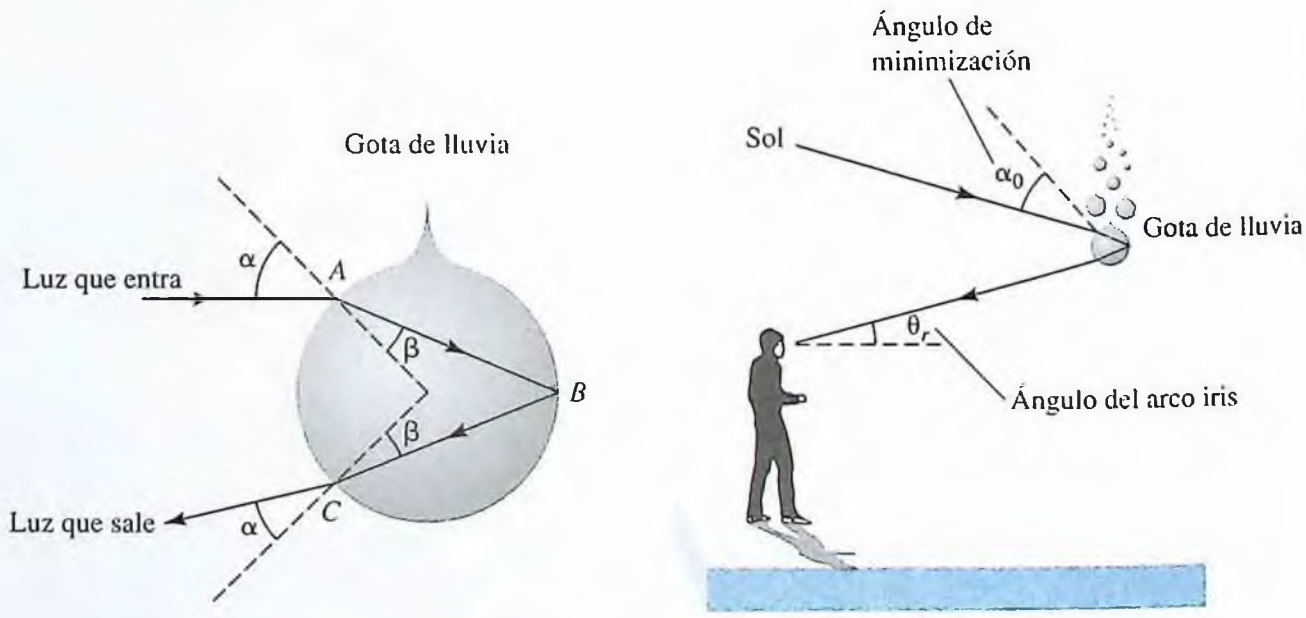
REFLEXIONE ACERCA DE...

¿CUÁL ÁNGULO ES MEJOR PARA VER UN ARCO IRIS?

Los arco iris han sido observados y admirados por filósofos, poetas y científicos durante miles de años. La mayoría de las personas estarían de acuerdo en que experimentar la efímera belleza de un arco iris es uno de los mayores goces de la vida, pero, ¿a qué ángulo de observación parecerá más vívido un arco iris?



Los arco iris se forman cuando la luz de Sol presente en el aire es reflejada y refractada por gotitas de agua. La figura 1*a* muestra una gota de lluvia, que para mayor sencillez se supone que es de forma esférica. Un haz de luz solar entra en la gota en el punto *A*, con ángulo de incidencia α. Parte de la luz es reflejada y parte es refractada con un ángulo β. El haz refractado continúa entonces hacia el punto *B* en el otro lado de la gota de lluvia, donde parte del rayo es reflejado con un ángulo β de nuevo a través de la gota de lluvia hacia el punto *C*, mientras que la parte que queda se refracta con el ángulo α de nuevo al aire.



a) Luz que pasa por una gota de lluvia

b) Un arco iris es más colorido cuando se ve en el ángulo del arco iris.

FIGURA 1 Análisis de luz que pasa por una gota de lluvia.

www.FreeLibros.com

En cada interfaz, el haz de luz es desviado (de una trayectoria recta), lo que hace que se reduzca su intensidad. En particular, en A, el haz entrante es desviado con una rotación de $\alpha - \beta$ radianes en sentido de las manecillas del reloj, mientras que en B la desviación es $\pi - 2\beta$ radianes y, en C, es de nuevo $\alpha - \beta$ radianes. Por tanto, la desviación total es D radianes, donde

$$D = (\alpha - \beta) + \pi - 2\beta + \alpha - \beta = \pi + 2\alpha - 4\beta$$

La intensidad de la luz que sale de la gota de lluvia es máxima para el ángulo de incidencia α_0 que minimiza la desviación total D. Como se indica en la figura 1*b*, este ángulo de minimización α_0 está directamente relacionado con el ángulo de observación θ_r, para el cual el arco iris es de máximo colorido. El ángulo θ_r es apropiadamente llamado **ángulo del arco iris.** El lector determinará el valor del ángulo del arco iris usando cálculo para contestar las preguntas 1 a la 3 de la siguiente lista.

Este ensayo fue adaptado del artículo "*Somewhere Within de Rainbow,*" por Steven Janke, *UMAP Modules 1992: Tools for Teaching,* Consortium for Mathematics and Its Applications, Inc., Lexington, MA, 1993. El artículo explora varios problemas que se refieren a la observación de un arco iris. Sugerimos abordar dos de estos problemas en la pregunta 4.

Preguntas

1. La **ley de refracción** en óptica dice que el ángulo de incidencia α está relacionado con el ángulo de refracción β por la ecuación sen $\alpha = k$ sen β, donde k es una constante que depende del medio de refracción (recuerde el problema 21 de la sección 11.3). Use esta ley para expresar la desviación de luz D en términos de α y luego derive para demostrar que

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = 2 - \frac{4 \cos \alpha}{k \cos \beta}$$

2. Demuestre que $D'(\alpha_0) = 0$, cuando α_0 satisface $(\alpha_0) = \sqrt{(k^2 - 1)/3}$. Use la prueba de la segunda derivada para demostrar que $D(\alpha)$ es minimizada en $\alpha = \alpha_0$.

3. Para el agua de nuestra gota de lluvia, se puede demostrar que $k \approx 1.33$. Calcule el ángulo α_0 que minimiza la desviación de luz para nuestra gota de lluvia. Entonces use α_0 para hallar el ángulo del arco iris $\theta_r = \pi - D(\alpha_0)$.

4. Hay varias preguntas importantes que no hemos explorado. Por ejemplo, ¿qué pasa si las gotas de lluvia no son esféricas? ¿Cuál es el óptimo ángulo de observación si el arco iris tiene un arco secundario (un arco iris doble)? Lea el módulo UMAP en el que este ensayo está basado y escriba un párrafo sobre uno de estos temas.

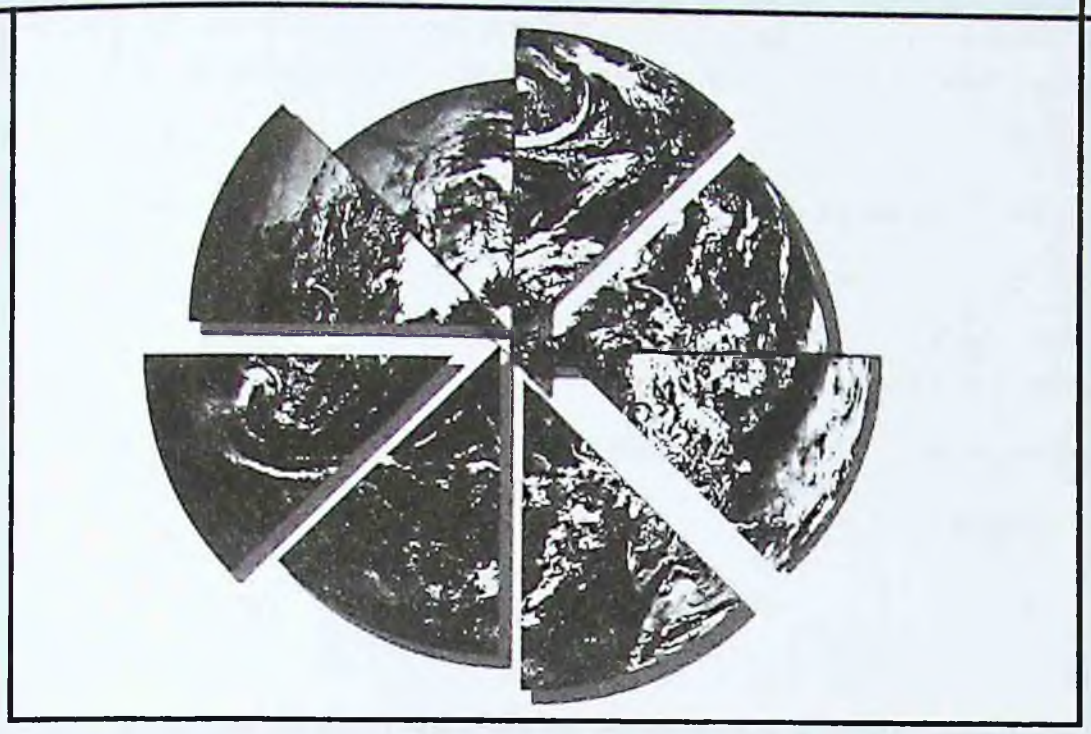
Referencia

Steven Janke, "Somewhere Within the Rainbow," *UMAP Modules 1992: Tools for Teaching,* Consortium for Mathematics and its Applications, Inc., Lexington, MA, 1993.

www.FreeLibros.com

www.FreeLibros.com

APÉNDICE A



REPASO DE ÁLGEBRA

A1 Breve repaso de álgebra

A2 Factorización de polinomios y resolución de sistemas de ecuaciones

A3 Evaluación de límites con la regla de L'Hôpital

Resumen del apéndice

Términos importantes, símbolos y fórmulas

Problemas de repaso

Reflexione acerca de...

www.FreeLibros.com

SECCIÓN A1 | Breve repaso de álgebra

Existen numerosas técnicas de álgebra elemental que son necesarias en cálculo. Este apéndice contiene un repaso de estos temas, y empezamos por examinar sistemas de numeración.

Los números reales

Un **entero** es un "número entero," ya sea positivo o negativo. Por ejemplo, 1, 2, 875, -15, -83 y 0 son enteros, mientras que $\frac{2}{3}$, 8.71 y $\sqrt{2}$ no lo son.

Un **número racional** es un número que puede ser expresado como cociente $\frac{a}{b}$ entre dos enteros, donde $b \neq 0$. Por ejemplo, $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{5}$, y $\frac{-4}{7}$ son números racionales, como también lo son

$$-6\frac{1}{2} = \frac{-13}{2} \qquad \text{y} \qquad 0.25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Todo entero es un número racional puesto que puede ser expresado por sí mismo dividido entre 1. Cuando se expresan en forma decimal, los números racionales son ya sea finitos o decimales infinitamente periódicos. Por ejemplo,

$$\frac{5}{8} = 0.625 \qquad \frac{1}{3} = 0.33\ldots \qquad \text{y} \qquad \frac{13}{11} = 1.181818\ldots$$

Un número que no se puede expresar como el cociente entre dos enteros se llama **número irracional.** Por ejemplo

$$\sqrt{2} \approx 1.41421356 \qquad \text{y} \qquad \pi \approx 3.14159265$$

son números irracionales.

Los números racionales y los números irracionales forman los **números reales** y se pueden visualizar geométricamente como puntos en una **recta numérica,** como se ilustra en la figura A.1.

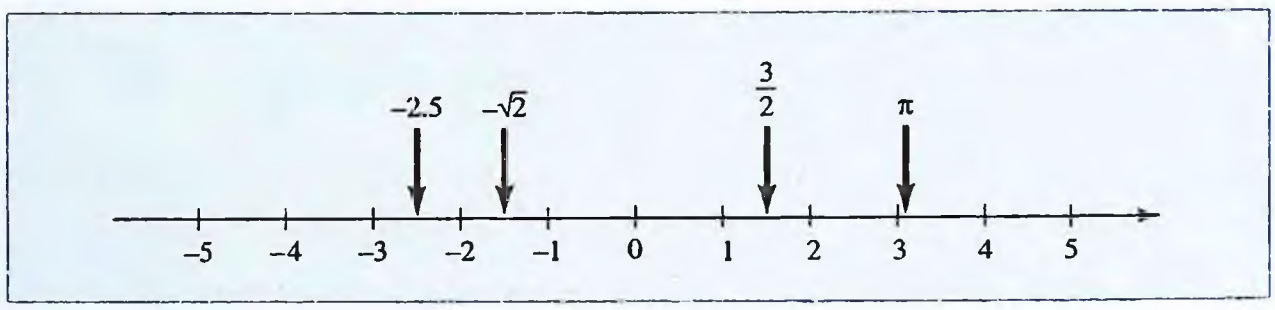


FIGURA A.1 Recta numérica.

Desigualdades

Si a y b son números reales y a está a la derecha de b en la recta numérica, se dice que ***a* es mayor que *b*** y se escribe $a > b$. Si a está a la izquierda de b, decimos que ***a* es menor que *b*** y escribimos $a < b$ (figura A.2). Por ejemplo

$$5 > 2 \qquad -12 < 0 \qquad \text{y} \qquad -8.2 < -2.4$$

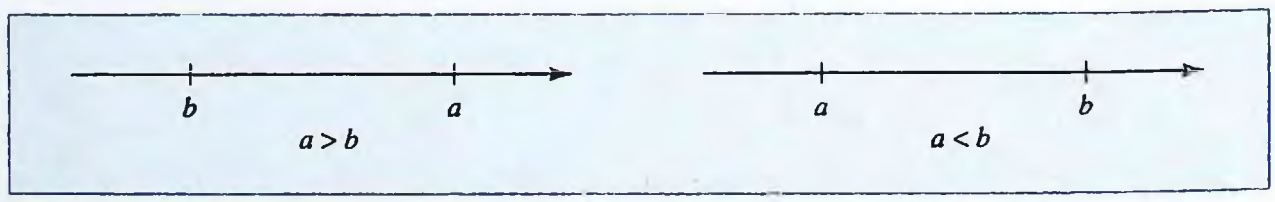


FIGURA A.2 Desigualdades.

www.FreeLibros.com

Además,

$$\frac{6}{7} < \frac{7}{8}$$

como se puede ver al observar que

$$\frac{6}{7} = \frac{48}{56} \qquad \text{y} \qquad \frac{7}{8} = \frac{49}{56}$$

El símbolo $\geq$ significa **mayor o igual a**, y el símbolo $\leq$ quiere decir **menor o igual a.** Así, por ejemplo,

$$-3 \geq -4 \qquad -3 \geq -3 \qquad -4 \leq -3 \qquad \text{y} \qquad -4 \leq -4$$

Intervalos

Un conjunto de números reales que puede ser representado sobre la recta numérica por un segmento de recta se llama **intervalo.** Es posible usar desigualdades para describir intervalos. Por ejemplo, el intervalo $a \leq x > b$ consta de todos los números reales x que estén entre a y b, incluyendo a pero excluyendo b. Este intervalo se muestra en la figura A.3. Los números a y b se conocen como **puntos extremos** del intervalo. El paréntesis rectangular en a indica que a está incluida en el intervalo, mientras que el paréntesis redondo en b indica que b está excluida.



FIGURA A.3 El intervalo $a \leq x > b$.

Los intervalos pueden ser finitos o infinitos en extensión y pueden o no contener cualquier punto extremo. Las posibilidades (incluyendo notación y terminología convencionales) se ilustran en la figura A.4.

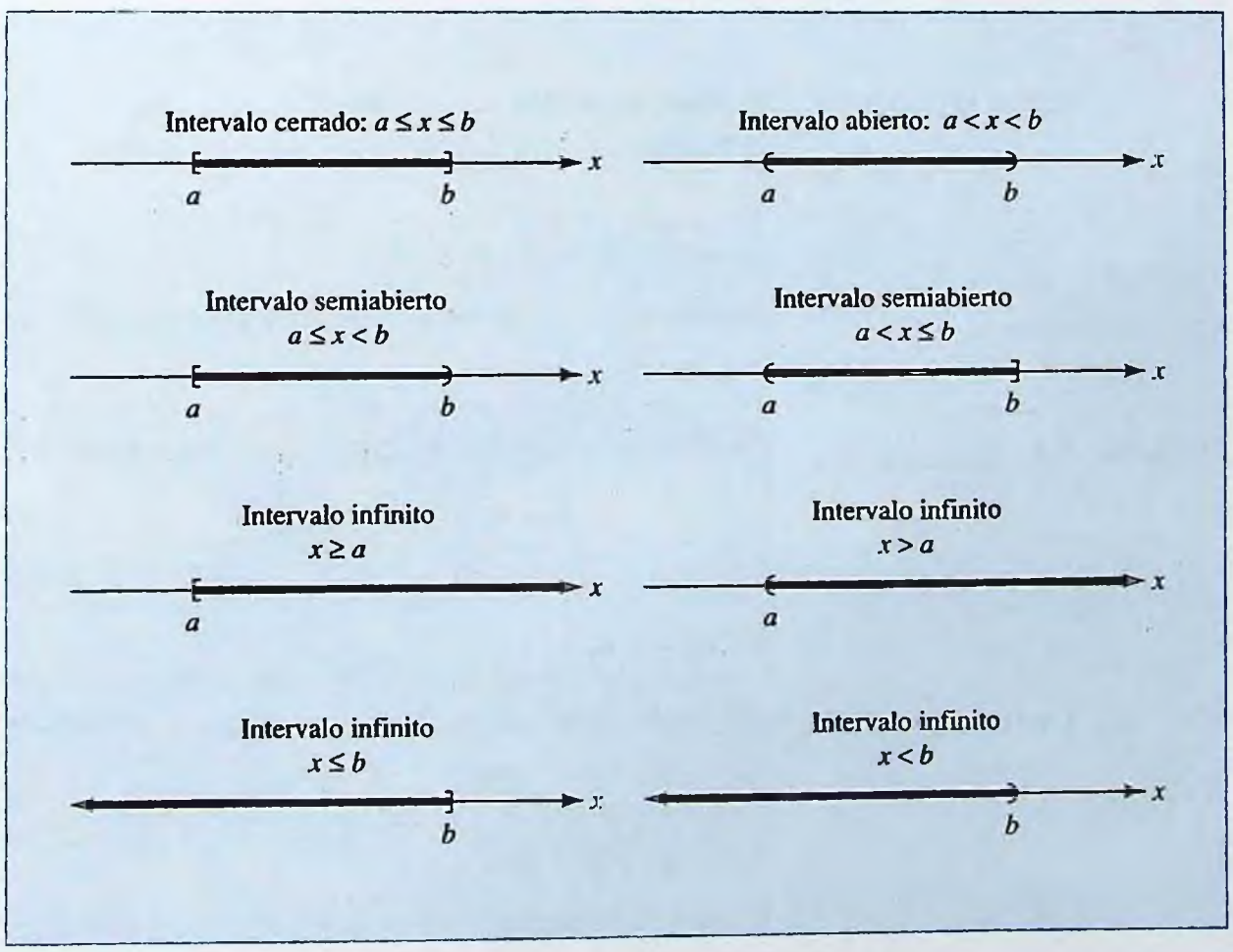
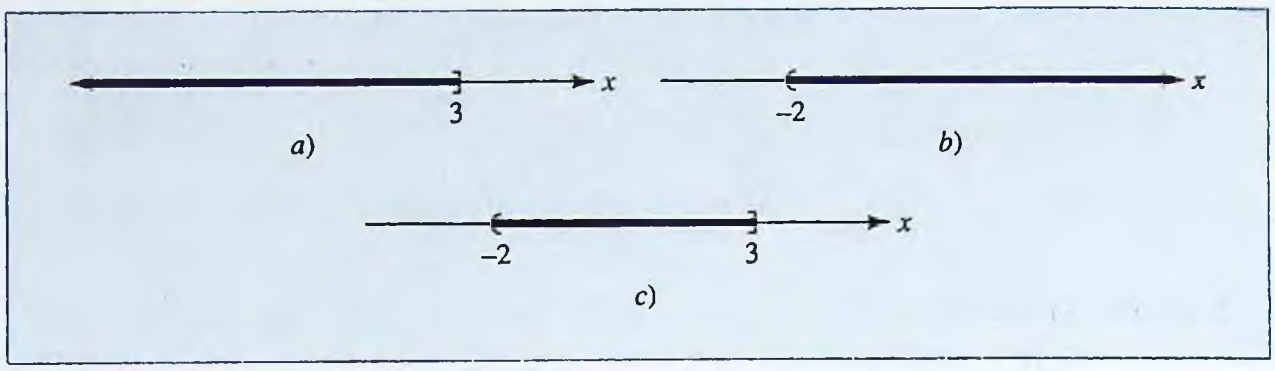


FIGURA A.4 Intervalos de números reales.

EJEMPLO | A1.1

Utilice desigualdades para describir estos intervalos.

www.FreeLibros.com



Solución

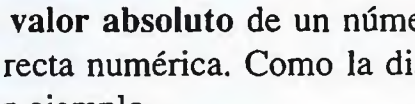
a) $x \leq 3$ **b)** $x > -2$ **c)** $-2 < x \leq 3$

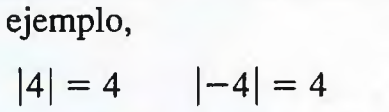
EJEMPLO | A1.2

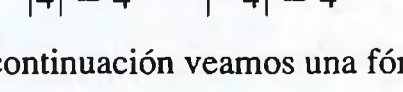
Represente cada uno de estos intervalos como segmento de recta sobre una recta numérica.

a) $x < -1$ **b)** $-1 \leq x \leq 2$ **c)** $x > 2$

Solución

a)


b)


c)


Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real x, denotado por $|x|$, es la distancia de x a 0 en la recta numérica. Como la distancia es siempre no negativa, se deduce que $|x| \geq 0$. Por ejemplo,

$$|4| = 4 \qquad |-4| = 4 \qquad |0| = 0 \qquad |5 - 9| = 4 \qquad |\sqrt{3} - 3| = 3 - \sqrt{3}$$

A continuación veamos una fórmula general para el valor absoluto.

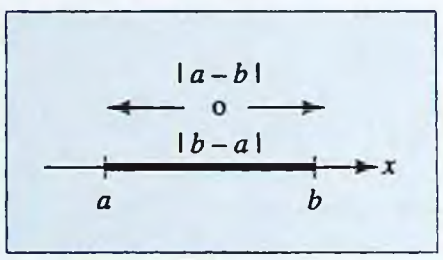


FIGURA A.5 Distancia entre a y $b = |a - b|$.

Valor absoluto ■ Para cualquier número real x, el valor absoluto de x es

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Generalmente, la distancia entre cualesquier dos números a y b es el valor absoluto de su diferencia tomado en cualquier orden, como se ilustra en la figura A.5.

EJEMPLO | A1.3

Encuentre la distancia sobre la recta numérica entre -2 y 3.

Solución

La distancia entre dos números es el valor absoluto de la diferencia entre ellos. Así,

$$\text{Distancia} = |-2 - 3| = |-5| = 5$$

La situación se ilustra en la figura A.6.

www.FreeLibros.com

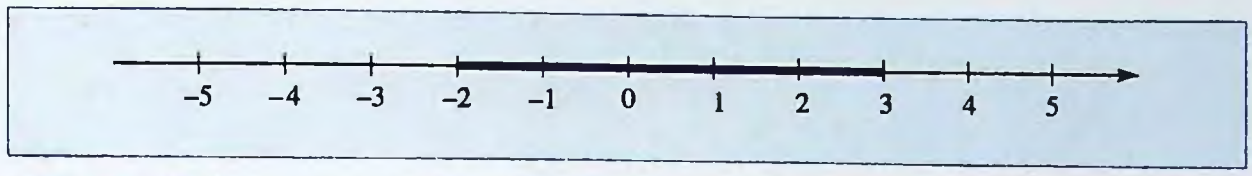


FIGURA A.6 Distancia entre −2 y 3.

Valores absolutos e intervalos

La interpretación geométrica de valor absoluto como distancia se puede usar para simplificar ciertas desigualdades algebraicas que comprenden valores absolutos. A continuación veamos un ejemplo.

EJEMPLO | A1.4

Encuentre el intervalo formado por todos los números reales x tales que $|x - 1| \leq 3$.

Solución

En términos geométricos, los números x para los que $|x - 1| \leq 3$ son aquellos cuya distancia de 1 es menor o igual a 3. Como se ilustra en la figura A.7, éstos son los números que satisfacen $-2 \leq x \leq 4$.

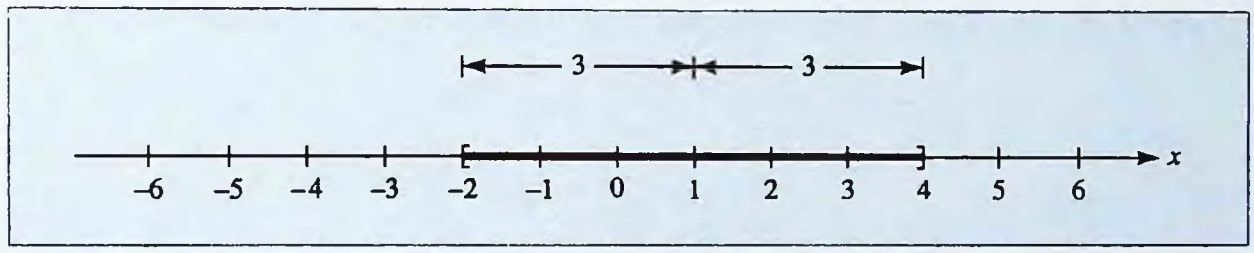


FIGURA A.7 El intervalo en el que $|x - 1| \leq 3$ es $-2 \leq x \leq 4$.

Para hallar este intervalo algebraicamente, sin apoyarse en geometría, rescriba la desigualdad $|x - 1| \leq 3$ como

$$-3 \leq x - 1 \leq 3$$

y sume 1 a cada término para obtener

$$-3 + 1 \leq x - 1 + 1 \leq 3 + 1$$

o bien,

$$-2 \leq x \leq 4$$

Notación exponencial

Estas reglas definen la expresión a^x para $a > 0$ y todos los valores racionales de x.

Definición de a^x para $x \geq 0$ ■ Potencias enteras: Si n es un entero positivo, entonces

$$a^n = a \cdot a \cdots a$$

donde el producto $a \cdot a \cdots a$ contiene n factores.
Potencias fraccionarias: Si n y m son enteros positivos, entonces

$$a^{n/m} = (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$$

donde $\sqrt[m]{\ }$ denota la raíz positiva m.

Potencias negativas: $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

Potencia cero: $a^0 = 1$

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | A1.5

Evalúe estas expresiones (sin usar su calculadora).

a) $9^{1/2}$ **b)** $27^{2/3}$ **c)** $8^{-1/3}$ **d)** $\left(\frac{1}{100}\right)^{-3/2}$ **e)** 5^0

Solución

a) $9^{1/2} = \sqrt{9} = 3$

b) $27^{2/3} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$

$= \sqrt[3]{(27)^2} = \sqrt[3]{729} = 9$

c) $8^{-1/3} = \frac{1}{8^{1/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$

d) $\left(\frac{1}{100}\right)^{-3/2} = 100^{3/2} = (\sqrt{100})^3 = 10^3 = 1\,000$

e) $5^0 = 1$

Leyes de exponentes

Los exponentes obedecen estas útiles leyes.

Leyes de exponentes Para un número real a, tenemos

La ley del producto: $a^r a^s = a^{r+s}$

La ley del cociente: $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ Si $a \neq 0$

La ley de potencia: $(a^r)^s = a^{rs}$

Las leyes de exponentes se ilustran en los ejemplos A1.6 y A1.7.

EJEMPLO | A1.6

Evalúe estas expresiones (sin usar calculadora).

a) $(2^{-2})^3$ **b)** $\frac{3^3}{3^{1/3}(3^{2/3})}$ **c)** $2^{7/4}(8^{-1/4})$

Solución

a) $(2^{-2})^3 = 2^{-6} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

b) $\frac{3^3}{3^{1/3}(3^{2/3})} = \frac{3^3}{3^{1/3+2/3}} = \frac{3^3}{3^1} = 3^2 = 9$

c) $2^{7/4}(8^{-1/4}) = 2^{7/4}(2^3)^{-1/4} = 2^{7/4}(2^{-3/4}) = 2^{7/4-3/4} = 2^1 = 2$

EJEMPLO | A1.7

De cada una de estas ecuaciones despeje n.

a) $\frac{a^5}{a^2} = a^n$ **b)** $(a^n)^5 = a^{20}$

www.FreeLibros.com

Solución

a) Como $\dfrac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$, se deduce que $n = 3$.

b) Como $(a^n)^5 = a^{5n}$, se deduce que $5n = 20$ o $n = 4$.

Factorización

Factorizar una expresión es escribirla como producto de dos o más términos, llamados **factores.** Se emplea factorización para simplificar expresiones complicadas y resolver ecuaciones, y está basada en la ley distributiva para adición y multiplicación.

Ley distributiva ■ Para cualesquier números reales a, b y c,

$$ab + ac = a(b + c)$$

Las técnicas de factorización necesarias en este libro están ilustradas en los ejemplos A1.8 al A1.10.

EJEMPLO | A1.8

Factorización de términos comunes

Factorice la expresión $3x^4 - 6x^3$.

Solución

Como $3x^3$ es un factor de cada uno de los términos de esta expresión, se puede usar la ley distributiva para "factorizar" $3x^3$ y escribir

$$3x^4 - 6x^3 = 3x^3(x - 2)$$

EJEMPLO | A1.9

Simplifique la expresión $10(1 - x)^4(x + 1)^4 + 8(x + 1)^5(1 - x)^3$.

Solución

El máximo factor común es $2(1 - x)^3(x + 1)^4$. Factorice esto para obtener

$$10(1 - x)^4(x + 1)^4 + 8(x + 1)^5(1 - x)^3 = 2(1 - x)^3(x + 1)^4[5(1 - x) + 4(x + 1)]$$

Como no es posible más factorización, haga la multiplicación en los paréntesis rectangulares y combine los términos resultantes para concluir que

$$\begin{aligned} 10(1 - x)^4(x + 1)^4 + 8(x + 1)^5(1 - x)^3 &= 2(1 - x)^3(x + 1)^4(5 - 5x + 4x + 4) \\ &= 2(1 - x)^3(x + 1)^4(9 - x) \end{aligned}$$

Hay veces, en cálculo, donde es necesario factorizar expresiones que comprenden radicales o exponentes fraccionarios. A continuación veamos un ejemplo de esta factorización.

EJEMPLO | A1.10

Factorice la expresión

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}(x + 1) + x^{2/3}$$

www.FreeLibros.com

Solución

Encontramos que

$$\frac{2}{3}x^{-1/3}(x+1)+x^{2/3}=\frac{\frac{2}{3}(x+1)}{x^{1/3}}+x^{2/3}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}(x+1)+x^{2/3}(x^{1/3})}{x^{1/3}}$$ *ponga términos sobre el común denominador $x^{1/3}$ y simplifique*

$$=\frac{\frac{2}{3}(x+1)+x}{x^{1/3}}=\frac{\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}}{x^{1/3}}$$ *porque $x^{2/3}x^{1/3}=x$*

$$=\frac{1}{3}(5x+2)x^{-1/3}$$

Simplificación de cocientes por factorización y cancelación

El ejemplo A1.11 ilustra la forma en que se puede combinar factorización y cancelación para simplificar ciertos tipos de cocientes que aparecen con frecuencia en cálculo.

EJEMPLO | A1.11

Simplifique el cociente

$$\frac{4(x+3)^4(x-2)^2-6(x+3)^3(x-2)^3}{(x+3)(x-2)^3}$$

Solución

Primero simplifique el numerador para obtener

$$\frac{4(x+3)^4(x-2)^2-6(x+3)^3(x-2)^3}{(x+3)(x-2)^3}=\frac{2(x+3)^3(x-2)^2[2(x+3)-3(x-2)]}{(x+3)(x-2)^3}$$

$$=\frac{2(x+3)^3(x-2)^2(2x+6-3x+6)}{(x+3)(x-2)^3}$$

$$=\frac{2(x+3)^3(x-2)^2(12-x)}{(x+3)(x-2)^3}$$

y luego "cancele" el factor común de $(x+3)(x-2)^2$ del numerador y denominador para concluir que

$$\frac{4(x+3)^4(x-2)^2-6(x+3)^3(x-2)^3}{(x+3)(x-2)^3}=\frac{2(x+3)^2(12-x)}{x-2}$$

Notación sumatoria

Sumas de la forma

$$a_1+a_2+\cdots+a_n$$

aparecen en los capítulos 5 y 6. Para describir esta suma, es suficiente especificar el término general a_j e indicar que n términos de esta forma deben sumarse, empezando con el término en el que $j=1$ y finalizando con el término en que $j=n$. Se acostumbra usar

www.FreeLibros.com

la letra griega $\sum$ (sigma) para denotar suma y expresar la suma en forma compacta como sigue.

Notación de sumatoria ■ La suma de los números $a_1 \cdots a_n$ está dada por

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

El uso de notación de sumatoria se ilustra en los ejemplos A1.12 y A1.13.

EJEMPLO | A1.12

Use notación de sumatoria para representar estas sumas.

a) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64$

b) $(1 - x_1)^2 \Delta x + (1 - x_2)^2 \Delta x + \cdots + (1 - x_{15})^2 \Delta x$

Solución

a) Ésta es una suma de 8 términos de la forma j^2, que empieza con $j = 1$ y termina con $j = 8$. Así,

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 = \sum_{j=1}^{8} j^2$$

b) El j-ésimo término de esta suma es $(1 - x_j)^2 \Delta x$. Por lo tanto,

$$(1 - x_1)^2 \Delta x + (1 - x_2)^2 \Delta x + \cdots + (1 - x_{15})^2 \Delta x = \sum_{j=1}^{15} (1 - x_j)^2 \Delta x$$

EJEMPLO A1.13

Evalúe estas sumas.

a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{4} (j^2 + 1)$

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} (-2)^j$

Solución

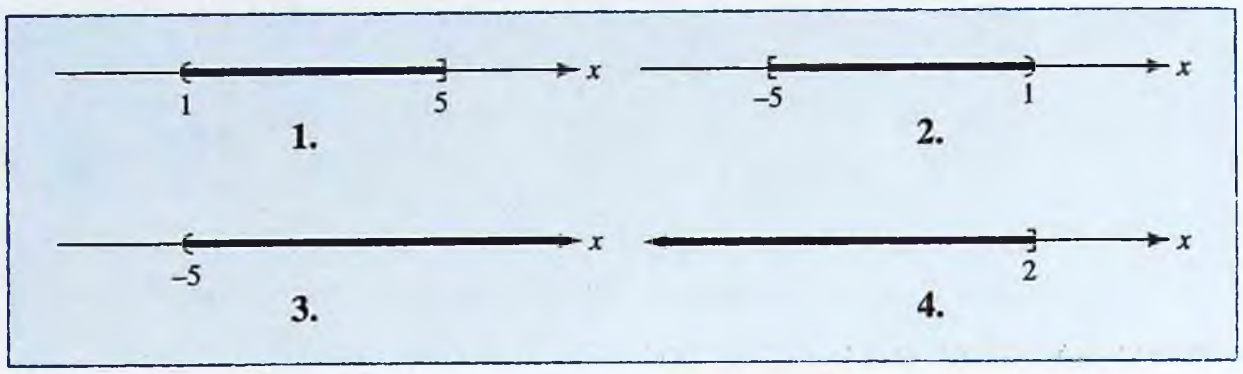
a) $$\sum_{j=1}^{4} (j^2 + 1) = (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1) + (4^2 + 1)$$
$$= 2 + 5 + 10 + 17 = 34$$

b) $$\sum_{j=1}^{3} (-2)^j = (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 = -2 + 4 - 8 = -6$$

www.FreeLibros.com

PROBLEMAS | A 1

INTERVALOS *En los problemas del 1 al 4, use desigualdades para describir el intervalo indicado.*



En los problemas 5 al 8, represente el intervalo dado como segmento de recto en una recta numérica.

5. $x \geq 2$

6. $-6 \leq x < 4$

7. $-2 < x \leq 0$

8. $x > 3$

DISTANCIA *En los problemas 9 al 12, encuentre la distancia en la recta numérica entre el par dado de números reales.*

9. 0 y -4

10. 2 y 5

11. -2 y 3

12. -3 y -1

VALOR ABSOLUTO E INTERVALOS *En los problemas 13 al 18, encuentre el intervalo o intervalos formados por todos los números reales x que satisfagan la desigualdad dada.*

13. $|z| \leq 3$

14. $|x - 2| \leq 5$

15. $|x + 4| \leq 2$

16. $|1 - x| < 3$

17. $|x + 2| \geq 5$

18. $|x - 1| > 3$

NOTACIÓN EXPONENCIAL *En los problemas 19 al 26, evalúe la expresión dada sin usar calculadora.*

19. 5^3

20. 2^{-3}

21. $16^{1/2}$

22. $36^{-1/2}$

23. $8^{2/3}$

24. $27^{-4/3}$

25. $\left(\frac{1}{4}\right)^{1/2}$

26. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3/2}$

En los problemas 27 al 34 evalúe la expresión dada sin usar calculadora.

27. $\dfrac{2^5(2^2)}{2^8}$

28. $\dfrac{3^4(3^3)}{(3^2)^3}$

29. $\dfrac{2^{4/3}(2^{5/3})}{2^5}$

30. $\dfrac{5^{-3}(5^2)}{(5^{-2})^3}$

31. $\dfrac{2(16^{3/4})}{2^3}$

32. $\dfrac{\sqrt{27}\,(\sqrt{3})^3}{9}$

33. $[\sqrt{8}\,(2^{5/2})]^{-1/2}$

34. $[\sqrt{27}\,(3^{5/2})]^{1/2}$

www.FreeLibros.com

En los problemas 35 al 42 de la ecuación dada despeje n. (Suponga $a > 0$ y $a \neq 1$.)

35. $a^3a^7 = a^n$

36. $\dfrac{a^5}{a^2} = a^n$

37. $a^4a^{-3} = a^n$

38. $a^2a^n = \dfrac{1}{a}$

39. $(a^3)^n = a^{12}$

40. $(a^n)^5 = \dfrac{1}{a^{10}}$

41. $a^{3/5}a^{-n} = \dfrac{1}{a^2}$

42. $(a^n)^3 = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES *En los problemas 43 al 54, factorice y simplifique la expresión dada tanto como sea posible.*

43. $x^5 - 4x^4$

44. $3x^3 - 12x^4$

45. $100 - 25(x - 3)$

46. $60 - 20(4 - x)$

47. $8(x + 1)^3(x - 2)^2 + 6(x + 1)^2(x - 2)^3$

48. $12(x + 3)^5(x - 1)^3 - 8(x + 3)^6(x - 1)^2$

49. $x^{-1/2}(2x + 1) + 4x^{1/2}$

50. $x^{-1/4}(3x + 5) + 4x^{3/4}$

51. $\dfrac{(x + 3)^3(x + 1) - (x + 3)^2(x + 1)^2}{(x + 3)(x + 1)}$

52. $\dfrac{3(x - 2)^2(x + 1)^2 - 2(x - 2)(x + 1)^3}{(x - 2)^4}$

53. $\dfrac{4(1 - x)^2(x + 3)^3 + 2(1 - x)(x + 3)^4}{(1 - x)^4}$

54. $\dfrac{6(x + 2)^5(1 - x)^4 - 4(x + 2)^6(1 - x)^3}{(x + 2)^8(1 - x)^2}$

NOTACIÓN DE SUMATORIA *En los problemas 55 al 58 evalúe la suma dada.*

55. $\displaystyle\sum_{j=1}^{4}(3j + 1)$

56. $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} j^2$

57. $\displaystyle\sum_{j=1}^{10}(-1)^j$

58. $\displaystyle\sum_{j=1}^{5} 2^j$

En los problemas 59 al 64, use notación de sumatoria para representar la suma dada.

59. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6}$

60. $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27 + 30$

61. $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6$

62. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$

63. $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8$

64. $x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5$

65. ECOLOGÍA La atmósfera sobre cada centímetro cuadrado de la superficie terrestre pesa 1 kilogramo (kg).

a) Suponiendo que la Tierra es una esfera de radio $R = 6\,440$ km, use la fórmula $S = 4\pi R^2$ para calcular el área superficial de la Tierra y luego encuentre la masa total de la atmósfera.

b) El oxígeno ocupa aproximadamente 22% de la masa total de la atmósfera, y se estima que las plantas producen alrededor del 0.9×10^{13} kg de oxígeno por año. Si plantas y animales no usaran nada del oxígeno (o combustión), ¿cuánto tardaría en acumularse la masa total de oxígeno en la atmósfera (parte a)?*

*Adaptado de un problema de la obra de E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 2nd ed., New York: Springer-Verlag, 1976, página 31.

www.FreeLibros.com

SECCIÓN A2 | Factorización de polinomios y resolución de sistemas de ecuaciones

Un **polinomio** es una expresión de la forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

donde n es un entero no negativo y $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ son números reales, conocidos como los **coeficientes** de un polinomio. Si $a_n \neq 0$, n se dice que n es el **grado** del polinomio. Por ejemplo, $3x^5 - 7x^2 + 12$ es un polinomio de grado 5. Aparecen expresiones de polinomios en cálculo, como ejemplos y en aplicaciones prácticas. En esta sección, se estudiarán las técnicas para factorizar polinomios y también veremos la forma de resolver sistemas de ecuaciones en las que aparecen polinomios.

Factorización de polinomios con coeficientes enteros

Muchos de los polinomios que aparecen en la práctica tienen coeficientes enteros (o están estrechamente relacionados con polinomios que los tienen). En los siguientes ejemplos se ilustran técnicas para factorizar polinomios con coeficientes enteros. En cada uno de ellos, la meta es rescribir el polinomio dado como producto de polinomios de grado inferior que también tienen coeficientes enteros.

EJEMPLO | A2.1

Factorice el polinomio $x^2 - 2x - 3$ usando coeficientes enteros.

Solución

La meta es escribir el polinomio como un producto de la forma

$$x^2 - 2x - 3 = (x + a)(x + b)$$

donde a y b son enteros. La ley distributiva implica que

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Por lo tanto, la meta es hallar los enteros a y b tales que

$$x^2 - 2x - 3 = x^2 + (a + b)x + ab$$

o bien, lo que es equivalente, tales que

$$a + b = -2 \qquad \text{y} \qquad ab = -3$$

De la lista

$$1, -3 \qquad \text{y} \qquad -1, 3$$

de pares de enteros cuyo producto es –3, escoja $a = -3$ y $b = 1$ como el único par cuya suma es –2. Se deduce que

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

que se debe verificar al multiplicar el lado derecho.

EJEMPLO | A2.2

Factorice el polinomio $2x^2 + x - 10$ usando coeficientes enteros.

www.FreeLibros.com

Solución

Se desea hallar los enteros a, b, c y d para que

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - 10 &= (ax + b)(cx + d) && \textit{ley distributiva} \\ &= (ac)x^2 + (bc + ad)x + (bd) \end{aligned}$$

de modo que se debe tener

$$\begin{aligned} ac &= 2 \\ bc + ad &= 1 \\ bd &= -10 \end{aligned}$$

Como a, b, c y d deben ser enteros todos ellos, hay sólo un número limitado de posibilidades para las opciones de a, c y b, d; o sea,

4 posibles opciones para el par a, c: 2, 1; 1, 2; -2, -1; y -1, -2
8 posibles opciones para el par b, d: 2, -5; 5, -2; 1, -10; 10, -1; -2, 5; -5, 2; -1, 10; y -10, 1

Hay (4)(8) = 32 posibles modos de formar la expresión $bc + ad$. Encontramos que la condición $bc + ad = 1$ se satisface cuando $a = 2, b = 5, c = 1, d = -2$, de modo que

$$2x^2 + x - 10 = (2x + 5)(x - 2)$$

(Nótese que $bc + ad = 1$ también se satisface con $a = -2, b = -5, c = -1$ y $d = 2$. ¿Por qué no es necesario hacer una lista de esto como segunda factorización del polinomio dado?

EJEMPLO | A2.3

Factorice el polinomio $x^3 - 8$ usando coeficientes enteros.

Solución

El hecho de que $2^3 = 8$ nos dice que $x - 2$ debe ser un factor de esta expresión. Es decir, hay enteros a y b para los cuales

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + ax + b)$$

Como

$$(x - 2)(x^2 + ax + b) = x^3 + (a - 2)x^2 + (b - 2a)x - 2b$$

(que se deberá comprobar), la meta es hallar enteros a y b para los cuales

$$a - 2 = 0 \qquad b - 2a = 0 \qquad \text{y} \qquad 2b = 8$$

Evidentemente, estos únicos enteros son $a = 2$ y $b = 4$. Por lo tanto,

$$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$$

Con el examen de pares de enteros cuyo producto es 4, el lector debe convencerse que el polinomio $x^2 + 2x + 4$ no se puede factorizar más con coeficientes enteros.

Diferencia de dos cuadrados

A continuación veamos una fórmula (que se puede verificar por multiplicación) para la factorización de la diferencia entre dos cuadrados perfectos. Es particularmente útil, y se debe memorizar.

www.FreeLibros.com

Diferencia de dos cuadrados ■ Para cualesquier números reales a y b,

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

El uso de esta fórmula se ilustra en el ejemplo A2.4.

EJEMPLO | A2.4

Factorice el polinomio $x^5 - 4x^3$ usando coeficientes enteros.

Solución

Primero factorice x^3 para obtener

$$x^5 - 4x^3 = x^3(x^2 - 4)$$

y luego factorice $x^2 - 4$ (que es la diferencia de dos cuadrados) para concluir que

$$x^5 - 4x^3 = x^3(x + 2)(x - 2)$$

Solución de ecuaciones por factorización

Las **soluciones** de una ecuación son los valores de la variable que hacen que la ecuación se cumpla. Por ejemplo, $x = 2$ es una solución de la ecuación

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$$

porque la sustitución de 2 por x da

$$2^3 - 6(2^2) + 12(2) - 8 = 8 - 24 + 24 - 8 = 0$$

En los ejèmplos A2.5 y A2.6, se puede ver la forma en que se puede usar factorización para resolver ciertas ecuaciones. La técnica está basada en el hecho de que si el producto de dos (o más) términos es igual a cero, entonces al menos uno de los términos debe ser igual a cero. Por ejemplo, si $ab = 0$, entonces ya sea $a = 0$ o $b = 0$ (o ambos).

EJEMPLO | A2.5

Resuelva la ecuación $x^2 - 3x = 10$.

Solución

Primero restamos 10 de ambos lados para obtener

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

y luego factorizamos el polinomio resultante del lado izquierdo para obtener

$$(x - 5)(x + 2) = 0$$

Como el producto $(x - 5)(x + 2)$ puede ser cero sólo si uno (o ambos) de sus factores es cero, se deduce que las soluciones son $x = 5$ (que hace cero al primer factor) y $x = -2$ (que hace cero el segundo factor).

EJEMPLO | A2.6

Resuelva la ecuación $1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = 0$.

www.FreeLibros.com

Solución

Ponga las fracciones del lado izquierdo en el común denominador x^2 y sume para obtener

$$\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2} = 0$$

o bien

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2} = 0$$

Ahora factorice el polinomio del numerador para obtener

$$\frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} = 0$$

Un cociente es cero sólo si su numerador es cero y su denominador *no es* cero, de modo que entonces $x = -1$ y $x = 2$ son las soluciones pedidas.

Solución de ecuaciones cuadráticas

Una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{para } a \neq 0)$$

se dice que es una **ecuación cuadrática.** Una ecuación cuadrática puede tener a lo sumo dos soluciones. Como ya hemos visto, una forma de hallar las soluciones es factorizar la ecuación. Cuando los factores no son obvios, o cuando la ecuación no se pueda factorizar en absoluto, se puede usar esta fórmula especial para resolver ecuaciones cuadráticas.

La fórmula cuadrática ■ Las soluciones de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{para } a \neq 0)$$

están dadas por la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El término $b^2 - 4ac$ de la fórmula se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática. Si el discriminante es positivo, la ecuación tiene dos soluciones, una que proveniente de la fórmula con el signo ± sustituido por + y la otra con ± sustituido por −. Si el discriminante es cero, la ecuación tiene sólo una solución porque la fórmula se reduce a $x = \frac{-b}{2a}$ Si el discriminante es negativo, la ecuación no tiene soluciones reales porque los números negativos no tienen raíces cuadradas reales.

El uso de la fórmula cuadrática se ilustra en los ejemplos A2.7 a A2.9.

EJEMPLO | A2.7

Resuelva la ecuación $x^2 + 3x + 1 = 0$.

Solución

Ésta es la ecuación cuadrática con $a = 1$, $b = 3$ y $c = 1$. Con el uso de la fórmula cuadrátzica, se obtiene

$$x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \approx -0.38 \qquad \text{y} \qquad x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \approx -2.62$$

www.FreeLibros.com

EJEMPLO | A2.8

Resuelva la ecuación $x^2 + 18x + 81 = 0$.

Solución

Ésta es una ecuación cuadrática con $a = 1$, $b = 18$ y $c = 81$. Usando la fórmula cuadrática, se encuentra que el discriminante es cero y que la fórmula para x da

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{0}}{2} = -\frac{18}{2} = -9$$

EJEMPLO | A2.9

Resuelva la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$.

Solución

Ésta es la ecuación cuadrática con $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$. Con el uso de la fórmula cuadrática, se obtiene

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Como no hay raíz cuadrática real de –3, se deduce que la ecuación no tiene solución real.

Sistema de ecuaciones

Un conjunto de ecuaciones que han de resolverse simultáneamente se llama **sistema de ecuaciones**. Algunos de los problemas de cálculo del capítulo 7 contienen la solución de sistemas de dos (o más) ecuaciones con dos (o más) incógnitas. Un ejemplo típico es hallar los números reales x y y que satisfacen el sistema

$$2x + 3y = 5$$
$$x + 2y = 4$$

El procedimiento para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas es (temporalmente) eliminar una de las variables, con lo cual se reduce el problema a una sola ecuación con una variable, de la que entonces se despeja la variable. Una vez hallado el valor de una de las variables, se puede sustituir ese valor en cualquiera de las ecuaciones originales y resolver para obtener el valor de la otra variable.

Las técnicas más comunes para la eliminación de variables se ilustran en los ejemplos A2.10 y A2.11.

EJEMPLO | A2.10

Eliminación por multiplicación y suma

Resuelva el sistema

$$4x + 3y = 13$$
$$3x + 2y = 7$$

Solución

Para eliminar y, multiplique ambos lados de la primera ecuación por 2 y ambos lados de la segunda ecuación por –3 para que el sistema se convierta en

$$8x + 6y = 26$$
$$-9x - 6y = -21$$

www.FreeLibros.com

Entonces sume las ecuaciones para obtener

$$-x + 0 = 5 \quad \text{o} \quad x = -5$$

Para hallar y, se puede sustituir $x = -5$ en cualquiera de las ecuaciones originales. Si se escoge la segunda ecuación, resulta

$$3(-5) + 2y = 7 \qquad 2y = 22 \quad \text{o} \quad y = 11$$

Es decir, la solución del sistema es $x = -5$ y $y = 11$.

Para verificar esta respuesta, sustituya $x = -5$ y $y = 11$ en cada una de las ecuaciones originales. De la primera ecuación, resulta

$$4(-5) + 3(11) = -20 + 33 = 13$$

y de la segunda ecuación se tiene

$$3(-5) + 2(11) = -15 + 22 = 7$$

como se pidió.

EJEMPLO | A2.11

Eliminación por sustitución

Resuelva el sistema

$$2y^2 - x^2 = 14$$
$$x - y = 1$$

Solución

De la segunda ecuación, despeje x para obtener

$$x = y + 1$$

y sustituya esto en la primera ecuación para eliminar x. Esto da

$$\begin{aligned} 2y^2 - (y + 1)^2 &= 14 \\ 2y^2 - (y^2 + 2y + 1) &= 14 \\ 2y^2 - y^2 - 2y - 1 &= 14 \\ y^2 - 2y - 15 &= 0 \end{aligned}$$

o bien,

$$(y + 3)(y - 5) = 0$$

de lo cual se obtiene

$$y = -3 \quad \text{o} \quad y = 5$$

Si $y = -3$, la segunda ecuación da

$$x - (-3) = 1 \quad \text{o} \quad x = -2$$

y si $y = 5$, la segunda ecuación da

$$x - 5 = 1 \quad \text{o} \quad x = 6$$

Por lo tanto, el sistema tiene dos soluciones,

$$x = 6, y = 5 \quad \text{y} \quad x = -2, y = -3$$

www.FreeLibros.com

Para comprobar estas respuestas, sustituya cada par x, y en la primera ecuación. Si $x = 6$ y $y = 5$, se obtiene

$$2(5^2) - 6^2 = 50 - 36 = 14$$

y si $x = -2$ y $y = -3$, resulta

$$2(-3)^2 - (-2)^2 = 18 - 4 = 14$$

como se pidió.

PROBLEMAS | A2

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES ENTEROS *En los problemas 1 al 14 factorice el polinomio dado usando coeficientes enteros.*

1. $x^2 + x - 2$

2. $x^2 + 3x - 10$

3. $x^2 - 7x + 12$

4. $x^2 + 8x + 12$

5. $x^2 - 2x + 1$

6. $x^2 + 6x + 9$

7. $16x^2 - 25$

8. $3x^2 - x - 14$

9. $x^3 - 1$

10. $x^3 - 27$

11. $x^7 - x^5$

12. $x^3 + 2x^2 + x$

13. $2x^3 - 8x^2 - 10x$

14. $x^4 + 5x^3 - 14x^2$

SOLUCIÓN DE ECUACIONES POR FACTORIZACIÓN *En los problemas 15 al 30 resuelva por factorización la ecuación dada.*

15. $x^2 - 2x - 8 = 0$

16. $x^2 - 4x + 3 = 0$

17. $x^2 + 10x + 25 = 0$

18. $x^2 + 8x + 16 = 0$

19. $x^2 - 16 = 0$

20. $x^2 - 25 = 0$

21. $2x^2 + 3x + 1 = 0$

22. $x^2 - 2x + 1 = 0$

23. $4x^2 + 12x + 9 = 0$

24. $6x^2 + 7x - 3 = 0$

25. $1 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} = 0$

26. $\frac{9}{x^2} - \frac{6}{x} + 1 = 0$

27. $2 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} = 0$

28. $\frac{3}{x^2} - \frac{5}{x} - 2 = 0$

29. $\frac{x}{x-2} - \frac{4}{x+3} - \frac{10}{x^2+x-6} = 0$

30. $\frac{x}{x+1} + \frac{3}{2x+3} - \frac{11x+10}{2x^2+5x+3} = 0$

FÓRMULA CUADRÁTICA *En los problemas 31 al 36 use la fórmula cuadrática para resolver la ecuación dada.*

31. $2x^2 + 3x + 1 = 0$

32. $-x^2 + 3x - 1 = 0$

33. $x^2 - 2x + 3 = 0$

34. $x^2 - 2x + 1 = 0$

35. $4x^2 + 12x + 9 = 0$

36. $x^2 + 12 = 0$

www.FreeLibros.com

SISTEMAS DE ECUACIONES *En los problemas 37 a 42 resuelva el sistema de ecuaciones dado.*

37. $x + 5y = 13$
$3x - 10y = -11$

38. $2x - 3y = 4$
$3x - 5y = 2$

39. $5x - 4y = 12$
$2x - 3y = 2$

40. $3x^2 - 9y = 0$
$3y^2 - 9x = 0$

41. $2y^2 - x^2 = 1$
$x - 2y = 3$

42. $2x^2 - y^2 = -7$
$2x + y = 1$

SECCIÓN A3 | Evaluación de límites con la regla de L'Hôpital

Regla de L'Hôpital: Formas $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$

En el trazado de curvas y otras aplicaciones de cálculo, con frecuencia es necesario calcular un límite de la forma

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(c)}$$

donde c es ya sea un número finito o ∞. Si $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$, entonces se puede usar la regla del cociente para límites, pero si $f(x)$ y $g(x)$ se aproximan a 0 cuando x se aproxima a c, prácticamente cualquier cosa puede pasar. Por ejemplo

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(1/x^3) - (1/x^2)}{1/x} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{2x^4 - 3x}{x^3 + x^2 + x} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^3 - 1}$$

todos tienen esta propiedad, pero el límite de la izquierda es 0, el del centro es ∞, y el de la derecha es $\frac{1}{2}$.

Límites como éstos se llaman **formas indeterminadas** $\frac{0}{0}$. Del mismo modo, límites de cocientes en los que numerador y denominador aumentan o disminuyen sin límite cuando $x \to c$ se llaman **formas indeterminadas** $\frac{\infty}{\infty}$.

Hay una poderosa técnica, conocida como **regla de L'Hôpital**, que se puede usar para analizar formas indeterminadas. La regla dice, en efecto, que si el intento de hallar el límite de un cociente lleva a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$, entonces tome derivadas del numerador y denominador e intente de nuevo. A continuación veamos un enunciado más simbólico del procedimiento.

Regla de L'Hôpital

Si $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to c} g(x) = 0$, entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(c)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Si $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to c} g(x) = \infty$, entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

www.FreeLibros.com

El uso de la regla de L´Hôpital se ilustra en los ejemplos A3.1 al A3.3. Al leer estos ejemplos, ponga particular atención a los dos puntos siguientes:

1. La regla de L'Hôpital comprende derivación de numerador y denominador *separadamente*. Un error común es derivar todo el cociente usando la regla del cociente.

2. La regla de L'Hôpital aplica sólo a cocientes donde los límites son formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Límites de la forma $\frac{0}{\infty}$ o $\frac{\infty}{0}$ *no* son indeterminados (el primero es 0 y el segundo es ∞).

EJEMPLO | A3.1

Use la regla de L'Hôpital para calcular el límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x+1)^2}$$

Solución

Ésta es la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, por lo que aplica la regla de L'Hôpital y se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2(x+1)} = 0$$

EJEMPLO | A3.2

Use la regla de L'Hôpital para calcular el límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 3x^4 + 5x - 3}{4x^5 + 2x^3 - 5x^2 - 1}$$

Solución

Al sustituir $x = 1$ en el numerador y denominador, se ve que ésta es una forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Se podría evaluar este límite por el método de factorización desarrollado en el capítulo 1, pero nótese que es mucho más fácil usar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 3x^4 + 5x - 3}{4x^5 + 2x^3 - 5x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{5x^4 - 12x^3 + 5}{20x^4 + 6x^2 - 10x} = \frac{-2}{16} = \frac{-1}{8}$$

EJEMPLO | A3.3

Evalúe $\lim_{x\to 2} \frac{2x + 5}{x^2 + 3x - 10}$.

www.FreeLibros.com

Solución

Si ciegamente se aplica la regla de L'Hôpital, resulta

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x+5}{x^2+3x-10} = \lim_{x\to 2} \frac{2}{2x+3} = \frac{2}{7}$$

No obstante, si se usa calculadora para evaluar el cociente dado a un número muy cercano a 2 (por ejemplo 2.0001), se encuentra que el número que resulta es mucho mayor a $\frac{2}{7}$. ¿Por qué? La respuesta que se obtiene con la regla de L'Hôpital estaba errónea porque el límite dado no es indeterminado. De hecho, con sólo sustituir $x = 2$ se obtiene

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x+5}{x^2+3x-10} = \frac{9}{0} = \infty$$

Límites donde aparece e^x y $\ln x$

En ciertas aplicaciones será necesario calcular límites que comprenden e^x y $\ln x$. A veces estos límites se pueden calcular directamente, usando las fórmulas básicas

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$$

pero otros límites son formas indeterminadas y requieren el uso de la regla de L'Hôpital. A continuación veamos dos ejemplos.

EJEMPLO | A3.4

Encuentre $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

Solución

Se encuentra que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{0}{1} = 0$$

Nótese que el límite *no es* una forma indeterminada, de modo que la regla de L'Hôpital *no* aplica. Sin embargo, si ciegamente se aplica la regla de L'Hôpital, se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^{-x}}{-e^{-x}} = 1$$

que ¡*es erróneo*! Este ejemplo nos recuerda que es *muy* importante asegurarse que estamos manejando una forma indeterminada antes de usar la regla de L'Hôpital.

EJEMPLO | A3.5

Encuentre $\lim_{x\to\infty} \frac{3-e^x}{x^2}$.

Solución

Esta vez el límite es indeterminado de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la regla de L'Hôpital, se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3-e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^x}{2x}$$

www.FreeLibros.com

Como el nuevo límite es también de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, se aplica la regla de L'Hôpital otra vez para obtener

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-e^x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{-e^x}{2} = -\infty$$

y se concluye que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3 - e^x}{x^2} = -\infty$$

Aun cuando la regla de L'Hôpital sólo aplica a formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ otras clases de formas indeterminadas se pueden calcular a veces al combinar la regla de L'Hôpital con un poco de álgebra. Este procedimiento se ilustra en los ejemplos A3.6 y A3.7.

EJEMPLO | A3.6

Encuentre $\lim_{x\to\infty} e^{-x} \ln x$.

Solución

Este límite es de la forma indeterminada $0 \cdot \infty$ y se puede escribir como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x}}{1/\ln x} \left(\text{de la forma } \frac{0}{0}\right)$$

o como

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} \left(\text{de la forma } \frac{\infty}{\infty}\right)$$

Al aplicar la regla de L'Hôpital al segundo cociente más sencillo, se obtiene

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \ln x = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{e^x} = 0$$

Como ilustración final de esta técnica, observe el límite que se utilizó en la sección 4.1 para definir el número e.

EJEMPLO | A3.7

Encuentre $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Solución

Este límite es de la forma indeterminada 1^∞. Para simplificar el problema, sea

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Entonces

$$\ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

www.FreeLibros.com

y

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \qquad (\infty \cdot 0)$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1 + 1/x)}{1/x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{(-1/x^2)}{(1 + 1/x)}}{-1/x^2} \qquad \textit{regla de L'Hôpital}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + 1/x} \qquad \textit{simplificación algebraica}$$

$$= 1$$

Como $\ln y \to 1$, se deduce que $y \to e^1 = e$. Es decir,

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

PROBLEMAS | A3

En los problemas 1 a 16 use la regla de L'Hôpital para evaluar el límite dado si el límite es una forma indeterminada.

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3 - 3x^2}{3x^4 + 2x}$

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2(x - 1)}{3x^3 + 2x - 5}$

3. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 + 5x + 1}$

4. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + x - 5}{1 - 2x - x^3}$

5. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(1/x) - (2/x^2)}{(1/x^3) + (2/x^2) - (3/x)}$

6. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2 + 2x - 15}{x^3 - 19x + 3}$

7. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{2x^3 + 3x^2 - 1}$

[*Sugerencia:* Utilice la regla de L'Hôpital'.]

8. $\lim_{x\to 1/2} \dfrac{-8x^3 + 2x^2 + 3x - 1}{(2x - 1)^3}$

9. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^{-x}}{1 + e^{-2x}}$

10. $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$

11. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t}}{e^t}$

12. $\lim_{t\to\infty} \dfrac{\ln \sqrt{t}}{t}$

13. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

14. $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

15. $\lim_{x\to 0} (1 + 2x)^{1/x}$

16. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

www.FreeLibros.com

RESUMEN DEL APÉNDICE

Términos importantes, símbolos y fórmulas

Entero (A-2)

Número racional (A-2)

Número irracional (A-2)

Números reales (A-2)

Recta numérica (A-2)

Desigualdad (A-2)

Intervalo (A-3)

Valor absoluto: (A-4)

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Distancia sobre una recta numérica (A-4)

Notación exponencial:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ términos}}$$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ (potencia negativa) (A-5)

$a^{n/m} = (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$ (potencias fraccionarias) (A-5)

Leyes de exponentes: (A-6)

$a^r a^s = a^{r+s}$ (ley del producto)

$\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ (ley del cociente)

$(a^r)^s = a^{rs}$ (ley de potencia)

Factorización (A-7)

Notación de sumatoria: (A-9)

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Polinomio:

Coeficientes de un polinomio (A-12)

Grado de un polinomio (A-12)

Leyes de números empleados en factorización:

Ley distributiva $ab + ac = a(b + c)$ (A-13)

Diferencia de dos cuadrados (A-14)

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Resolución de una ecuación por factorización (A-14)

Fórmula cuadrática: (A-15)

Las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$ para $a \neq 0$ son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El discriminante de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ es $b^2 - 4ac$ (A-15)

Sistema de ecuaciones (A-16)

Resolución de un sistema de ecuaciones por eliminación (A-16)

Regla de L'Hôpital: (A-19)

$\left(\text{forma } \dfrac{0}{0}\right)$ Si $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$,

entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\left(\text{forma } \dfrac{\infty}{\infty}\right)$ Si $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \infty$,

entonces

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Problemas de repaso

En los problemas 1 y 2 use desigualdades para describir el intervalo dado.



1. **2.**

En los problemas 3 a 6 represente el intervalo dado como segmento de recta sobre una recta numérica.

3. $-3 \leq x < 2$

4. $-1 < x < 5$

5. $x \geq 1$

6. $2 \leq x < 7$

www.FreeLibros.com

En los problemas 7 y 8 encuentre la distancia sobre la recta numérica entre el par dado de números reales.

7. 0 a 3

8. -5 y -2

En los problemas 9 y 10 encuentre el intervalo o intervalos formados por todos los números reales x que satisfagan la desigualdad dada.

9. $|x - 3| \leq 1$

10. $|2x + 1| > 3$

En los problemas 11 al 20, evalúe la expresión dada sin usar calculadora.

11. 3^5

12. 4^{-2}

13. $8^{2/3}$

14. $49^{-3/2}$

15. $\dfrac{4(32)^{3/4}}{(\sqrt{2})^3}$

16. $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-5/2}$

17. $16^{3/2} + 27^{2/3}$

18. $\dfrac{2^{3/2}(4^{5/2})}{8^{2/3}}$

19. $\dfrac{\sqrt[3]{54}\,\sqrt[6]{2}}{\sqrt{8}}$

20. $\dfrac{\sqrt[3]{81}\,(6^{2/3})}{2^{4/3}}$

En los problemas 21 al 24 de la ecuación dada despeje n (suponga $a > 0$, $a \neq 1$).

21. $a^{2/3}a^{1/2} = a^{3n}$

22. $\dfrac{a^3}{(\sqrt{a})^5} = a^{2n}$

23. $a^2a^{-5} = (a^n)^3$

24. $a^{2n}a^3 = a^{-7}$

En los problemas 25 al 28 evalúe la suma dada.

25. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} 2k + 3$

26. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (k + 1)^2$

27. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (2k^2 - k)$

28. $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \left[\frac{k - 1}{k + 3}\right]^2$

En los problemas 29 y 30 exprese la suma dada en términos de la notación de sumatoria.

29. $1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{7}$

30. $3 + 12 + 27 + 48 + 75$

En los problemas del 31 al 34 factorice la expresión dada.

31. $x^4 - 9x^2$

32. $x^3 + 3(x - 12)$

33. $x^{16} - (2x)^4$

34. $2(x - 3)^2(x + 1) - 5(x - 3)^3(2x)$

En los problemas 35 y 36 simplifique cuanto sea posible el cociente dado.

35. $\dfrac{x^2(x - 1)^3 - 2x(x - 1)^2}{x^2 - x - 2}$

36. $\dfrac{x(x + 2)^4 - x^3(x + 2)^2}{x^2 + 3x + 2}$

En los problemas del 37 al 42 factorice el polinomio dado usando coeficientes enteros.

37. $x^2 + 2x - 15$

38. $2x^2 + 5x - 3$

39. $4x^2 + 12x + 9$

40. $12x^2 + 5x - 3$

41. $x^3 + 3x^2 - x - 3$

42. $x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

En los problemas 43 al 48 resuelva la ecuación dada por factorización.

43. $x^2 + 3x - 4 = 0$

44. $2x^2 - 3x - 2 = 0$

45. $x^2 + 14x + 49 = 0$

www.FreeLibros.com

46. $x^2 - 64 = 0$

47. $1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = 0$

48. $4 + \frac{9}{x^2} = \frac{12}{x}$

En los problemas 49 a 54 use la fórmula cuadrática para hallar todos los números reales x que satisfagan la ecuación dada.

49. $14x^2 - x - 3 = 0$

50. $24x^2 + x - 10 = 0$

51. $x^2 - 3x + 5 = 0$

52. $7x^2 + 3x - 2 = 0$

53. $3x^2 + 5x - 2 = 0$

54. $2x^2 + 12x + 11 = 0$

En los problemas 55 al 58 resuelva el sistema dado de ecuaciones.

55. $3x + 5y = -1$
$2x + 7y = 3$

56. $2x + y = 7$
$-x + 4y = 1$

57. $3x^2 - y^2 = -1$
$2x + y = 4$

58. $5x^2 - 2y^2 = 1$
$5x - 2y = 4$

En los problemas del 59 al 64 use la regla de L'Hôpital para evaluar el límite dado si el límite es una forma indeterminada.

59. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{2x^3 + x - 3}$

60. $\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{3x^3 - 7x + 10}$

61. $\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-2x}}{3 + 2e^{-2x}}$

62. $\lim_{x \to \infty} x^3 e^{-\sqrt{x}}$

63. $\lim_{x \to \infty} x(e^{1/x} - 1)$

64. $\lim_{x \to \infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x}$

www.FreeLibros.com

REFLEXIONE ACERCA DE...



PROBLEMA

Para una vida moderna cómoda, se estima que cada persona necesita alrededor de 60 m^2 de espacio habitable, 40 m^2 para su trabajo, 50 m^2 para edificios públicos e instalaciones de recreación, 90 m^2 para transporte (por ejemplo carreteras), y 4 000 m^2 para la producción de alimentos.

Preguntas

1. Suiza tiene aproximadamente 11 000 km^2 de espacio habitable (cultivos y vivienda). ¿Cuántas personas pueden vivir cómodamente en Suiza? Busque la población real de Suiza. Con base en las cifras dadas aquí, ¿está Suiza superpoblada o todavía hay espacio para crecimiento confortable?

2. Use un almanaque, una enciclopedia o alguna otra fuente para obtener la población de la India. ¿Cuánto espacio habitable tendría que haber en India para alojar su población actual sin estar superpoblada? Ahora busque el área total de la India. Incluso si toda la India fuera espacio habitable, ¿hay suficiente espacio para que la población viva cómodamente?

3. Es probable que el lector sepa que la India está superpoblada. Escoja otro país donde la respuesta no sea tan obvia (Bolivia, Zimbabwe, San Marino). Describa el "confort de vivir" en ese país.

Fuente: Adaptado de un problema en la obra de E. Batschelet, *Introduction to Mathematics for Life Scientists*, 2a. ed., Springer-Verlag, Nueva York, 1976, página 31. El lector encontrará interesante examinar varios de los problemas aplicados a ciencias sociales, en las páginas 31-33 del texto de Batschelet.

www.FreeLibros.com

TABLAS

TABLA I Potencias de e

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0.00	1.0000	1.00000	0.50	1.6487	.60653	1.00	2.7183	.36788
0.01	1.0101	0.99005	0.51	1.6653	.60050	1.10	3.0042	.33287
0.02	1.0202	.98020	0.52	1.6820	.59452	1.20	3.3201	.30119
0.03	1.0305	.97045	0.53	1.6989	.58860	1.30	3.6693	.27253
0.04	1.0408	.96079	0.54	1.7160	.58275	1.40	4.0552	.24660
0.05	1.0513	.95123	0.55	1.7333	.57695	1.50	4.4817	.22313
0.06	1.0618	.94176	0.56	1.7507	.57121	1.60	4.9530	.20190
0.07	1.0725	.93239	0.57	1.7683	.56553	1.70	5.4739	.18268
0.08	1.0833	.92312	0.58	1.7860	.55990	1.80	6.0496	.16530
0.09	1.0942	.91393	0.59	1.8040	.55433	1.90	6.6859	.14957
0.10	1.1052	.90484	0.60	1.8221	.54881	2.00	7.3891	.13534
0.11	1.1163	.89583	0.61	1.8404	.54335	3.00	20.086	.04979
0.12	1.1275	.88692	0.62	1.8589	.53794	4.00	54.598	.01832
0.13	1.1388	.87809	0.63	1.8776	.53259	5.00	148.41	.00674
0.14	1.1503	.86936	0.64	1.8965	.52729	6.00	403.43	.00248
0.15	1.1618	.86071	0.65	1.9155	.52205	7.00	1096.6	.00091
0.16	1.1735	.85214	0.66	1.9348	.51685	8.00	2981.0	.00034
0.17	1.1853	.84366	0.67	1.9542	.51171	9.00	8103.1	.00012
0.18	1.1972	.83527	0.68	1.9739	.50662	10.00	22026.5	.00005
0.19	1.2092	.82696	0.69	1.9937	.50158			
0.20	1.2214	.81873	0.70	2.0138	.49659			
0.21	1.2337	.81058	0.71	2.0340	.49164			
0.22	1.2461	.80252	0.72	2.0544	.48675			
0.23	1.2586	.79453	0.73	2.0751	.48191			
0.24	1.2712	.78663	0.74	2.0959	.47711			
0.25	1.2840	.77880	0.75	2.1170	.47237			
0.26	1.2969	.77105	0.76	2.1383	.46767			
0.27	1.3100	.76338	0.77	2.1598	.46301			
0.28	1.3231	.75578	0.78	2.1815	.45841			
0.29	1.3364	.74826	0.79	2.2034	.45384			
0.30	1.3499	.74082	0.80	2.2255	.44933			
0.31	1.3634	.73345	0.81	2.2479	.44486			
0.32	1.3771	.72615	0.82	2.2705	.44043			
0.33	1.3910	.71892	0.83	2.2933	.43605			
0.34	1.4049	.71177	0.84	2.3164	.43171			
0.35	1.4191	.70469	0.85	2.3396	.42741			
0.36	1.4333	.69768	0.86	2.3632	.42316			
0.37	1.4477	.69073	0.87	2.3869	.41895			
0.38	1.4623	.68386	0.88	2.4109	.41478			
0.39	1.4770	.67706	0.89	2.4351	.41066			
0.40	1.4918	.67032	0.90	2.4596	.40657			
0.41	1.5068	.66365	0.91	2.4843	.40252			
0.42	1.5220	.65705	0.92	2.5093	.39852			
0.43	1.5373	.65051	0.93	2.5345	.39455			
0.44	1.5527	.64404	0.94	2.5600	.39063			
0.45	1.5683	.63763	0.95	2.5857	.38674			
0.46	1.5841	.63128	0.96	2.6117	.38289			
0.47	1.6000	.62500	0.97	2.6379	.37908			
0.48	1.6161	.61878	0.98	2.6645	.37531			
0.49	1.6323	.61263	0.99	2.6912	.37158			

Tomada de R. S. Burington, *Handbook of Mathematical Tables and Formulas*, McGraw-Hill, 1973. Usado con permiso de McGraw-Hill Book Company.

www.FreeLibros.com

TABLA II El logaritmo natural (base e)

x	ln x	x	ln x	x	ln x	x	ln x
.01	−4.60517	0.50	−0.69315	1.00	0.00000	1.5	0.40547
.02	−3.91202	.51	.67334	1.01	.00995	1.6	7000
.03	.50656	.52	.65393	1.02	.01980	1.7	0.53063
.04	.21888	.53	.63488	1.03	.02956	1.8	8779
		.54	.61619	1.04	.03922	1.9	0.64185
.05	−2.99573	.55	.59784	1.05	.04879	2.0	9315
.06	.81341	.56	.57982	1.06	.05827	2.1	0.74194
.07	.65926	.57	.56212	1.07	.06766	2.2	8846
.08	.52573	.58	.54473	1.08	.07696	2.3	0.83291
.09	.40795	.59	.52763	1.09	.08618	2.4	7547
0.10	−2.30259	0.60	−0.51083	1.10	.09531	2.5	0.91629
.11	.20727	.61	.49430	1.11	.10436	2.6	5551
.12	.12026	.62	.47804	1.12	.11333	2.7	9325
.13	.04022	.63	.46204	1.13	.12222	2.8	1.02962
.14	−1.96611	.64	.44629	1.14	.13103	2.9	6471
.15	.89712	.65	.43078	1.15	.13976	3.0	9861
.16	.83258	.66	.41552	1.16	.14842	4.0	1.38629
.17	.77196	.67	.40048	1.17	.15700	5.0	1.60944
.18	.71480	.68	.38566	1.18	.16551	10.0	2.30258
.19	.66073	.69	.37106	1.19	.17395		
0.20	−1.60944	0.70	−0.35667	1.20	.18232		
.21	.56065	.71	.34249	1.21	.19062		
.22	.51413	.72	.32850	1.22	.19885		
.23	.46968	.73	.31471	1.23	.20701		
.24	.42712	.74	.30111	1.24	.21511		
.25	.38629	.75	.28768	1.25	.22314		
.26	.34707	.76	.27444	1.26	.23111		
.27	.30933	.77	.26136	1.27	.23902		
.28	.27297	.78	.24846	1.28	.24686		
.29	.23787	.79	.23572	1.29	.25464		
0.30	−1.20397	0.80	−0.22314	1.30	.26236		
.31	.17118	.81	.21072	1.31	.27003		
.32	.13943	.82	.19845	1.32	.27763		
.33	.10866	.83	.18633	1.33	.28518		
.34	.07881	.84	.17435	1.34	.29267		
.35	−1.04982	.85	−0.16252	1.35	.30010		
.36	.02165	.86	.15032	1.36	.30748		
.37	−0.99425	.87	.13926	1.37	.31481		
.38	.96758	.88	.12783	1.38	.32208		
.39	.94161	.89	.11653	1.39	.32930		
0.40	−0.91629	0.90	−0.10536	1.40	.33647		
.41	.89160	.91	.09431	1.41	.34359		
.42	.86750	.92	.08338	1.42	.35066		
.43	.84397	.93	.07257	1.43	.35767		
.44	.82098	.94	.06188	1.44	.36464		
.45	.79851	.95	.05129	1.45	.37156		
.46	.77653	.96	.04082	1.46	.37844		
.47	.75502	.97	.03046	1.47	.38526		
.48	.73397	.98	.02020	1.48	.39204		
.49	.71335	.99	.01005	1.49	.39878		

De S. K. Stein, *Calculus and Analytic Geometry.* McGraw-Hill, 1973. Usado con permiso de McGraw-Hill Book Company.

www.FreeLibros.com

TABLA III Funciones trigonométricas

GRADOS	RADIANES	SEN	COS	TAN	GRADOS	RADIANES	SEN	COS	TAN
0	0.0000	0.0000	1.000	0.0000	45	0.7854	0.7071	0.7071	1.000
1	0.01745	0.01745	0.9998	0.01746	46	0.8028	0.7193	0.6947	1.036
2	0.03491	0.03490	0.9994	0.03492	47	0.8203	0.7314	0.6820	1.072
3	0.05236	0.05234	0.9986	0.05241	48	0.8378	0.7431	0.6691	1.111
4	0.06981	0.06976	0.9976	0.06993	49	0.8552	0.7547	0.6561	1.150
5	0.08727	0.08716	0.9962	0.08749	50	0.8727	0.7660	0.6428	1.192
6	0.1047	0.1045	0.9945	0.1051	51	0.8901	0.7772	0.6293	1.235
7	0.1222	0.1219	0.9926	0.1228	52	0.9076	0.7880	0.6157	1.280
8	0.1396	0.1392	0.9903	0.1405	53	0.9250	0.7986	0.6018	1.327
9	0.1571	0.1564	0.9877	0.1584	54	0.9425	0.8090	0.5878	1.376
10	0.1745	0.1736	0.9848	0.1763	55	0.9599	0.8192	0.5736	1.428
11	0.1920	0.1908	0.9816	0.1944	56	0.9774	0.8290	0.5592	1.483
12	0.2094	0.2079	0.9782	0.2126	57	0.9948	0.8387	0.5446	1.540
13	0.2269	0.2250	0.9744	0.2309	58	1.012	0.8480	0.5299	1.600
14	0.2444	0.2419	0.9703	0.2493	59	1.030	0.8572	0.5150	1.664
15	0.2618	0.2588	0.9659	0.2680	60	1.047	0.8660	0.5000	1.732
16	0.2792	0.2756	0.9613	0.2868	61	1.065	0.8746	0.4848	1.804
17	0.2967	0.2924	0.9563	0.3057	62	1.082	0.8830	0.4695	1.881
18	0.3142	0.3090	0.9511	0.3249	63	1.100	0.8910	0.4540	1.963
19	0.3316	0.3256	0.9455	0.3443	64	1.117	0.8988	0.4384	2.050
20	0.3491	0.3420	0.9397	0.3640	65	1.134	0.9063	0.4226	2.144
21	0.3665	0.3584	0.9336	0.3839	66	1.152	0.9136	0.4067	2.246
22	0.3840	0.3746	0.9272	0.4040	67	1.169	0.9205	0.3907	2.356
23	0.4014	0.3907	0.9205	0.4245	68	1.187	0.9272	0.3746	2.475
24	0.4189	0.4067	0.9136	0.4452	69	1.204	0.9336	0.3584	2.605
25	0.4363	0.4226	0.9063	0.4663	70	1.222	0.9397	0.3420	2.748
26	0.4538	0.4384	0.8988	0.4877	71	1.239	0.9455	0.3256	2.904
27	0.4712	0.4540	0.8910	0.5095	72	1.257	0.9511	0.3090	3.078
28	0.4887	0.4695	0.8830	0.5317	73	1.274	0.9563	0.2924	3.271
29	0.5062	0.4848	0.8746	0.5543	74	1.292	0.9613	0.2756	3.487
30	0.5236	0.5000	0.8660	0.5774	75	1.309	0.9659	0.2588	3.732
31	0.5410	0.5150	0.8572	0.6009	76	1.326	0.9703	0.2419	4.011
32	0.5585	0.5299	0.8480	0.6249	77	1.344	0.9744	0.2250	4.332
33	0.5760	0.5446	0.8387	0.6494	78	1.361	0.9782	0.2079	4.705
34	0.5934	0.5592	0.8290	0.6745	79	1.379	0.9816	0.1908	5.145
35	0.6109	0.5736	0.8192	0.7002	80	1.396	0.9848	0.1736	5.671
36	0.6283	0.5878	0.8090	0.7265	81	1.414	0.9877	0.1564	6.314
37	0.6458	0.6018	0.7986	0.7536	82	1.431	0.9903	0.1392	7.115
38	0.6632	0.6157	0.7880	0.7813	83	1.449	0.9926	0.1219	8.144
39	0.6807	0.6293	0.7772	0.8098	84	1.466	0.9945	0.1045	9.514
40	0.6981	0.6428	0.7660	0.8391	85	1.484	0.9962	0.08716	11.43
41	0.7156	0.6561	0.7547	0.8693	86	1.501	0.9976	0.06976	14.30
42	0.7330	0.6691	0.7431	0.9004	87	1.518	0.9986	0.05234	19.08
43	0.7505	0.6820	0.7314	0.9325	88	1.536	0.9994	0.03490	28.64
44	0.7679	0.6947	0.7193	0.9657	89	1.553	0.9998	0.01745	57.29
45	0.7854	0.7071	0.7071	1.000	90	1.571	1.000	0.0000	——

www.FreeLibros.com

Respuestas a problemas impares, problemas de repaso y problemas de revisión

CAPÍTULO 1 | Sección 1

1. $f(0) = -2; f(-2) = 0; f(1) = 6$

3. $g(-1) = -2; g(1) = 2; g(2) = \frac{5}{2}$

5. $h(2) = 2\sqrt{3}; h(0) = 2; h(-4) = 2\sqrt{3}$

7. $f(1) = 1; f(5) = \frac{1}{27}; f(13) = \frac{1}{125}$

9. $f(1) = 0; f(2) = 2; f(3) = 2$

11. $f(-6) = 3; f(-5) = -4; f(16) = 4$

13. Sí

15. No, $f(t)$ no está definida para $t > 1$

17. Todos los números reales x excepto $x = -2$

19. Todos los números reales x para los cuales $x \geq -3$

21. Todos los números reales t para los cuales $-3 < t < 3$

23. $f(g(x)) = 3x^2 + 14x + 10$

25. $f(g(x)) = x^3 + 2x^2 + 4x + 2$

27. $f(g(x)) = \frac{1}{(x-1)^2}$

29. $f(g(x)) = |x|$

31. $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x + h$

33. $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{-1}{x(x+h)}$

35. $f(g(x)) = \sqrt{1 - 3x}$; $g(f(x)) = 1 - 3\sqrt{x}$; $f(g(x)) = g(f(x))$ si $x = 0$

37. $f(g(x)) = x$; $g(f(x)) = x$; $f(g(x)) = g(f(x))$ para todos los números reales excepto $x = 1$ y $x = 2$

39. $f(x-2) = 2x^2 - 11x + 15$

41. $f(x-1) = x^5 - 3x^2 + 6x - 3$

43. $f(x^2 + 3x - 1) = \sqrt{x^2 + 3x - 1}$

45. $f(x+1) = \frac{x}{x+1}$

Nota: En las respuestas 47 al 51, las respuestas pueden variar.

47. $h(x) = x - 1; g(u) = u^2 + 2u + 3$

49. $h(x) = x^2 + 1; g(u) = \frac{1}{u}$

51. $h(x) = 2 - x; g(u) = \sqrt[3]{u} + \frac{4}{u}$

53. *a)* $f(2) = 46$
b) $f(2) - f(1) = 26$

55. *a)* $P(9) = \frac{97}{5}$; 19 400 personas
b) $P(9) - P(8) = \frac{1}{15}$; 67 personas
c) $P(t)$ se aproxima a 20 (20 000 personas)

57. *a)* $S(0) = 25.344$ cm/sec
b) $S(6 \times 10^{-3}) = 19.008$ cm/sec

59. *a)* $s(8) = 5.8 \approx 6$ especies
b) $s_2 = \sqrt[3]{2}s_1$
c) Aproximadamente 41 000 millas cuadradas

61. *a)* Todos los números reales x excepto $x = 200$
b) Todos los números reales x para los cuales $0 \leq x \leq 100$
c) $f(50) = \$50$ millones
d) $f(100) - f(50) = \$100$ millones
e) $f(x) = 37.5$ millones implica que $x = 40\%$

63. *a)* $c(p(t)) = 4.2 + 0.08t^2$
b) $c(p(2)) = 4.52$ partes por millón
c) 5 años

65. *a)* $R(x) = -0.02x^2 + 29x$; $P(x) = -1.45x^2$ 4 374 − 15.6
b) $P(x) > 0$ si $2 < x < 5.38$

67. *a)* $Q(p(t)) = \frac{4{,}374}{(0.04t^2 + 0.2t + 12)^2}$
b) $Q(p(10)) = 13.5$ kilogramos/semana
c) $t = 0$

69. *a)*

Nivel de educación / año	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Sin certificado de secundaria	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Certificado de secundaria	1.45	1.41	1.52	1.48	1.53	1.48	1.42	1.47	1.52	1.45
Algo de universidad	1.63	1.63	1.68	1.62	1.70	1.68	1.63	1.72	1.76	1.67
Título de licenciatura	2.48	2.55	2.74	2.72	2.64	2.54	2.51	2.73	2.83	2.76
Título de posgrado	3.65	3.80	4.35	4.10	4.04	4.08	3.92	3.95	4.20	3.85

www.FreeLibros.com

b) 1.45, 1.67, 2.76, 3.85

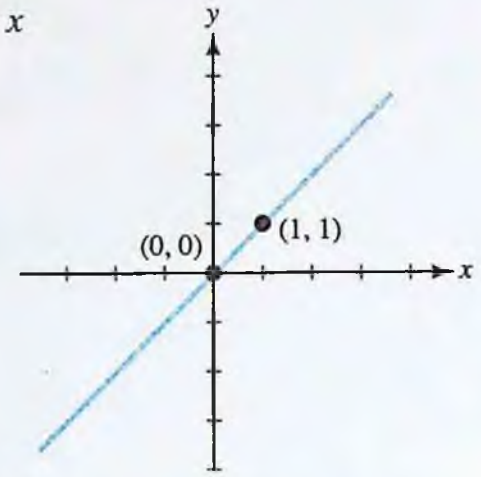
71. Todos los números reales x excepto $x = 1$ y $x = -1.5$

73. $f(g(2.3)) = 6.31$

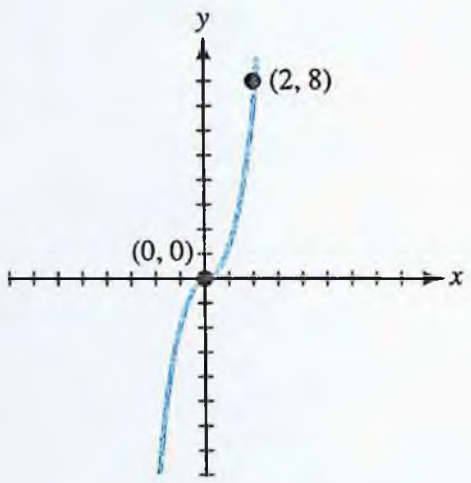
CAPÍTULO 1 | Sección 2

1. *a*) Función de potencia
b) Polinomio
c) Polinomio
d) Función racional

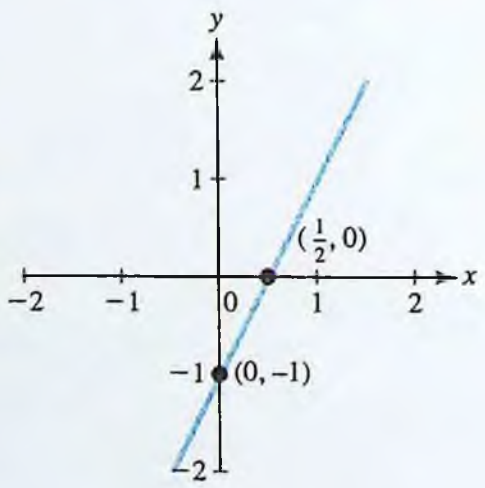
3. $f(x) = x$



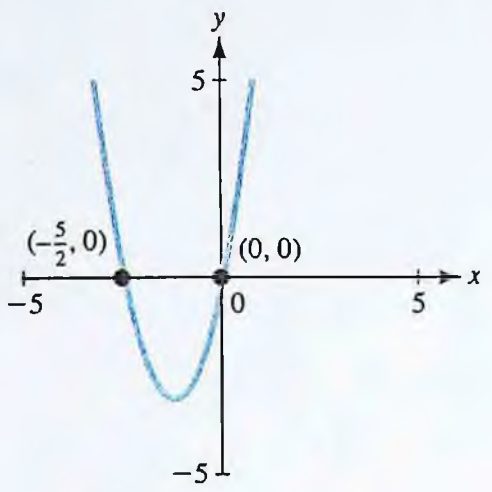
5. $f(x) = x^3$



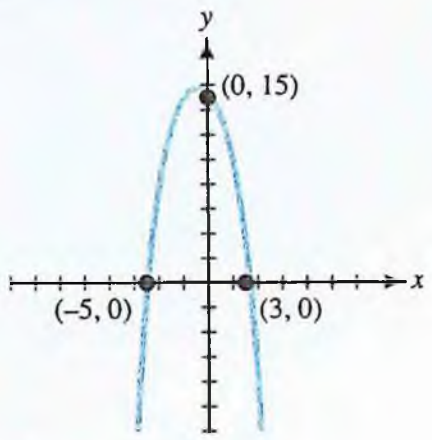
7. $f(x) = 2x - 1$



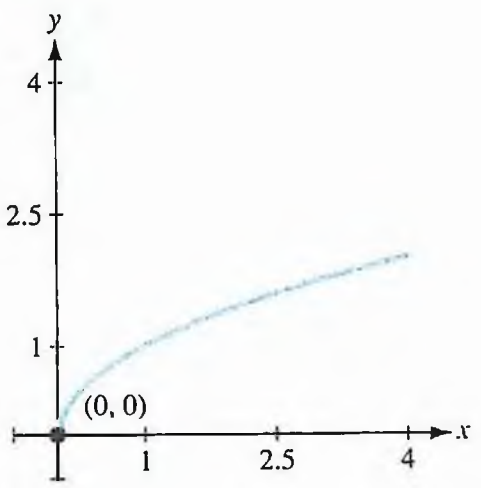
9. $f(x) = x(2x + 5)$



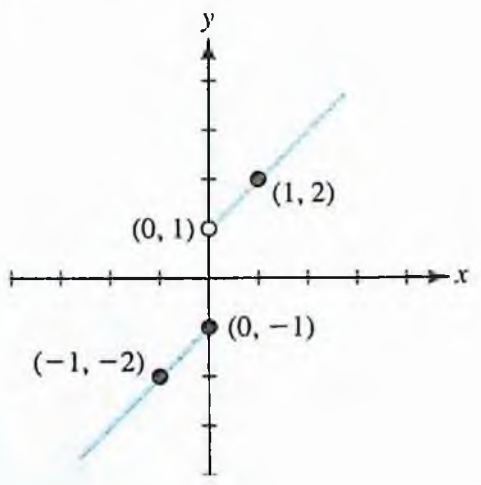
11. $f(x) = -x^2 - 2x + 15$



13. $f(x) = \sqrt{x}$

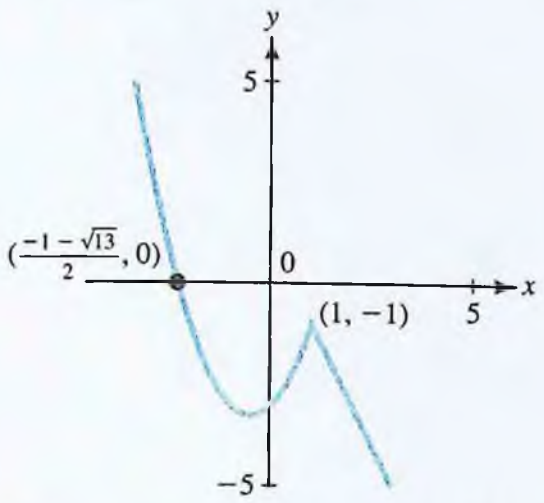


15. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

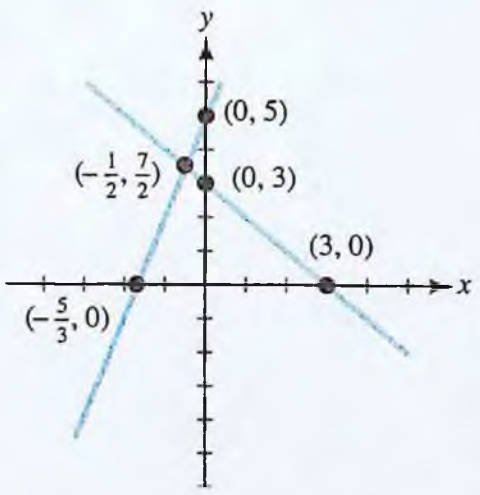


www.FreeLibros.com

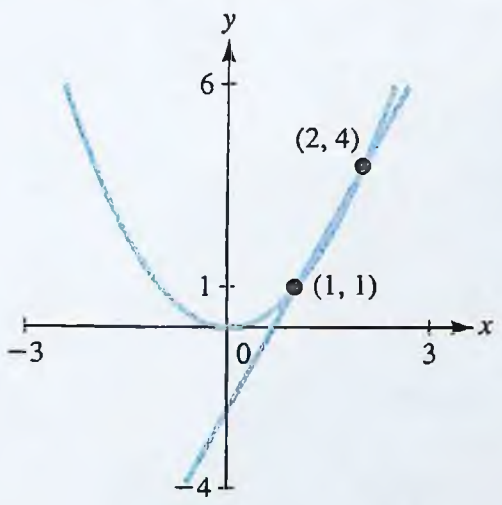
17. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3 & \text{si } x < 1 \\ 1 - 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$



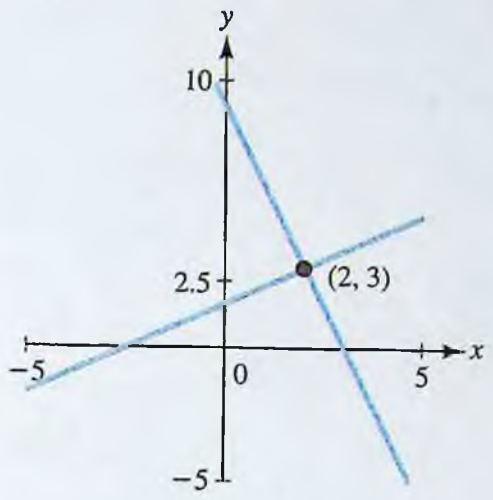
19. $y = 3x + 5$ y $y = -x + 3; \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$



21. $y = x^2$ y $y = 3x - 2$; (2, 4) y (1, 1)



23. $3y - 2x = 5$ y $y + 3x = 9$; (2, 3)



25. *a*) (0, −1)

b) (1, 0)

c) $f(x) = 3$ cuando $x = 4$

d) $f(x) = -3$ cuando $x = -2$

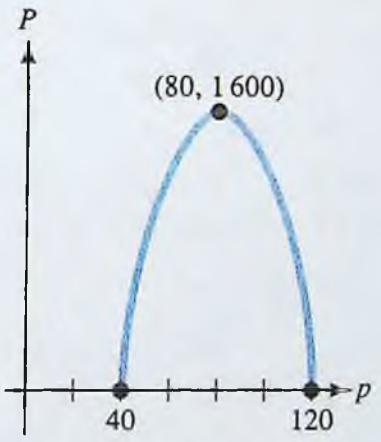
27. *a*) (0, 2)

b) (−1, 0), (3.5, 0)

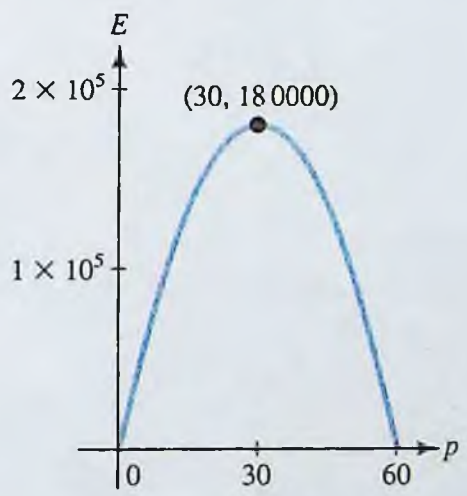
c) $f(x) = 3$ cuando $x = 2$

d) $f(x) = -3$ cuando $x = 4$

29. $P(p) = (p - 40)(120 - p)$; el precio óptimo es \$80 por grabadora



31. *a*) $E(p) = -200p^2 + 12\,000p$



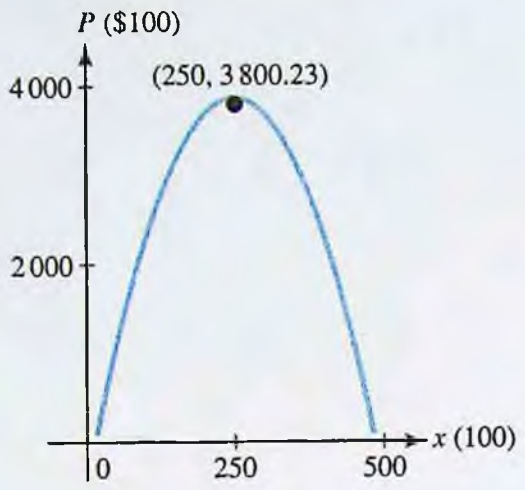
b) Los puntos de intersección p representan precios a los cuales los compradores no gastan dinero en la mercancía.

c) \$30 por unidad

www.FreeLibros.com

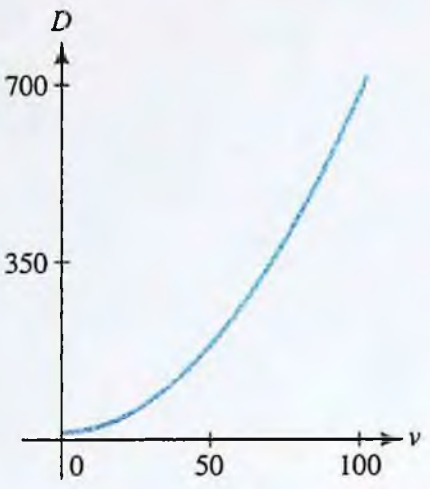
RESPUESTAS

33. *a*) $P(x) = -0.07x^2 + 35x - 574.77$



b) 25 000 unidades; $25.50

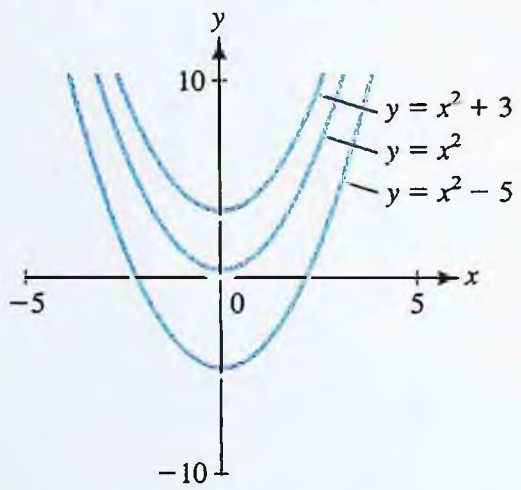
35. $D(v) = 0.065v^2 + 0.148v$



37. Las respuestas variarán

39. *a*) La gráfica de $y = x^2 + 3$ es la gráfica de $y = x^2$ corrida 3 unidades hacia arriba.

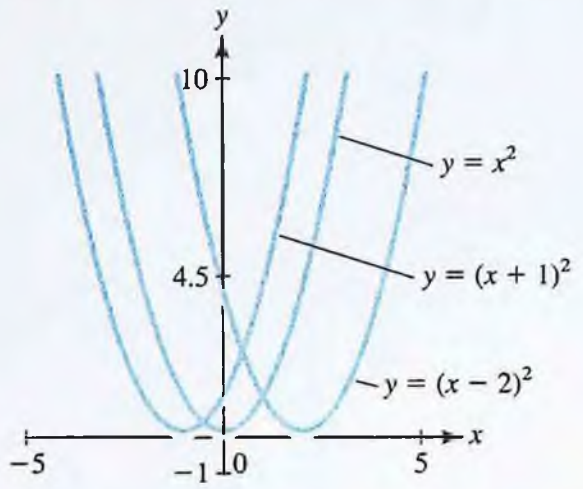
b)



c) La gráfica de $g(x)$ es la gráfica de $f(x)$ corrida $|c|$ unidades hacia arriba si $c > 0$ o hacia abajo si $c < 0$.

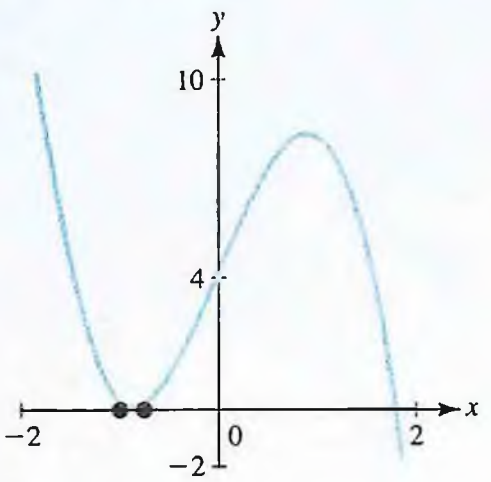
41. *a*) La gráfica de $y = (x - 2)^2$ es la gráfica de $y = x^2$ corrida 2 unidades a la derecha.

b)



c) La gráfica de $g(x)$ es la gráfica de $f(x)$ corrida $|c|$ unidades a la derecha si $c > 0$ y a la izquierda si $c < 0$.

43.



intersecciones x: $x = -1, -0.76, 1.76$.

45. *a*) Función

b) Función

c) No es función

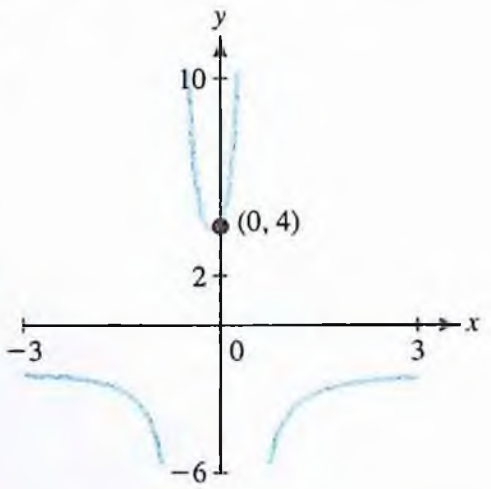
47. Un punto (x, y) está sobre el círculo cuando la distancia de (x, y) a (a, b) es R. Esto es,

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R$$

o

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

49.



$f(x)$ está definida para $x \neq \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}$.

www.FreeLibros.com

CAPÍTULO 1 | Sección 3

1. $m = -\frac{7}{2}$

3. $m = -1$

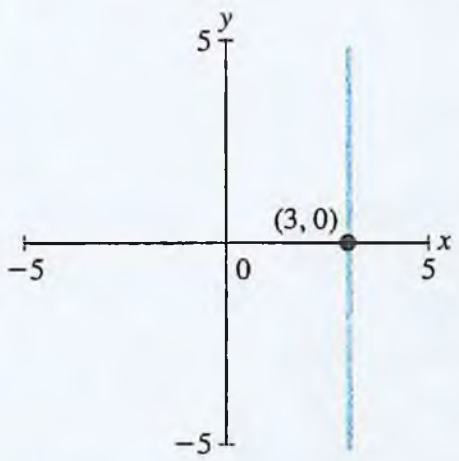
5. m no definida

7. Pendiente: 2; intersecciones: (0, 0); $y = 2x$

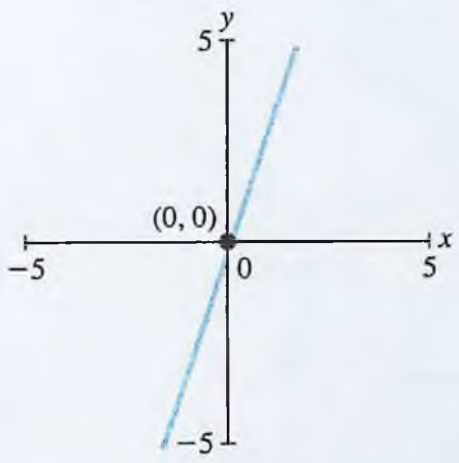
9. Pendiente: $\frac{5}{8}$; intersecciones: $(-4, 0)$, $\left(0, \frac{5}{2}\right)$;

$y = \frac{5}{8}x + \frac{5}{2}$

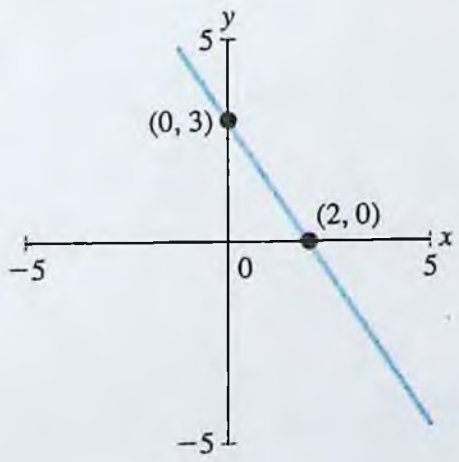
11. Pendiente: no definida; intersecciones: (3, 0)



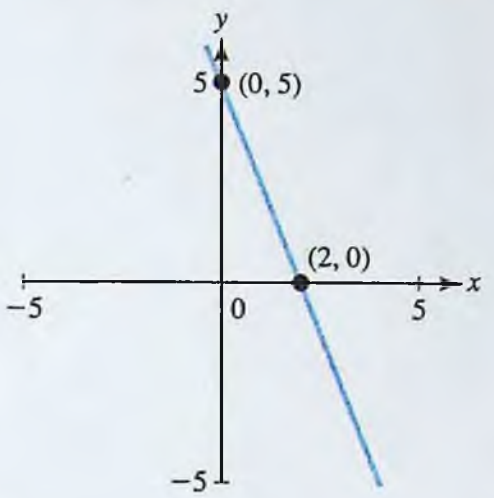
13. Pendiente: 3: intersecciones: (0, 0)



15. Pendiente: $-\frac{3}{2}$; intersecciones: (2, 0), (0, 3)



17. Pendiente: $-\frac{5}{2}$; intersecciones: (2, 0),(0, 5)



19. $y = x - 2$

21. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

23. $y = 5$

25. $y = -x + 1$

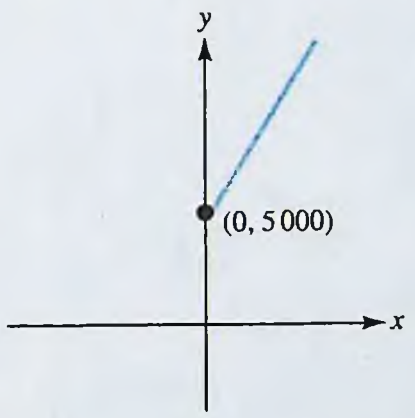
27. $y = \frac{-45}{52}x + \frac{43}{52}$

29. $y = 5$

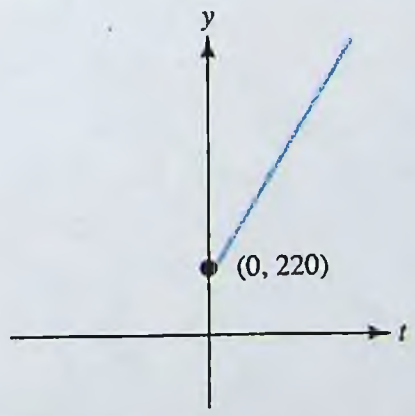
31. $y = -2x + 9$

33. $y = x + 2$

35. $y = C(x) = 60x + 5\,000$



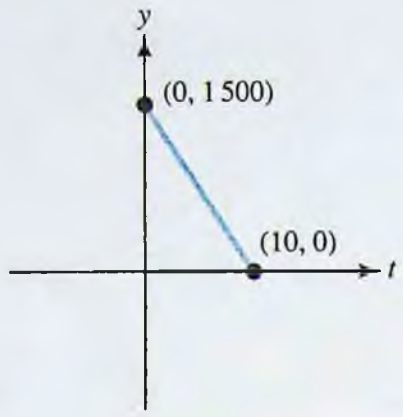
37. *a*) $y = f(t) = 35t + 220$ *b*) 325 *c*) 220



39. $f(t) = -150t + 1\,500$

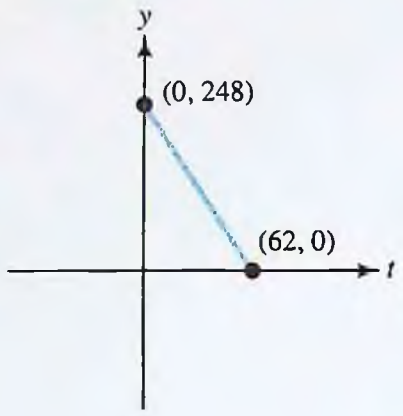
RESPUESTAS

www.FreeLibros.com



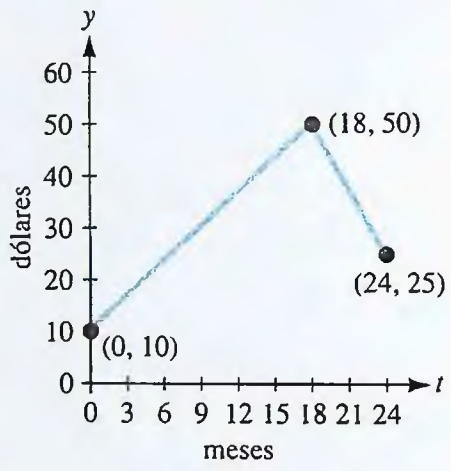
41. *a*) $y = f(t) = -4t + 248$

b) $f(8) = 216$ millones de galones

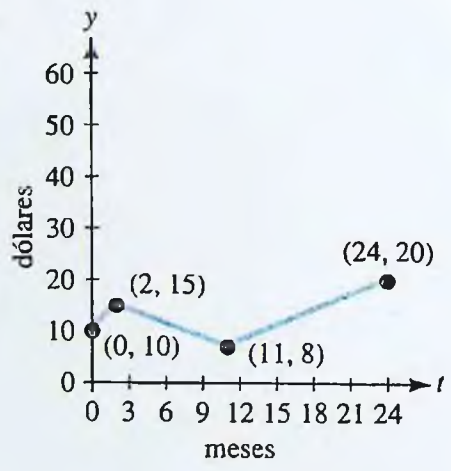


43.

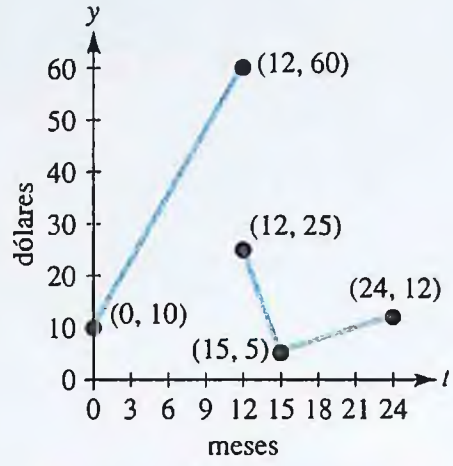
a)



b)



c)



45. *a*) 95.5 cm

b) 15.4 años de edad

c) 50 cm; sí

d) 180 cm; sí

47. *a*) $F = \frac{9}{5}C + 32$

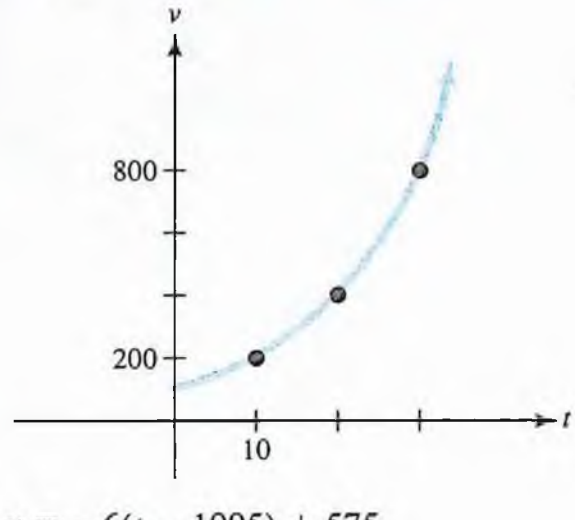
b) 59°F

c) 20°C

d) −40° Celsius = −40° Fahrenheit

49. *a*) $v(1930) = \$800$; $v(1990) = \$51\,200$; $v(2000) = \$102\,400$

b) No, no es lineal.



51. *a*) $y = -6(t - 1995) + 575$

b) 515

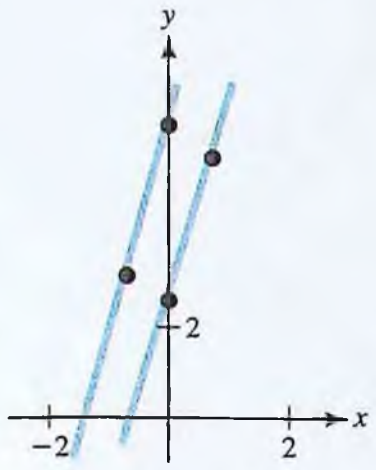
c) 2003

53. *a*) $B = \left(\frac{S - V}{N}\right)t + V$

b) \$30 800

www.FreeLibros.com

55. Las dos rectas no son paralelas; no tienen la misma pendiente.

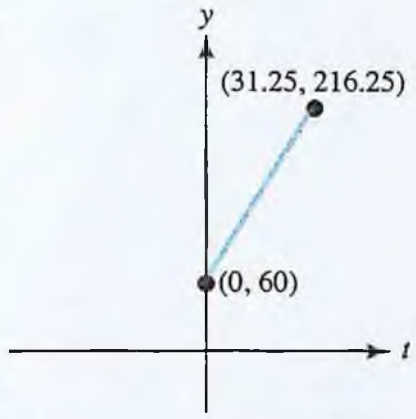


57. *a*)

Horas rentada	2	5	10	t
Costo total	\$70.00	\$85.00	\$110.00	$60 + 5t$

b) $y = 60 + 5t, t \geq 0$

c)



d) Resuelva $60+5t$ 216.25;
$t = 31.25$ horas (31 horas, 15 minutos)

59. La pendiente de –0.389 significa que el porcentaje de desempleo baja aproximadamente 0.389% de un año a otro.

61. Las rectas L_1 y L_2 están dadas como perpendiculares, y la pendiente de L_1 es $m_1 = b/a$ mientras que la de L_2 es $m_2 = c/a$. En el triángulo recto OAB, la hipotenusa tiene longitud $|AB| = |b - c|$ mientras que los dos catetos tienen longitudes $|OA| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $|OB| = \sqrt{a^2 + c^2}$. Así, por el teorema de Pitágoras,

$$(a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) = (b - c)^2$$
$$a^2 + b^2 + a^2 + c^2 = b^2 - 2bc + c^2$$
$$2a^2 = -2bc$$
$$\frac{bc}{a^2} = -1$$
$$\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = -1$$
$$m_1 m_2 = -1$$

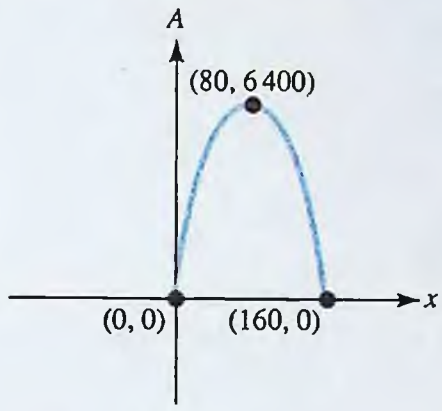
CAPÍTULO 1 | Sección 4

1. $A = 2w(500 - w)$

3. $P = x(18 - x)$

5. $R = x(35x + 15)$

7. $A = x(160 - x)$; 80 m por 80 m



9. $V = x\left(1\,000 - \frac{x^2}{2}\right)$

11. $V = \pi r(60 - r^2)$

13. $C = 0.08\pi\left(r^2 + \frac{2}{r}\right)$

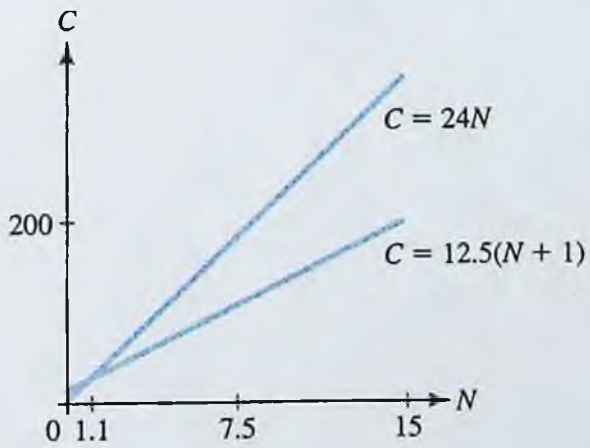
15. $R = kP$; R = rapidez de crecimiento de población; P = tamaño de población

17. $R = k(T_0 - T_e)$; R = rapidez de cambio de temperatura; T_0 = temperatura del cuerpo; T_e = temperatura del cuerpo; T_e = temperatura del medio circundante

19. $R = kP(T - P)$; R = rapidez de implicación; P = número de personas ya implicadas; T = número total de personas involucradas

21. $C = \frac{k_1}{R} + k_2 R$; R = rapidez del camión

23.



www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

25. *a*) 95.2 mg

b) Como $0.0072(2W)^{0.425}(2H)^{0.725}$

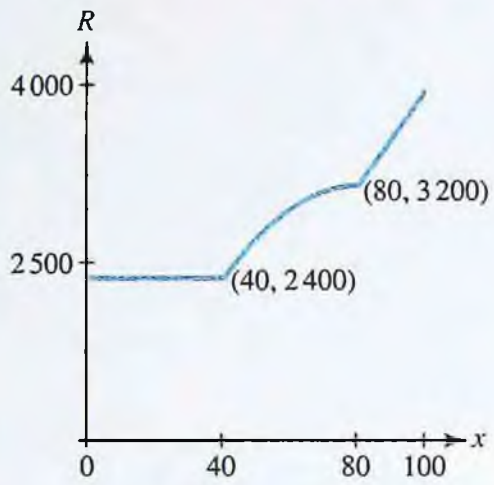
$= 0.0072(2)^{0.425}(W)^{0.425}(2)^{0.725}(H)^{0.725}$

$= (2)^{0.425}(2)^{0.725}0.0072(W)^{0.425}(H)^{0.725}$

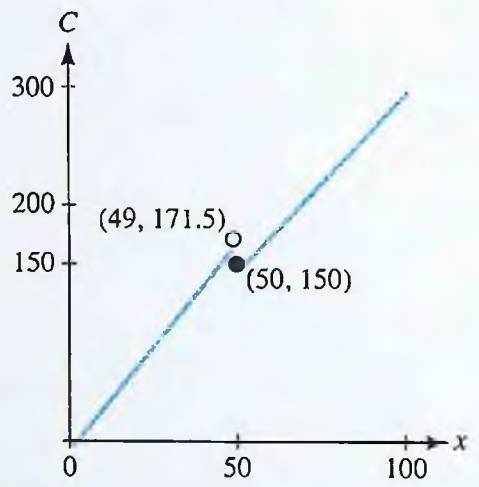
$\approx 2.22[0.0072(W)^{0.425}(H)^{0.725}]$

el niño más grande tiene el área superficial del más pequeño. Si S se multiplica por 2.2 en la fórmula $C = \dfrac{SA}{1.7}$, entonces C crece por el mismo factor.

27. $R(x) = \begin{cases} 2\,400 & \text{si } 1 \le x \le 40 \\ x\left(80 - \dfrac{1}{2}x\right) & \text{si } 40 < x < 80 \\ 40x & \text{si } x \ge 80 \end{cases}$



29. *a*) $C(x) = \begin{cases} 3.50x & \text{si } x < 50 \\ 3x & \text{si } x \ge 50 \end{cases}$

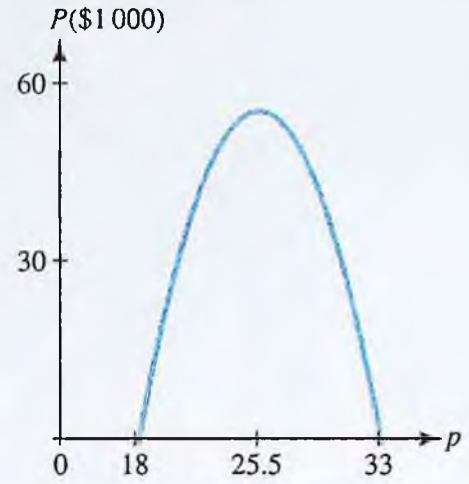


b) \$21.50

31. $V(x) = 4x - \dfrac{x^3}{3}$

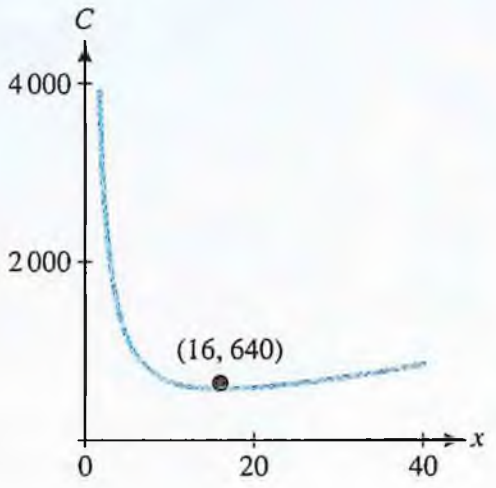
33. $A(x) = 8x + \dfrac{100}{x} + 57$

35. $P(p) = (33\,000 - 1\,000p)(p - 18)$



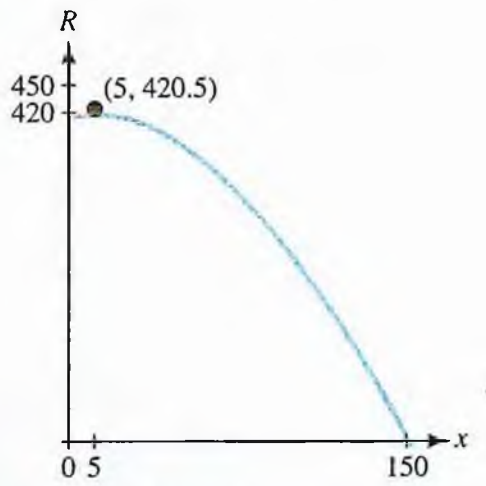
El precio óptimo es \$25.50. En realidad, el fabricante obtendrá más utilidad al *reducir* el precio en \$4.50 por unidad.

37. $C(x) = 20x + \dfrac{5\,120}{x}$



El número de máquinas es 16.

39. $R(x) = (3 - 0.02x)(140 + x)$, donde x = días desde el 1 de julio

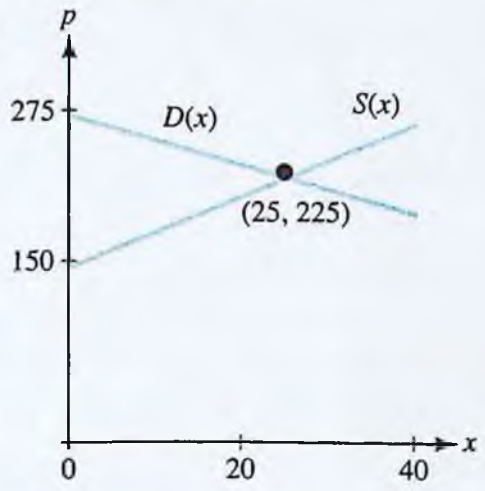


El agricultor debe cosechar cuando $x = 5$ o sea el 6 de julio.

www.FreeLibros.com

41. *a)* $x_e = 25; p_e = 225$

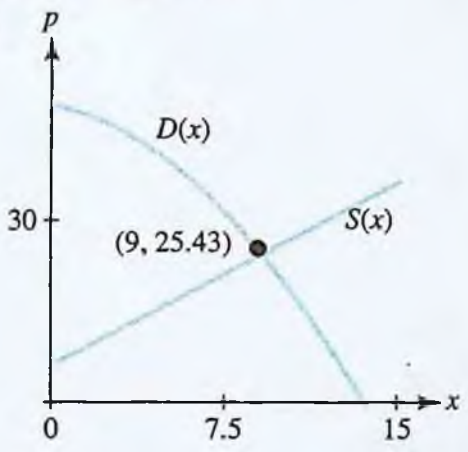
b)



c) $0 < x < 25; x > 25$

43. *a)* $x_e = 9; p_e = 25.43$

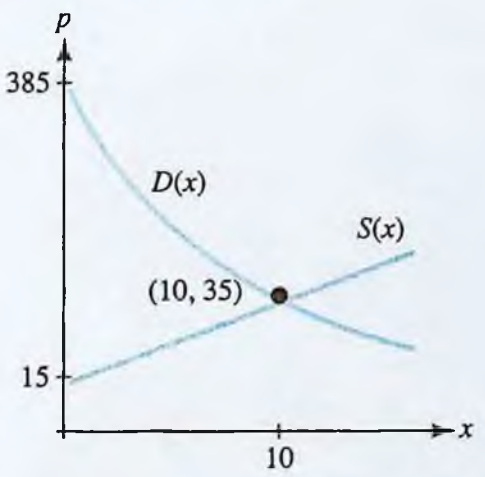
b)



c) $0 < x < 9; x > 9$

45. *a)* $x_e = 10; p_e = 35$

b)



c) $S(0) = 15$; no se producirán unidades hasta que el precio sea al menos de \$15.

47. 2 horas, 45 minutos después que salga el segundo avión

49. Si $N \leq 6\,000$ o $30\,000 < N \leq 126\,000$ escoja editor A; de otro modo, escoja el editor B.

51. $I = k\pi r^2$

53. $y = \dfrac{K_m}{R_m}x + \dfrac{1}{R_m}$

55. *a)*

x	2 000	4 000	6 000	8 000
$C(x)$	85 200	96 200	107 200	118 200

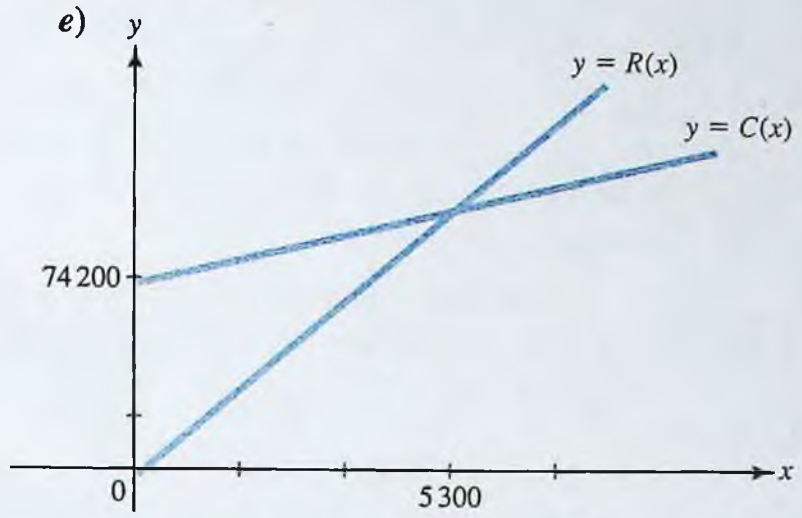
b)

x	2 000	4 000	6 000	8 000
$R(x)$	39 000	78 000	117 000	156 000

c) $C(x) = 5.5x + 74\,200$

d) $R(x) = 19.5x$

e)



f) $C(x) = R(x) = \$103\,350$ cuando $x = 5\,300$ libros

g) Aprovimadamente 4 359 libros deben venderse para un ingreso de \$85 000. La "utilidad" es en realidad una pérdida de \$13 174.

CAPÍTULO 1 | Sección 5

1. $\lim_{x \to a} f(x) = b$

3. $\lim_{x \to a} f(x) = b$

5. No existe límite.

7. 4

9. 7

11. 16

13. $\dfrac{4}{7}$

15. No existe límite.

17. 2

19. 7

21. $\dfrac{5}{3}$

23. 5

25. $\dfrac{1}{4}$

27. $+\infty; -\infty$

29. $-\infty; -\infty$

RESPUESTAS

www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

31. $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$

33. 0; 0

35. $+\infty; -\infty$

37. 1; -1

39. 1.8 in.

41. *a)* $\lim_{S \to +\infty} I(S) = a$. Sin importar el tamaño de la mordida, la vigilancia requerida limita la cantidad de ingestión de alimento.

b) Las respuestas variarán.

43. \$7.50; cuando aumenta el número de unidades producidas, la contribución de costos fijos al promedio de costos disminuye a 0.

45. No

47. *a)* 0

b) $\frac{a_n}{b_m}$

c) $+\infty$ si a_n y b_m tienen el mismo signo, $-\infty$ si a_n y b_m tienen signos contrarios.

CAPÍTULO 1 | Sección 6

1. –2; 1; no existe

3. 2; 2; existe y es igual a 2

5. 39

7. 0

9. 0

11. $\frac{1}{4}$

13. 15; 0

15. Sí

17. Sí

19. No

21. No

23. No

25. Sí

27. $f(x)$ es continua para todo número real x.

29. $f(x)$ es continua para todo número real x excepto $x = 2$.

31. $f(x)$ es continua para toda $x \neq -1$.

33. $f(x)$ es continua para toda $x \neq -3, 6$.

35. $f(x)$ es continua para toda $x \neq 0, 1$.

37. $f(x)$ es continua para todo número real x.

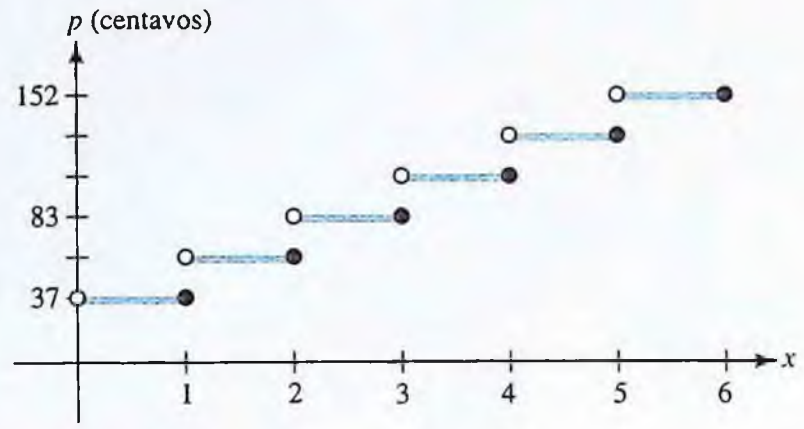
39. $f(x)$ es continua para toda $x \neq 0$.

41. *a)* $W(20) \approx 3.8$
$W(50) = -7$

b) $v = 25$ mph [*Nota:* $v = 99$ mph, está fuera de rango.]

c) W es continua en $v = 4$ y en $v = 45$, suponiendo que redondeamos $W(4)$ y $W(45)$ al décimo siguiente. La pequeña discrepancia puede verse como imprecisión del modelo.

43. $p(x)$ es discontinua en $x = 1, 2, 3, 4$ y 5.



45. La gráfica es discontinua en $t = 10$ y $t = 25$. Sue se detiene en una gasolinera y compra un poco en estos tiempos.

47. $A = 6$

49. $f(x)$ es continua en el intervalo abierto $0 < x < 1$.
$f(x)$ es continua en todo punto del intervalo cerrado $0 \leq x \leq 1$ excepto $x = 0$.

51. Sea $f(x) = \sqrt[3]{x - 8} + 9x^{2/3} - 29$. Entonces $f(x)$ es continua en $0 \leq x \leq 8, f(0) = -31 < 0$ y $f(8) = 7 > 0$. Por el IVT, $f(x) = 0$ para alguna $0 < x < 8$.

53. *a)* $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe en $x = 2$ pero $f(x)$ no es continua ahí.

b) $\lim_{x \to -2} f(x)$ no existe, por lo que $f(x)$ no es continua en $x = -2$.

55. Durante cada hora, la manecilla de los minutos se mueve continuamente de estar atrás de la manecilla de las horas a estar adelante. Por lo tanto, en algún momento, deben coincidir.

CAPÍTULO 1 | Revisión

1. Todos los números reales x tales que $-2 < x < 2$

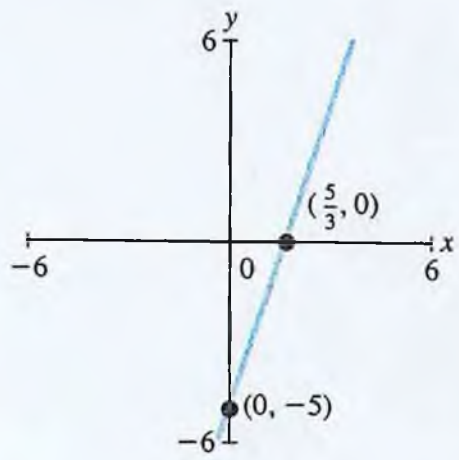
2. $g(h(x)) = \frac{2x + 1}{4x + 5}; x \neq -\frac{1}{2}$

www.FreeLibros.com

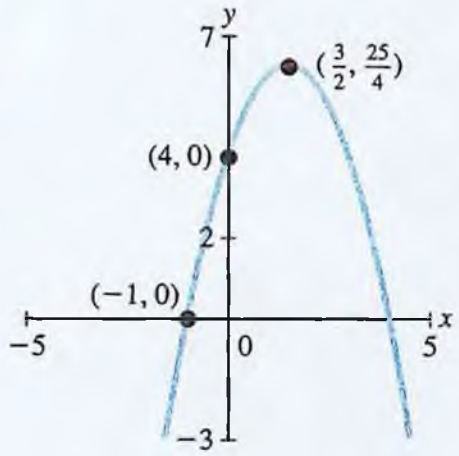
3. *a)* $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

b) $y = 2x - 3$

4. *a)*



b)



5. *a)* 2

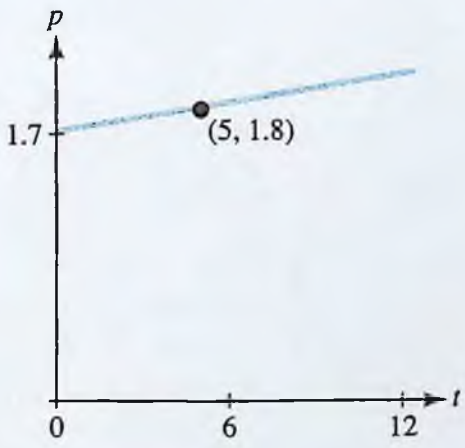
b) 4

c) 1

d) $-\infty$

6. $f(x)$ no es continua en $x = 1$.

7. *a)* $p(t) = 0.02t + 1.7$

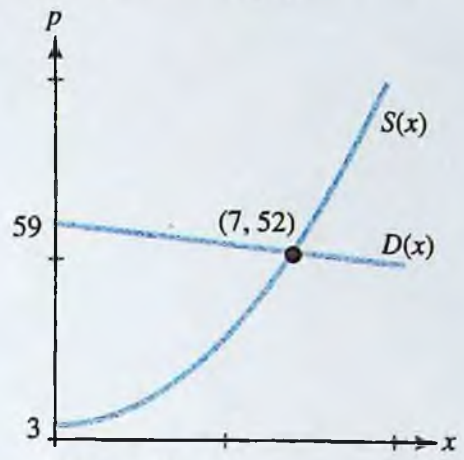


b) \$1.70 por galón

c) \$1.88 por galón

8. *a)* $A = 3, B = -1$; \$52

b)



c) −\$26; \$54

9. *a)* $t = 9$

b) La función $g(t) = f(t) - 10$ es continua y $g(1) = -2$ y $g(7) = 6$, y por el IVT $g(t) = 0$ o $f(t) = 10$ un tiempo entre $t = 1$ y $t = 7$.

10. $M = 2.5D + 0.2$; 0.2%

CAPÍTULO 1 | Problemas de repaso

1. *a)* Todo número real x

b) Todo número real x excepto $x = 1$ y $x = -2$

c) Todo número real x para el que $|x| \geq 3$

3. *a)* $g(h(x)) = x^2 - 4x + 4$

b) $g(h(x)) = \frac{1}{2x + 5}$

c) $g(h(x)) = \sqrt{-2x - 3}$

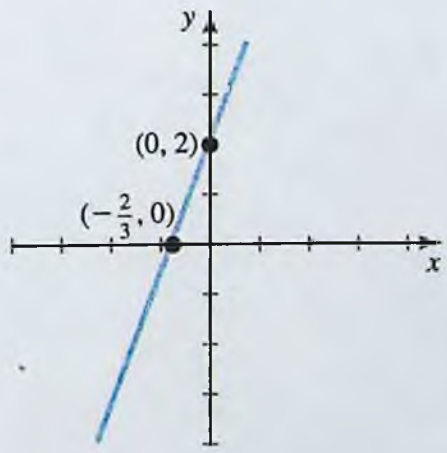
5. *Nota:* las respuestas variarán.

a) $g(u) = u^5$; $h(x) = x^2 + 3x + 4$

b) $g(u) = (u - 1)^2 + \frac{5}{2u^3}$; $h(x) = 3x + 2$

7. $c = -4$

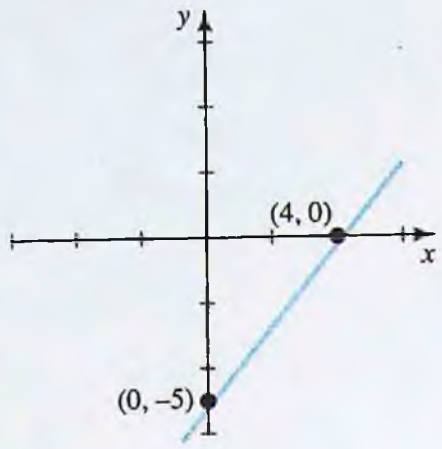
9. *a)* $m = 3, b = 2$



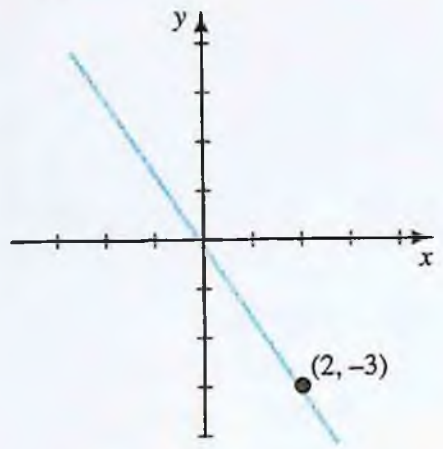
www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

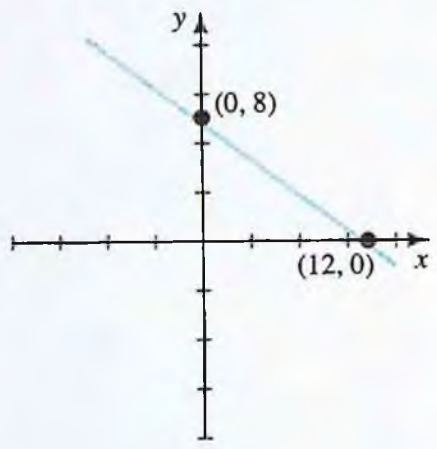
b) $m = \frac{5}{4}, b = -5$



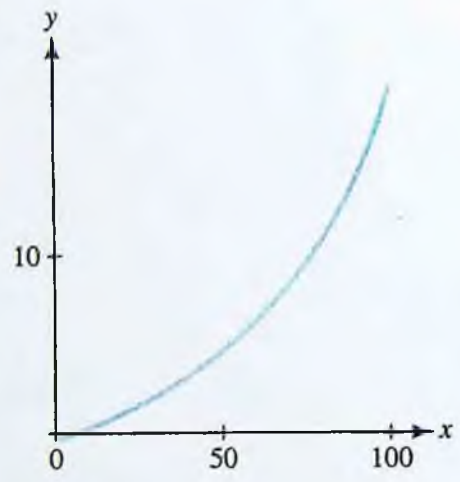
c) $m = -\frac{3}{2}, b = 0$



d) $m = -\frac{2}{3}, b = 8$



11. *a*)

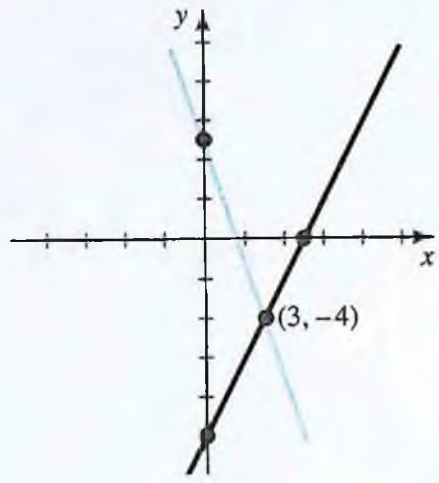


b) 5 semanas

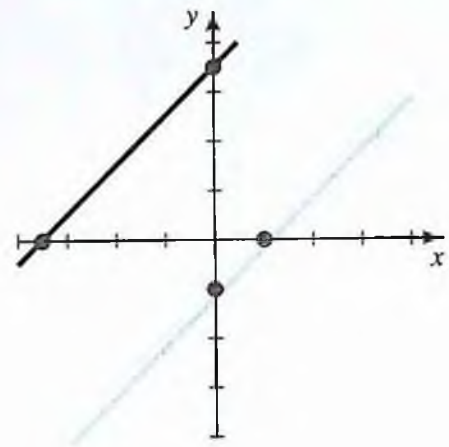
c) 20 semanas

13. $V = \frac{4\pi}{3}\left(\sqrt{\frac{S}{4\pi}}\right)^3 = \frac{S^{3/2}}{6\sqrt{\pi}}$; V se multiplica por $2^{3/2}$.

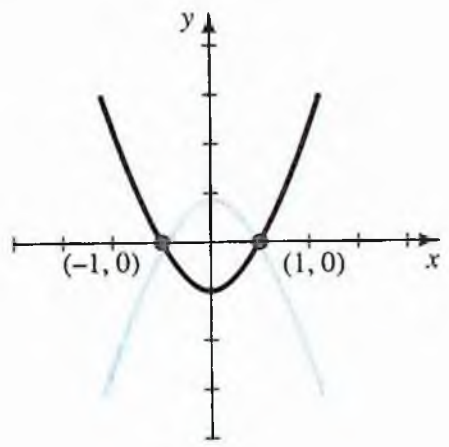
15. *a*) (3, −4)



b) No hay intersección

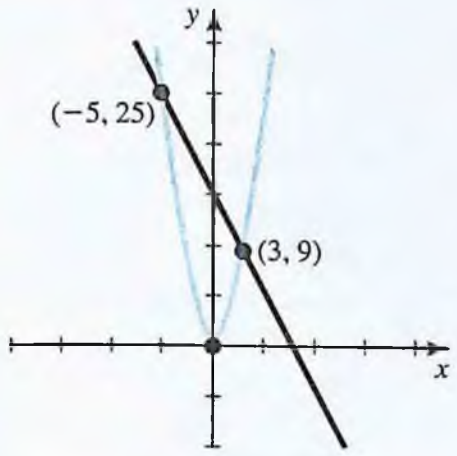


c) (1, 0) y (−1, 0)

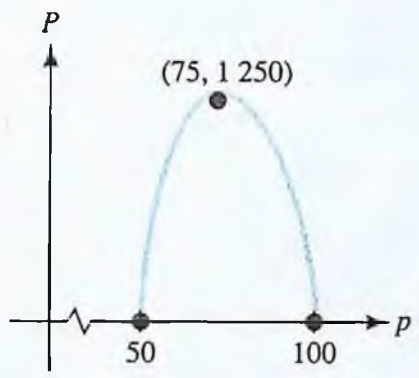


www.FreeLibros.com

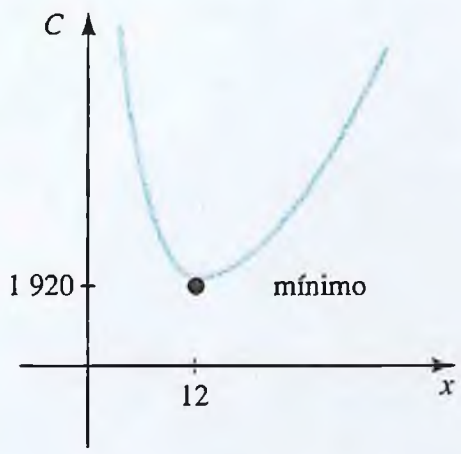
d) (3, 9) y (−5, 25)



17. $P(p) = 2(100 - p)(p - 50)$; precio óptimo $p = \$75$



19. Para x máquinas $C(x) = 80x + \dfrac{11\,520}{x}$



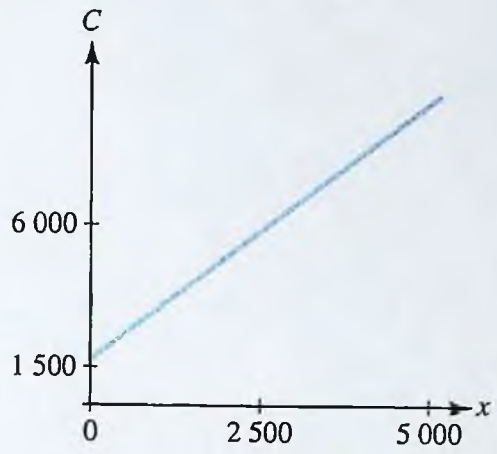
El costo es mínimo cuando $x = 12$

21. *a*) 150 unidades
b) utilidad de \$1 500
c) 180 unidades

23. $y = k(N - x)$, donde y es la frecuencia de recordatorio, x es el número de datos que han sido recordados, y N es el número total de datos.

25. $C = 60x + (2\pi - 6)x^2$

27. $C(x) = 1\,500 + 2x, 0 \le x \le 5\,000$



$C(x)$ es continua para $0 \le x \le 5\,000$.

29. Escoja la proposición A si $V < 30\,000$; de otro modo, escoja la proposición B.

31. $\dfrac{3}{2}$

33. -12

35. No existe límite

37. 0

39. $-\infty$

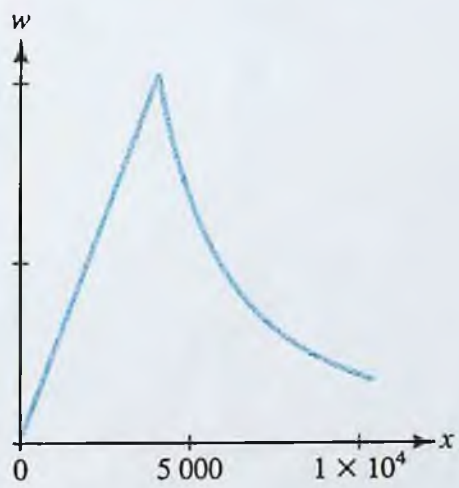
41. 0

43. 0

45. No es continua para $x = -3$

47. Continua para todo número real x.

49. $A = \dfrac{B}{(4\,000)^3}$

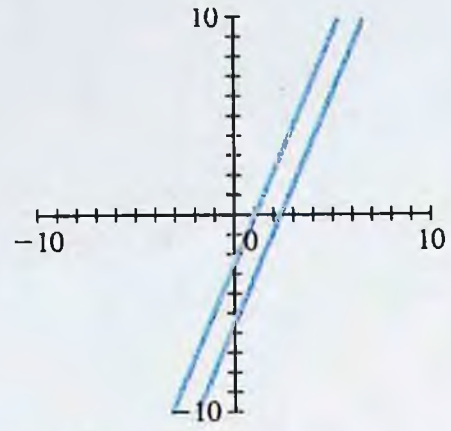


RESPUESTAS

www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

51.



No, porque $\frac{21}{9} \neq \frac{654}{279}$.

53. La función es discontinua en $x = 1$.

55. Existe el límite y es 0.

CAPÍTULO 2 | Sección 1

1. $f'(x) = 5; m = 5$

3. $f'(x) = 4x - 3; m = -3$

5. $g'(t) = -\frac{2}{t^2}; m = -8$

7. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}; m = \frac{1}{6}$

9. $f'(x) = 2x; y = 2x - 1$

11. $f'(x) = -2; y = -2x + 7$

13. $f'(x) = \frac{2}{x^2}; y = 2x + 4$

15. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}; y = \frac{1}{2}x + 2$

17. $\frac{dy}{dx} = 0$

19. $f'(x) = 1 - 2x; f'(-1) = 3$

21. $\frac{dy}{dx} = 2x - 2; \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 0$

23. *a*) $m_{sec} = 3.31$

b) $m_{tan} = 3$

25. *a*) El promedio de frecuencia de cambio de temperatura entre t_0 y $t_0 + h$ horas después de medianoche. La frecuencia instantánea de cambio de temperatura t_0 horas después de medianoche.

b) El promedio de frecuencia de cambio en el nivel de alcohol en la sangre entre t_0 y $t_0 + h$ horas después de tomarlo. La frecuencia instantánea de cambio en el nivel de alcohol en la sangre t_0 horas después de tomarlo.

c) El promedio de frecuencia de cambio de la tasa de hipoteca fija a 30 años entre t_0 y $t_0 + h$ años después de 2000. La frecuencia instantánea de cambio de la tasa de hipoteca fija a 30 años t_0 años después de 2000.

27. $V'(30) \approx \frac{65 - 50}{50 - 30} = \frac{3}{4}$; disminuye a 0

29. Aproximadamente –0.009°C por metro; aprox. 0°C por metro

31. *a*) $P = (120 - q)q - 20q$

b) \$80 por unidad

c) \$60 por unidad; creciente

33. *a*) $P'(x) = 4\,000(17 - 2x)$

b) $P(x) = 0$ cuando $x = \frac{17}{2}$ u 850 unidades. A este nivel de producción las utilidades no son crecientes ni decrecientes.

37. *a*) La gráfica de $y = x^2 - 3$ es igual que la de $y = x^2$ corrida 3 unidades hacia abajo. Así, ambas curvas tienen la misma pendiente para cada x, y sus derivadas son iguales, ambas iguales a $y' = 2x$.

b) $y' = 2x$

39. *a*) $\frac{dy}{dx} = 2x; \frac{dy}{dx} = 3x^2$

b) $\frac{dy}{dx} = 4x^3; \frac{dy}{dx} = 27x^{26}$

41. Para $x > 0$, tenemos $f(x) = x$ y

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h) - (x)}{h} = 1$$

y para $x < 0$, tenemos $f(x) = -x$ de modo que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h} = -1$$

Sin embargo, la derivada de $x = 0$ sería

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{|0 + h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h},$$

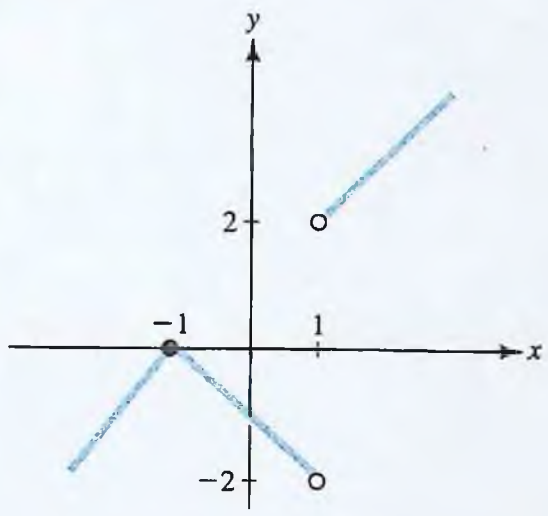
que no existe porque los dos límites con un lado en $x = 0$ no son iguales (el límite de la izquierda es –1 y el de la derecha es +1).

www.FreeLibros.com

43.

h	-0.02	-0.01	-0.001	0	0.001	0.01	0.02
$x + h$	3.83	3.84	3.849	3.85	3.851	3.86	3.87
$f(x)$	4.37310	4.37310	4.37310	4.37310	4.37310	4.37310	4.37310
$f(x + h)$	4.35192	4.36251	4.37204	4.37310	4.37415	4.38368	4.39426
$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$	1.059	1.059	1.059	indefinido	1.059	1.058	1.058

45. $f(x)$ no es continua en $x = 1$, razón por la que no es derivable ahí.



CAPÍTULO 2 | Sección 2

1. $\frac{dy}{dx} = -4x^{-5}$

3. $\frac{dy}{dx} = 0$

5. $\frac{dy}{dr} = 2\pi r$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$

9. $\frac{dy}{dt} = \frac{-9}{2\sqrt{t^3}}$

11. $\frac{dy}{dx} = 2x + 2$

13. $f'(x) = 9x^8 - 40x^7 + 1$

15. $f'(x) = -0.06x^2 + 0.3$

17. $\frac{dy}{dt} = \frac{-1}{t^2} - \frac{2}{t^3} + \frac{1}{2\sqrt{t^3}}$

19. $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x^5}}$

21. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{8} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{2}{3x^3} + \frac{1}{3}$

23. $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x^3} + \frac{2}{3x^{1/3}} - \frac{1}{4x^{3/2}} + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$

25. $\frac{dy}{dx} = 2x + \frac{4}{x^2}$

27. $y = 10x + 2$

29. $y = -\frac{1}{16}x + 2$

31. $y = x + 3$

33. $y = -4x - 1$

35. $y = 3x - 3$

37. $y = -3x + \frac{22}{3}$

39. $f'(-1) = -5$

41. $f'(1) = -\frac{3}{2}$

43. $f'(1) = \frac{1}{2}$

45. *a*) 0.2 partes por millón por año
b) 0.15 partes por millón
c) 0.4 partes por millón

47. *a*) $f'(x) = -6$
b) El cambio en el promedio de calificaciones en la prueba de aptitud escolar (SAT) es igual cada año. El promedio de calificaciones SAT disminuye cada año.

49. *a*) $T'(0) = \$40$ por año
b) \$480

51. Aproximadamente 2 435 personas por día

53. *a*) $C(x) = 1.9x + \frac{7\,280}{x}$
c) $C'(40) = -2.65$; decreciente

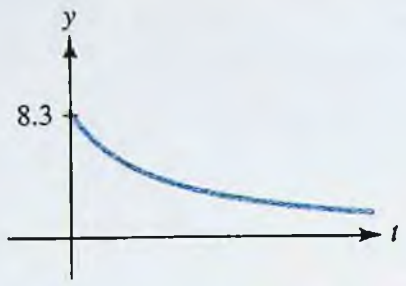
55. $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{6x^2 - 10x}{2x^3 - 5x^2 + 4}$; $\frac{f'(1)}{f(1)} = -4$

57. *a*) \$10 800 por año
b) 17.53%

RESPUESTAS

www.FreeLibros.com

59. *a)* $f(t) = \dfrac{100(2\,000)}{24\,000 + 2\,000t} = \dfrac{100}{12 + t}$



b) 7.69%

c) El porcentaje de rapidez de cambio se aproxima a cero.

61. $P'(x) = 2 + 6x^{1/2}$

a) $P'(9) = 20$ personas por mes

b) 0.39%

63. *a)* $T'(t) = -204.21t^2 + 61.96t + 12.52$

b) $T'(0) = 12.52$, creciente; $T'(0.713) = -47.12$, decreciente

c) $t = 0.442$ días o 10.61 horas; $T(0.442) = 42.8°C$, que es la máxima temperatura durante el periodo.

65. *a)* $v(t) = 6t + 2$; $a(t) = 6$

b) No estacionario

67. *a)* $v(t) = 4t^3 - 12t^2 + 8$; $a(t) = 12t^2 - 24t$

b) $t = 1, 1+\sqrt{3}$

69. *a)* 32 ft/sec

b) 128 ft

c) −32 ft/sec

d) −96 ft/sec

71. $a = -1, b = 5, c = 0$

73.
$$(f+g)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$= f'(x)+g'(x)$$

75. *a)* \$150 por tonelada de carbón

b) 0.2% por dólar

CAPÍTULO 2 | Sección 3

1. $f'(x) = 12x - 1$

3. $\dfrac{dy}{du} = -300u - 20$

5. $f'(x) = \dfrac{1}{3}\left(6x^5 - 12x^3 + 4x + 1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$

9. $f'(t) = \dfrac{-(t^2+2)}{(t^2-2)^2}$

11. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3}{(x+5)^2}$

13. $f'(x) = \dfrac{11x^2 - 10x - 7}{(2x^2 + 5x - 1)^2}$

15. $f'(x) = \dfrac{2(x^2 + 2x + 4)}{(x+1)^2}$

17. $f'(x) = 10(2 + 5x)$

19. $g'(t) = \dfrac{4\sqrt{t^5} + 20\sqrt{t^3} - 2t + 5}{2\sqrt{t}\,(2t+5)^2}$

21. $y = 17x - 4$

23. $y = 3x + 2$

25. $y = -\dfrac{11}{2}x + \dfrac{19}{2}$

27. $(0, 1), \left(-2, -\dfrac{1}{3}\right)$

29. −18

31. 4

33. $y = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{3}{5}$

35. $y = \dfrac{1}{31}(-x - 371)$

37. *a)-d)* $y' = \dfrac{9 - 4x}{x^4}$

39. $f''(x) = 8x^3 - 24x + 18$

41. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{4}{3x^3} + \dfrac{\sqrt{2}}{4x^{3/2}} - \dfrac{1}{8x^{5/2}}$

43. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 36x^2 + 30x + 12$

45. *a)* $S'(2) = 378.07$

b) Las ventas se aproximan a un límite de \$6 666.67

www.FreeLibros.com

47. *a*) $P'(5) = \dfrac{1\,900}{441} \approx 4.3$ por ciento de aumento por semana.

b) $P(t)$ se aproxima al 100% a la larga; la frecuencia de cambio se aproxima a 0.

49. *a*) $P'(16) \approx -0.631$; decreciente

b) Creciente para $0 < x < 10$; decreciente para $x > 10$

51. *a*) $R(t) = -3t^2 + 16t + 15$

b) 10 unidades por hora por hora

53. *a*) $v(t) = 15t^4 - 15t^2$; $a(t) = 60t^3 - 30t$

b) $a(t) = 0$ cuando $t = 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

55. *a*) $v(t) = -3t^2 + 14t + 1$
$a(t) = -6t + 14$

b) $a(t) = 0$ cuando $t = \dfrac{7}{3}$

57. *a*) 9.8 metros por minuto

b) 9.83 metros

59. *a*) $S = \dfrac{2}{3}KM - M^2$

b) $\dfrac{dS}{dM} = \dfrac{2}{3}K - 2M$ y representa la frecuencia de cambio de sensibilidad con respecto a la cantidad de medicina absorbida.

61. *a*) $a(t) = -32$

b) $a(t)$ es constante.

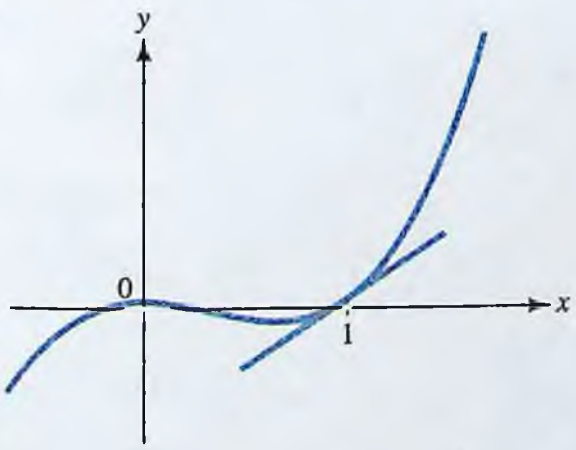
c) El cuerpo está acelerando hacia abajo.

63. $\dfrac{3}{8x^{5/2}} + \dfrac{3}{x^4}$

65. *a*) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{fg}{h}\right) = \dfrac{hfg' + hf'g - fgh'}{h^2}$

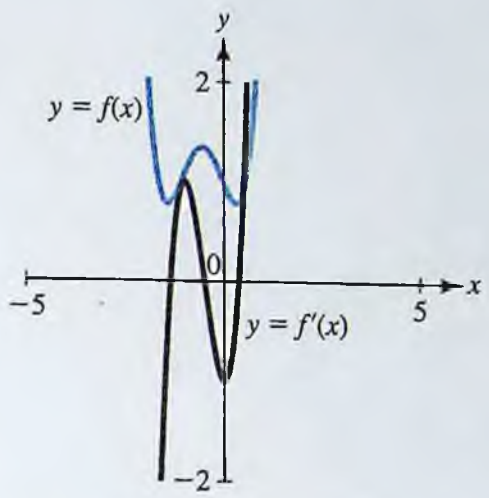
b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{12x^3 + 51x^2 + 70x - 33}{(3x + 5)^2}$

69.



$f'(x) = 0$ cuando $x = 0$ y $x = \dfrac{2}{3}$.

71.



Las intersecciones del eje x de $f'(x)$ ocurren en $x = -0.5, x = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.366$ y $x = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx -1.366$. Las intersecciones del eje x son los puntos donde $f'(x) = 0$, que son los puntos donde la tangente a la gráfica de $f(x)$ es horizontal, es decir, los máximos y mínimos de $f(x)$.

CAPÍTULO 2 | Sección 4

1. $\dfrac{dy}{dx} = 6(3x - 2)$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-4x}{(x^2 + 1)^3}$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{(x^2 - 9)^{3/2}}$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$

11. -160

13. $\dfrac{2}{3}$

15. -16

17. $f'(x) = 8(2x + 1)^3$

19. $f'(x) = 8x^2(x^5 - 4x^3 - 7)^7(5x^2 - 12)$

21. $f'(t) = \dfrac{-2(5t - 3)}{(5t^2 - 6t + 2)^2}$

23. $g'(x) = \dfrac{-4x}{(4x^2 + 1)^{3/2}}$

25. $f'(x) = \dfrac{24x}{(1 - x^2)^5}$

www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

27. $h'(s) = \dfrac{15(1 + \sqrt{3s})^4}{2\sqrt{3s}}$

29. $f'(x) = (x + 2)^2(2x - 1)^4(16x + 17)$

31. $G'(x) = -\dfrac{5}{2}(3x + 1)^{-1/2}(2x - 1)^{-3/2}$

33. $f'(x) = \dfrac{(x + 1)^4(9 - x)}{(1 - x)^5}$

35. $f'(y) = \dfrac{5 - 6y}{(1 - 4y)^{3/2}}$

37. $y = -48x - 32$

39. $y = -12x + 13$

41. $x = 0; x = -1; x = -\dfrac{1}{2}$

43. $x = -\dfrac{2}{3}$

45. $x = 2$

47. $f'(x) = 6(3x + 5)$

49. $f''(x) = 180(3x + 1)^3$

51. $\dfrac{d^2h}{dt^2} = 80(t^2 + 5)^6(3t^2 + 1)$

53. $f''(x) = (1 + x^2)^{-3/2}$

55. *a*) \$2 279 por año

b) 10.3% por año

57. *a*) -12 libras por dólar

b) $(-12)(0.5) = -6$ libras por semana; decreciente

59. La demanda será decreciente en 12%.

61. *a*) $L'(w) = 0.65w^{1.6}$; $L'(60) \approx 455$ mm/kg

b) Un tigre de 100 días de edad pesa $w(100) = 24$ kg y mide $L(24) \approx 969$ mm de largo. Por la regla de la cadena,

$$L'(A) = L'(w)w'(A) = (0.65w^{1.6})(0.21)$$

de modo que cuando $A = 100$, $w = 24$, tenemos

$$L'(100) = (0.65)(0.21)(24)^{1.6} \approx 22.1$$

Esto es, la longitud del tigre es creciente a un ritmo de alrededor de 22.1 mm por día.

63. *a*) $V'(T) = 0.41(-0.02T + 0.4)$

b) $m'(V) = \dfrac{0.39}{(1 + 0.09V)^2}$

c) $V(10) = 2.6732$ cm^3; 0.02078 gm/°C

65. *a*) $\dfrac{dT}{dL} = \dfrac{a(3L - 2b)}{2\sqrt{L - b}}$

67. *a*) $v(t) = \dfrac{3}{2}(1 - 2t)(3 + t - t^2)^{1/2}$

$$a(t) = \frac{24t^2 - 24t - 33}{4(3 + t - t^2)^{1/2}}$$

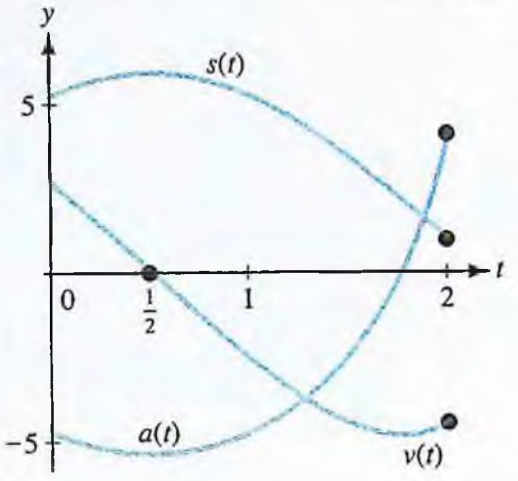
b) $t = \dfrac{1}{2}, 2; s\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{13\sqrt{13}}{8} \approx 5.86$

$$a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-3\sqrt{13}}{2} \approx -5.41$$

c) $a(t) = 0$ cuando $t = \dfrac{2 + \sqrt{26}}{4} \approx 1.775$

$s(1.775) \approx 2.07$; $v(1.775) \approx -4.875$

b)



e) El cuerpo reduce su velocidad durante $0 \le t < 0.5$ y $1.775 < t \le 2$.

69. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}[h(x)h(x)] = h(x)\dfrac{dh(x)}{dx} + \dfrac{dh(x)}{dx}h(x)$

$$= 2h(x)\frac{dh(x)}{dx}$$

71. $f'(1) \simeq 0.2593, f'(-3) \simeq -0.4740$; una tangente horizontal, $y = 2.687$, donde $x = 0$.

CAPÍTULO 2 | Sección 5

1. *a*) $C'(x) = \dfrac{2}{5}x + 4; R'(x) = 9 - \dfrac{x}{2}$

b) $C'(3) = \$5.20$

c) $C(4) - C(3) = \$5.40$

d) $R'(3) = \$7.50$

e) $R(4) - R(3) = \$7.25$

3. *a*) $C'(x) = \dfrac{2}{3}x + 2; R'(x) = -3x^2 - 8x + 80$

b) $C'(3) = 4$

c) $C(4) - C(3) \approx 4.33$

d) $R'(3) = 29$

e) $R(4) - R(3) = 15$

www.FreeLibros.com

5. *a*) $C'(x) = \frac{x}{2}$; $R'(x) = \frac{2x^2 + 4x + 3}{(1 + x)^2}$

b) $C'(3) = \$1.50$

c) $C(4) - C(3) = \$1.75$

d) $R'(3) = \frac{33}{16} \approx \$2.06$

e) $R(4) - R(3) = \$2.05$

7. 2.1

9. $\frac{100f'(4)}{f(4)}(0.3) \approx 0.20$; 20%

11. *a*) $C'(3) = \$499.70$

b) $C(4) - C(3) = \$500.20$

13. *a*) \$241

b) \$244

15. 200

17. El ingreso disminuirá en aproximadamente \$150.80.

19. La producción diaria aumentará en aproximadamente 8 unidades.

21. 5.12%

23. La producción diaria aumentará en aproximadamente 825 unidades.

25. 0.2 unidades

27. $\frac{3c}{|c - b|}$

29. 46.67%

31. 0.0385 ft

33. La recta tangente en $x = x_0$ es $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Al hacer $y = 0$ y despejar $x = x_1$ da

$0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) \Rightarrow x_1 - x_0 = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. La repetición del proceso

muestra que $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$.

35. 3.82070437, 1.61179338

37. *a*) $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{1/3}}{\frac{1}{3}x_n^{-2/3}} =$

$x_n - 3x_n = -2x_n$

b) Para cualquier $x_0 \neq 0$ la secuencia x_0, $-2x_0$, $4x_0$, . . . crece más en magnitud y alterna signo, de modo que no puede aproximarse a un límite.

CAPÍTULO 2 | Sección 6

1. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}$

3. *a*) $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x + 2}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{(x + 2)^2}$

5. *a*) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x + 2} = \frac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2}$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x(x + 4)}{(x + 2)^2}$

7. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

9. $\frac{dy}{dx} = \frac{y - 3x^2}{3y^2 - x}$

11. $\frac{dy}{dx} = \frac{3 - 2y^2}{2y(1 + 2x)}$

13. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

15. $\frac{dy}{dx} = \frac{y - 1}{1 - x}$

17. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3(2x + y)^2} - 2$

19. $\frac{dy}{dx} = \frac{y - 5x(x^2 + 3y^2)^4}{15y(x^2 + 3y^2)^4 - x}$

21. $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$

23. $y = -\frac{1}{2}x + 2$

25. $y = \frac{13}{12}x + \frac{11}{12}$

27. *a*) Ninguno

b) (9, 0)

29. *a*) Ninguno

b) Ninguno

31. *a*) (1, −2), (−1, 2)

b) (−2, 1), (2, −1)

33. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-3y^2 - x^2}{9y^3} = \frac{-5}{9y^3}$

RESPUESTAS

www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

35. $\Delta y \approx -1.704$

37. $\dfrac{dx}{dt} = 1.74$ o sea 174 unidades por mes

39. 0.476 cm^3 por mes

41. $\dfrac{dr}{dt} = 20$ mm/min

43. $\dfrac{dx}{xt} = 0.15419$ o 15.419 unidades por mes

45. *a*) 14.04
b) −9.87

47. $\dfrac{dK}{dt} = \dfrac{-2}{5}(\$1\,000) = -\$400$ por semana

49. 4 pies por segundo

51. $\Delta y \approx 0.566$ unidades

53. Como $v = \dfrac{KR^2}{L}$ = constante en el centro del recipiente ($r = 0$), tenemos

$$0 = v'(t) = K\left[\frac{2R}{L}R' - \frac{R^2}{L^2}L'\right]$$

Por lo tanto,

$$\frac{2R}{L}R' = \frac{R^2}{L^2}L'$$

$$\frac{L'}{L} = 2\frac{R'}{R}$$

de modo que la frecuencia relativa de cambio de L es el doble de la de R.

55. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \dfrac{2x}{a^2} + \dfrac{2yy'}{b^2} = 0; 2b^2x + 2a^2yy' = 0,$

$y' = -\dfrac{2b^2x}{2a^2y} = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$. A $P(x_0, y_0), m = -\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$

por lo que la ecuación de la recta tangente es

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$$

$$a^2yy_0 - a^2y_0^2 = -b^2xx_0 + b^2x_0^2$$

$$b^2xx_0 + a^2yy_0 = b^2x_0^2 + a^2y_0^2$$

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$$

$$= 1$$

ya que $P(x_0, y_0)$ está sobre la curva y por lo tanto satisface la ecuación de la curva.

57. Sea $y = x^{r/s}$, entonces $y^s = x^r$ y $sy^{s-1}\dfrac{dy}{dx} = rx^{r-1}$,

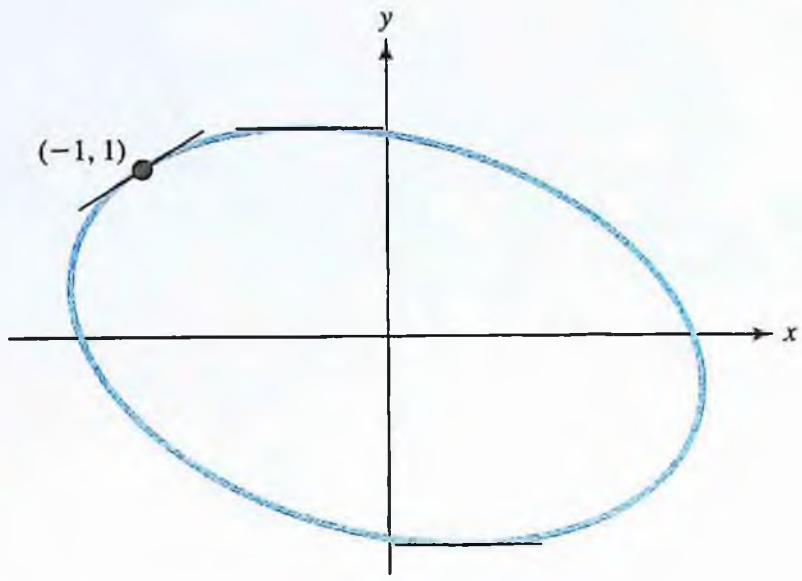
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{rx^{r-1}}{sy^{s-1}}$. Pero $y^{s-1} = \dfrac{y^s}{x^{r/s}} = \dfrac{x^r}{x^{r/s}}$ de modo que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r}{s} \cdot x^{r-1} \cdot \frac{x^{r/s}}{x^r}$$

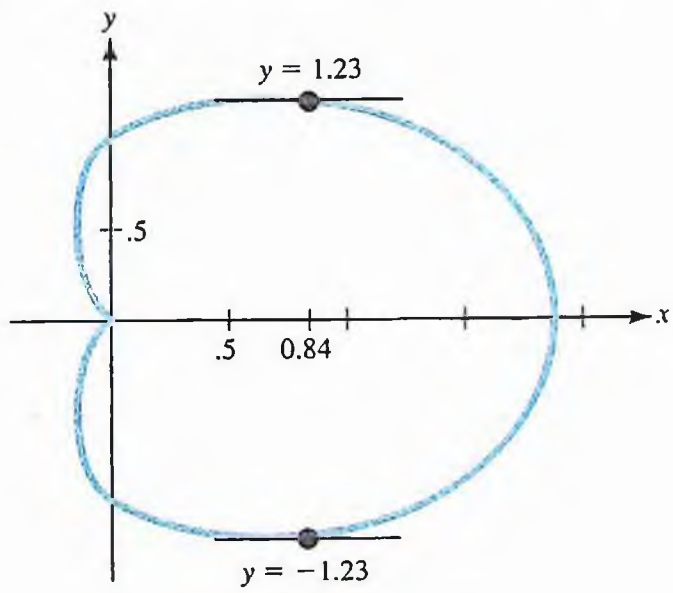
$$= \frac{r}{s} \cdot x^{r-1+r/s-r}$$

$$= \frac{r}{s} \cdot x^{r/s-1}$$

59. Las tangentes horizontales son $y = 1.24$ y $y = -1.24$.



61. Las tangentes horizontales son $y = 1.23$ y $y = -1.23$.



www.FreeLibros.com

CAPÍTULO 2 | Revisión

1. *a)* $\dfrac{dy}{dx} = 12x^3 - \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{10}{x^3}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = -15x^4 + 39x^2 - 2x - 4$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-10x^2 + 10x + 1}{(1 - 2x)^2}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = (9x - 6)(3 - 4x + 3x^2)^{1/2}$

2. $f''(t) = 24t + 8$

3. $y = -4x$

4. $\dfrac{3}{8}$

5. *a)* 58 dólares por año

b) 2.98%

6. *a)* $v(t) = 6t^2 - 6t$; $a(t) = 12t - 6$

b) $t = 0, 1$; se retira $0 < t < 1$; avanza $1 < t < 2$.

c) 6

7. *a)* $C'(5) = 5.4(\$100) = \$540$

b) $C(6) - C(5) = 5.44(\$100) = \$544$

8. La producción aumenta en aproximadamente $\dfrac{75\,000}{7}$ unidades

9. 0.001586 m^2 por semana

10. $\dfrac{8}{3}\%$

CAPÍTULO 2 | Problemas de repaso

1. $f'(x) = 2x - 3$

3. $f'(x) = 24x^3 - 21x^2 + 2$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-14x}{(3x^2 + 1)^2}$

7. $f'(x) = 10(20x^3 - 6x + 2)(5x^4 - 3x^2 + 2x + 1)^9$

9. $\dfrac{dy}{dx} = 2\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{5}{2\sqrt{3x^3}}$

11. $f'(x) = 3\sqrt{6x + 5} + \dfrac{9x + 3}{\sqrt{6x + 5}}$

13. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-7}{2(3x + 2)^2}\sqrt{\dfrac{3x + 2}{1 - 2x}}$

15. $y = -x - 1$

17. $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$

19. *a)* 87.5%

b) −400%

c) −100%

21. *a)* 2

b) $\dfrac{3}{2}$

23. *a)* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{5}{3}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2y}{x}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - 10(2x + 3y)^4}{15(2x + 3y)^4}$

d) $\dfrac{dy}{dx} = -\left[\dfrac{1 + 10y^3(1 - 2xy^3)^4}{4 + 30xy^2(1 - 2xy^3)^4}\right]$

25. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{6y^2 - 9x^2}{4y^3} = \dfrac{-9}{2y^3}$

27. *a)* 75 000 por año

b) 0 por año

29. *a)* $v(t) = \dfrac{-2(t + 4)(t - 3)}{(t^2 + 12)^2}$, $a(t) = \dfrac{2(2t^3 + 3t^2 - 72t - 12)}{(t^2 + 12)^3}$. El cuerpo está avanzando durante $0 < t < 3$, se retira durante $3 < t < 4$. Siempre está desacelerando durante $0 < t < 4$.

b) $\dfrac{11}{42}$

31. *a)* La producción aumentará en aproximadamente 12 000 unidades.

b) La producción aumentará en 12 050 unidades.

33. La producción disminuirá en aproximadamente 5 000 unidades por día.

35. La contaminación aumentará en aproximadamente 10%.

37. *a)* 0.2837 individuos por kilómetro cuadrado

b) 2.61 millones

c) 55 años; 60.67 animales por año

39. 1.5%

41. *a)* $\dfrac{dF}{dC} = \dfrac{-kD^2}{2\sqrt{A - C}}$; F disminuye cuando C aumenta

b) $\dfrac{50}{A - C}\%$

43. $425.25 \le A \le 479.53$; preciso hasta 6%

www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

45. $100\dfrac{\Delta Q}{Q} \approx 0.67\%$

47. $6.59 \leq V \leq 7.89$; preciso hasta 9%

49. 2 tostadoras por mes

51. 10.7%

53. 5.5 segundos; 242 pies

55. *a*) \$195 por unidad por mes
b) −\$16 por unidad por mes por mes
c) −\$8 por unidad por mes
d) −\$8.75 por unidad por mes

57. −\$99 por mes

59. 28.37 pulgadas cúbicas

61. 3 ft/sec

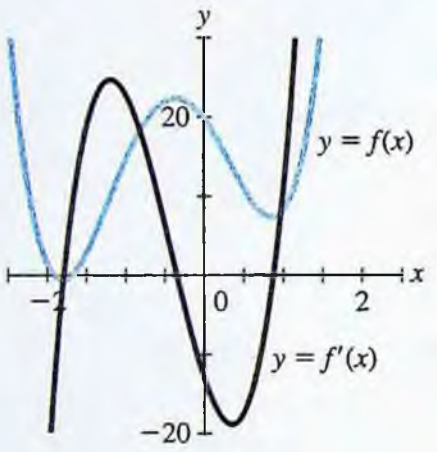
63. 2.25 ft/sec

65. −3.29 ft/sec

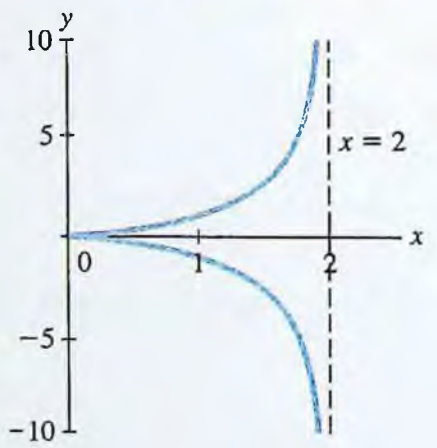
67. $\dfrac{8}{5}$ ft/sec

69. El porcentaje de cambio se aproxima a 0 porque, si $y = mx + b$, $\dfrac{100y'}{y} = \dfrac{100m}{mx + b}$, que se aproxima a 0 cuando x se aproxima al ∞.

71.



73.



CAPÍTULO 3 | Sección 1

1. $f'(x) > 0$ para $-2 < x < -2$; $f'(x) < 0$ para $x < -2$ y $x > 2$

3. $f'(x) > 0$ para $x < -4$ y $0 < x < 2$; $f'(x) < 0$ para $-4 < x < -2$, $-2 < x < 0$ y $x > 2$

5. B

7. D

9. $f(x)$ es creciente para $x > 2$; $f(x)$ es decreciente para $x < 2$.

11. $f(x)$ es creciente para $x < -1$ y $x > 1$; $f(x)$ es decreciente para $-1 < x < 1$.

13. $g(t)$ es creciente para $t < 0$ y $t > 4$; $g(t)$ es decreciente para $0 < t < 4$.

15. $f(t)$ es creciente para $0 < t < 2$ y $t > 2$; $f(x)$ es decreciente para $t < -2$ y $-2 < t < 0$.

17. $h(u)$ es creciente para $-3 < u < 0$; $h(u)$ es decreciente para $0 < u < 3$.

19. $F(x)$ es creciente para $x < -3$ y $x > 3$; $F(x)$ es decreciente para $-3 < x < 0$ y $0 < x < 3$.

21. $f(x)$ es creciente para $x > 1$; $f(x)$ es decreciente para $0 < x < 1$.

23. $x = 0, 1$; (0, 2) mínimo relativo; (1, 3) ninguno

25. $x = -1$; (−1, 3) ninguno

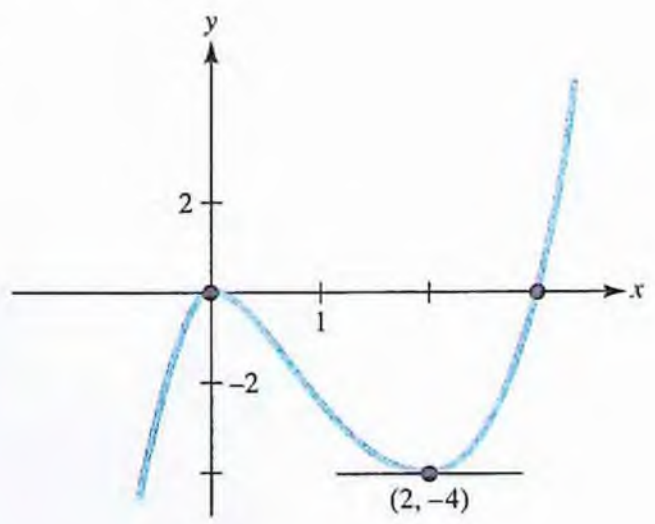
27. $x = 1$; (1, 0) ninguno

29. $t = -\sqrt{3}, \sqrt{3}$; $\left(\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$ máximo relativo; $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$ mínimo relativo

31. $t = -2, 0, 1, 4$; (0, 0) máximo relativo; $\left(4, \dfrac{8}{9}\right)$ mínimo relativo

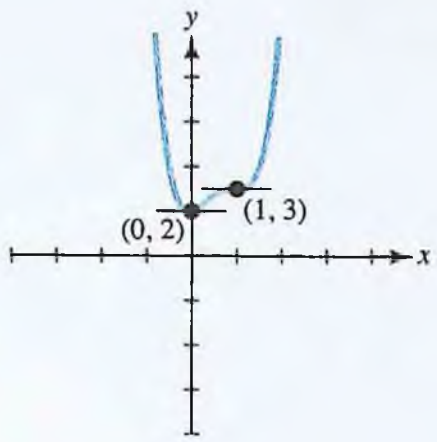
33. $t = 0, -1, 1$; (0, 1) máximo relativo; (−1, 0) y (1, 0) mínimos relativos

35.

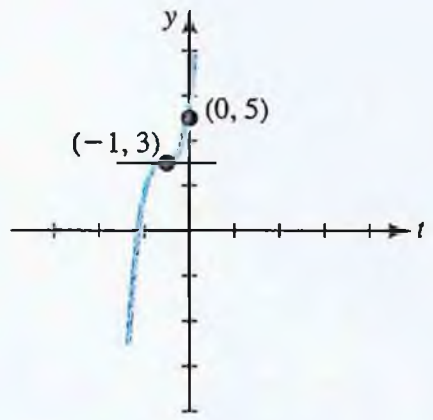


www.FreeLibros.com

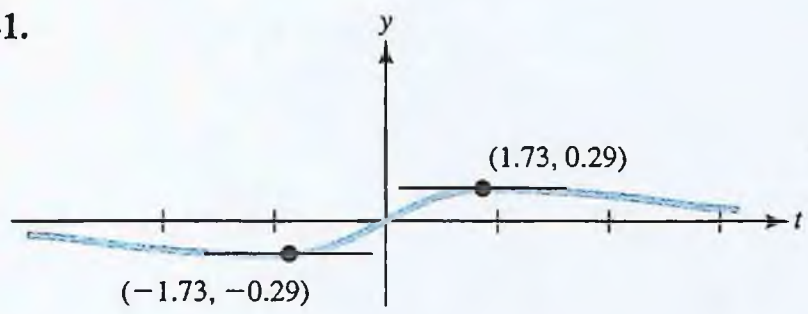
37.



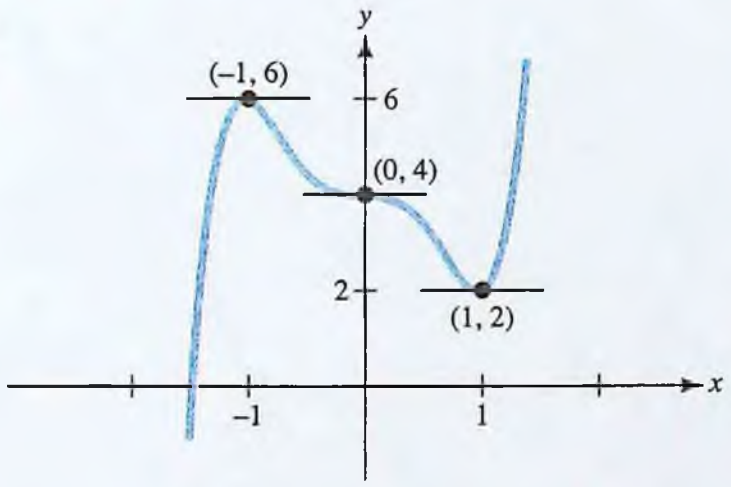
39.



41.



43.



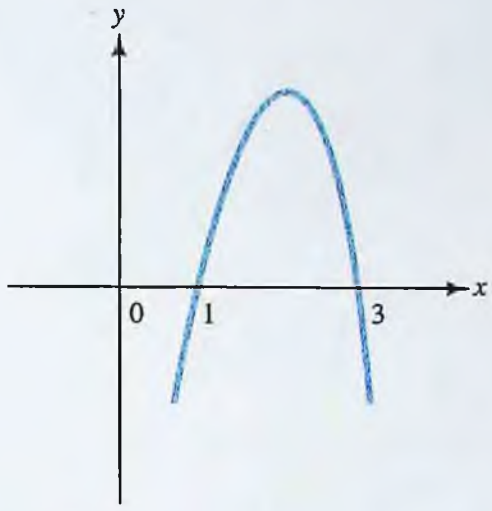
45.

Números críticos	Clasificación
−2	Mínimo relativo
0	Ninguno
2	Máximo relativo

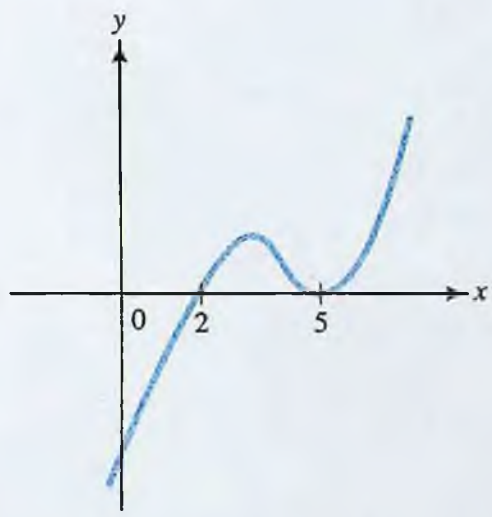
47.

Números críticos	Clasificación
−1	Ninguno
$\frac{4}{3}$	Máximo relativo

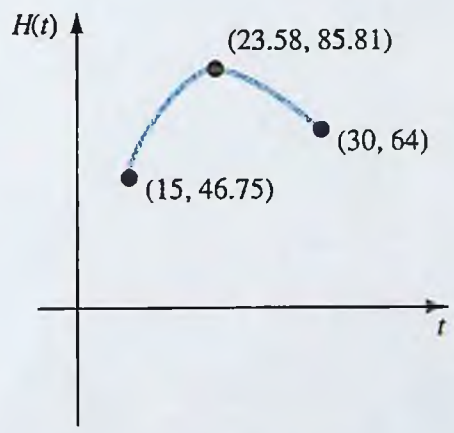
49. Una posibilidad:



51. Una posibilidad:



53.

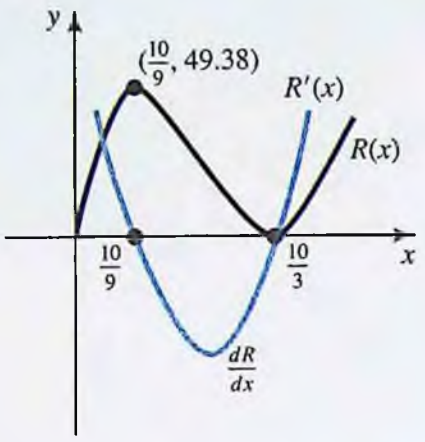


Máximo de 85.81% a 23.58°C.

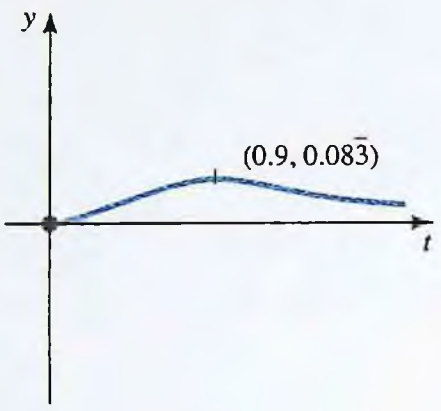
www.FreeLibros.com

55. $R(x) = x(10 - 3x)^2$; $\dfrac{dR}{dx} = (10 - 3x)(10 - 9x)$;

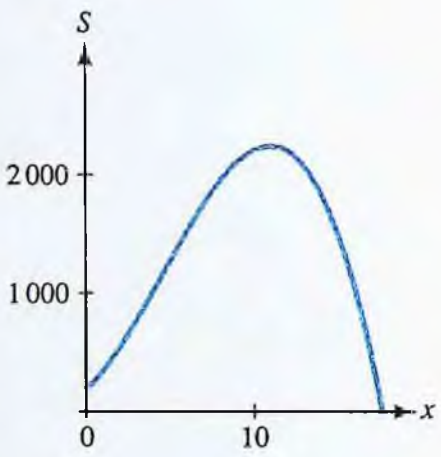
el ingreso se maximiza cuando $x = \dfrac{10}{9}$.



57. La concentración máxima ocurre cuando $t = 0.9$ horas.



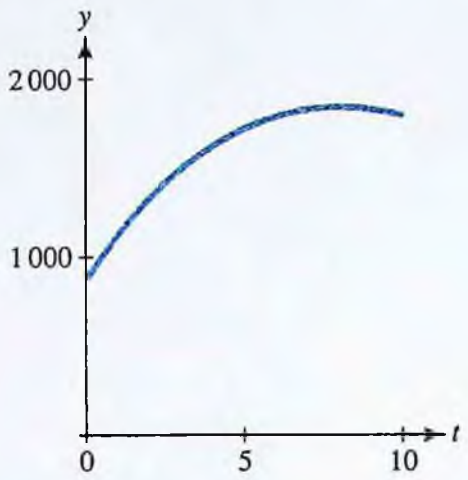
59. *a*)



b) 207

c) \$11 000; 2 264 unidades

61. *a*) $Y(t) = \dfrac{9\,300}{31 + t}(3 + t - 0.05t^2)$



b) 8 semanas; 1 860 libras

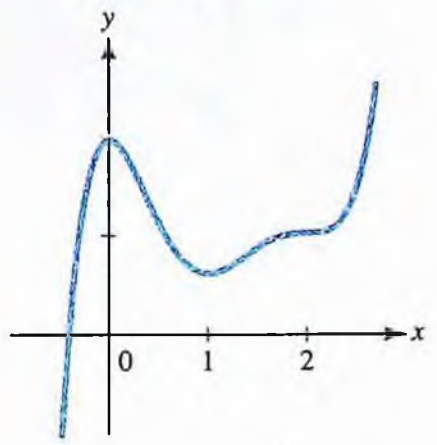
63. *a*) 1971, 1976, 1980, 1983, 1988, 1994

b) 1973, 1979, 1981, 1985, 1989

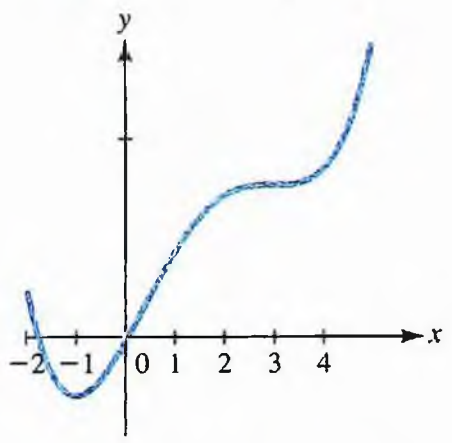
c) Aproximadamente $\frac{1}{2}$% por año

d) Aproximadamente $\frac{1}{2}$% por año

65.



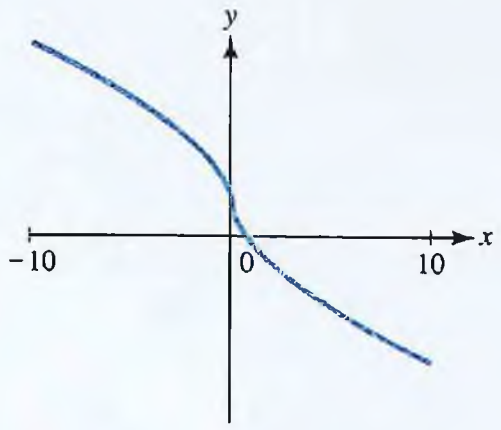
67.



69. $a = 2$; $b = 3$; $c = -12$; $d = -12$

www.FreeLibros.com

71.

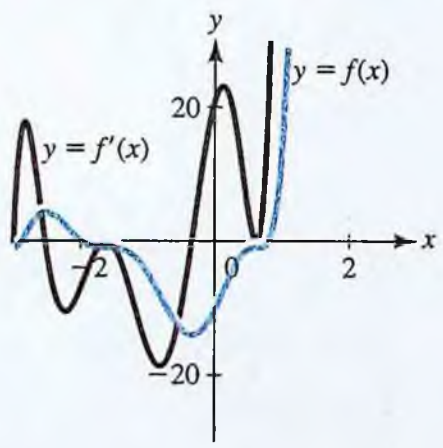


73. Por la regla del producto,

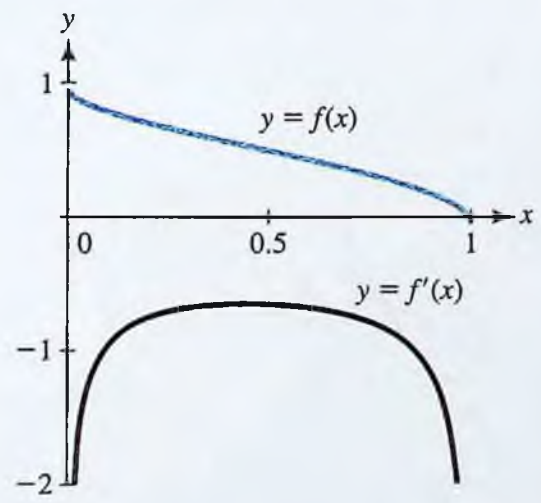
$\frac{dy}{dx} = (x - p)(1) + (1)(x - q)$

$= 2x - p - q$. Al resolver $\frac{dy}{dx} = 0$ resulta $x = \frac{p + q}{2}$, el punto a la mitad entre las intersecciones p y q del eje x.

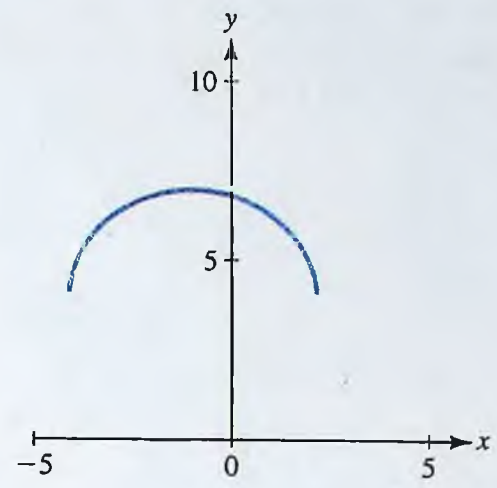
75. $f'(x) = 0$ en $x = -3; -2.529, -1.618, -0.346, 0.618$



77. $f'(x)$ nunca es 0.



79. La mitad superior de un círculo.



CAPÍTULO 3 | Sección 2

1. $f''(x) > 0$ para $x > 2$; $f''(x) < 0$ para $x < 2$

3. $f''(x) > 0$ para $x < -1$ y $x > 1$; $f''(x) < 0$ para $-1 < x < 1$

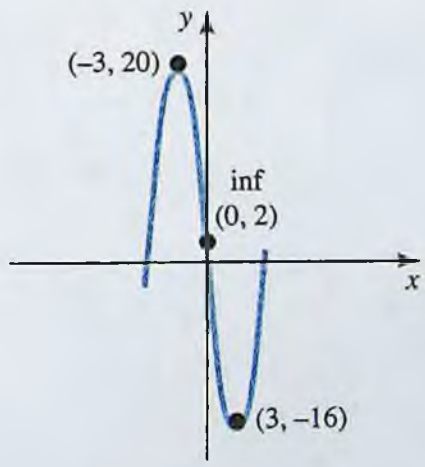
5. Cóncava hacia arriba para $x > -1$; cóncava hacia abajo para $x < -1$; inflexión en $(-1, 2)$

7. Cóncava hacia arriba para $x > -\frac{1}{3}$; cóncava hacia abajo para $x < -\frac{1}{3}$; inflexión en $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{27}\right)$

9. Cóncava hacia arriba para $t < 0$ y $t > 1$; cóncava hacia abajo para $0 < t < 1$; inflexión en $(1, 0)$

11. Cóncava hacia arriba para $x < 0$ y $x > 3$; cóncava hacia abajo para $0 < x < 3$; inflexión en $(0, -5)$ y $(3, -65)$

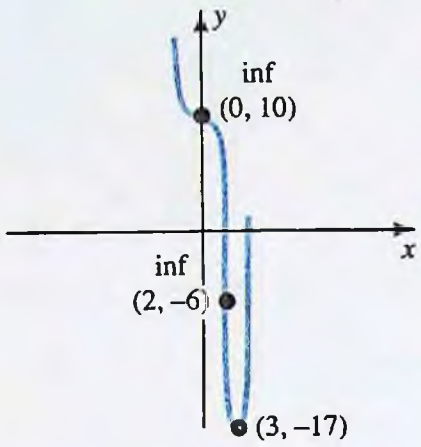
13. Creciente para $x < -3$ y $x > 3$; decreciente para $-3 < x < 3$; cóncava hacia arriba para $x > 0$; cóncava hacia abajo para $x < 0$; máximo en $(-3, 20)$; mínimo en $(3, -16)$; inflexión en $(0, 2)$



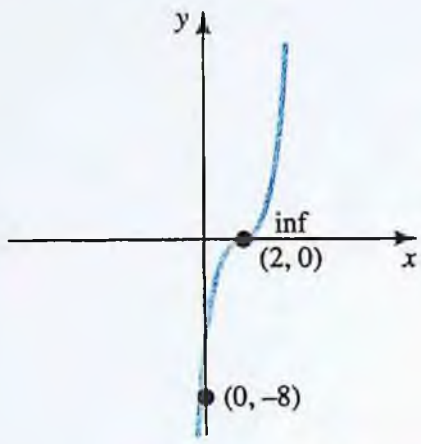
RESPUESTAS

www.FreeLibros.com

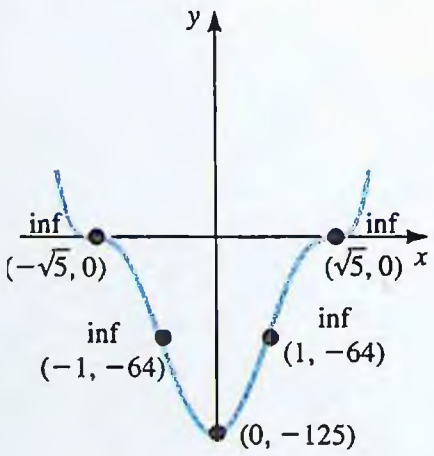
15. Creciente para $x > 3$; decreciente para $x < 3$; cóncava hacia arriba para $x < 0$ y $x > 2$; cóncava hacia abajo para $0 < x < 2$; mínimo en $(3, -17)$; inflexión en $(0, 10)$ y $(2, -6)$



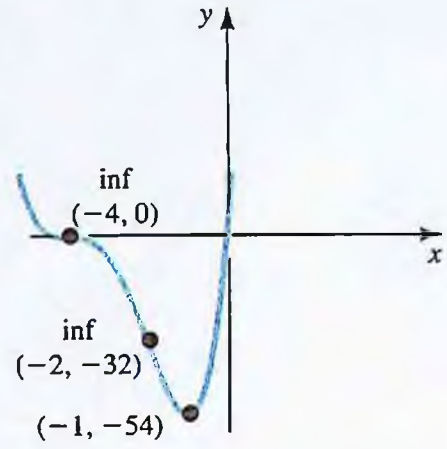
17. Creciente para toda x; cóncava hacia arriba para $x > 2$; cóncava hacia abajo para $x < 2$; inflexión en $(2, 0)$



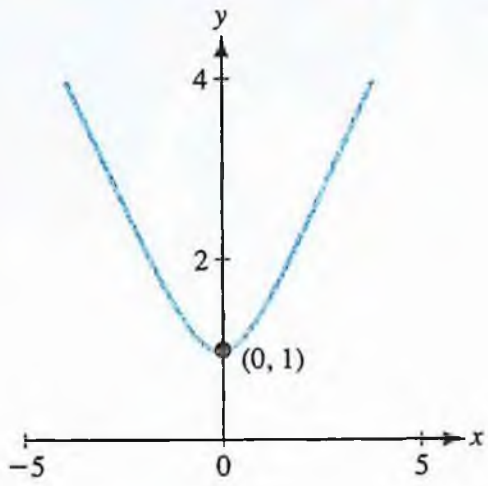
19. Creciente para toda x; decreciente para $x < 0$; cóncava hacia arriba para $x < -\sqrt{5}$, $-1 < x < 1$, $x > \sqrt{5}$; cóncava hacia abajo para $-\sqrt{5} < x < -1$ y $1 < x < \sqrt{5}$; mínimo en $(0, -125)$; puntos de inflexión en $(-\sqrt{5}, 0)$, $(\sqrt{5}, 0)$, $(-1, -64)$ y $(1, -64)$



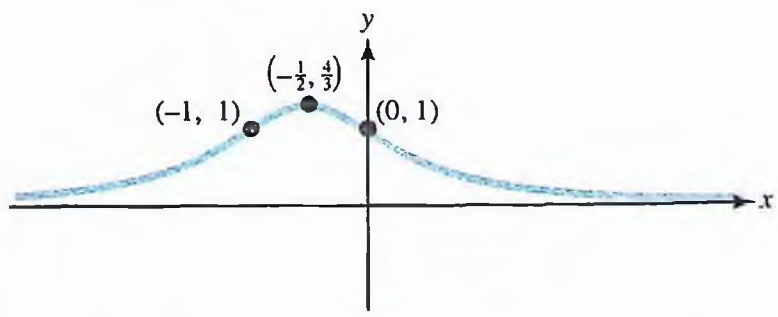
21. Creciente para $s > -1$; decreciente para $s < -1$; cóncava hacia arriba para $s < -4$ y $s > -2$; cóncava hacia abajo para $-4 < s < -2$; mínimo en $(-1, -54)$; inflexión en $(-4, 0)$ y $(-2, -32)$



23. Creciente para $x > 0$; decreciente para $x < 0$; cóncava hacia arriba para toda x real; mínimo en $(0, 1)$



25. Creciente para $x < -\frac{1}{2}$; decreciente para $x > -\frac{1}{2}$; cóncava hacia arriba para $x < -1$ y $x > 0$; cóncava hacia abajo para $-1 < x < 0$; máximo en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right)$; inflexión en $(-1, 1)$ y $(0, 1)$.



27. $f''(x) = 6(x + 1)$; máximo en $(-2, 5)$; mínimo en $(0, 1)$

www.FreeLibros.com

29. $f''(x) = 12(x^2 - 3)$; máximo en $(0, 81)$; mínimo en $(3, 0)$ y $(-3, 0)$

31. $f''(x) = \dfrac{36}{x^3}$; máximo en $(-3, -11)$; mínimo en $(3, 13)$

33. $f''(x) = 12x^2 - 60x + 50$; máximo en $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{625}{16}\right)$; mínimo en $(0, 0)$ y $(5, 0)$

35. $f''(t) = \dfrac{4(3t^2 - 1)}{(1 + t^2)^3}$; máximo en $(0, 2)$

37. $f''(x) = \dfrac{24(x - 2)}{x^4}$; máximo en $(-4, -13.5)$. La prueba falla para $x = 2$ (hay un punto de inflexión en $(2, 0)$).

39. Cóncava hacia arriba para $x < 0$, para $0 < x < 1$ y para $x > 3$; cóncava hacia abajo para $1 < x < 3$; puntos de inflexión en $x = 1, 3$.

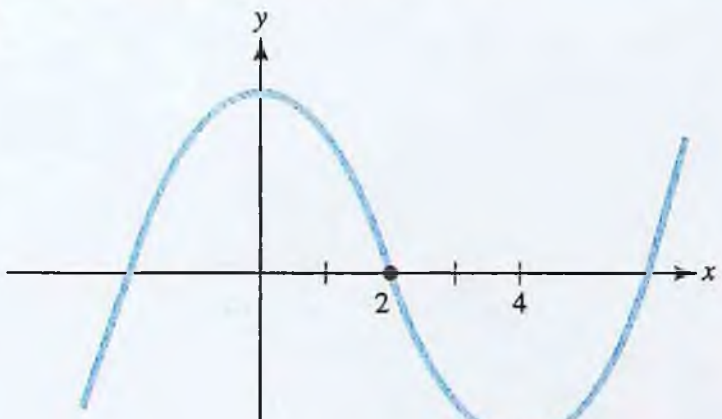
41. Cóncava hacia arriba para $x > 1$; cóncava hacia abajo para $x < 1$; punto de inflexión en $x = 1$

43. *a*) Creciente para $x < 0$ y $x > 4$; decreciente para $0 < x < 4$

b) cóncava hacia arriba para $x > 2$ y cóncava hacia abajo para $x < 2$

c) Mínimo relativo en $x = 4$, máximo relativo en $x = 0$; punto de inflexión en $x = 2$.

d)

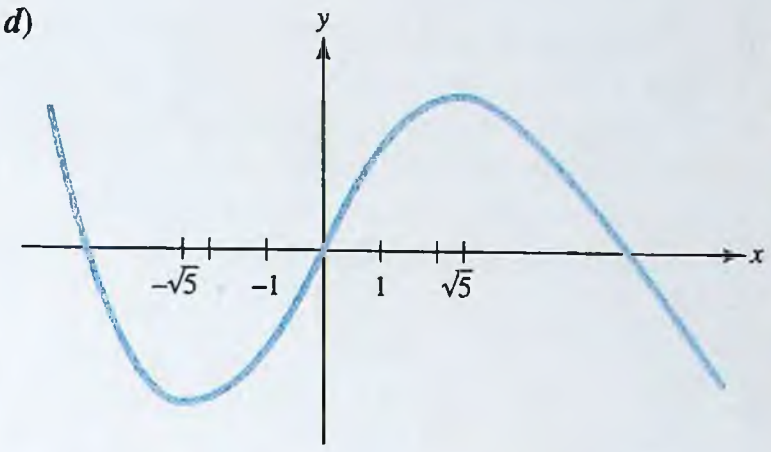


45. *a*) Creciente para $-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$, decreciente para $x > \sqrt{5}$ y $x < -\sqrt{5}$

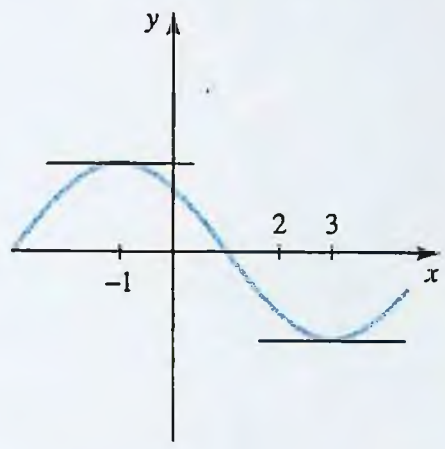
b) Cóncava hacia arriba para $x < 0$; cóncava hacia abajo para $x > 0$

c) Máximo relativo en $x = \sqrt{5}$ y mínimo relativo en $x = -\sqrt{5}$; punto de inflexión en $x = 0$

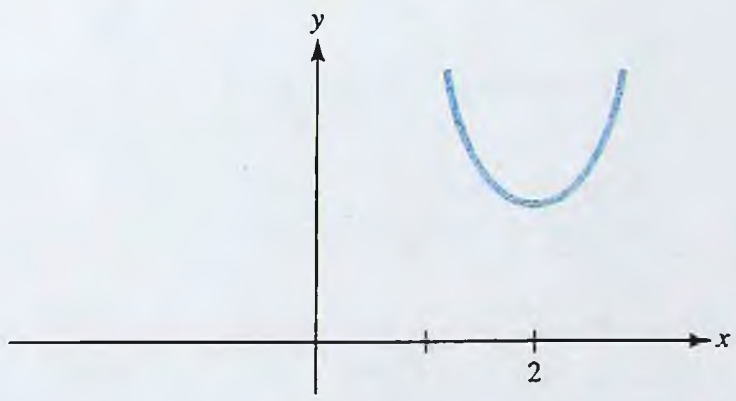
d)



47. Se muestra una gráfica característica.



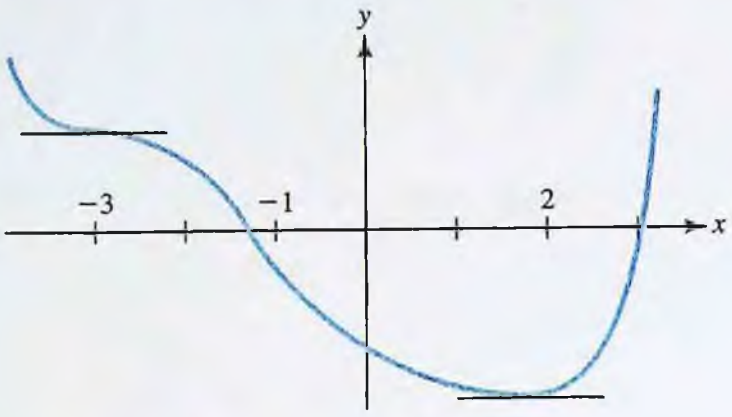
49. $f(x)$ es creciente para $x > 2$.
$f(x)$ es creciente para $x < 2$.
$f(x)$ es cóncava hacia arriba para toda x real.
$f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 2$.
$f(x)$ no tiene puntos de inflexión.



RESPUESTAS

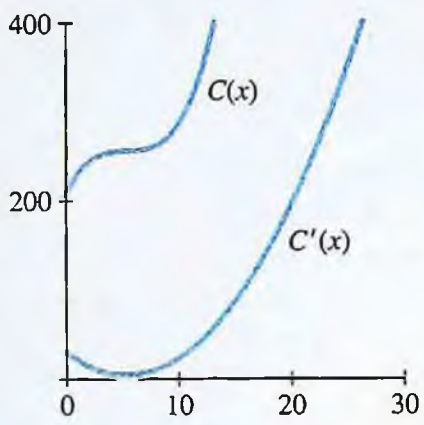
www.FreeLibros.com

51. $f(x)$ es creciente para $x > 2$.
$f(x)$ es creciente para $x < -3$ y $-3 < x < 2$.
$f(x)$ es cóncava hacia arriba para $x < -3$ y $x > -1$.
$f(x)$ es cóncava hacia abajo para $-3 < x < -1$.
$f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 2$.
$f(x)$ tiene puntos de inflexión en $x = -3$ y $x = -1$.



53. $C(x) = 0.3x^3 - 5x^2 + 28x + 200$

a) $C'(x) = 0.9x^2 - 10x + 28$



b) Sólo el número de inflexión de $C(x)$ es $x = 5.56$. Corresponde a un mínimo en la gráfica de $C'(x)$.

55. La producción es $Q'(t) = -3t^2 + 9t + 15$.

a) La producción se maximiza en $t = 1.5$ (9.30 a.m.)

b) La producción se minimiza en $t = 4$ (mediodía).

57. El crecimiento es $P'(t) = -3t^2 + 18t + 48$.

a) El crecimiento es máximo cuando $t = 3$ años.

b) El crecimiento es mínimo cuando $t = 0$ años.

c) El crecimiento de $P'(t)$ es $P''(t) = -6t + 18$, que es máximo cuando $t = 0$.

59. $\dfrac{100P'(t)}{P(t)} = A - BP(t)$; $P'(t) = \dfrac{P(t)(A - BP(t))}{100}$;

$P''(t) = \dfrac{1}{100^2}[P(t)(A - BP(t))(A - 2BP(t))]$;

$P''(t) = 0$ cuando $P(t) = \dfrac{A}{B}$ o $P(t) = \dfrac{A}{2B}$. Cuando, $P(t) = \dfrac{A}{B}$, la población está al máximo posible, y no hay cambio ($P'(t) = 0$). Cuando $P(t) = \dfrac{A}{2B}$, la población está cambiando más rápidamente.

61. *a*) $R'(t) = A''(t) = \dfrac{d}{dt}[(k\sqrt{A(t)}\,(M - A(t))]$

$= k\left(\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{A'(t)}{\sqrt{A(t)}}[M - A(t)] + k\sqrt{A(t)}(-A'(t))$

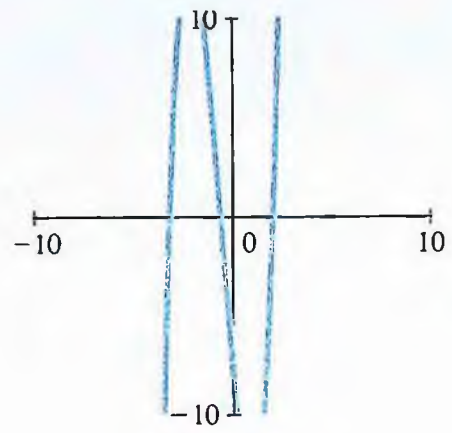
$= \dfrac{kA'(t)}{2\sqrt{A(t)}}[M - 3A(t)]$

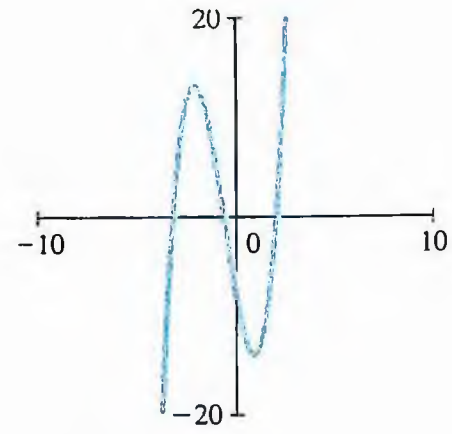
$= 0$ cuando $A = \dfrac{M}{3}$.

b) Máximo

c) La gráfica de $A(t)$ tiene un punto de inflexión donde $A(t) = \dfrac{M}{3}$.

63. *a*)





b)

x	−4	−2	−1	0	1	2
$f(x)$	−39	13	6	−7	−14	−3
$f'(x)$	60	0	−12	−12	0	24
$f''(x)$	−42	−18	−6	6	18	30

c) $(-3.08, 0)$, $(-0.54, 0)$, $(2.12, 0)$; $(0, -7)$

d) Máximo relativo en $(-2, 13)$; mínimo relativo en $(1, -14)$

www.FreeLibros.com

e) $x < -2$ y $x > 1$

f) $-2 < x < 1$

g) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

h) $x > -\frac{1}{2}$

i) $x < -\frac{1}{2}$

j) Las respuestas variarán.

k) 13; −39

CAPÍTULO 3 | Sección 3

1. Asíntota vertical, $x = 0$; asíntota horizontal, $y = 0$

3. No hay asíntotas verticales; asíntota horizontal en $y = 0$

5. Asíntotas verticales, $x = -2$, $x = 2$; asíntotas horizontales, $y = 2$ y $y = 0$ (eje x)

7. Asíntota vertical, $x = 2$; asíntota horizontal, $y = 3$

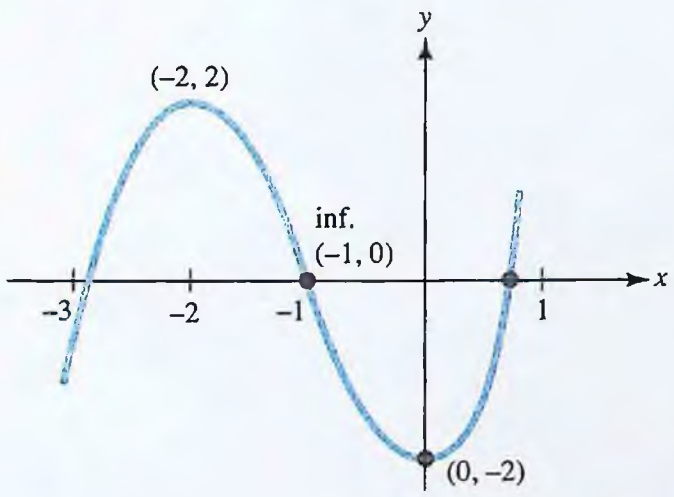
9. Asíntota vertical, $x = -2$; asíntota horizontal, $y = 3$

11. No hay asíntotas verticales; asíntota horizontal, $y = 1$

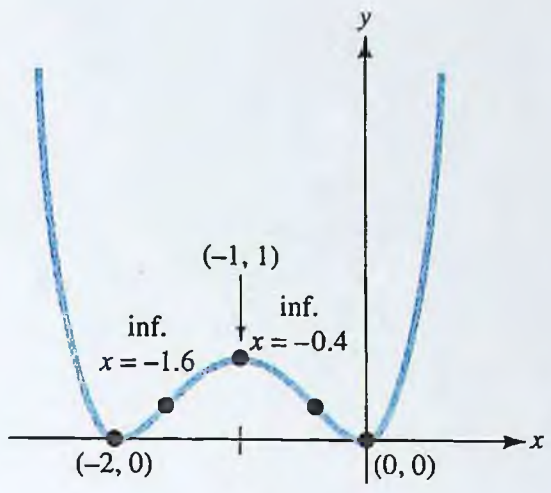
13. Asíntotas verticales, $t = 2$, $t = 3$; asíntota horizontal, $y = 1$

15. Asíntotas verticales, $x = 0$, $x = 1$; asíntota horizontal, $y = 0$

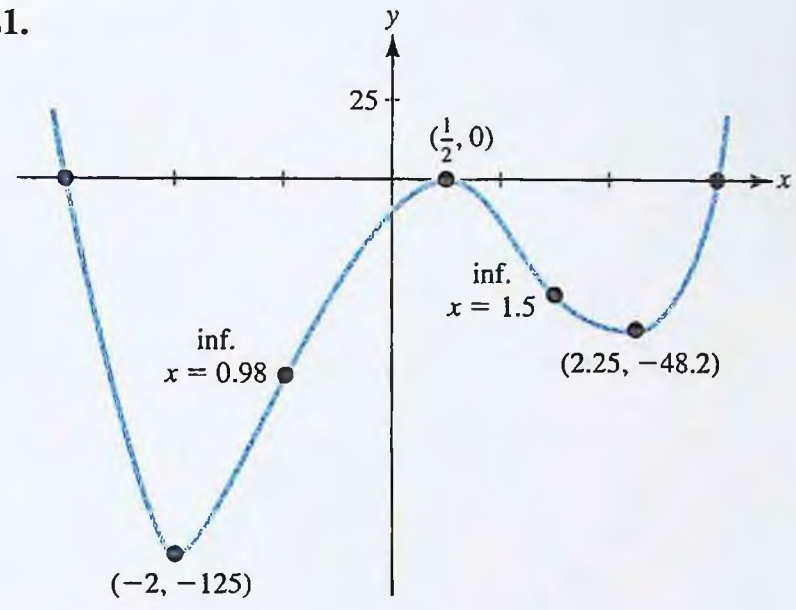
17.



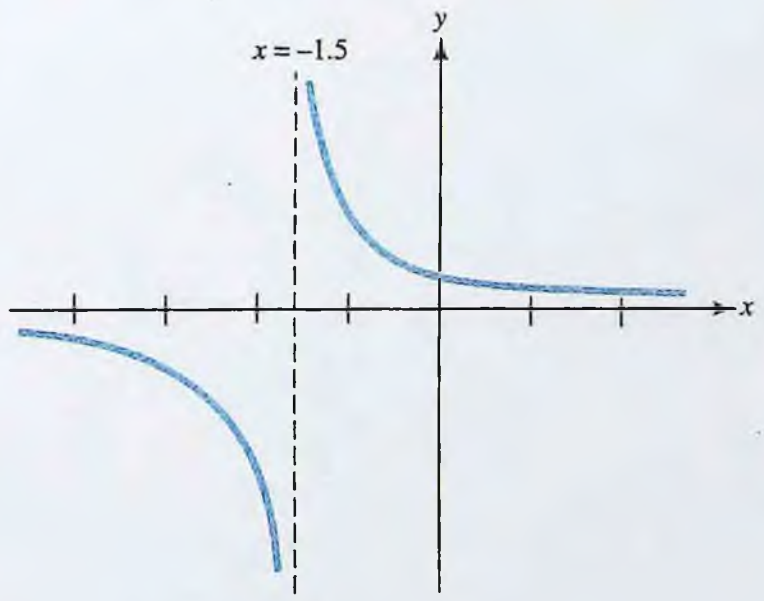
19.



21.

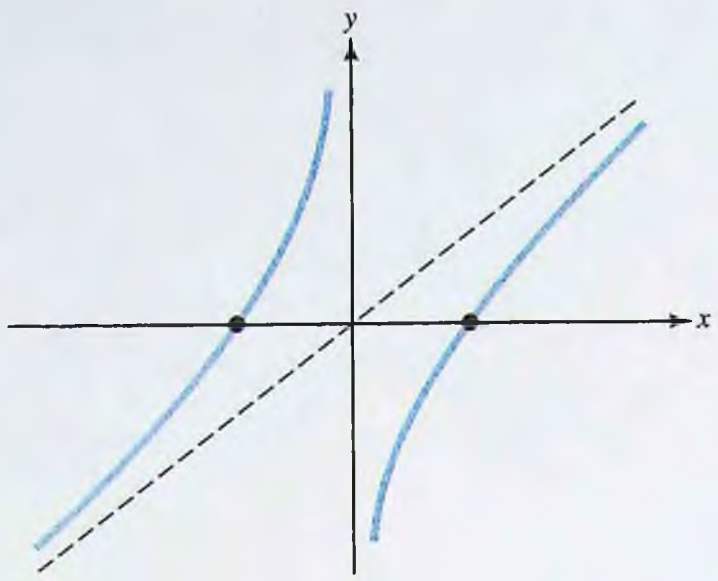


23.

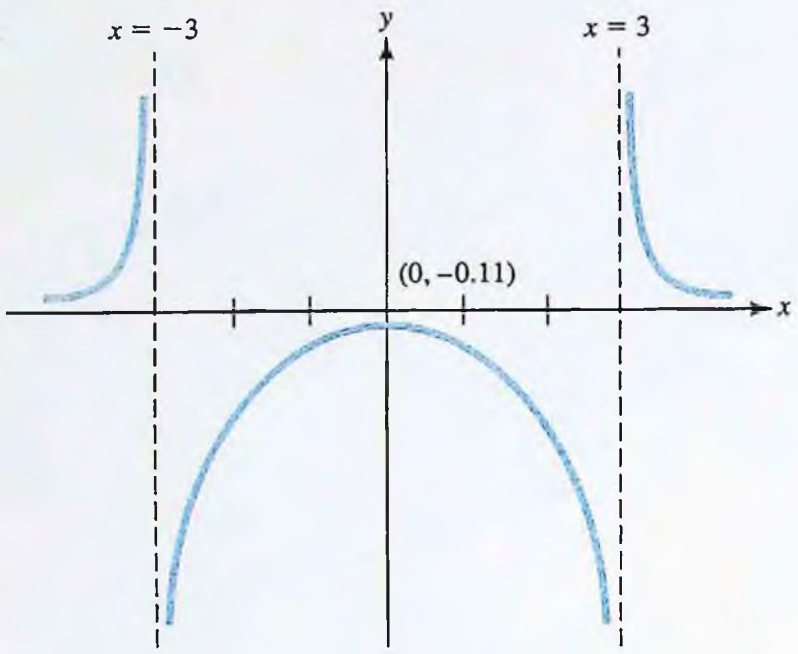


www.FreeLibros.com

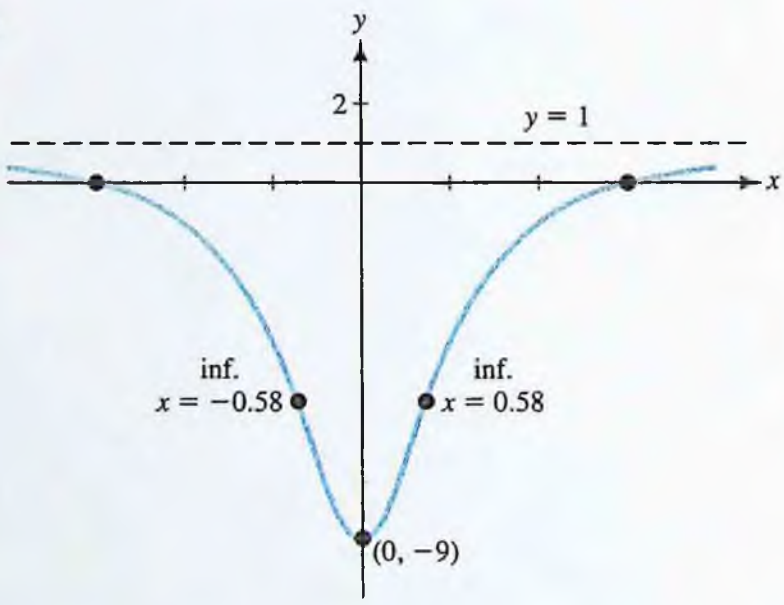
25.



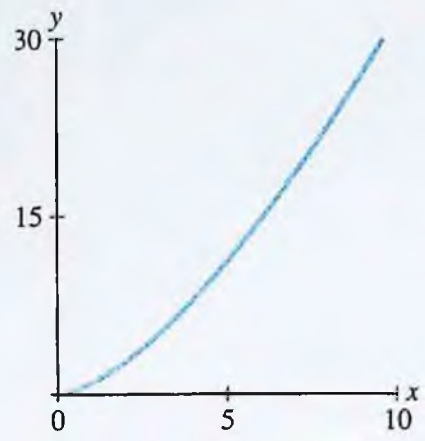
27.



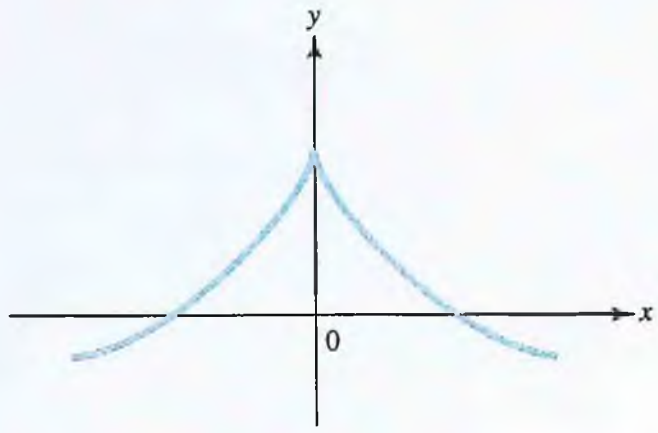
29.



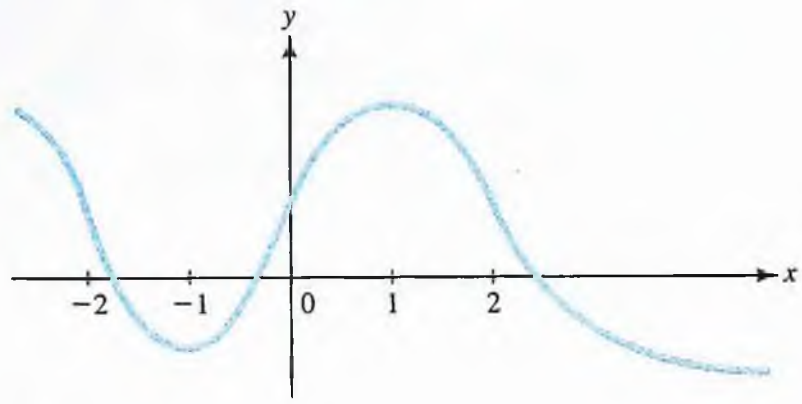
31.



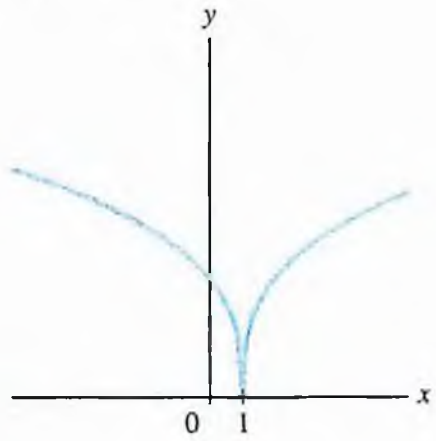
33. Las respuestas pueden variar.



35. Las respuestas pueden variar.



37. Las respuestas pueden variar.



www.FreeLibros.com

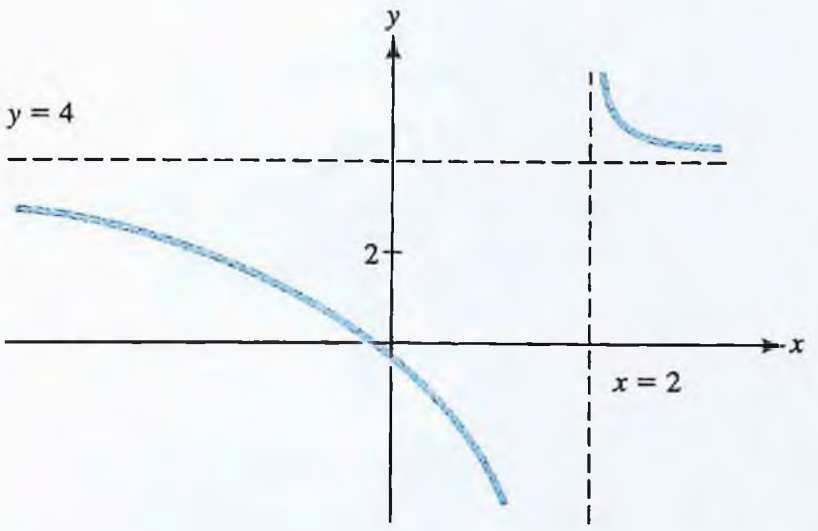
39. *a*) $f(x)$ es creciente ($f'(x) > 0$) para $0 < x < 2$ o $x > 2$; $f(x)$ es decreciente ($f'(x) <$ o para $x < 0$.

b) Mínimo relativo en $x = 0$

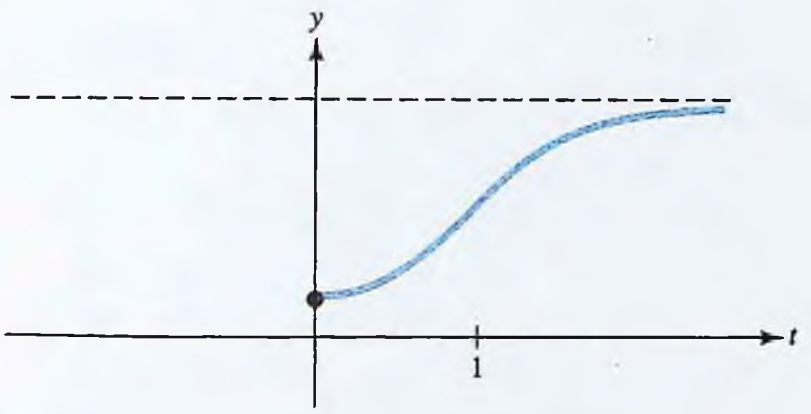
c) $f''(x) = x^2(x - 2)(5x - 6)$; $f(x)$ es cóncava hacia arriba para $x < 0$, $0 < x < \frac{6}{5}$, y $x > 2$; cóncava hacia abajo para $\frac{6}{5} < x < 2$.

d) $x = \frac{6}{5}$ y $x = 2$

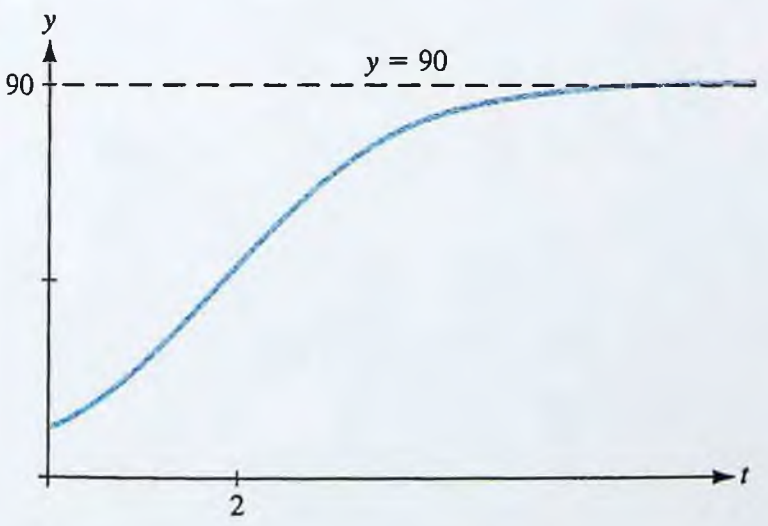
41. $B = -\frac{5}{2}$; $A = -10$



43. Las respuestas pueden variar.



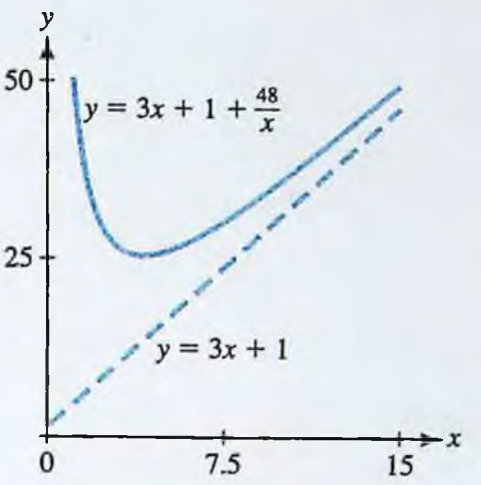
45.



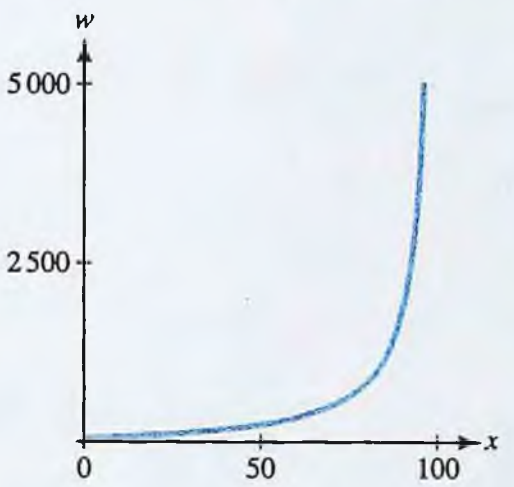
47. *a*) Asíntota vertical, $x = 0$; no hay asíntotas horizontales

b) La curva de promedio de costo $A(x)$ se aproxima a la recta $y = 3x + 1$ cuando x se hace más grande.

c)

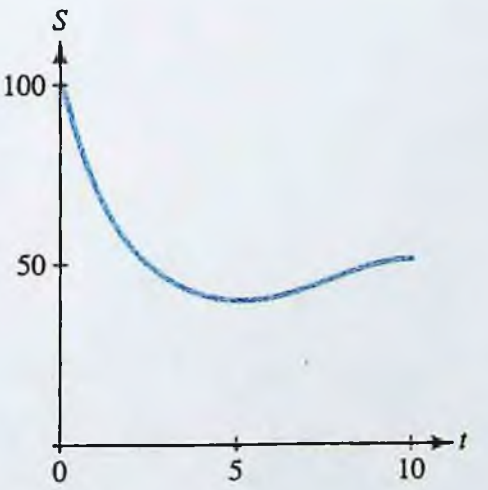


49. *a*)



b) 11.8%

51. *a*)



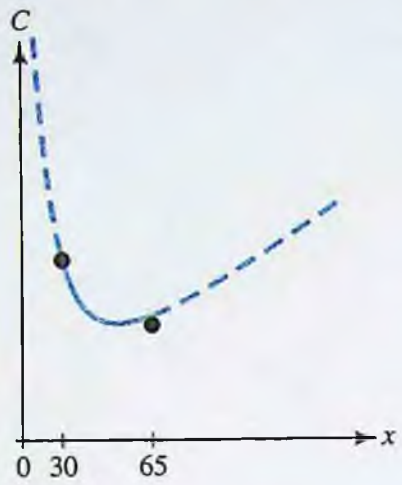
b) $t = 5$; 41.2%

c) positiva; decreciente

www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

53. *a)* $C(x) = \dfrac{7\,502.40}{x} + 1.89x$



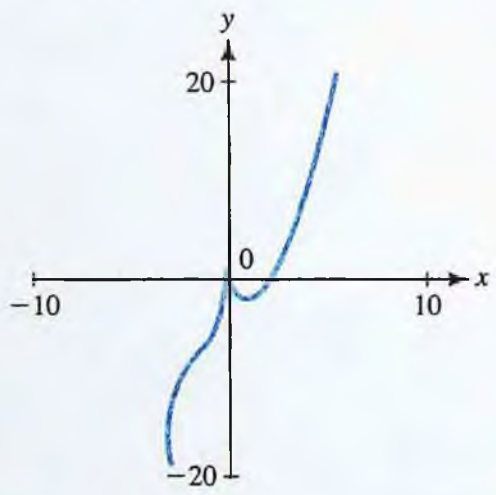
b) 63 mph; $238.16

55. *a)* $f'(x) = \dfrac{10(x-1)}{3x^{1/3}}$; $f(x)$ es creciente para $x < 0$ y $x > 1$; $f(x)$ es decreciente para $0 < x < 1$; mínimo relativo en $(1, -3)$; máximo relativo en $(0, 0)$.

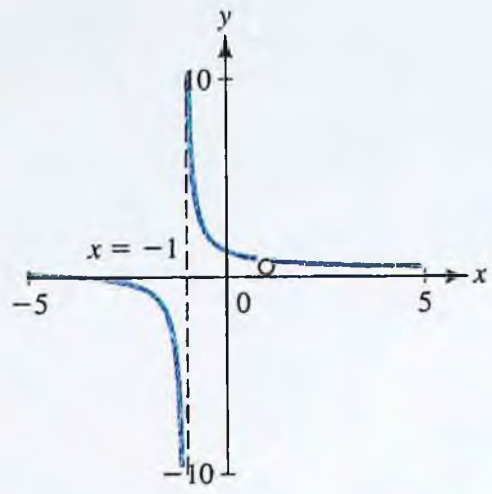
b) $f''(x) = \dfrac{10(2x+1)}{9x^{4/3}}$; $f(x)$ es cóncava hacia arriba para $x > -\dfrac{1}{2}$; $f(x)$ es cóncava hacia abajo para $x < -\dfrac{1}{2}$; punto de inflexión en $\left(-\dfrac{1}{2}, -3\sqrt[3]{2}\right)$.

c) $(0, 0), \left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$; no hay asíntotas

d)

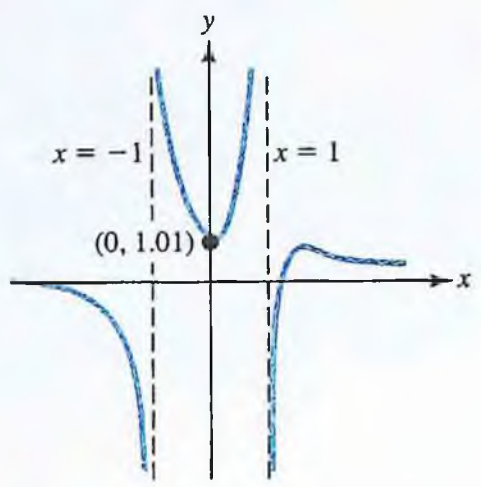


57. *a)*



La gráfica tiene un agujero en $x = 1$.

b)



Asíntotas verticales en $x = 1, x = -1$; asíntota horizontal $y = 0$.

CAPÍTULO 3 | Sección 4

1. Máximo absoluto en $(1, 10)$; mínimo absoluto en $(-2, 1)$

3. Máximo absoluto en $(0, 2)$; mínimo absoluto en $\left(2, -\dfrac{40}{3}\right)$

5. Máximo absoluto en $(-1, 2)$; mínimo absoluto en $(-2, -56)$

7. Máximo absoluto en $(-3, 3\,125)$; mínimo absoluto en $(0, -1\,024)$

9. Máximo absoluto en $\left(3, \dfrac{10}{3}\right)$; mínimo absoluto en $(1, 2)$

www.FreeLibros.com

11. Mínimo absoluto en (1, 2); no hay máximo absoluto

13. $f(x)$ no tiene máximo ni mínimo absoluto para $x > 0$.

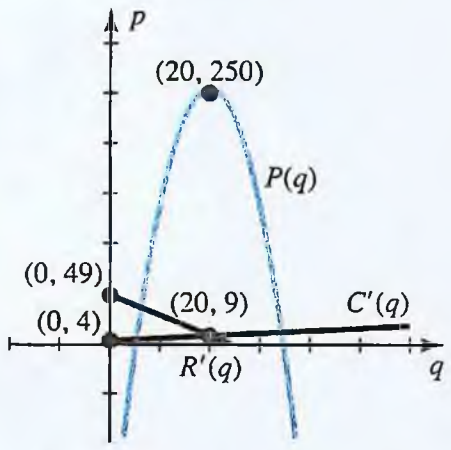
15. Máximo absoluto en (0, 1); no hay mínimo absoluto

17. *a)* $R(q) = 49q - q^2$; $R'(q) = 49 - 2q$;

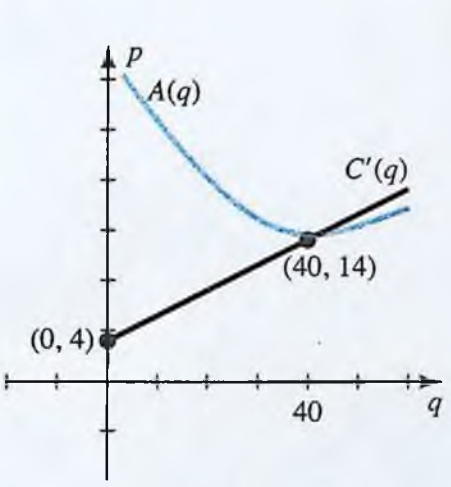
$C'(q) = \frac{1}{4}q + 4$;

$P(q) = -\frac{9}{8}q^2 + 45q - 200$;

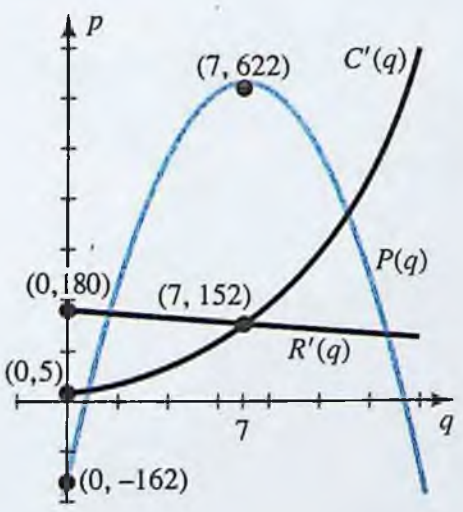
máximo cuando $q = 20$



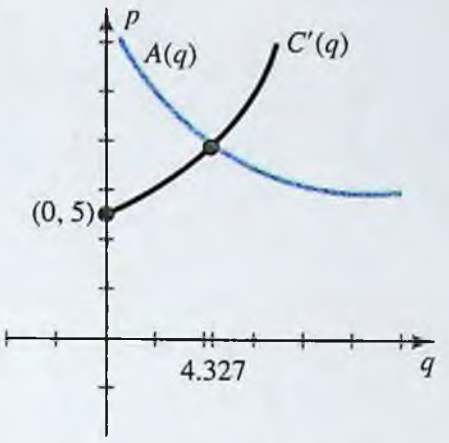
b) $A(q) = \frac{1}{8}q + 4 + \frac{200}{q}$; $A(q)$ se minimiza en $q = 40$.



19. *a)* $R(q) = 180q - 2q^2$; $R'(q) = 180 - 4q$; $C'(q) = 3q^2 + 5$; $P(q) = -q^3 - 2q^2 + 175q - 162$; $P(q)$ se maximiza en $q = 7$.



b) $A(q) = q^2 + 5 + \frac{162}{q}$; $A(q)$ se minimiza en $q = 4.327$.



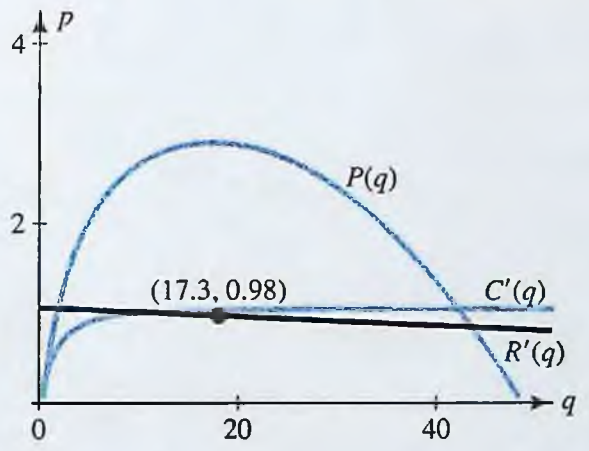
21. *a)* $R(q) = 1.0625q - 0.0025q^2$;

$R'(q) = 1.0625 - 0.005q$;

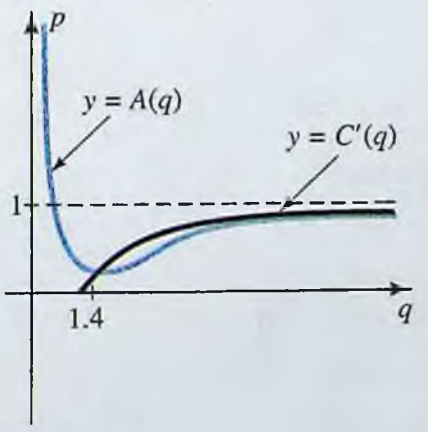
$C'(q) = \frac{q^2 + 6q - 1}{(q + 3)^2}$;

$P(q) = \frac{-0.0025q^3 + 0.055q^2 + 3.1875q - 1}{q + 3}$;

la utilidad $P(q)$ se maximiza cuando $P'(q) = 0$; cuando $q = 17.3$ unidades.



b) $A(q) = \frac{q^2 + 1}{q(q + 3)}$ se minimiza cuando $q = \frac{1 + \sqrt{10}}{3} \approx 1.3874$.



RESPUESTAS

www.FreeLibros.com

23. $E(p) = \dfrac{-1.3p}{-1.3p + 10}$; $E(4) = -\dfrac{13}{12}$, elástica

25. $E(p) = \dfrac{2p^2}{p^2 - 200}$; $E(10) = -2$, elástica

27. $E(p) = \dfrac{30}{p - 30}$; $E(10) = -\dfrac{3}{2}$, elástica

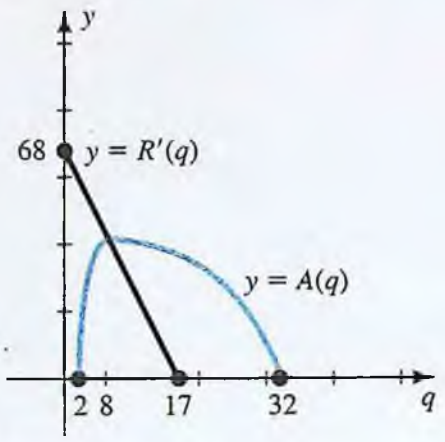
29. $R'(q) = -4q + 68$;

$A(q) = \dfrac{R(q)}{q} = -2q + 68 - \dfrac{128}{q}$

a) $R'(q) = A(q)$ cuando $q = 8$

b) A creciente ($A' > 0$) si $0 < q < 8$ y decreciente ($A' < 0$) si $q > 8$

c)



31. La pendiente $f'(x) = 4x - x^2$ tiene su máximo valor absoluto cuando $x = -1$. La gráfica tiene más pendiente en $\left(-1, \dfrac{7}{3}\right)$. La pendiente de la tangente es –5.

33. *a*) $x = 4$ o en 1993. La membresía en 1993 fue 46 400.

b) 0 en 1989 (cuando $t = 0$)

35. $p = \dfrac{n}{m}$

37. La rapidez de la sangre es máxima cuando $r = 0$, es decir, en el eje central.

39. *a*) $E = \dfrac{-3p}{2q + 3p}$

b) Cuando $p = 3$, $q = 2$ y $E = -\dfrac{9}{13}$; la demanda es inelástica.

41. *a*) $225 \le p \le 250$

b) $E(p) = \dfrac{p}{p - 250}$

La demanda es elástica cuando $p > 125$, inelástica cuando $p < 125$, y de elasticidad unitaria cuando $p = 125$.

c) El ingreso total es creciente para $p < 125$ y decreciente para $p > 125$.

d) Si se dispone de cualquier número de impresiones, entonces $p = 125$ maximiza el ingreso total. Si sólo se dispone de 50 impresiones, entonces $p = 225$ maximiza el ingreso total.

43. *a*) $v = 39$ km/hr

b) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

45. *a*) $D = \dfrac{C}{2}$; $\dfrac{C^2}{4}$

b) $\dfrac{C^3}{12}$

47. $R = r$

49. *a*) $R(x) = \dfrac{AB + A(1 - m)x^m}{(B + x^m)^2}$; $x = \left(\dfrac{B}{m - 1}\right)^{1/m}$

b) $R'(x) = \dfrac{-Amx^{m-1}[(1 - m)x^m + (1 + m)B]}{(B + x^m)^3}$;

$x = 0$ y $x = \left[\dfrac{B(m + 1)}{m - 1}\right]^{1/m}$

c) Máximo relativo; use la prueba de la primera derivada

51. *a*) $F(r) = a\pi r^4(r_0 - r)$

b) $r = \dfrac{4}{5}r_0$

53. *a*) $E(p) = \dfrac{ap}{ap - b}$

b) $E(p) = -1 \Rightarrow ap = (-1)(ap - b)$

$\Rightarrow 2ap = b \Rightarrow p = \dfrac{b}{2a}$

c) Elástica para $\dfrac{b}{2a} < p \le \dfrac{b}{a}$, inelástica para

$0 \le p < \dfrac{b}{2a}$

55. $E(p) = \dfrac{p}{q}\dfrac{dq}{dp} = \dfrac{p}{\left(\dfrac{a}{p^m}\right)}\left(\dfrac{-ma}{p^{m+1}}\right) =$

$\left(\dfrac{p^{m+1}}{a}\right)\left(\dfrac{-ma}{p^{m+1}}\right) = -m$

Si $m = 1$, la demanda es de elasticidad unitaria. Si $m > 1$, la demanda es elástica, y si $0 < m < 1$, la demanda es inelástica.

CAPÍTULO 3 | Sección 5

1. $\dfrac{1}{2}$

3. $x = 25$, $y = 25$

5. \$40.83 ≈ \$41.00

www.FreeLibros.com

7. 80 árboles

9. Haga cuadrado el parque con lado $S = 60$ m.

11. Sea x la longitud del campo y y el ancho, y sea p el valor fijo del perímetro, de modo que $p = 2(x + y)$ y $y = \frac{1}{2}(p - 2x)$. El área es

$$A = xy = x\left[\frac{1}{2}(p - 2x)\right] = -x^2 + \frac{1}{2}px$$

Derivando, encontramos que

$$A' = -2x + \frac{1}{2}p = 0$$

cuando $x = \frac{p}{4}$. Como $A'' = -2 < 0$, el área máxima ocurre cuando $x = \frac{p}{4}$ y

$$y = \frac{1}{2}\left[p - 2\left(\frac{p}{4}\right)\right] = \frac{p}{4}$$

es decir, cuando la figura es cuadrada.

13. 6 por 2.5

15. 2 por 2 por $\frac{4}{3}$ metros

17. 2 horas después del tiempo inicial; maximizar el cuadrado de x también minimiza x cuando $x \geq 0$.

19. La ruta más económica es tender el cable 2 000 metros bajo el agua y 400 metros en tierra.

21. $r = 1.51$ pulgadas; $h = 3.02$ pulgadas

23. 27π pulgadas cúbicas

25. $r = \frac{2}{3}h$

27. *a*) 10 máquinas
b) \$400
c) \$200

29. *a*) 200 botellas
b) cada tres meses

31. $x = 18$; $y = 36$; $V = 11\,664$ pulg^3

33. $C(x) = 1\,200 + 1.20x + \frac{100}{x^2}$; $x = 6$

35. 5 años a partir de ahora

37. Suponga que el costo de preparación y el costo de operación son aN y $\frac{b}{N}$, respectivamente, para constantes positivas a y b. El costo total es entonces $C = aN + \frac{b}{N}$. El costo mínimo es cuando

$$C' = a - \frac{b}{N^2} = 0$$

$$aN = \frac{b}{N}$$

es decir, cuando el costo de preparación aN es igual al costo de operación $\frac{b}{N}$.

39. Frank tiene razón; en el ejemplo 3.5.5 sustituye 3 000 con cualquier distancia fija $D \geq 1\,200$. El resultado es el mismo porque D baja cuando se calcula $C'(x)$.

41. 4.5 millas de la planta A

43. El punto P debe estar a $\frac{5\sqrt{3}}{3} \approx 2.9$ millas de A.

45. $S = Kwh^3 = Kh^3\sqrt{225 - h^2}$;

$S'(h) = \frac{675h^2 - 4h^4}{\sqrt{225 - h^2}} = 0$ cuando $h \approx 13$ pulgadas

$w \approx 7.5$ pulg.

47. *a*) Sea x el número de máquinas y t el número de horas necesarias para producir Q unidades. El costo de preparación es $C_s = xs$ y el costo de operación (para todas las x máquinas) es $C_o = pt$. Como se pueden producir n unidades por máquina por hora, $Q = nxt$ o sea $t = \frac{Q}{nx}$. El costo total es

$$C = C_s + C_o = xs + \frac{pQ}{nx}$$

de modo que

$$C' = s - \frac{pQ}{nx^2} = 0$$

cuando $x = \sqrt{\frac{pQ}{ns}}$. Como $C'' > 0$, esto corresponde a un mínimo.

b) $C_s = xs = \sqrt{\frac{pQs}{n}}$, $C_o = \frac{pQ}{nx} = \sqrt{\frac{pQs}{n}}$

49. *a*) $P(x) = x\left(15 - \frac{3}{8}x\right) - \frac{7}{8}x^2 - 5x - 100 - tx$;

Así, $P'(x) = -\frac{5}{2}x + 10 - t = 0$

donde $x = \frac{2}{5}(10 - t)$

www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

b) $t = 5$

c) El monopolista absorberá \$4.25 del impuesto de \$5 por unidad. \$0.75 se pasan al cliente.

d) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

CAPÍTULO 3 | Revisión

1. *a*) Creciente para $x < 0$ y $0 < x < 3$; decreciente para $x > 3$

Números críticos	Clasificación
0	Ninguno
3	Máximo relativo

b) Creciente para $t < 1$ y $t > 2$; decreciente para $1 < t < 2$

Números críticos	Clasificación
1	Máximo relativo
2	Mínimo relativo

c) Creciente para $-3 < t < 3$; decreciente para $t < -3$ y $t > 3$

Números críticos	Clasificación
-3	Mínimo relativo
3	Máximo relativo

d) Creciente para $x < -1$ y $x > 9$; decreciente para $-1 < x < 9$

Números críticos	Clasificación
-1	Máximo relativo
9	Mínimo relativo

2. *a*) Cóncava hacia arriba para $x > 2$; cóncava hacia abajo para $x < 0$ y $0 < x < 2$; inflexión en $x = 2$

b) Cóncava hacia arriba para $-5 < x < 0$ y $x > 1$; cóncava hacia abajo para $x < -5$ y $0 < x < 1$; inflexión en $x = -5$, $x = 0$ y $x = 1$

c) Cóncava hacia arriba para $t > 1$; cóncava hacia abajo para $t < 1$; no hay puntos de inflexión

d) Cóncava hacia arriba para $-1 < t < 1$; cóncava hacia abajo para $t < -1$ y $t > 1$; inflexión en $t = -1$ y $t = 1$

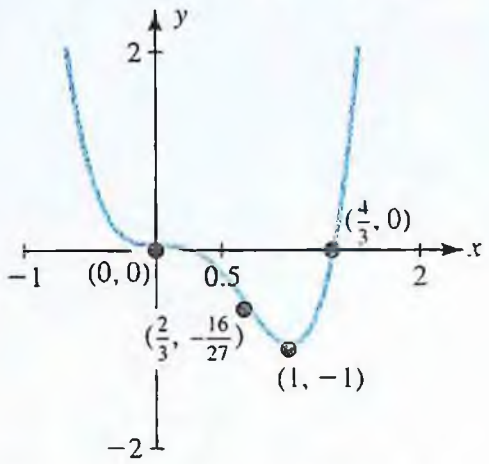
3. *a*) Asíntota vertical, $x = -3$; asíntota horizontal, $y = 2$

b) Asíntotas verticales, $x = -1$, $x = 1$; asíntota horizontal, $y = 0$

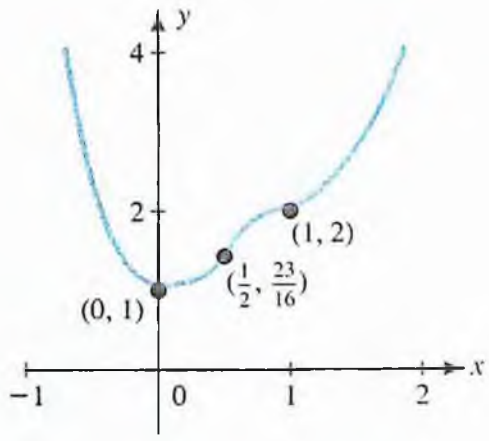
c) Asíntotas verticales, $x = -\frac{3}{2}$, $x = 1$; asíntota horizontal, $y = \frac{1}{2}$

d) Asíntota vertical, $x = 0$; asíntota horizontal, $y = 0$

4. *a*) No hay asíntotas; intersecciones en $(0, 0)$ y $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$; mínimo relativo en $(1, -1)$; puntos de inflexión en $(0, 0)$ y $\left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right)$.

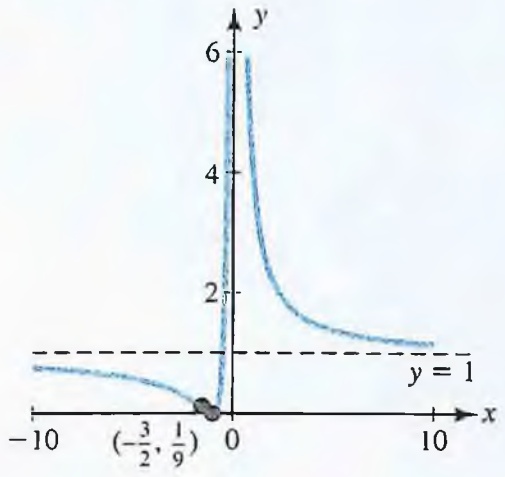


b) No hay asíntotas; intersección en el eje y en $(0, 1)$; mínimo relativo en $(0, 1)$; puntos de inflexión en $(1,2)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{23}{16}\right)$.

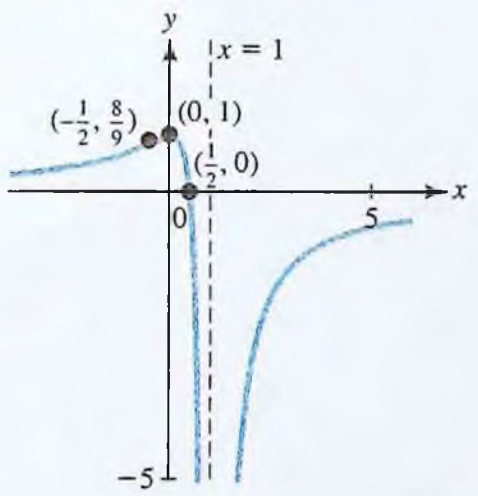


www.FreeLibros.com

c) Asíntota vertical, $x = 0$; asíntota horizontal, $y = 1$; intersección con el eje x en $(-1, 0)$; mínimo relativo en $(-1, 0)$; punto de inflexión en $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{9}\right)$.

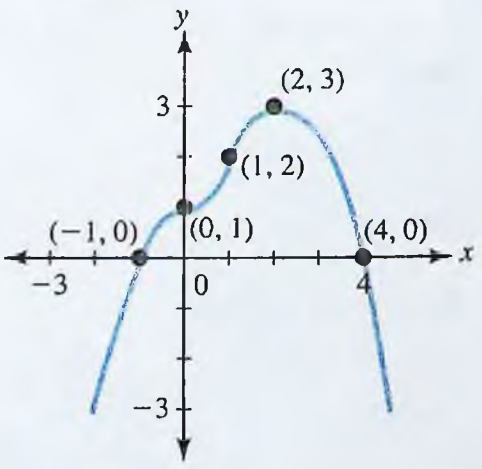


d) Asíntota vertical, $x = 1$; asíntota horizontal, $y = 0$; intersección con el eje x en $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$; con el eje y en $(0, 1)$; máximo relativo en $(0, 1)$; punto de inflexión en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{8}{9}\right)$.



5. ***a***) es la gráfica de $f(x)$ y ***b***) es la gráfica de $f'(x)$. Las respuestas variarán. Una razón es que los puntos de intersección con el eje x de la gráfica en ***b***) corresponden a los puntos alto y bajo en ***a***).

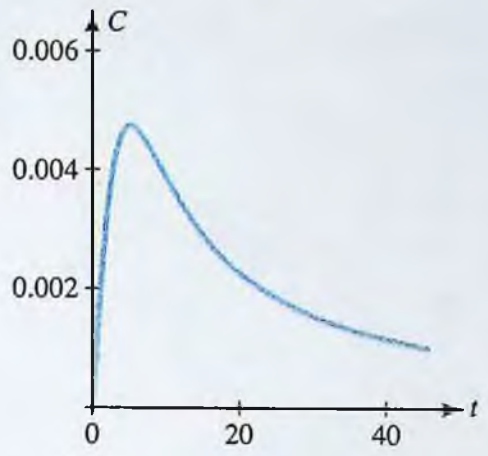
6. Las respuestas variarán.



7. 8:20 A.M.

8. $70

9. ***a***)



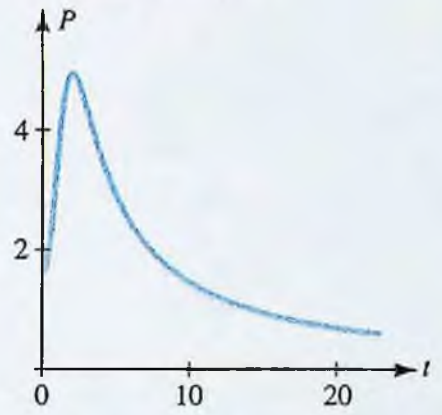
b) $t = 9$

c) La concentración tiende a 0.

10. ***a***) 1.667 millones

b) $t = 2$ horas; 5 millones

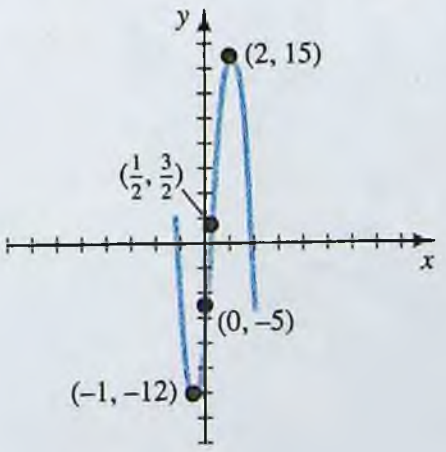
c)



La población muere.

CAPÍTULO 3 | Problemas de repaso

1. $f(x)$ es creciente para $-1 < x < 2$; decreciente para $x < -1$ y $x > 2$; cóncava hacia arriba para $x < \frac{1}{2}$; cóncava hacia abajo para $x > \frac{1}{2}$; máximo relativo $(2, 15)$; mínimo relativo $(-1, -12)$; punto de inflexión $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

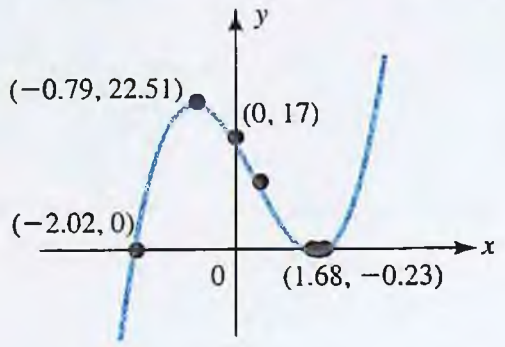


RESPUESTAS

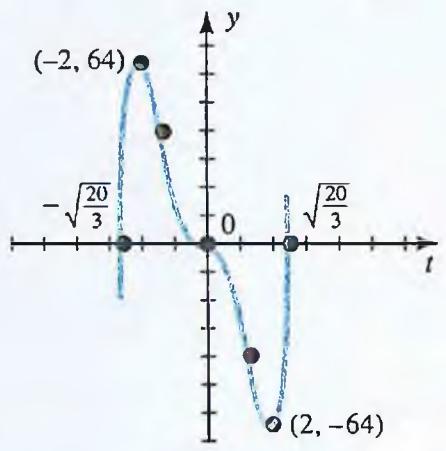
www.FreeLibros.com

3. $f(x)$ es creciente para $x < -0.79$ y $1.68 < x$; $f(x)$ es decreciente para $-0.79 < x < 1.68$; $f(x)$ es cóncava hacia abajo para $x < \frac{4}{9}$; $f(x)$ es cóncava hacia arriba para $x > \frac{4}{9}$.

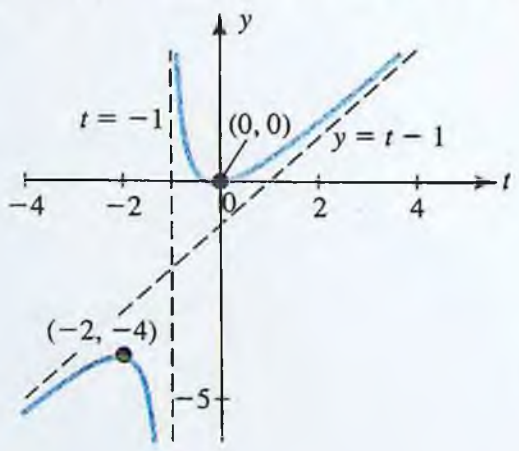
Hay un máximo relativo en $(-0.79, 22.51)$, un mínimo relativo en $(1.68, -0.23)$.
Hay un punto de inflexión, en $(0.44, 11.14)$.



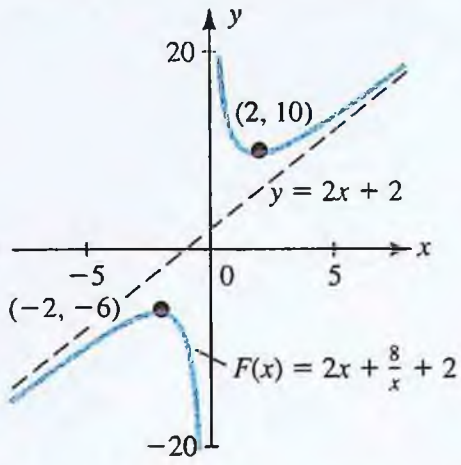
5. $f(x)$ es creciente para $t < -2$ y $t > 2$; decreciente para $-2 < t < 2$; cóncava hacia arriba para $-\sqrt{2} < t < 0$ y $t > \sqrt{2}$; cóncava hacia abajo para $t < -\sqrt{2}$ y para $0 < t < \sqrt{2}$. Máximo relativo en $(-2, 64)$; mínimo relativo en $(2, 64)$; puntos de inflexión $(-\sqrt{2}, 39.6)$ y $(\sqrt{2}, -39.6)$.



7. $g(t)$ es creciente para $t < -2$ y para $t > 0$; decreciente para $-2 < t < -1$ y para $-1 < t < 0$; cóncava hacia arriba para $t > -1$; cóncava hacia abajo para $t < -1$. Máximo relativo $(-2, -4)$; mínimo relativo $(0, 0)$; no hay puntos de inflexión.



9. $F(t)$ es creciente para $x < -2$ y para $x > 2$; decreciente para $-2 < x < 0$ y para $0 < x < 2$; cóncava hacia arriba para $x > 0$; cóncava hacia abajo para $x < 0$. Máximo relativo $(-2, -6)$; mínimo relativo $(2, 10)$; no hay puntos de inflexión.

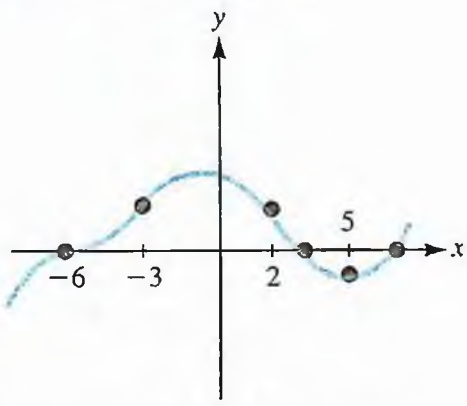


11.

Números críticos	Clasificación
−1	Mínimo relativo
0	Máximo relativo
3/2	Ninguno
7	Mínimo relativo

13. ***b)*** es la gráfica de $f(x)$ y ***a)*** es la gráfica de $f'(x)$. Las respuestas variarán. Una razón es que la gráfica en ***a)*** es siempre creciente y la gráfica en ***a)*** es siempre positiva.

15. Aquí está una posible gráfica.



17. Máximo relativo en $(2, 15)$; mínimo relativo en $(-1, -12)$

19. Máximo relativo en $(-2, -4)$; mínimo relativo en $(0, 0)$

21. Valor máximo absoluto de 40 donde $x = -3$; valor mínimo absoluto de -12 donde $x = -1$.

23. Valor máximo absoluto de $\frac{1}{2}$ donde $s = -\frac{1}{2}$ o $s = 1$; valor mínimo absoluto de 0 donde $s = 0$.

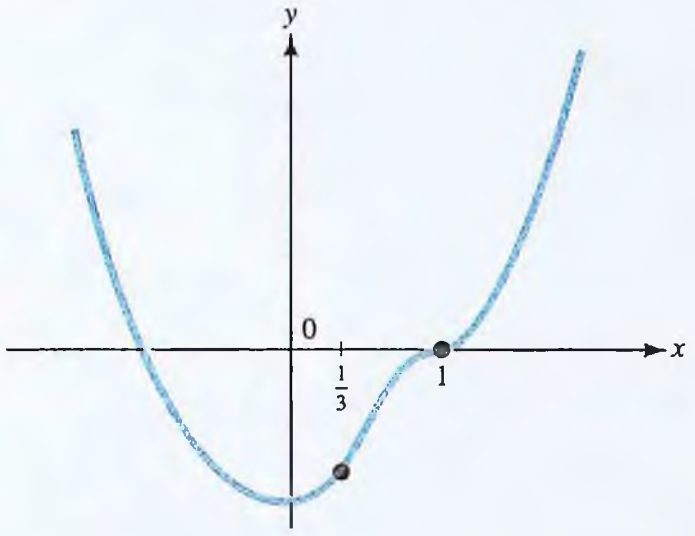
25. ***a)*** $f(x)$ es creciente para $0 < x < 1$ y $x > 1$; es decreciente para $x < 0$.

www.FreeLibros.com

b) $f(x)$ es cóncava hacia arriba para $x < \frac{1}{3}$ y $x > 1$; es cóncava hacia abajo para $\frac{1}{3} < x < 1$.

c) $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 0$ y puntos de inflexión en $x = \frac{1}{3}$ y $x = 1$.

d)



27. $12.50

29. $R = kN(P - N)$ de modo que $R' = k(P - 2N)$ y $R' = 0$ cuando $N = \frac{P}{2}$. Como $R''\left(\frac{P}{2}\right) = -2k < 0$, hay un mínimo en $N = \frac{P}{2}$.

31. $r = \frac{2}{3}h$

33. $p = \$8.12$ (u $8.13) por carta

35. Remar toda la ruta hasta la ciudad.

37. *a*) $E = \frac{-2p^2}{100 - p^2}$

b) A $p = 6$, $E = -\frac{9}{8}$, de modo que $|E| = \left|-\frac{9}{8}\right| = \frac{9}{8}$. Como $|E| > 1$, la demanda es elástica (es decir, cuando aumenta el precio, disminuye el ingreso).

c) $5.77

39. 12 máquinas

41. 17 pisos

43. *a*) $E(p) = \frac{1.4p^2}{0.7p^2 - 300}$

b) $E(8) = -0.351$; aumenta el precio

45. Rectángulo: 3.9 pies por 4.2 pies; lado de triángulo: 3.9 pies

47. 400 Floppsies y 700 Moppsies

49. 4 000 mapas por lote

51. *Sugerencia:* Si x unidades se ordenan, $C = k_1x + \frac{k_2}{x}$

53. *a*) Mínimo relativo en $x = \frac{1}{c}$

b) Máximo de $\frac{\pi}{3}(5 - 3\sqrt{2})$; mínimo de $\frac{\pi}{6}$

c) Máximo de $\frac{\sqrt{3}\pi}{16}$; mínimo de $\frac{\sqrt{3}\pi}{4(2 + \sqrt{2})^2}$

55. *a*) $\frac{m^2v^2}{64(1 + m^2)}$; $\frac{mv^2}{16(1 + m^2)}$

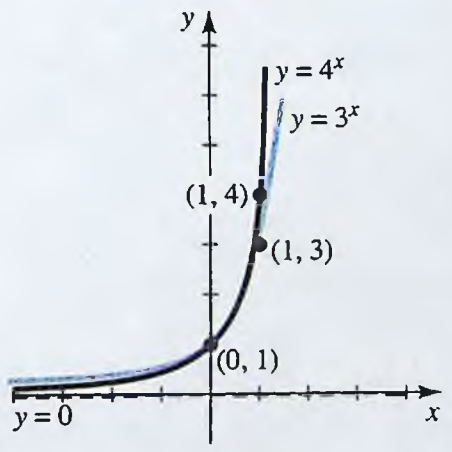
b) $m = 1$

c) $\frac{v^2}{64} - \frac{16x_0^2}{v^2}$

CAPÍTULO 4 | Sección 1

1. $e^2 \approx 7.389$, $e^{-2} \approx 0.135$, $e^{0.05} \approx 1.051$, $e^{-0.05} \approx 0.951$, $e^0 = 1$, $e \approx 2.718$, $\sqrt{e} \approx 1.649$, $\frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.607$

3.



5. *a*) 9

b) $\frac{1}{27}$

7. *a*) 12

b) $\frac{189}{1\,331}\sqrt{7}$

9. *a*) 3

b) 4

11. *a*) 243

b) $e^{14/3}$

13. *a*) $9x^4$

b) $2x^{2/3}y$

www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

15. *a*) $\dfrac{1}{x^{1/3}y^{1/2}}$

b) $x^{1.1}y^2$

17. *a*) $\dfrac{1}{t}$

b) t

19. $\dfrac{3}{2}$

21. 1

23. 1

25. $b = 2, C = 3$

27. *a*) \$1 967.15

b) \$2 001.60

c) \$2 009.66

d) \$2 013.75

29. \$3 534.12

31. *a*) \$6 361.42

b) \$6 342.19

33. *a*) 50 000,000

b) 91 105 940

35. 400

37. 320

39. La inversión original se cuadruplicará.

41. 13 634

43. 20 480 bacterias

45. 4 000

47. *a*) 12 000 personas por milla cuadrada

b) 5 959 personas por milla cuadrada

49. 204.8 gramos

51. *a*) 0.5488

b) 0.1812

c) 0.1215

53. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{10}} I_0 \approx 0.46 I_0$

55. 0.05%

57. *a*) 310

b) No. La predicción de 169 es suficientemente cercana a las 167 reales y es una predicción, no un absoluto.

c) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

59. \$1 206.93

61. *a*) No. Un pago mensual justo es \$166.07.

b) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

63.

x	−2.2	−1.5	0	1.5	2.3
$f(x)$	10.5561	4	0.5	0.0625	0.0206

65. As $n \to -\infty, \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \to e \approx 2.71828$

67. $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(2 - \dfrac{5}{2n}\right)^{n/3} = +\infty$

CAPÍTULO 4 | Sección 2

1. $\ln 1 = 0, \ln 2 \approx 0.693, \ln e = 1, \ln 5 \approx 1.609, \ln \dfrac{1}{5} \approx -1.609, \ln e^2 = 2$, ln 0 y ln −2 son indefinidos; e^x no puede ser negativo ni igual a cero.

3. 3

5. 5

7. $\dfrac{8}{25}$

9. $3 + \log_3 2 + \log_3 5$

11. $2 \log_3 2 + 2 \log_3 5$

13. $4 \log_2 x + 3 \log_2 y$

15. $\dfrac{1}{3}[\ln x + \ln(x - 1)]$

17. $2 \ln x + \dfrac{2}{3} \ln(3 - x) - \dfrac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1)$

19. $3 \ln x - x^2$

21. $\dfrac{\ln 2}{0.06} \approx 11.552$

23. $\dfrac{\ln 5}{4} \approx 0.402$

25. $e^{-C - t/50}$

27. 4

29. $\dfrac{2}{\ln 3} \approx 1.820$

31. $10 \ln 2$

33. $5 \ln 2 \approx 3.4657$

35. $7 \ln 5 - \ln 2 \approx 10.5729$

37. −5.5

39. $\dfrac{\ln 2}{0.06} \approx 11.55$ años

41. $\dfrac{\ln 2}{13} \approx 5.33\%$

www.FreeLibros.com

43. 5 614 años

45. $Q(t) = 6\,000e^{0.0203t}$; 20 250

47. $Q(t) = 500 - 200e^{-0.1331t}$; 459.5 unidades

49. 10 523 años

51. hace 24.84 años; 95.8%

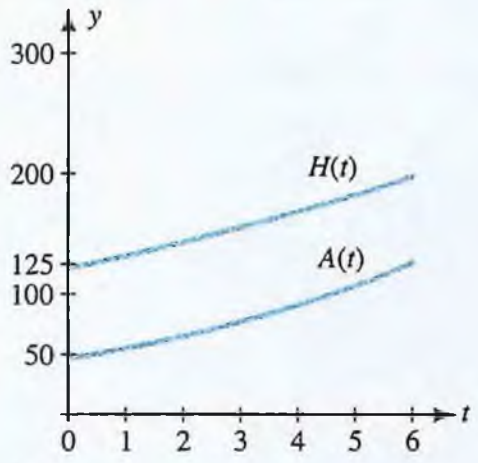
53. $f(t) = 70 + 142e^{-kt}$; la temperatura ideal es 72.04°F

55. *a*) 45%
b) 2.34%

57. Scélérat; la mañana del miércoles a la 1:27 a.m.

59. *a*) 2×10^8
b) $10^{1.2} \approx 15.85$ veces más intensa

61. *a*)



b) $A = \dfrac{2H^2}{625}$

63. El año 2 095

65. *a*) 8.25
b) 10^{14} joules

67. La recta $y = x$ tiene pendiente 1, de modo que es perpendicular a la recta que pasa por $A(a, b)$ y $B(b, a)$, que tiene pendiente $m = \dfrac{(a-b)}{(b-a)} = -1$. Si O es el origen y M es el punto donde $y = x$ cruza el segmento de recta AB, entonces los triángulos rectos OMA y OMB son semejantes porque comparten el lado OM y

$$|OA| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{b^2 + a^2} = |OB|$$

Se deduce que $|AM| = |BM|$, lo cual significa que A y B son reflexiones entre sí en $y = x$.

69. $Y = mX + b$ donde $Y = \ln y$, $X = \ln x$, $m = k$ y $b = \ln c$.

71. $x \approx -17.4213$ (usando una graficadora)

73. $x \approx 1.1697$ (usando una graficadora)

75. *a*) $(\log b)(\log a) = \left(\dfrac{\ln b}{\ln a}\right)\left(\dfrac{\ln a}{\ln b}\right) = 1$

b) $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

$$= \frac{(\ln x)(\ln b)}{(\ln b)(\ln a)} = (\log_b x)(\log_a b)$$

$$= \frac{\log_b x}{\log_a b} \quad \text{using part } a)$$

CAPÍTULO 4 | Sección 3

1. $f'(x) = 5e^{5x}$

3. $f'(x) = xe^x + e^x$

5. $f'(x) = -0.5e^{-0.05x}$

7. $f'(x) = (6x^2 + 20x + 33)e^{6x}$

9. $f'(x) = -6e^x(1 - 3e^x)$

11. $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x}}e^{\sqrt{3x}}$

13. $f'(x) = \dfrac{3}{x}$

15. $f'(x) = 2x \ln x + x$

17. $f'(x) = \dfrac{2}{3}e^{2x/3}$

19. $f'(x) = \dfrac{-2}{(x+1)(x-1)}$

21. $f'(x) = -2e^{-2x} + 3x^2$

23. $g'(s) = (e^s + 1)(2e^{-s} + s) + (e^s + s + 1)(-2e^{-s} + 1)$
$= 1 + 2s + e^s + se^s - 2se^{-s}$

25. $h'(t) = \dfrac{te^t \ln t + t \ln t - e^t - t}{t(\ln t)^2}$

27. $f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

29. $f'(t) = \dfrac{t+1}{2t\sqrt{\ln t + t}}$

31. $f'(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

33. $g'(u) = \dfrac{1}{\sqrt{u^2 + 1}}$

35. $\dfrac{1}{e}$; 0

37. $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}e^{-3/2}$; 0

39. $y = x$

www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

41. $y = e^2$

43. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

45. $f''(x) = 4e^{2x} + 2e^{-x}$

47. $2 \ln t + 3$

49. $f'(x) = f(x)\left[\frac{4}{2x+3} + \frac{1-10x}{2(x-5x^2)}\right]$

51. $f'(x) = f(x)\left[\frac{5}{x+2} - \frac{1}{2(3x-5)}\right]$

53. $f'(x) = f(x)\left[\frac{3}{x+1} - \frac{2}{6-x} + \frac{2}{3(2x+1)}\right]$

55. $f'(x) = (2 \ln 5)x5^{x^2}$

57. *a*) $E(p) = -0.04p$; elástica para $p > 25$, inelástica para $p < 25$, de elasticidad unitaria para $p = 25$

b) La demanda disminuirá en aproximadamente 1.2%

c) $R(p) = 3\,000pe^{-0.04p}$; $p = 25$

59. *a*) $C'(x) = 0.2e^{0.2x}$

b) 5 unidades

61. *a*) La población está aumentando a razón de 1.22 millones de personas por año.

b) Porcentaje constante de 2% por año

63. *a*) El valor está disminuyendo a razón de \$1 082.68 por año.

b) Porcentaje constante de –40% por año

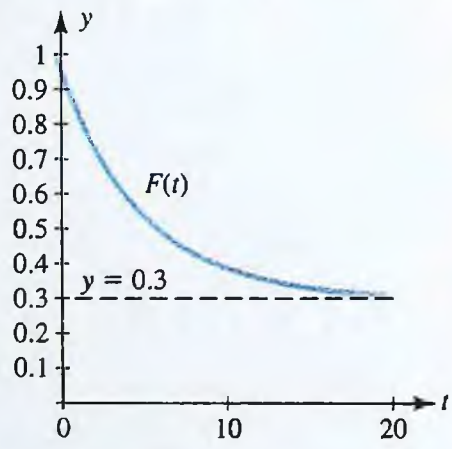
65. *a*) Aproximadamente 406 copias

b) 368 copias

67. *a*) $F'(t) = -k(1 - B)e^{-kt}$ es la rapidez constante a la que está usted olvidando material.

b) $F'(t) = -k(F(t) - B)$, que dice que la rapidez con la que olvida es proporcional a la fracción que ha dejado para olvidar.

c)



69. *a*) $E'(p) = 3\,000e^{-0.01p}(1 - 0.01p)$

b) $p = 100$

c) $p = 200$

71. *a*) $N'(t) = \frac{36e^{-0.02t}}{(1 + 3e^{-0.02t})^2}$; la población está aumentando en todos los tiempos t.

b) Creciente para $t < 50 \ln 3$, decreciente para $t > 50 \ln 3$

c) $N(t)$ se aproxima a 600.

73. *a*) $P_1'(10) \approx 1.556$ cm/día

$P_2''(10) = -0.257$ cm/día por día; decreciente

b) Las plantas tienen la misma altura, aproximadamente 21 cm después de 20.71 días; $P_1'(20.71) \approx 0.286$, $P_2'(20.71) \approx 0.001$, de modo que la primera planta está creciendo más rápidamente.

75. $\frac{R'(t_0)}{R(t_0)} = \frac{0.09(11) - 0.02(8)}{19} \approx 0.0437$; 4.37%

77. La población de la ciudad dentro de x años será

$$P(x) = 5\,000\sqrt{x^2 + 4x + 19}$$

El porcentaje de cambio dentro de x años será

$$\frac{100\,P'(x)}{P(x)} = 100\frac{d}{dx}[\ln 5\,000\sqrt{x^2 + 4x + 19}]$$

$$= 100\frac{d}{dx}[\ln 5\,000 + \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4x + 19)]$$

$$= \frac{100(x+2)}{x^2 + 4x + 19}$$

En consecuencia, el porcentaje de cambio dentro de 3 años será

$$\frac{100(3+2)}{3^2 + 12 + 19} = 12.5\% \text{ por año}$$

79. $f'(x) = \frac{2^x(x \ln 2 - 1)}{x^2}$

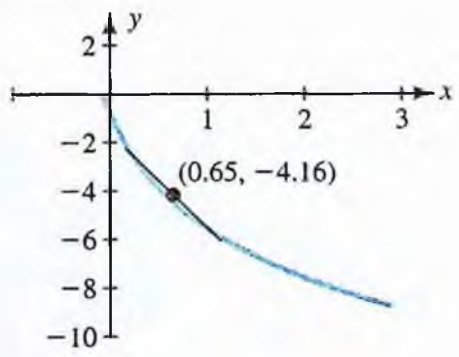
81. $\frac{1 + \ln x}{\ln 10}$

83. $f(x) = \frac{1}{3}\ln(x+1) - 4\ln(1+3x)$

$f'(x) = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{12}{1+3x}$; $f'(0.65) \approx -3.87$

la recta tangente en $(0.65, -4.16)$ es

$y = -3.87x - 1.65$



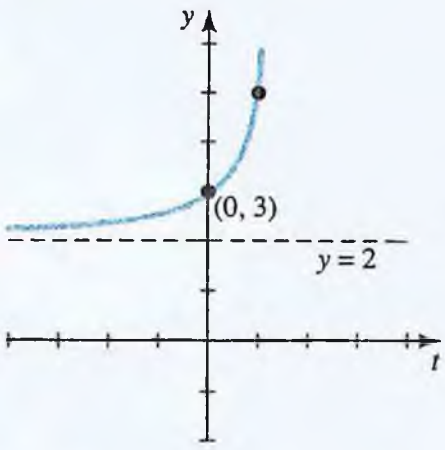
www.FreeLibros.com

CAPÍTULO 4 | Sección 4

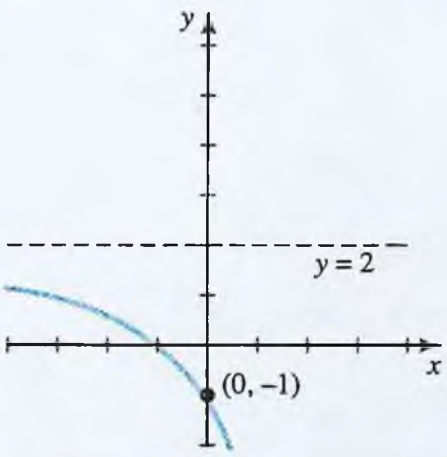
1. $f_5(x)$

3. $f_3(x)$

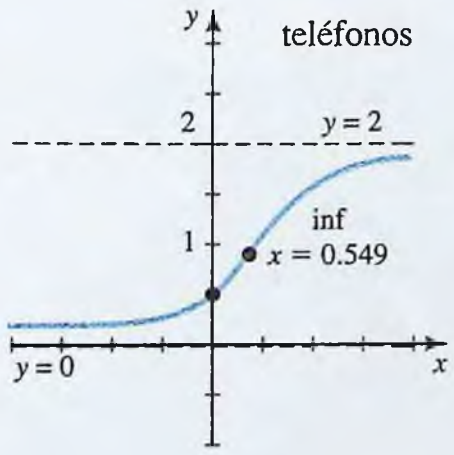
5. $f(t)$ es creciente para toda t real; cóncava hacia arriba para toda t real. Hay una asíntota horizontal en $y = 2$.



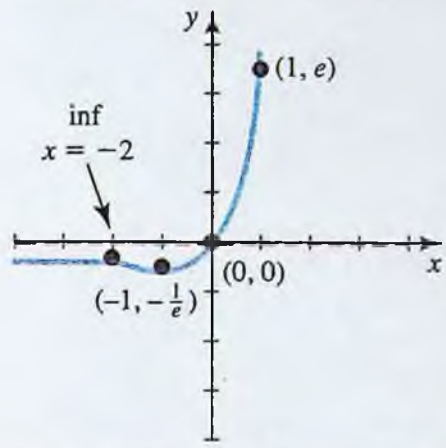
7. $g(x)$ es decreciente para toda x real; cóncava hacia abajo para toda x real; $y = 2$ es una asíntota horizontal.



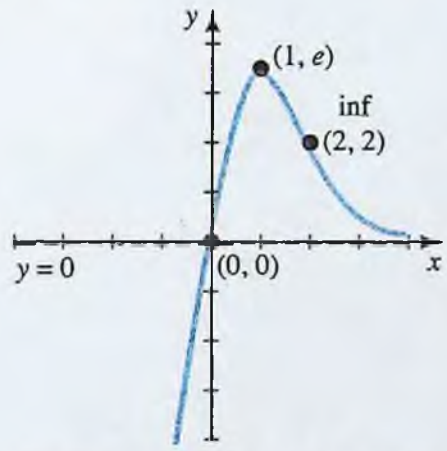
9. $f(x)$ es creciente para toda x real; cóncava hacia arriba para $x < 0.549$; cóncava hacia abajo para $x > 0.549$. El punto de inflexión es (0.549, 1), y $y = 2$ y $y = 0$ son asíntotas horizontales.



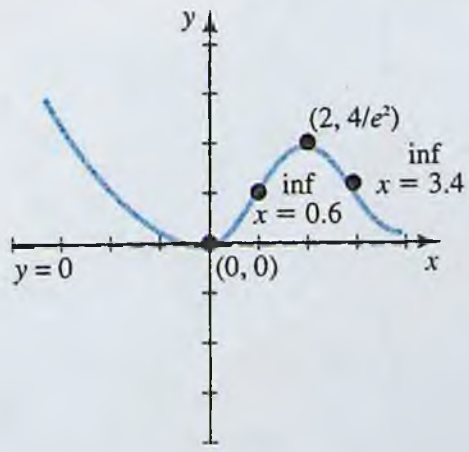
11. $f(x)$ es creciente para $x > -1$; decreciente para $x < -1$; cóncava hacia arriba para $x > -2$; cóncava hacia abajo para $x < -2$. El mínimo relativo es $\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$ y el punto de inflexión es $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$. El eje x ($y = 0$) es una asíntota horizontal.



13. $f(x)$ es creciente para $x < 1$; decreciente para $x > 1$; cóncava hacia arriba para $x > 2$; cóncava hacia abajo para $x < 2$. El máximo relativo es $(1, e)$, el punto de inflexión es (2, 2). El eje x ($y = 0$) es una asíntota horizontal.



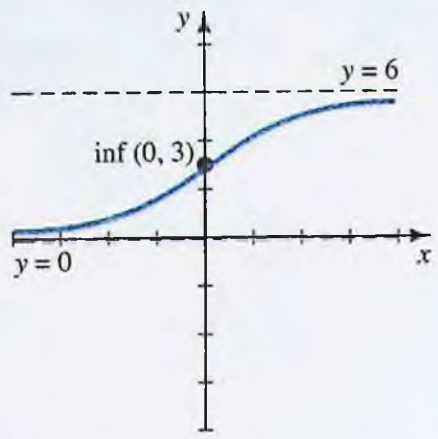
15. $f(x)$ es creciente para $0 < x < 2$; decreciente para $x < 0$ y $x > 2$; cóncava hacia arriba para $x < 0.6$ y $x > 3.4$; cóncava hacia abajo para $0.6 < x < 3.4$. El mínimo relativo es (0, 0), el máximo relativo es $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$; los puntos de inflexión son (0.6, 0.2) y (3.4, 0.4). El eje x es una asíntota horizontal.



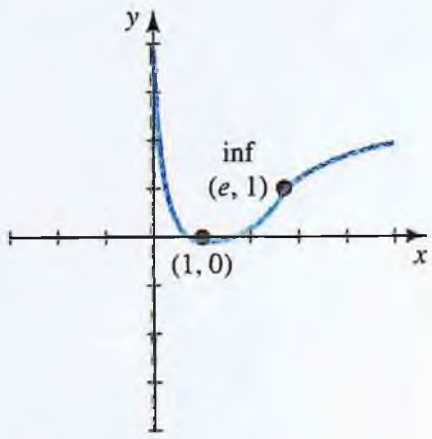
RESPUESTAS

www.FreeLibros.com

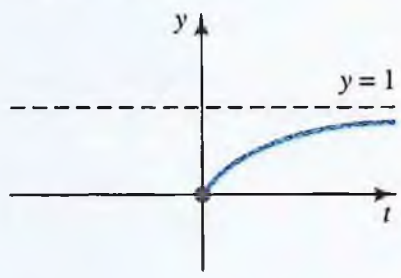
17. $f(x)$ es creciente para toda x real; cóncava hacia arriba para $x < 0$; cóncava hacia abajo para $x > 0$. El punto de inflexión es (0, 3). El eje x ($y = 0$) y $y = 6$ son asíntotas horizontales.



19. $f(x)$ es creciente para $x > 1$; decreciente para $x < 1$; cóncava hacia arriba para $x < e$; cóncava hacia abajo para $x > e$. El mínimo relativo es (1, 0); el punto de inflexión es (e ,1). El eje y ($x = 0$) es una asíntota vertical.



21. *a*) Cuando $t \to \infty, f(t) \to 1$

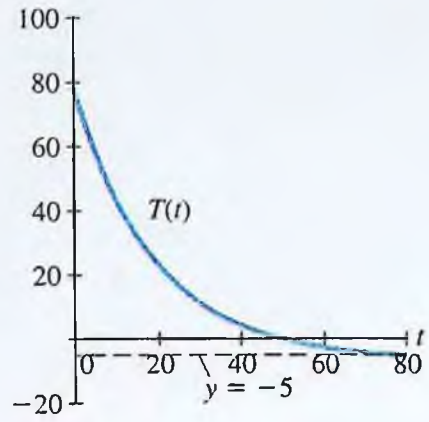


b) 0.741

c) 0.089

23. *a*) $A = 85, k = \frac{1}{20} \ln \frac{17}{6}$

b)

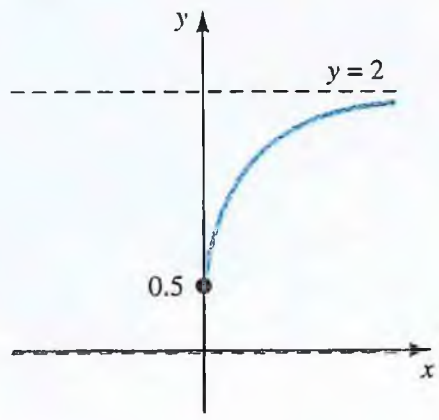


La temperatura se aproxima a –5°C.

c) 12.8°C

d) 54.4 minutos

25. *a*)



b) 500

c) 1 572

d) 2 000

27. 35.7 unidades por día

29. *a*) Aproximadamente 403 copias

b) 348 copias

31. *a*) $e - 1 \approx 1.7$ años

b) El ritmo de aprendizaje $L'(t)$ es máximo cuando $t = 0$ (al nacer).

33. $C = \frac{1}{199}; k = 0.1745$

La rapidez de cambio de proporción de comercio diario es

$$p'(t) = \frac{199ke^{kt}}{(199 + e^{kt})^2}$$

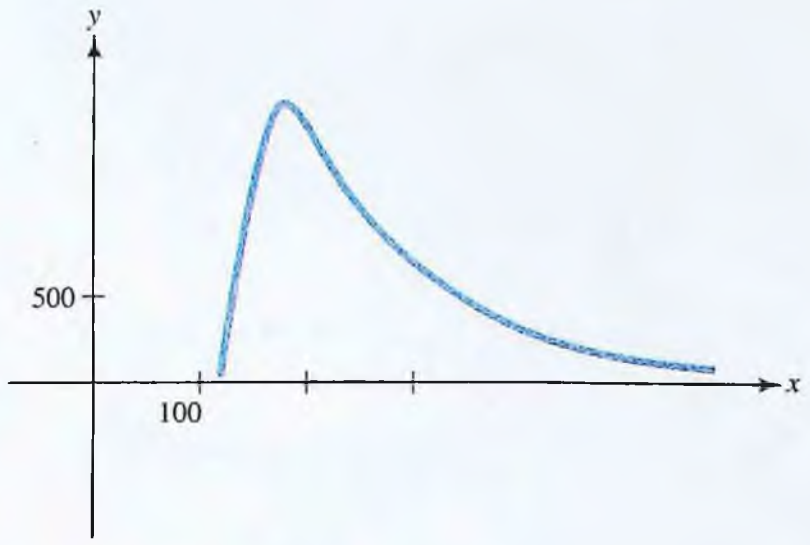
que se maximiza cuando

$$p''(t) = 0; t \approx 30.33 \text{ semanas}$$

$$p(30.33) \approx 0.5$$

www.FreeLibros.com

35. *a*) $P(x) = 1\,000e^{-0.02x}(x - 125)$



b) $175

37. Dentro de 69.44 años

39. 0.45 años

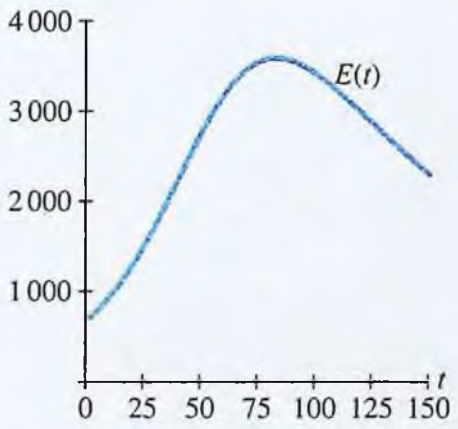
41. *a*) $C = \dfrac{b}{aR}$; $E''\left(\dfrac{b}{aR}\right) = \dfrac{2a^3R^3}{b} > 0$

b) $k = \dfrac{b}{aR}$; $m = \dfrac{4}{e}a^2R^2$

43. *a*) $E(t) = 1\,000w(t)p(t)$

b) $t = 82$; 3 527 libras

c)



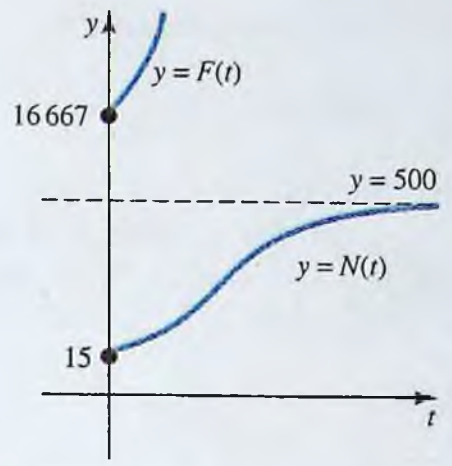
45. *a*) $C = 9, k = \dfrac{1}{2}\ln 3$

b) 4 horas

c) 4 horas

47. *a*) $N(0) = 15$ empleados; $N(5) = 482$ empleados; 2.10 años; 500 empleados

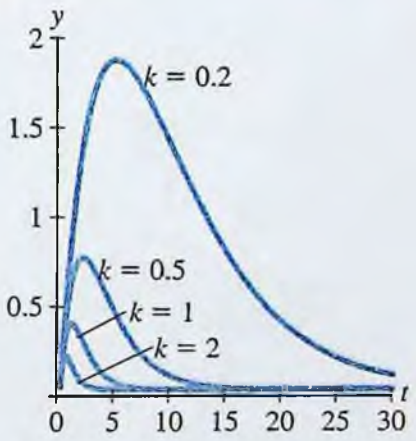
b)



49. *a*) $C'(t) = Ae^{-kt}(1 - kt)$; $C(t)$ es creciente para $t < \dfrac{1}{k}$ y decreciente para $t > \dfrac{1}{k}$. La concentración máxima es $\dfrac{A}{ke}$ en $t = \dfrac{1}{k}$.

b) $C''(t) = kAe^{-kt}(kt - 2)$; la gráfica de $C(t)$ es cóncava hacia arriba para $t > \dfrac{2}{k}$ y para $t < \dfrac{2}{k}$ es cóncava hacia abajo. Entonces $\left(\dfrac{2}{k}, \dfrac{2A}{ke^2}\right)$ es el punto de inflexión. La rapidez de cambio de concentración de medicamento es mínima en el punto de inflexión.

c)



El punto donde ocurre el máximo se corre a la izquierda cuando k aumenta y disminuye la altura máxima.

51. *a*) $Q(t) = 1\,139e^{0.06t}$, $Q(7) = 1\,734$ miembros de personal

b) $t \simeq 9.38$ (hacia 1957), $t \approx 11.5$ años

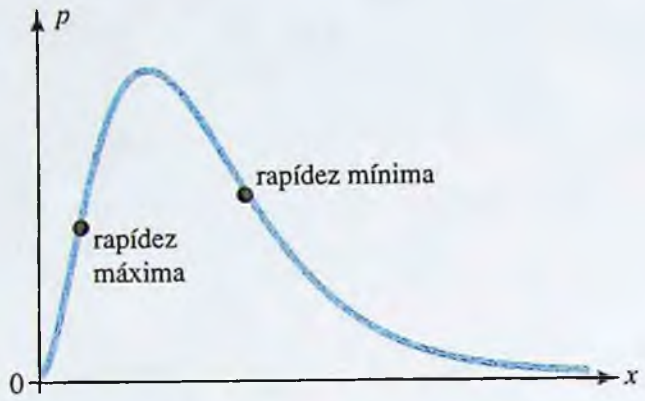
c) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

53. *a*) $x = r$; $p''(r) < 0$

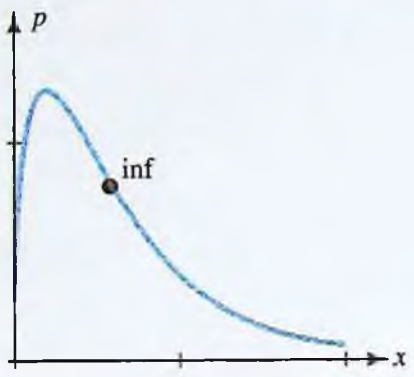
www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

b) Los puntos de inflexión ocurren en $x = \dfrac{r(s - \sqrt{s})}{s}$ y $x = \dfrac{r(s + \sqrt{s})}{s}$. Ambos son positivos porque $s > 1$. La rapidez de producción de células sanguíneas se maximiza y minimiza en los dos puntos de inflexión, respectivamente.



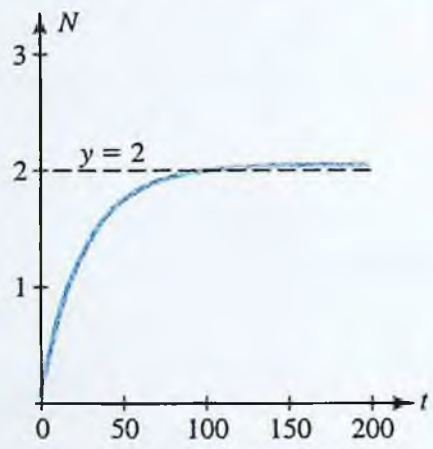
c)



Hay sólo un punto de inflexión.

55. $f''(t) = 0$ cuando $t = \dfrac{\ln c}{k}$ y $f\left(\dfrac{\ln c}{k}\right) = \dfrac{A}{2}$ o la mitad del número de residentes susceptibles.

57.

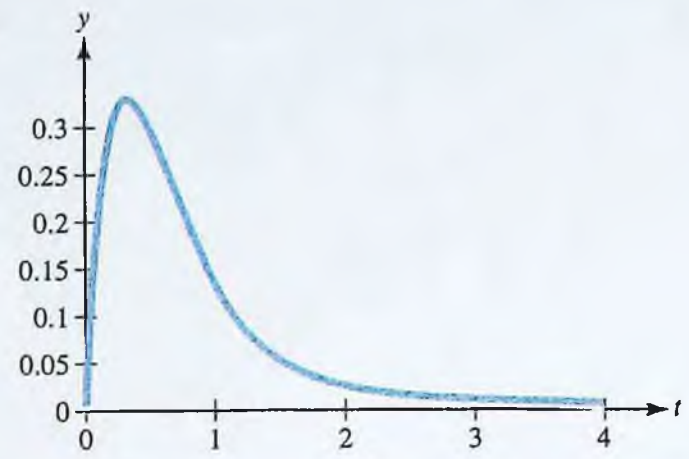


El valor de N se aproxima al máximo de 2 millones de personas.

59. *a*) $t = \dfrac{1}{b - a} \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$

"A la larga," la concentración se aproxima a 0.

b)



c) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

61. *a*) $V(5) = \$207.64$;

$$V'(t) = V_0\left(1 - \frac{2}{L}\right)^t \ln\left(1 - \frac{2}{L}\right)$$

b) $100 \ln\left(1 - \dfrac{2}{L}\right)$

CAPÍTULO 4 | Revisión

1. *a*) 1

b) $\dfrac{10}{3}$

c) 0

d) $\dfrac{16}{81}$

2. *a*) $27x^6y^3$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}xy^{2/3}}$

c) $\dfrac{y^{7/6}}{x^{1/6}}$

d) $\dfrac{1}{x^{6.5}y^8}$

3. *a*) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x(x^2 - 5x + 3)}{(x^2 - 3x)^2}$

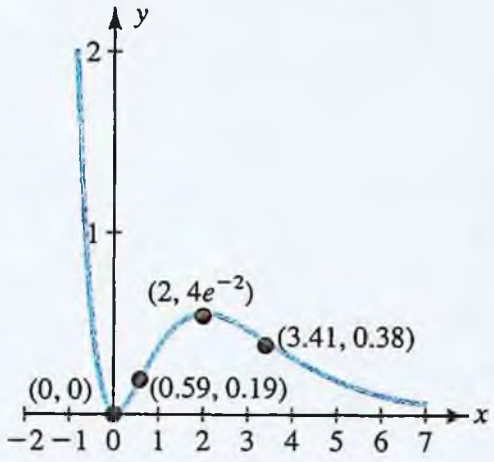
b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x^2 + 4x - 3}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

c) $\dfrac{dy}{dx} = x^2(1 + 3 \ln x)$

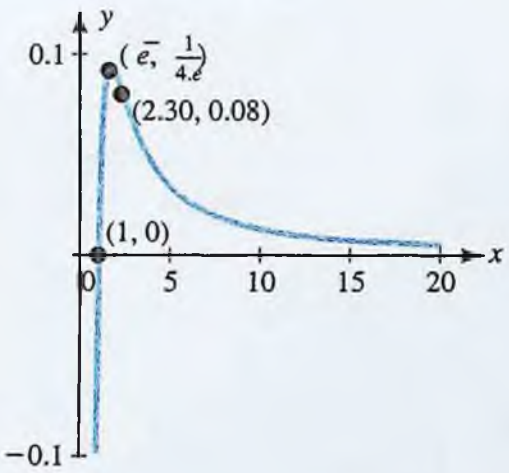
d) $\dfrac{dy}{dx} = \left(-2 + \dfrac{6}{2x - 1} + \dfrac{2x}{1 - x^2}\right)$

www.FreeLibros.com

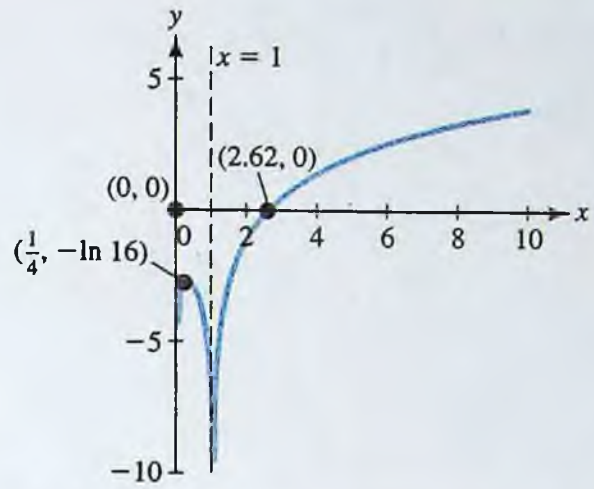
4. *a*) $f(x)$ es creciente para $0 < x < 2$; decreciente para $x < 0$ y $x > 2$; cóncava hacia arriba para $x < 2 - \sqrt{2}$ y $x > 2 + \sqrt{2}$; cóncava hacia abajo para $2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$. Hay un máximo relativo en $x = 2$, un mínimo relativo en $x = 0$. Hay dos puntos de inflexión, en $x = 2 - \sqrt{2}$ y $x = 2 + \sqrt{2}$. El eje x ($y = 0$) es una asíntota horizontal.



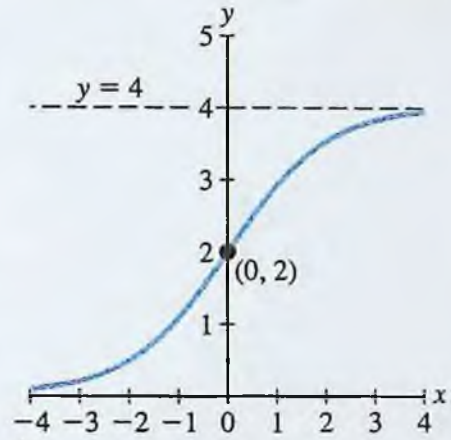
b) $f(x)$ es creciente para $0 < x < \sqrt{e}$; decreciente para $x > \sqrt{e}$; cóncava hacia arriba para $x > e^{5/6}$; cóncava hacia abajo para $x < e^{5/6}$. Hay un máximo relativo en $x = \sqrt{e}$. Hay un punto de inflexión en (2.30, 0.08), donde $x < e^{5/6}$. El eje $y (x = 0)$ es una asíntota vertical, y el eje x ($y = 0$) es una asíntota horizontal.



c) $f(x)$ es creciente para $0 < x < \frac{1}{4}$ y $x > 1$; decreciente para $\frac{1}{4} < x < 1$; cóncava hacia abajo para $x \neq 1$. Hay un máximo relativo en $x = \frac{1}{4}$. Hay dos puntos de inflexión, y $x = 0$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.



d) $f(x)$ es creciente para toda x; cóncava hacia arriba para $x < 0$; cóncava hacia abajo para $x > 0$. Hay un punto de inflexión en $x = 0$, y $y = 0$ y $y = 4$ son asíntotas horizontales.



5. *a*) $x = 3, x = -1$

b) $x = \dfrac{1}{\ln 4}$

c) $x = -4, x = 4$

d) $t = -2 \ln \dfrac{11}{3}$

6. $2 323.67; 8.1 años

7. *a*) Creciente para $-1 < t < e - 1$; decreciente para $t > e - 1$

b) $t = e^{3/2} - 1$

c) El precio se aproxima a $500.

8. *a*) $q'(p) = -1\,000e^{-p}(p + 1) < 0$ para $p \geq 0$

b) $p = \sqrt{2}$ o $141.42; $11 738.71

9. 6 601 años

10. *a*) 80 000

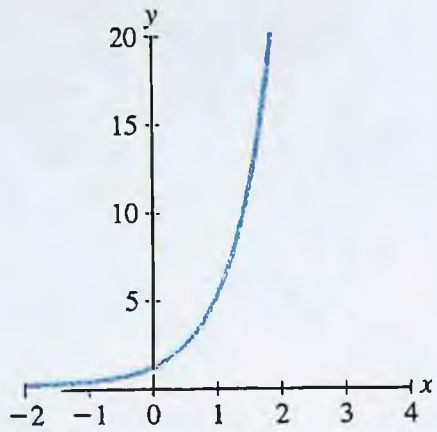
b) 2 horas; 81 873

c) La población desaparece por completo.

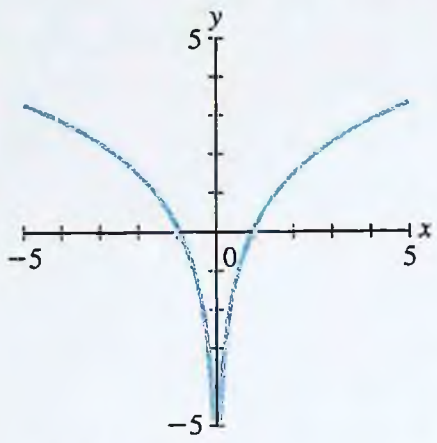
www.FreeLibros.com

CAPÍTULO 4 | Problemas de repaso

1.



3.



5. *a*) $f(4) = \dfrac{3\,125}{8}$

b) $f(3) = \dfrac{100}{3}$

c) $f(9) = \dfrac{65}{2}$

d) $f(10) = \dfrac{6}{5}$

7. $x = 25 \ln 4$

9. $x = e^2$

11. $x = \dfrac{41}{2}$

13. $x = 0$

15. $\dfrac{dy}{dx} = xe^{-x}(2 - x)$

17. $\dfrac{dy}{dx} = 2 \ln x + 2$

19. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x \ln 3}$

21. $\dfrac{dy}{dx} = e^x$ (Nótese que $y = e^x$.)

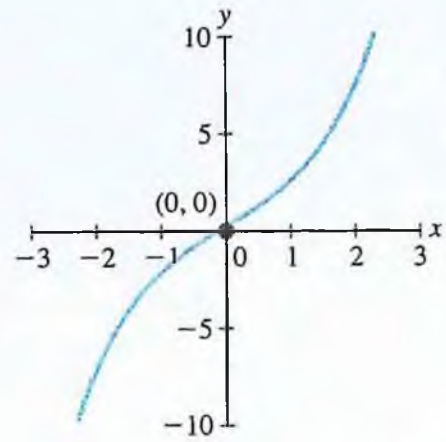
23. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(1 + 2e^{-x})}{1 + e^{-x}}$

25. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-e^{-x}(x^2 + x + 1 + x \ln x)}{x(x + \ln x)^2}$

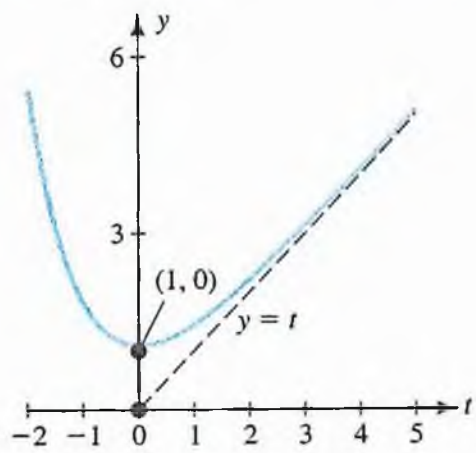
27. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ye^{x-x^2}(2x - 1) + 1}{e^{x-x^2} - 1}$

29. $\dfrac{dy}{dx} = y\left[\dfrac{3x + 3e^{2x}}{x^2 + e^{2x}} - 1 - \dfrac{1 - 2x}{3(1 + x - x^2)}\right]$

31. $f(x)$ es creciente para toda x; cóncava hacia arriba para $x > 0$; cóncava hacia abajo para $x < 0$. Hay un punto de inflexión en $x = 0$.

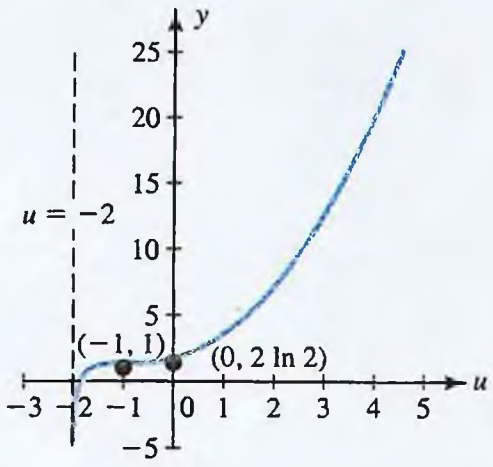


33. $f(x)$ es creciente para $t > 0$; decreciente para $t < 0$; cóncava hacia arriba para toda t. Hay un mínimo relativo en $t = 0$. No hay puntos de inflexión.

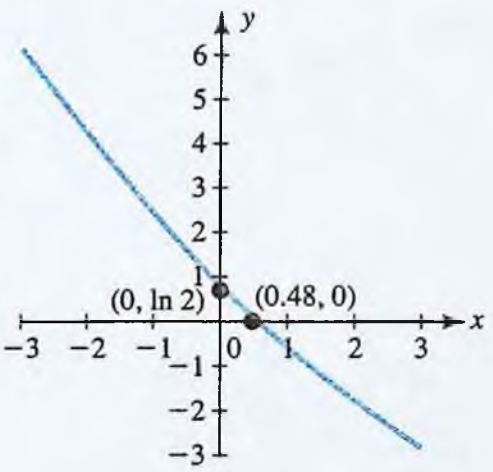


www.FreeLibros.com

35. $F(u)$ es creciente para $-2 < u < -1$ y $u < -1$; cóncava hacia arriba para $u > -1$; cóncava hacia abajo para $-2 < u < -1$. Hay un punto de inflexión en $u = -1$ y $u = -2$ es una asíntota vertical.



37. $G(x)$ es decreciente para toda x. $G(x)$ es cóncava hacia arriba para toda x.



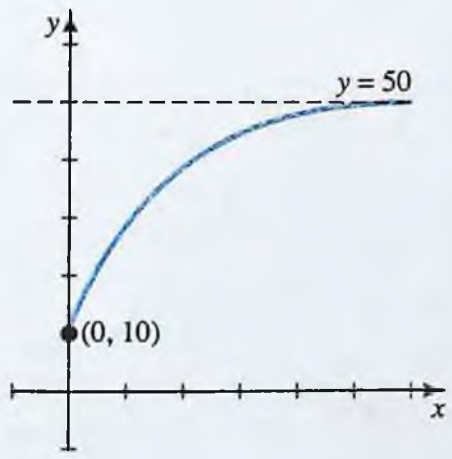
39. ln 4; ln 3

41. $\left(e + \frac{1}{e}\right)^5$; 32

43. $y = 2x - 2$

45. $y = 4x$

47. *a*)



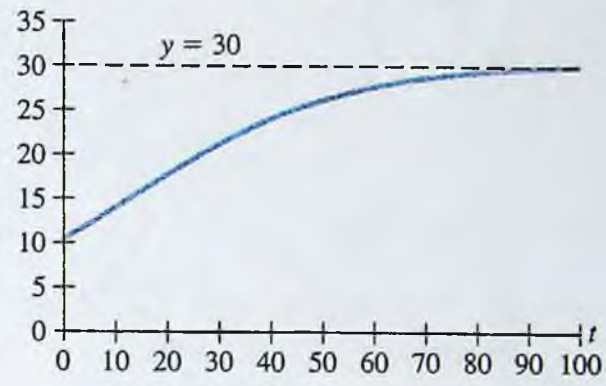
b) 10 000

c) 32 027

d) 9.81 miles de dólares ($9 808.29)

e) Un poco menos de 50 000 unidades

49. *a*)



b) 10 millones

c) 17.28 millones (17 283.507)

d) La población se aproximará a 30 millones.

51. 8.20% por año capitalizado continuamente

53. *a*) $4 323.25

b) $4 282.09

55. 5.83%

57. *a*) 0.13 partes por millón por año

b) Porcentaje constante de 3%

59. Después de 200 años

61. *a*) Como $\lambda = \frac{\ln 2}{k}$, tenemos que $k = \frac{\ln 2}{\lambda}$ y

$Q(t) = Q_0 e^{-(\ln 2/\lambda)t}$.

b) $Q_0(0.5)^{kt} = Q_0 e^{-(\ln 2/\lambda)t}$

$kt \ln 0.5 = -\left(\frac{\ln 2}{\lambda}\right)t$

Así, $k = \frac{1}{\lambda}$

63. La edad de bronce se inició hace alrededor de 5 000 años (3 000 a.C.); el máximo porcentaje es 55%

65. 0.8110 minutos = 48.66 segundos; −8.64°C por minuto

67. *a*) $A = 5e$, $k = \frac{1}{2}$

b) $t = 9.78$ horas

69. *a*) 0.15% por año

b) 70.24 años, 0.15% por año

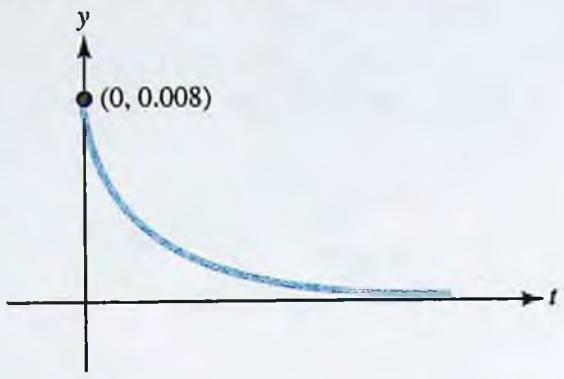
71. $10^{-1.6} \approx 0.0251$

RESPUESTAS

www.FreeLibros.com

73. *a*) $D(10) = 0.00195$; $D(25) = 0.000591$

b)



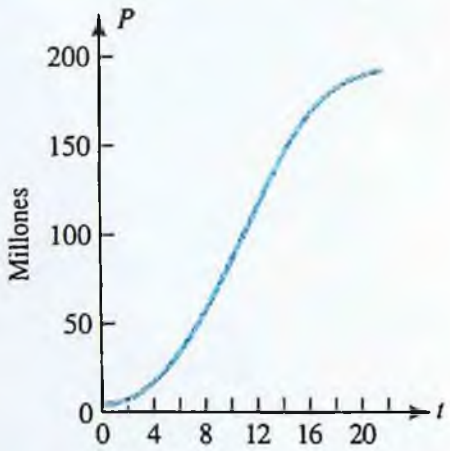
75. *a*) Queda un porcentaje de 2.31×10^{-200}, demasiado poco para una medición correcta.

b) Ejercicio de escritura.

77. *a*)

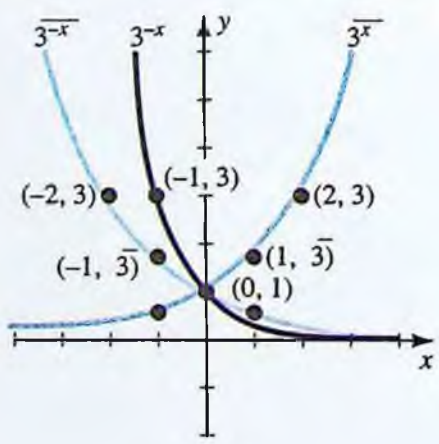
1790	3 867 087
1800	5 256 550
1830	12 956 719
1860	30 207 500
1880	50 071 364
1900	77 142 427
1920	108 425 601
1940	138 370 607
1960	162 289 823
1980	178 782 499
1990	184 566 653
2000	189 034 385

b) El modelo predice que la población fue creciente con más rapidez hacia 1915.



c) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

79.



81. $x = 1.066$

83.

n	$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$	$(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$
8	22.63	22.36
9	32.27	31.62
12	88.21	85.00
20	957.27	904.84
25	3 665	3 447
31	16 528	15 494
37	68 159	63 786
38	85 679	80 166
43	261 578	244 579
50	1 165 565	1 089 362
100	1.12×10^{10}	1.05×10^{10}
1,000	2.87×10^{47}	2.76×10^{47}

$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}} > (\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$

CAPÍTULO 5 | Sección 1

1. $-3x + C$

3. $\frac{x^6}{6} + C$

5. $-\frac{1}{x} + C$

7. $4\sqrt{t} + C$

9. $\frac{5}{3}u^{3/5} + C$

11. $t^3 - \frac{2\sqrt{5}}{3}t^{3/2} + 2t + C$

13. $2y^{3/2} + y^{-2} + C$

15. $\frac{e^x}{2} + \frac{2}{5}x^{5/2} + C$

17. $\frac{u^{1.1}}{3.3} - \frac{u^{2.1}}{2.1} + C$

19. $x + \ln x^2 - \frac{1}{x} + C$

21. $-\frac{5}{4}x^4 + \frac{11}{3}x^3 - x^2 + C$

23. $\frac{2}{7}t^{7/2} - \frac{2}{3}t^{3/2} + C$

25. $\frac{1}{2}e^{2t} + 2e^t + t + C$

27. $\frac{1}{3}\ln|y| - 10\sqrt{y} - 2e^{-y/2} + C$

www.FreeLibros.com

29. $\frac{2}{5}t^{5/2} - \frac{2}{3}t^{3/2} + 4t^{1/2} + C$

31. $y = \frac{3}{2}x^2 - 2x - \frac{3}{2}$

33. $y = \ln x^2 + \frac{1}{x} - 2$

35. $f(x) = 2x^2 + x - 1$

37. $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{2}{x} + 2x - \frac{5}{4}$

39. $f(x) = -e^{-x} + \frac{x^3}{3} + 5$

41. 10 128 personas

43. $\frac{5}{2}(e^{0.4} - e^{0.2})$

45. \$22 360

47. *a*) $18\frac{1}{3}$ (18 artículos)

b) $48\frac{1}{3}$ (48 artículos)

49. 3 253

51. *a*) $T(t) = 16 - 20e^{-0.35t}$

b) 6.1°C

c) 3.44 horas

53. *a*) $P(q) = 100q - q^2 - 200$

b) $q = 50$; \$2 300

55. $c(x) = 0.9x + 0.2x^{3/2} + 10$

57. $f'(x)$ se maximiza cuando $x = 10$.

a) Siete artículos por minuto

b) $f(x) = x + 0.6x^2 - 0.02x^3$

c) 100 artículos

59. \$2 265.80

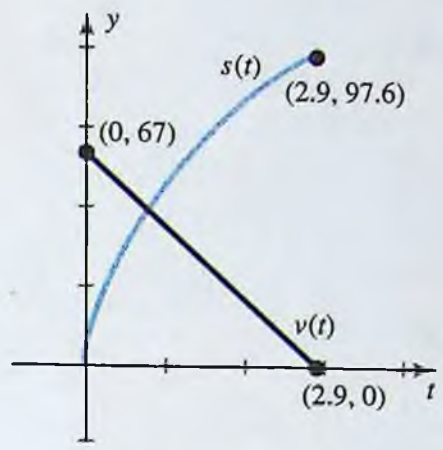
61. $v(r) = \frac{1}{2}a(R^2 - r^2)$

63. 20 metros

65. $\int b^x dx = \int e^{x \ln b} dx = \frac{e^{x \ln b}}{\ln b} + C = \frac{b^2}{\ln b} + C$

67. *a*) $v(t) = -23t + 67$; $s(t) = -\frac{23}{2}t^2 + 67t$

b)



c) $v(t) = 0$ cuando $t = 2.9$ seg y $s(2.9) = 97.6$ ft; $s(t) = 45$ ft cuando $t \approx 0.77$ seg o 5.05 seg y $v(0.78) \approx 49.30$ ft/seg mientras que $v(5.05) \approx -49.15$.

CAPÍTULO 5 | Sección 2

1. *a*) $u = 3x + 4$

b) $u = 3 - x$

c) $u = 2 - t^2$

d) $u = 2 + t^2$

3. $\frac{1}{12}(2x + 6)^6 + C$

5. $\frac{1}{6}(4x - 1)^{3/2} + C$

7. $-e^{1-x} + C$

9. $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$

11. $\frac{1}{12}(t^2 + 1)^6 + C$

13. $\frac{4}{21}(x^3 + 1)^{7/4} + C$

15. $\frac{2}{5} \ln |y^5 + 1| + C$

17. $\frac{1}{26}(x^2 + 2x + 5)^{13} + C$

19. $\frac{3}{5} \ln |x^5 + 5x^4 + 10x + 12| + C$

21. $-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{u^2 - 2u + 6}\right) + C$

RESPUESTAS

www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

23. $\frac{1}{2}(\ln 5x)^2 + C$

25. $\frac{-1}{\ln x} + C$

27. $\frac{1}{2}[\ln (x^2 + 1)]^2 + C$

29. $\ln |e^x - e^{-x}| + C$

31. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\ln |2x + 1| + C$

33. $\frac{1}{10}(2x + 1)^{5/2} - \frac{1}{6}(2x + 1)^{3/2} + C$

35. $2 \ln (\sqrt{x} + 1) + C$

37. $y = \ln |x + 1| + 1$

39. $y = \frac{1}{2}\ln |x^2 + 4x + 5| - \frac{1}{2}\ln 2 + 3$

41. $f(x) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}(1 - 2x)^{5/2}$

43. $f(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{4-x^2}$

45. *a)* $x(t) = -\frac{4}{9}(3t + 1)^{3/2} + \frac{40}{9}$

b) $x(4) = -16.4$

c) $t = 0.4$

47. *a)* $x(t) = \sqrt{2t + 1} - 1$

b) $x(4) = 2$

c) $t = \frac{15}{2}$

49. *a)* $C(q) = (q - 4)^3 + 64 + k$, donde k son gastos generales

b) \$1 500

51. 2.3 metros

53. *a)* $R(x) = 50x - 175e^{-0.01x^2} + 175$

b) \$50 175

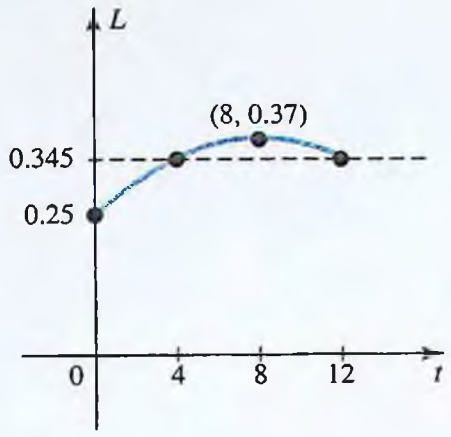
55. *a)* $C(t) = \frac{1}{e^{0.01t} + 1}$

b) 0.3543 mg/cm^3; 0.1419 mg/cm^3

c) 294 minutos

57. *a)* $L(t) = 0.03\sqrt{-t^2 + 16t + 36} + 0.07$; en $t = 8$ (3:00 P.M.); 0.37 partes por millón

b) El nivel de ozono a las 11:00 a.m. ($t = 4$) es $L(4) = 0.345$. El mismo nivel ocurre en $t = 12$ (7:00 p.m.).



59. *a)* $p(x) = \frac{300}{\sqrt{x^2 + 9}} + 15$

b) \$66.45; \$115

c) 265

61. $R'(x) = \frac{11 - x}{\sqrt{14 - x}}$, $C'(x) = 2 + x + x^2$

Sea $14 - x = u$, $du = -dx$. Entonces,

$$R(x) = -\int \frac{u - 3}{\sqrt{u}}du$$

$$= -\int (u^{1/2} - 3u^{-1/2})du$$

$$= -\left(\frac{2}{3}u^{3/2} - 6u^{1/2}\right) + K_1$$

$$= 6\sqrt{14 - x} - \frac{2}{3}(14 - x)^{3/2} + K_1$$

También tenemos

$$C(x) = \int (2 + x + x^2)dx = 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + K_2$$

de modo que la utilidad $P(x) = R(x) - C(x)$ satisface a

$P(9) - P(5) = R(9) - C(9) - [R(5) - C(5)] = -295.54 - (-64.167) = -231.373$

63. $\frac{3}{7}(x^{2/3} + 1)^{7/2} - \frac{3}{5}(x^{2/3} + 1)^{5/2} + C$

65. $e^x + 1 - \ln (e^x + 1) + C$

CAPÍTULO 5 | Sección 3

1. 15

3. $\frac{95}{2}$

www.FreeLibros.com

5. $\frac{6}{5}$

7. $-\frac{6}{5}$

9. $3 - \frac{4}{e}$

11. 1.95

13. 144

15. $\frac{8}{3} + \ln 3 \approx 3.7653$

17. $\frac{2}{9}$

19. 3.2

21. $\frac{4}{3}$

23. $\frac{7}{6}$

25. e

27. $\frac{8}{3}$

29. $e^3 - e^2$

31. -20

33. 0

35. 3

37. $\frac{33}{5}$

39. 4

41. $\frac{112}{9}$

43. $V(5) - V(0)$

45. \$480

47. 75 ppm

49. Alrededor de 98 personas

51. \$75

53. $1\,500\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4}\ln\frac{11}{9}\right) \approx 2\,626$ teléfonos

55. La concentración disminuye en 0.8283 mg/cm^3

57. Una reducción de \$1 870

59. $2 \ln 2 \approx 1.386$ gramos

61. $8\sqrt{11} - 8\sqrt{6}$ o sea 7 hechos

63. 96 ft

65. *a*) $\frac{\pi}{4}$

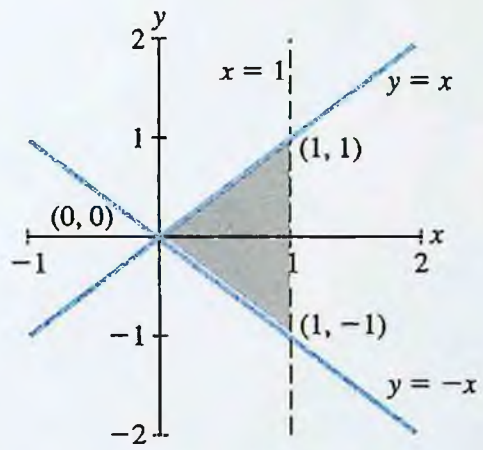
b) $\frac{\pi}{4}$; parte del área bajo el círculo $(x-1)^2 + y^2 = 1$

CAPÍTULO 5 | Sección 4

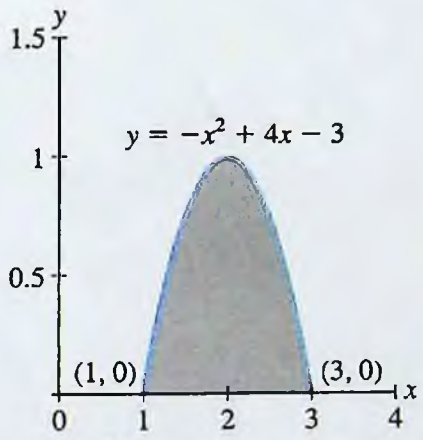
1. $\frac{5}{12}$

3. $2 \ln 2 - \frac{1}{2}$

5. Área = 1

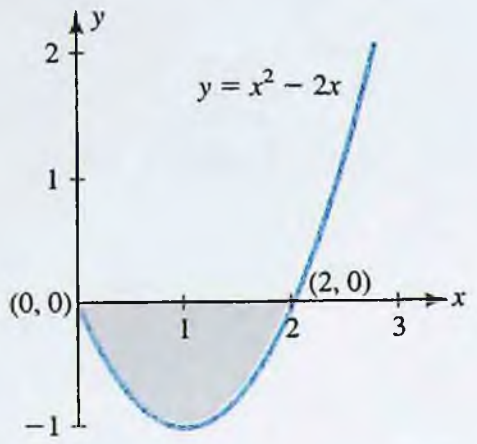


7. Área = $\frac{4}{3}$

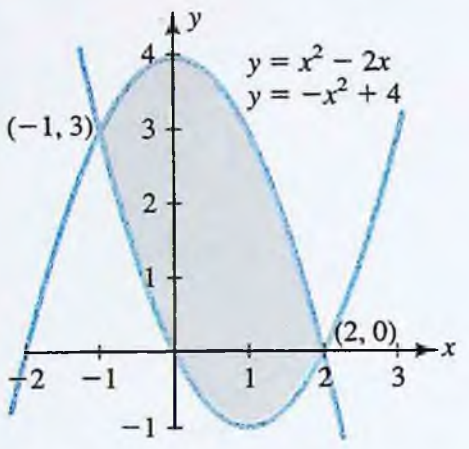


www.FreeLibros.com

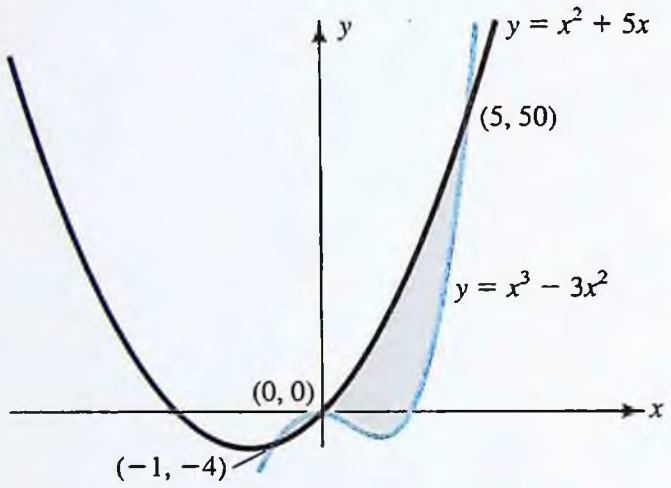
9. Área $= \frac{4}{3}$



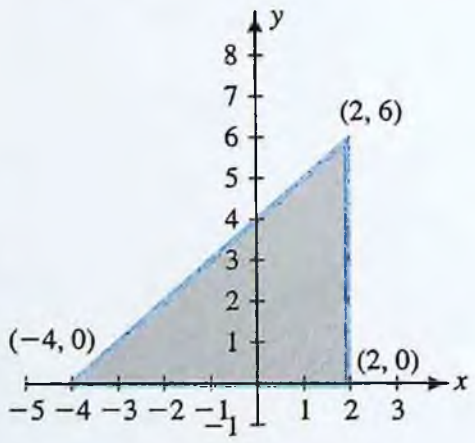
11. Área $= 9$



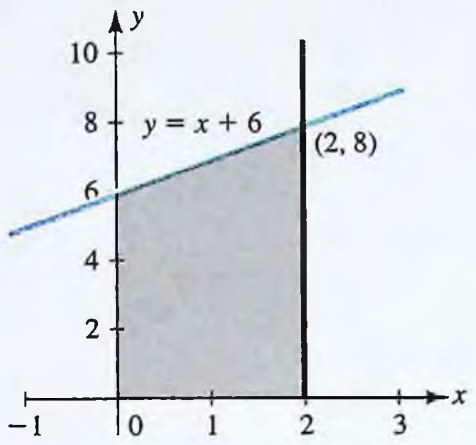
13. Área $= \frac{443}{6}$



15. Área $= 18$



17. Área $= 14$

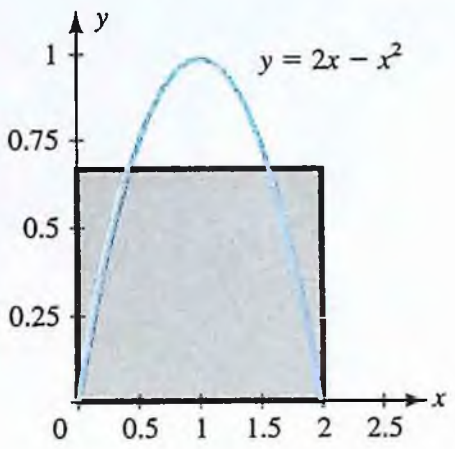


19. -2

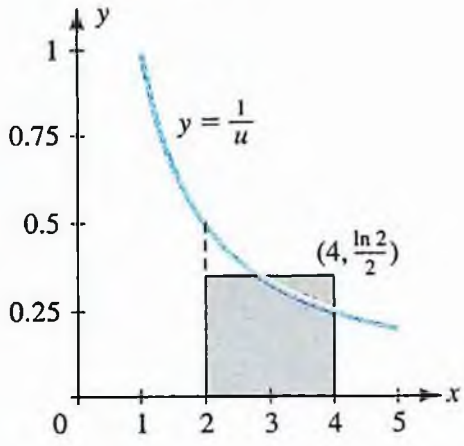
21. $\frac{3}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$

23. $\frac{\ln 5 - \ln 3}{\ln 3}$

25. Valor promedio $= \frac{2}{3}$



27. Valor promedio $= \frac{\ln 2}{2}$



29. $\frac{1}{2}$

31. 0.1833

www.FreeLibros.com

33. 0.383

35. \$1.57 por libra

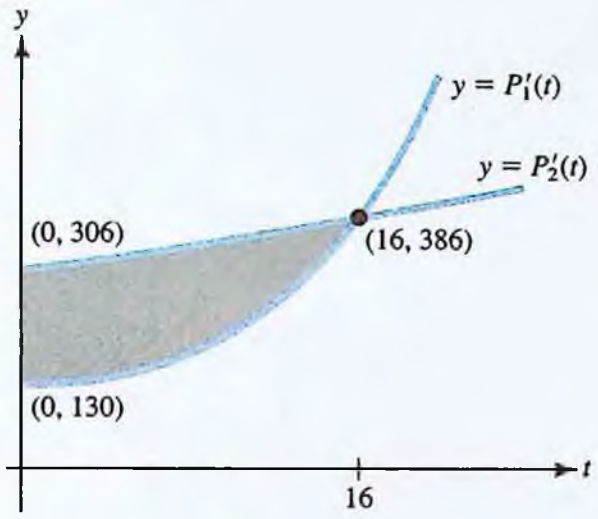
37. 2 272.2

39. 30 000 kg

41. *a*) 16 años

b) \$209 067

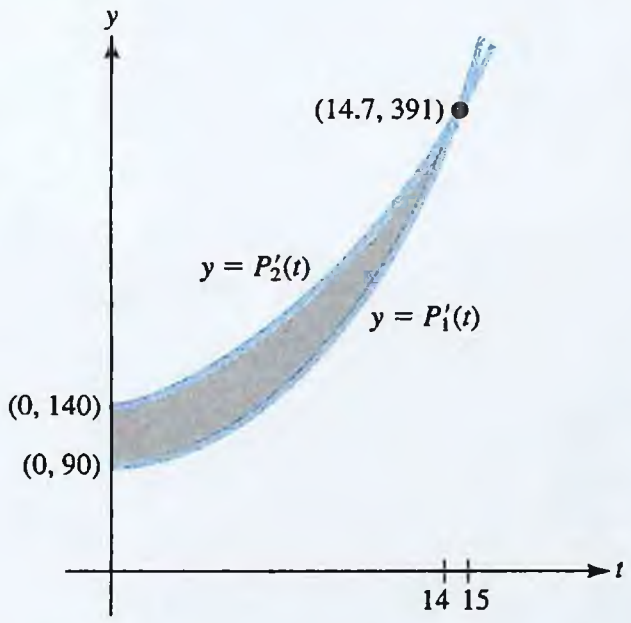
c)



43. *a*) 14.7 años

b) \$582 221

c)



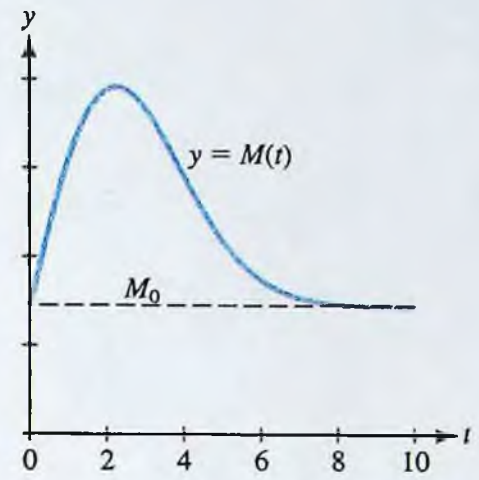
45. 0.412 millones

47. $\frac{1}{40}$ mg/cm^3

49. 39.25 mph

51. *a*) $M_0 + 20.833$

b) $t = \sqrt{5}, M(\sqrt{5}) = M_0 + 50\sqrt{5/e}$



53. Béisbol: $\frac{1}{3}$; fútbol: $\frac{5}{18}$; baloncesto: $\frac{9}{25}$. El fútbol es el deporte más equitativo; el baloncesto, el menos.

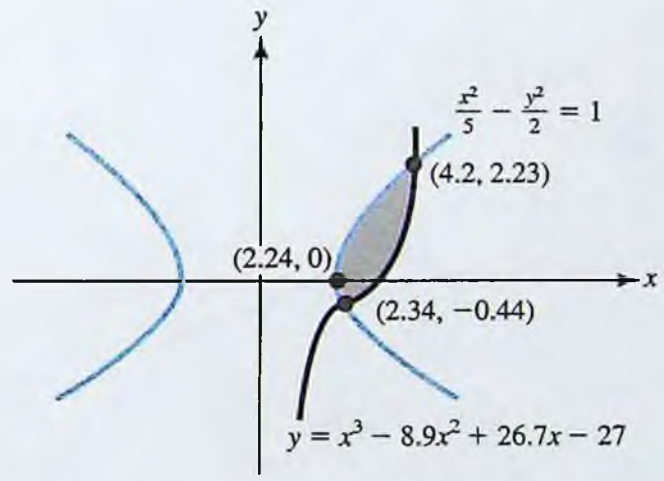
55. 5 710 personas

57. \$241 223.76

59. *a*) $S' = F''(M) = \frac{1}{3}(2k - 6M) = 0$ para $M = k/3$. Máximo porque $S'' = -2 < 0$.

b) $\frac{k^3}{108}$

61.



$$A = \int_{\sqrt{5}}^{2.34} \left[\sqrt{\frac{2x^2}{5} - 2} - \underbrace{\left(-\sqrt{\frac{2x^2}{5} - 2}\right)}_{\text{decreciente}}\right] dx$$

$$+ \int_{2.34}^{4.2} \left[\sqrt{\frac{2x^2}{5} - 2} - (x^3 - 8.9x^2 + 26.7x - 27)\right] dx$$

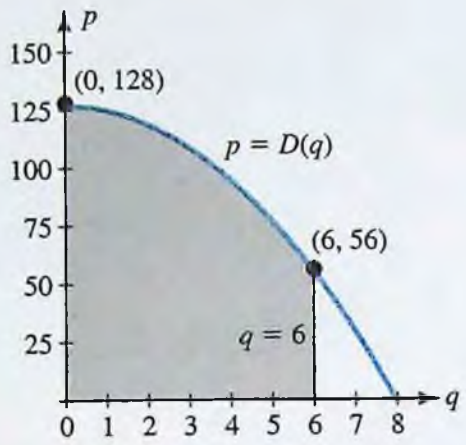
$$\approx 2.097$$

www.FreeLibros.com

CAPÍTULO 5 | Sección 5

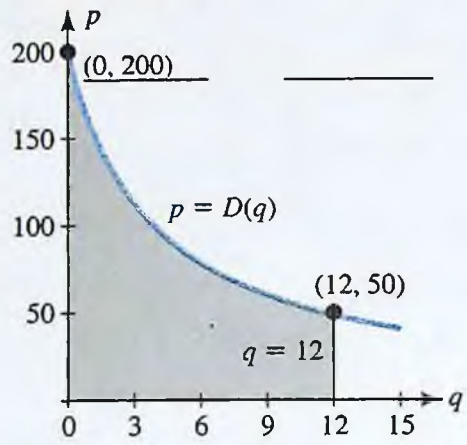
1. *a*) \$624

b)



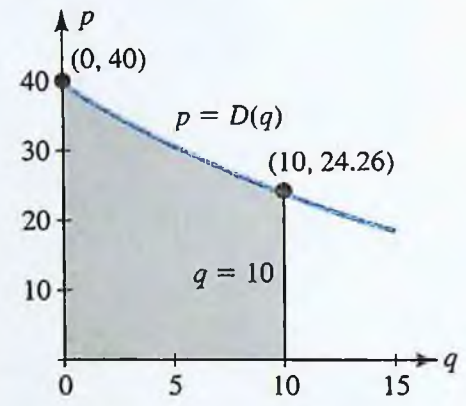
3. *a*) $1\,600 \ln 2 \approx \$1\,109.04$

b)

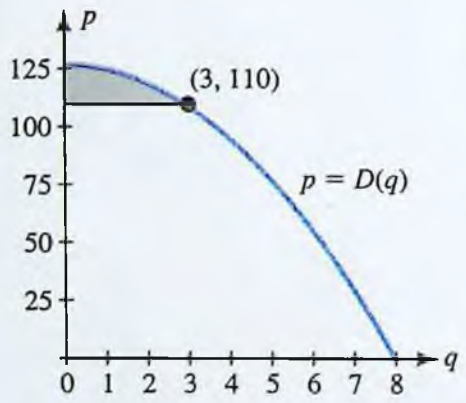


5. *a*) $800\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \approx \$314.78$

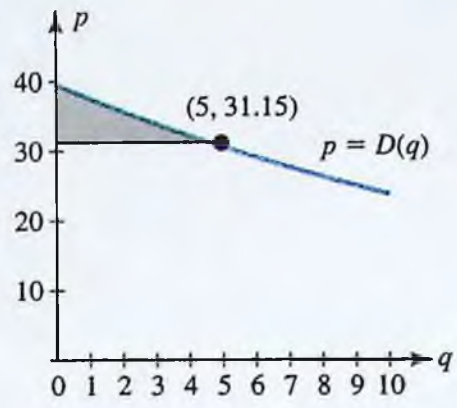
b)



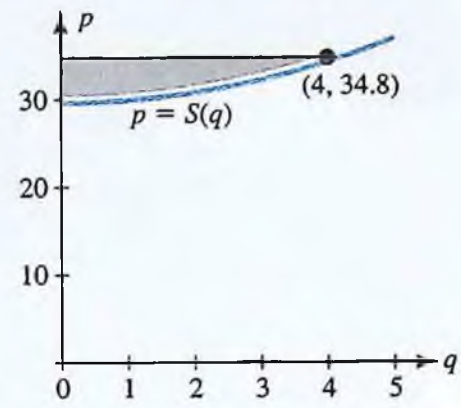
7. $p_0 = \$110$; CS = \$36



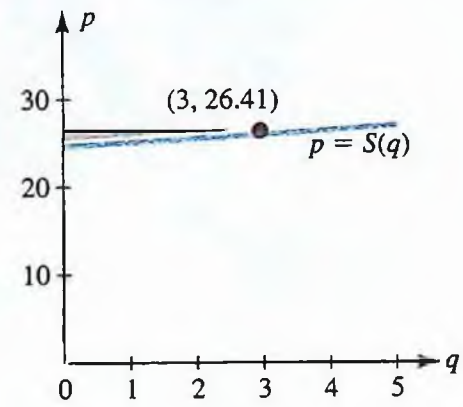
9. $p_0 = \$31.15$; CS = \$21.21



11. $p_0 = \$34.80$; PS = \$12.80



13. $p_0 = \$26.41$; PS = \$2.14



15. *a*) \$104

b) CS = \$162, PS = \$324

17. *a*) \$40

b) CS = \$200, PS = \$116.67

19. *a*) \$1

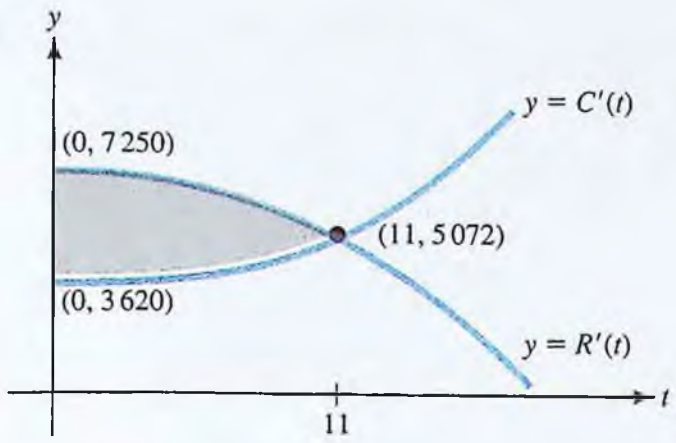
b) CS = \$3.09, PS = \$0.67

21. *a*) 11 años

b) \$26 620

www.FreeLibros.com

c)



23. *a*) 8

b) \$15 069

c) Las ganancias netas están representadas como el área entre la curva $R'(t) = 6\,537e^{-0.3t}$ y la recta horizontal $y = 593$.

25. \$1 182.82

27. \$237 730; \$319 453

29. \$5 308.78

31. El plan de \$50,000 es mejor, produciendo ingreso neto de \$37 465 contra \$22 479 por el plan de \$30 000 en 5 años.

33. *a*) $P(q) = -q^3 + 24q^2 + 108q - 3\,000$

b) 18 unidades

c) \$162

35. *a*) $P(t) = 32.5e^{0.04t} - 32.5$; 4.14 mil millones de barriles; 4.67 mil millones de barriles

b) 12 años

c) 382.2 mil millones de dólares

d) Las respuestas variarán.

37. *a*) $P(t) = 60e^{0.02t} - 60$; 3.71 mil millones de barriles; 3.94 mil millones de barriles

b) 9.12 años

c) 282.69 mil millones de dólares

d) Las respuestas variarán

39. \$1 929 148

41. *a*) \$207 360

b) Las respuestas variarán.

CAPÍTULO 5 | Sección 6

1. 30 484

3. 468 130

5. 61 070 138

7. Unos 80 miembros

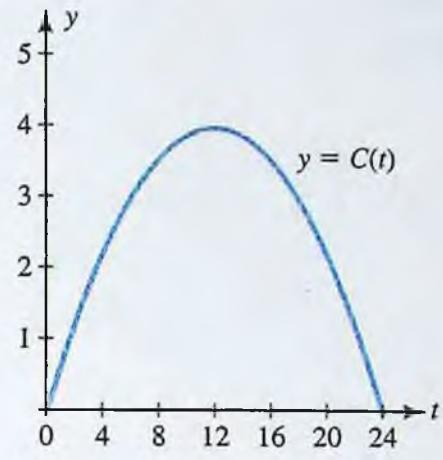
9. 4 097.62 (4 098 personas)

11. 515.48 mil millones de barriles

13. 4 207 miembros

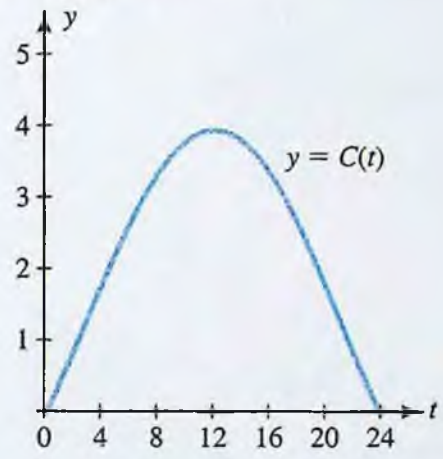
15. *a*) 0.0775 litros/segundo

b)



17. *a*) 0.0853 litros/segundo

b)



19. Aproximadamente 208 128 personas

21. *a*) El nivel LDL disminuye 6.16 unidades

b) $L(t) = \frac{3}{28}(49 - t^2)^{1.4} + 150 - \frac{21}{4}(49)^{0.4}$

c) 5.8 días

23. Después de T años, la primera población es

$$P_1(T) = \left(100\,000 - \frac{50}{0.011}\right)e^{-0.011T} + \frac{50}{0.011}$$

Entonces $P_1(T) < P(T)$ para $T = 50$ y $T = 100$, pero $P_1(300) > P(300)$.

25. 1 565.83 (1 566 animales)

27. 10 125 personas

29. $\int_0^{12} [W'(t) - D'(t)]dt = 0{,}363$;

unas 36 personas; 18.1%

31. *a*) 55 años

b) 70.78 años

www.FreeLibros.com

c) 86.36 años; ya han rebasado su esperanza de vida.

d) 71.69 años

33. *a)* 2.37 seg

b) 0.905 L

c) 0.382 L/seg

CAPÍTULO 5 | Revisión

1. *a)* $\frac{x^4}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{3}x^{3/2} - \frac{5}{2}e^{-2x} + C$

b) $\frac{x^2}{2} - 2x + 4 \ln |x| + C$

c) $\frac{2}{7}x^{7/2} - 2x^{1/2} + C$

d) $\frac{-1}{2\sqrt{3 + 2x^2}} + C$

e) $\frac{1}{4}(\ln x)^2 + C$

f) $\frac{1}{2}e^{1+x^2} + C$

2. *a)* $\frac{62}{5} + 4 \ln 2$

b) $e^3 - 1$

c) $1 - \ln 2$

d) $\sqrt{31} - 2$

3. *a)* $\frac{73}{6}$

b) 36

4. $1 - 2 \ln 2$

5. \$10 333.33

6. 71.14 mil millones de dólares

7. \$4 266.67

8. \$16 183.42

9. 45 055

10. 0.1 mg/cm^3

CAPÍTULO 5 | Problemas de repaso

1. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^{3/2} - 9x + C$

3. $\frac{x^5}{5} + \frac{5}{2}e^{-2x} + C$

5. $\frac{5}{3}x^3 - 3 \ln |x| + C$

7. $\frac{1}{6}t^6 - t^3 - \frac{1}{t} + C$

9. $\frac{2}{9}(3x + 1)^{3/2} + C$

11. $\frac{1}{12}(x^2 + 4x + 2)^6 + C$

13. $\frac{-3}{4(2x^2 + 8x + 3)} + C$

15. $\frac{1}{14}(v - 5)^{14} + \frac{5}{13}(v - 5)^{13} + C$

17. $-\frac{5}{2}e^{-x^2} + C$

19. $\frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + C$

21. 0

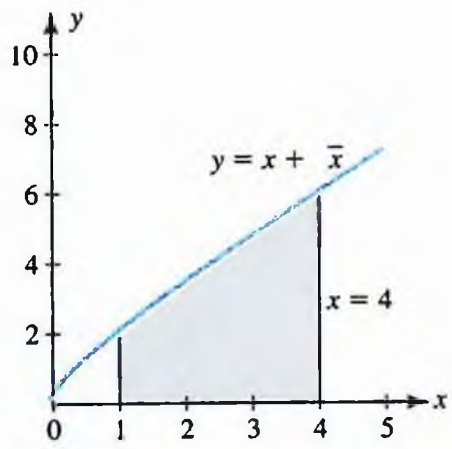
23. $\frac{1}{2}(e^2 + 5)$

25. 1,710

27. $1 - \frac{1}{e}$

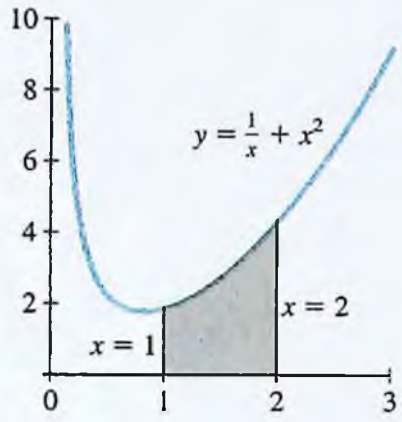
29. $e - 2$

31. Área $= \frac{101}{6}$

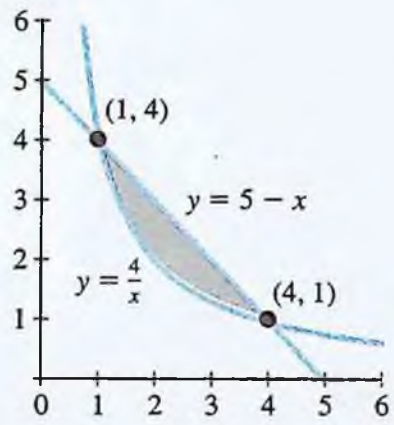


www.FreeLibros.com

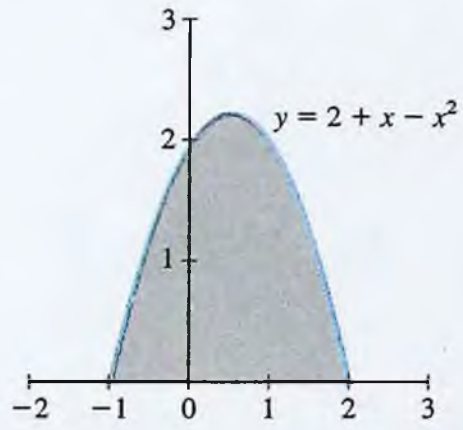
33. Área $= \ln 2 + \frac{7}{3}$



35. Área $= \frac{15}{2} - 8 \ln 2$



37. Área $= \frac{9}{2}$



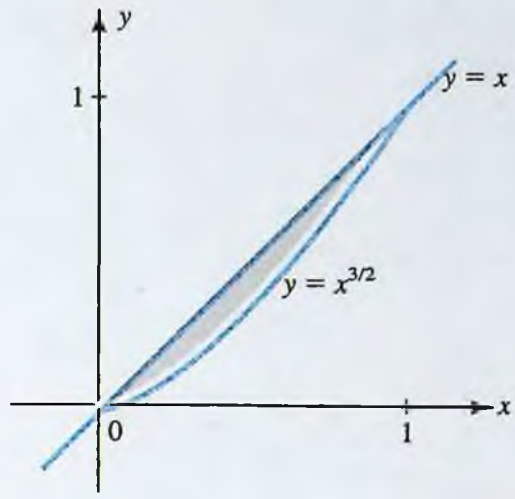
39. $\frac{11\,407}{84} - \frac{2\sqrt{2}}{21}$

41. $\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{e^4}\right)$

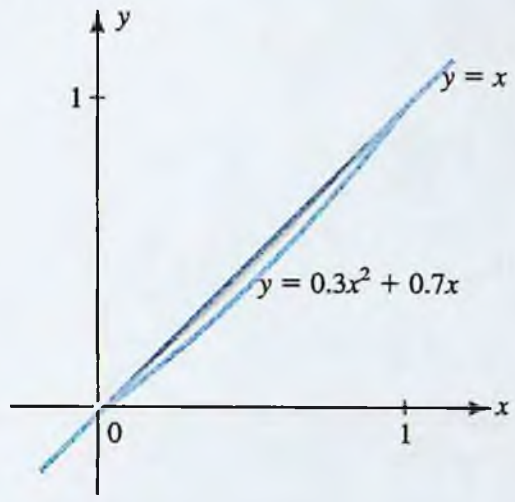
43. \$128; \$21.33

45. \$6.70; \$6.16

47. $GI = \frac{1}{5}$



49. $GI = \frac{1}{10}$



51. $y = 2x + 10$

53. $x = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$

55. $y = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + 5 - \frac{1}{2}\ln 2$

57. \$87.57

59. 1 220 personas

61. 11 250 pasajeros de cercanías

63. En 2001 (0.2554 mil millones de barriles contra 0.1003 mil millones de barriles en 2004)

65. \$7 377.37

67. 61.65 (alrededor de 62 casas)

69. 14 868 libras

71. \$565 056

73. \$1.32 por libra

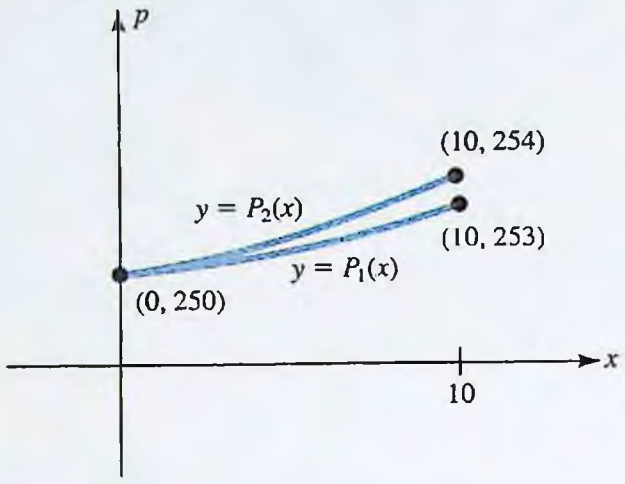
75. La temperatura disminuye en 2.88°C

RESPUESTAS

www.FreeLibros.com

77. *a)* $p_1(x) = 0.2x + 0.001x^3 + 250$; $p_1(10) = \$2.53$ por docena

b) $p_2(x) = 0.3x + 0.001x^3 + 250$; $p_2(10) = \$2.54$ por docena



79. 30 metros

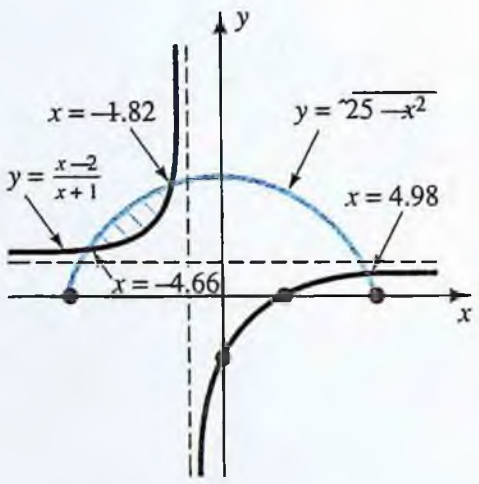
81. Terapeutas físicos

83. *a)* $\dfrac{1}{N}\displaystyle\int_0^N S(t)\,dt$

b) $\displaystyle\int_0^N S(t)\,dt$

c) La rapidez promedio es igual a la distancia total dividida entre el número total de horas.

85. La región limitada por las curvas es entre $x = -4.66$ y $x = -1.82$; las curvas también se cruzan en $x = 4.98$. El área también es aproximadamente 3.



CAPÍTULO 6 | Sección 1

1. $-(x + 1)e^{-x} + C$

3. $(2 - x)e^{x} + C$

5. $\dfrac{t^2}{2}\left(\ln 2t - \dfrac{1}{2}\right) + C$

7. $-5(v + 5)e^{-v/5} + C$

9. $\dfrac{2}{3}x(x - 6)^{3/2} - \dfrac{4}{15}(x - 6)^{5/2} + C$

11. $\dfrac{1}{9}x(x + 1)^9 - \dfrac{1}{90}(x + 1)^{10} + C$

13. $2x\sqrt{x + 2} - \dfrac{4}{3}(x + 2)^{3/2} + C$

15. $\dfrac{8}{3}$

17. $\dfrac{1}{4}(1 - 3e^{-2})$

19. $\dfrac{1}{12}(3e^4 + 1)$

21. $\dfrac{1}{16}(e^2 + 1)$

23. $-\dfrac{1}{x}(\ln x + 1) + C$

25. $\dfrac{1}{2}e^{x^2}(x^2 - 1) + C$

27. $\dfrac{1}{25}(3 - 5x - 3\ln|3 - 5x|) + C$

29. $\dfrac{-\sqrt{4x^2 - 9}}{x} + 2\ln|2x + \sqrt{4x^2 - 9}| + C$

31. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x}{2 + 3x}\right| + C$

33. $\dfrac{\sqrt{3}}{24}\ln\left|\dfrac{4 + \sqrt{3}u}{4 - \sqrt{3}u}\right| + C$

35. $x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + C$

37. $-\dfrac{1}{25}\left[\dfrac{5 + 4x}{x(5 + 2x)} + \dfrac{4}{5}\ln\left|\dfrac{x}{5 + 2x}\right|\right] + C$

39. $-(x + 1)e^{-x} - e^{-x} + 5 + 3/e$

41. $-2te^{-t/2} - 4e^{-t/2} + 4$

43. Aproximadamente \$13 212.06

45. Aproximadamente 2 008 876 personas

47. 29.4 mg/mL

49. \$39 220.72

51. \$11 417.35

53. 4 367

www.FreeLibros.com

55. *a*) $4.47
b) $14 263.84

57. $1 - \frac{2}{e} \simeq 0.2642$

59. 0.0904

61. $I = \int u^n e^{au}\, du$

Sea $f = u^n$ y $dV = e^{au}\, du$

entonces $df = nu^{n-1}\, du$ y $V = \frac{1}{a} e^{au}$

de modo que

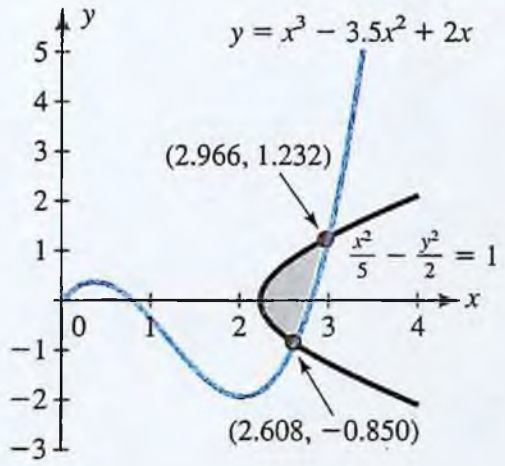
$$I = \frac{1}{a} u^n e^{au} - \int \frac{1}{a} e^{au} \cdot nu^{n-1}\, du$$

$$= \frac{1}{a} u^n e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{n-1} e^{au}\, du$$

63. (0.2437, 0.3528)

65. *a*) (3.481, 2.402)
b) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

67. Área ≈ 0.7583



69. 4.227

71. 0.4509

CAPÍTULO 6 | Sección 2

1. $\frac{1}{2}$

3. Diverge.

5. Diverge.

7. $\frac{1}{10}$

9. $\frac{5}{2}$

11. $\frac{1}{9}$

13. Diverge.

15. $\frac{2}{e}$

17. $\frac{2}{9}$

19. Diverge.

21. Diverge.

23. 2

25. $60 000

27. $600 000

29. 200

31. 50

33. *a*) Máquina 1: $28 519
Máquina 2: $20 222
La compañía debe comprar la máquina 2.
b) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

35. $\text{PV} = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T Qe^{-rt}\, dt$

$$= \lim_{T \to +\infty} Q\left(\frac{e^{-rt}}{-r}\right)\Bigg|_0^T$$

$$= \lim_{T \to +\infty} Q\left(\frac{e^{-rT}}{-r} - \frac{1}{-r}\right)$$

$$= \frac{Q}{r}$$

CAPÍTULO 6 | Sección 3

1. *a*) 2.3438
b) 2.3333

3. *a*) 0.7828
b) 0.7854

5. *a*) 1.1515
b) 1.1478

7. *a*) 0.7430
b) 0.7469

9. *a*) 0.5090 con $|E| \le \frac{1}{32}$

b) 0.5004 con $|E| \le \frac{1}{384}$

www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

11. *a*) 2.7968 con $|E| \le \frac{1}{600}$

b) 2.7974 con $|E| \le \frac{1}{60\,000}$

13. *a*) 1.4907 con $|E| \le \frac{e}{32}$

b) 1.4637 con $|E| \le \frac{19\,e}{11\,520}$

15. *a*) 164
b) 18

17. *a*) 36
b) 6

19. *a*) 179
b) 8

21. *a*) 3.0898
b) 3.1212

23. 0.1386

25. 51.75 millas

27. \$5 949.70

29. Área ≈ 230 pies cuadrados

31. \$412 653.33

33. GI ≈ 0.394

CAPÍTULO 6 | Revisión

1. *a*) $\frac{4\sqrt{2}\,x^{3/2}}{9}(-2 + 3\ln|x|) + C$

b) $25 - 20e^{1/5}$

c) $-\frac{298}{15}$

d) $-xe^{-x} + C$

2. *a*) 10

b) $\frac{3}{4}e^{-2}$

c) Diverge.

$$\lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1} + \ln|x+1|\right)\Big|_1^N$$

$$= \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{N+1} + \ln|N+1| - \frac{1}{2} - \ln 2\right) = \infty$$

d) $\frac{1}{2}$

3. *a*) $\frac{x}{4}[(\ln|3x|)^2 - 2\ln|3x| + 2] + C$

b) $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}+2}{x}\right| + C$

c) $\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C$

d) $-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{3x-4}\right| + C$

4. La radiactividad aumentará sin límite.

5. Aproximadamente \$1 666 666.67

6. 3.5

7. 16 000 unidades

8. Por la regla del trapecio, $\int_3^4 \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\,dx \approx 1.0276$

La respuesta correcta es $-1 + 5\log\frac{3}{2} \approx 1.0273$.

El error de la aproximación es 0.0003.

CAPÍTULO 6 | Problemas de repaso

1. $-(1+t)\,e^{1-t} + C$

3. $\frac{x}{3}(2x+3)^{3/2} - \frac{1}{15}(2x+3)^{5/2} + C$

5. $-2 + 4\ln 2$

7. $\frac{74}{7}$

9. $\frac{x^2}{9}(3x^2+2)^{3/2} - \frac{2}{135}(3x^2+2)^{5/2} + C$

11. $\frac{5}{8}\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right| + C$

13. $-3(18 + 6w + w^2)\,e^{-w/3} + C$

15. $x[-6 + 6\ln 2x - 3(\ln 2x)^2 + (\ln 2x)^3] + C$

17. Diverge.

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{1}{\sqrt[3]{1+2x}}\,dx = \lim_{N\to\infty} -\frac{3}{4} + \frac{3(1+2N)^{2/3}}{4}$$

$$= \infty$$

19. Diverge.

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{3t}{t^2+1}\,dt = \lim_{N\to\infty}\frac{3}{2}\ln(1+N^2) = \infty$$

www.FreeLibros.com

21. $\frac{1}{4}$

23. $\frac{1}{4}$

25. Diverge.

$$\lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \lim_{N\to\infty} 2(2 - 2\sqrt{N} + \sqrt{N}\ln N) = \infty$$

27. 15 000

29. La población aumenta sin límite.

31. \$320 000

33. *a*) 1.1016 con $|E| \le \frac{1}{75}$

b) 1.0987 con $|E| \le \frac{4}{9\,375}$

35. *a*) 3.0607 con $|E| \le \frac{e}{1\,200}$

b) 3.0591 con $|E| \le \frac{e}{200\,000}$

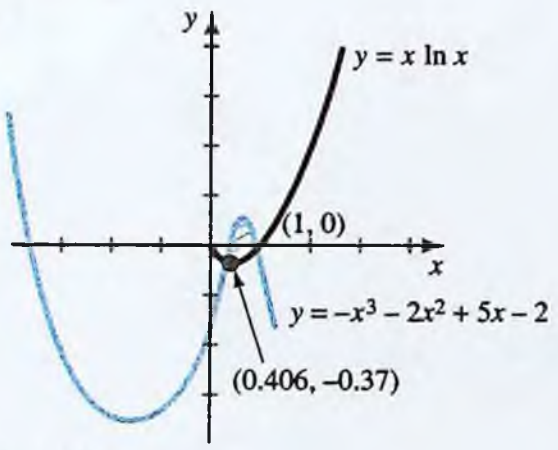
37. *a*) 58

b) 8

39. *a*) $\int_0^8 \sqrt{q}\, e^{0.01q}\, dq$

b) 15.6405

41. *a*)



b) 0.1692

43. $\frac{2}{3}\ln 2 \approx 0.4621$

45. $I(1) \approx 0.4214$
$I(10) \approx 0.5$
$I(50) \approx 0.5$
$I(N)$ converge a $\frac{1}{2}$ cuando $N \to \infty$.

CAPÍTULO 7 | Sección 1

1. $-3, 16$

3. $3, \sqrt{3}$

5. $\frac{3}{2}, \frac{e^3}{\ln(\ln 9)}$

7. $\frac{5}{2}, -\frac{13}{6}$

9. 6, 6

11. $\frac{\ln 2}{3}, \frac{2 + \ln 3}{4e^2}$

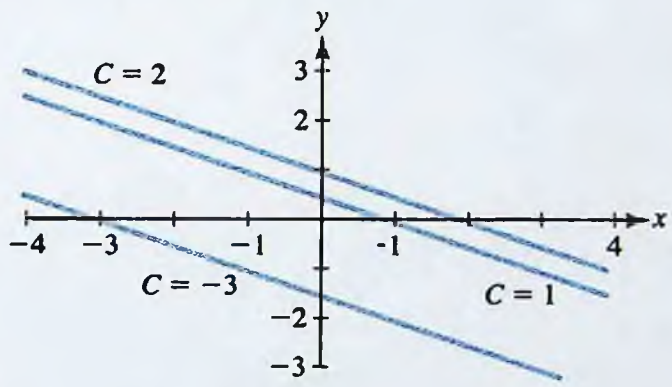
13. Todos los pares ordenados (x, y) de números reales para los cuales

$$y \neq -\frac{4}{3}x$$

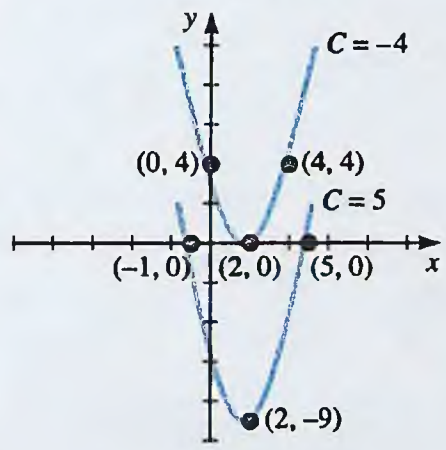
15. Todos los pares ordenados (x, y) de números reales para los cuales $y \le x^2$

17. Todos los pares ordenados (x, y) de números reales para los cuales $y > 4 - x$

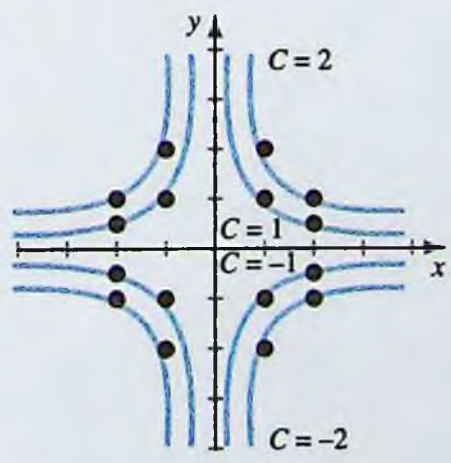
19.



21.



23.

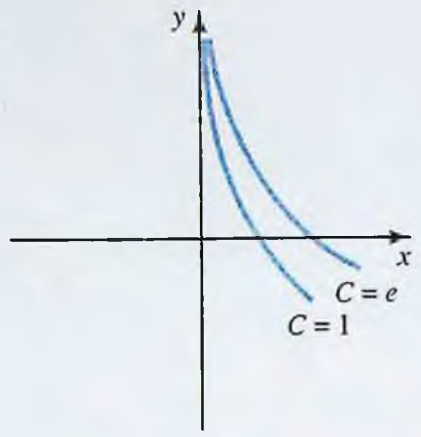


RESPUESTAS

www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

25.



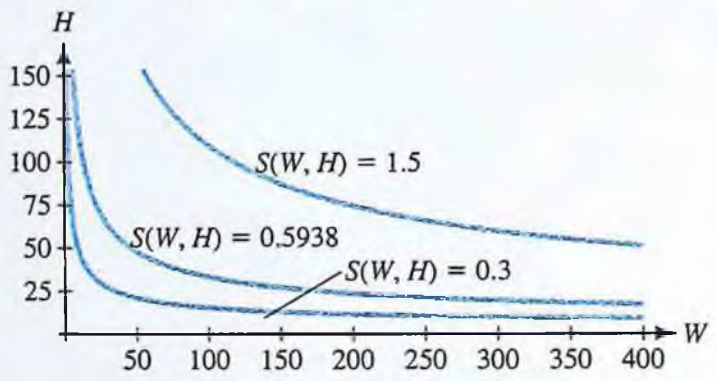
27. *a*) 160 000 unidades
b) 16 400 unidades (aumento)
c) 4 000 unidades (aumento)
d) 20 810 unidades (aumento)

29. *a*) $R(x_1, x_2) = 200\,x_1 - 10x_1^2 + 100x_2 + 25x_1x_2 - 10x_2^2$
b) \$1 840

31. *a*) Si $a + b > 1$, la producción más que se duplica.
b) Si $a + b < 1$, la producción aumenta en menos de un factor de 2.
c) Si $a + b = 1$, la producción se duplica.

33. $R(x, y) = 60x - \frac{x^2}{5} + 50y + \frac{xy}{10} - \frac{y^2}{10}$

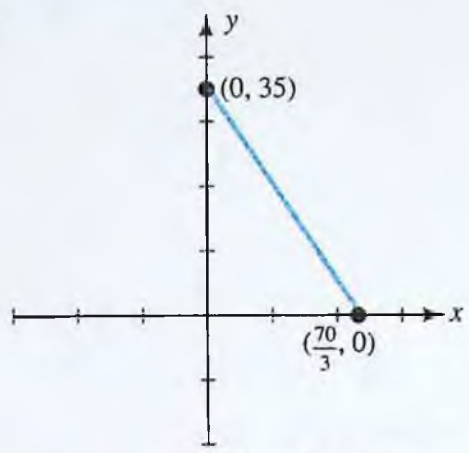
35. *a*) $S(15.83, 87.11) \approx 0.5938$



Las curvas representan combinaciones diferentes de altura y peso que resultan en la misma área superficial.

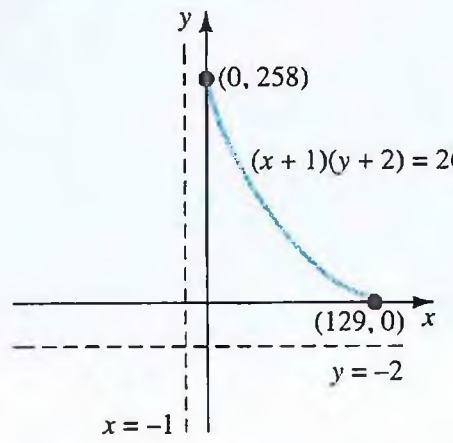
b) 90.05 cm
c) 253.97%
d) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

37. *a*) 70 unidades
b) $3x + 2y = 70$
c)

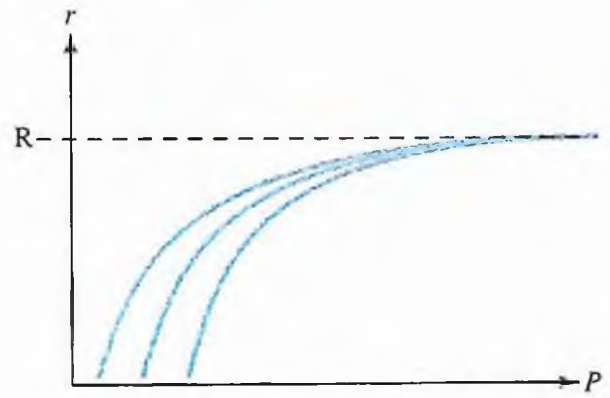


d) Reduzca el número de trabajadores no capacitados de 20 a 17.

39. La utilidad es 260.

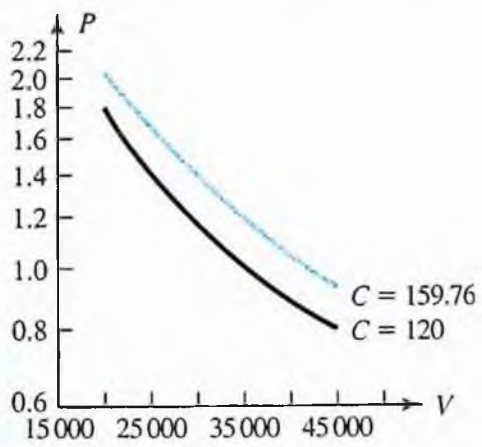


41. *a*) 0.866 cm/seg
b)



Las curvas representan combinaciones diferentes de presión y distancia desde el eje que resultan en la misma rapidez.

43. *a*)



b) 159.76°C

www.FreeLibros.com

45. *a*) 2 105.03 kilocalorías
b) 1 428.84 kilocalorías
c) 26.92 años
d) 24.43 años

47. 23.54 atmósferas

49. *a*)

K	277	311	493	554	718
L	743	823	1 221	1 486	3 197
Q	41 559	46 283	70 509	83 118	146 007

b) $Q(3K, 3L) = 3Q(K, L)$

$$Q\left(\frac{1}{2}K, \frac{1}{2}L\right) = \frac{1}{2}Q(K, L)$$

$$Q\left(2K, \frac{1}{2}L\right) = 2^{-1/5}Q(K, L)$$

CAPÍTULO 7 | Sección 2

1. $f_x = 2y^5 + 6xy + 2x,\ f_y = 10xy^4 + 3x^2$

3. $z_x = 15(3x + 2y)^4,\ z_y = 10(3x + 2y)^4$

5. $f_s = -\dfrac{3t}{2s^2},\ f_t = \dfrac{3}{2s}$

7. $z_x = (1 + xy)e^{xy},\ z_y = x^2e^{xy}$

9. $f_x = \dfrac{-e^{2-x}}{y^2},\ f_y = \dfrac{-2e^{2-x}}{y^3}$

11. $f_x = \dfrac{5y}{(y - x)^2},\ f_y = \dfrac{-5x}{(y - x)^2}$

13. $z_u = \ln v, \qquad z_v = \dfrac{u}{v}$

15. $f_x = \dfrac{1}{y^2(x + 2y)},\ f_y = \dfrac{2[y - (x + 2y)\ln(x + 2y)]}{y^3(x + 2y)}$

17. $f_x(-2, 1) = -22,\ f_y(-2, 1) = 26$

19. $f_x(0, 0) = 1,\ f_y(0, 0) = 1$

21. $f_{xx} = 60x^2y^3,\ f_{xy} = f_{yx} = 2(30x^3y^2 + 1),\ f_{yy} = 30x^4y$

23. $f_{xx} = 2y(2x^2y + 1)\,e^{x^2y},\ f_{xy} = f_{yx} = 2x(x^2y + 1)\,e^{x^2y},$
$f_{yy} = x^4e^{x^2y}$

25. $f_{ss} = \dfrac{t^2}{(s^2 + t^2)^{3/2}},\ f_{st} = f_{ts} = \dfrac{-st}{(s^2 + t^2)^{3/2}},$
$f_{tt} = \dfrac{s^2}{(s^2 + t^2)^{3/2}}$

27. La producción diaria aumentará en aproximadamente 10 unidades.

29. *a*) La productividad marginal de capital es aproximadamente 27 unidades. La productividad marginal de mano de obra es aproximadamente 64 unidades.
b) Empleo de mano de obra adicional

31. *a*) $F = \dfrac{kL}{r^4} = 60\,727.24k$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{k}{r^4} = 19\,156.86k$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = -\frac{4kL}{r^5} = -2\,857\,752.58k$$

b) $F(1.2L, 0.8r) = 2.93F(L, r)$

$$\frac{\partial F}{\partial L}(1.2L, 0.8r) = 2.44\,\frac{\partial F}{\partial L}(L, r)$$

$$\frac{\partial F}{\partial r}(1.2L, 0.8r) = 3.66\,\frac{\partial F}{\partial r}(L, r)$$

33. La demanda mensual de bicicletas disminuye en aproximadamente 30.

35. El volumen se aumenta en 72π cm^3.

37. Sustituta

39. Ninguna

41. Sustituta

42. Sí

45. No

47. *a*) Un aumento en x reducirá la demanda $D(x, y)$ para la primera marca de podadora. Un aumento en y aumentará la demanda $D(x, y)$ para la primera marca de podadora.

b) $\dfrac{\partial D}{\partial x} < 0,\ \dfrac{\partial D}{\partial y} > 0$

c) $b < 0,\ c > 0$

49. $P_x = \dfrac{100uvy}{(xy + uv)^2},\ P_y = \dfrac{100uvx}{(xy + uv)^2}$

$P_u = \dfrac{-100vxy}{(xy + uv)^2},\ P_v = \dfrac{-100uxy}{(xy + uv)^2}$

Todas estas parciales miden la rapidez de cambio del porcentaje de circulación total de sangre con respecto a las cantidades x, y, u y v.

51. $F_z = \dfrac{-c\pi x^2}{8\sqrt{y - z}}$, decreciente

53. *a*) $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -\dfrac{80K^{1/2}}{3L^{5/3}} < 0$

Para un nivel fijo de inversión de capital, el efecto sobre la producción por la adición de un trabajador-hora de mano de obra es mayor cuando la fuerza laboral es pequeña que cuando la fuerza laboral es grande.

b) $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = -\dfrac{30L^{1/3}}{K^{3/2}} < 0$

Para un nivel fijo de mano de obra, el efecto sobre la producción por la adición de $1 000 de

www.FreeLibros.com

capital es mayor cuando el capital es pequeño que cuando el capital es grande.

55. *a*) $Q(37, 71) = 304\,691$
$Q(38, 71) = 317\,310$
$Q(37, 72) = 309\,031$

b) $Q_x(x, y) = 1\,175 + 6.2xy - 3.6x^2$
$Q_x(37, 71) = 12\,534$
$Q(38, 71) - Q(37, 71) = 12\,619$

c) $Q_y(x, y) = 483 + 3.1\,x^2 - 5.4y$
$Q_y(37, 71) = 4\,344$
$Q(37, 72) - Q(37, 71) = 4\,340$

CAPÍTULO 7 | Sección 3

	Máximo relativo	Mínimo relativo	Punto de depresión
1.	(0, 0)	Ninguno	Ninguno
3.	Ninguno	Ninguno	(0, 0)
5.	Ninguno	Ninguno	(2, −1)
7.	(−2, −1)	(1, 1)	(−2, 1), (1, −1)
9.	Ninguno	$\left(4, \frac{19}{2}\right)$	$\left(2, \frac{7}{2}\right)$
11.	(0, −1), (0, 1)	(0, 0)	(−1, 0), (1, 0)
13.	Ninguno	$\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$	(0, 0)
15.	(0, 3)	Ninguno	Ninguno
17.	$\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$	Ninguno	Ninguno
19.	(*e*, −1), (*e*, 1)	Ninguno	Ninguno

21. Camisas Duncan $2.70
Camisas O'Neil $2.50

23. Altura = 8 pies, longitud = ancho = 2 pies

25. $x = y = 20$

27. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ unidades de cada estímulo

29. $x = y = z = V_0^{1/3}$

31. Proveer 200 máquinas al mercado nacional y 300 máquinas al mercado extranjero.

33. $S(a, b) = \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

35. $\frac{2}{3}$

37. *a*) Dick (0.424, 1.2), Mary (2.660, 3.7)
b) Tom, Dick y Mary ganarán por 15.0 minutos.
c) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

39. $x = 13.866$ ft
$y = 12.025$ ft

41. $f(x, x) = -2x^2$ que tiene un máximo en $x = 0$

43. $f_x = \dfrac{x^2 - 7y^2}{x^2 \ln y}$

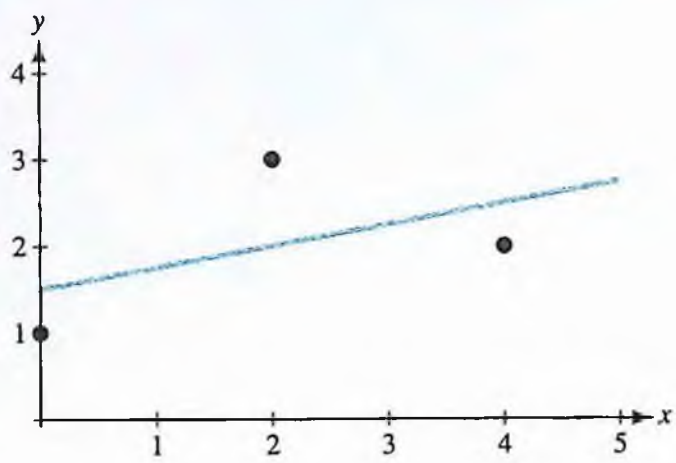
$f_y = \dfrac{(xy + 14y^2)\ln y - x^2 - xy - 7y^2}{xy(\ln y)^2}$

Los puntos críticos son $(\pm\sqrt{7}e, e)$.

45. $f_x = 2x(18 + 4x^2 - 11y), f_y = 4y^3 - 11x^2$
El punto crítico es (0, 0).

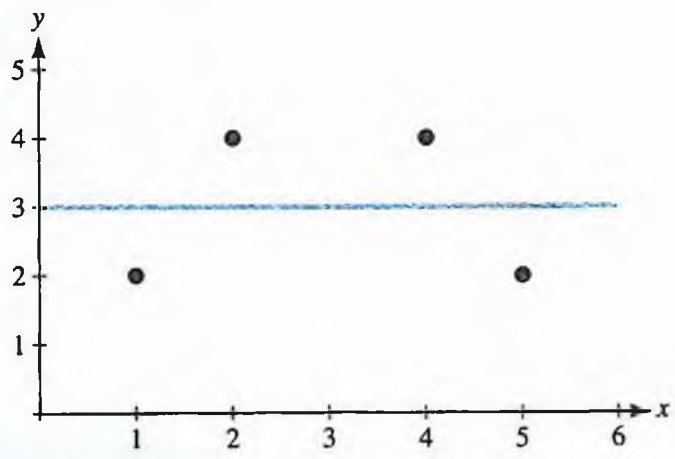
CAPÍTULO 7 | Sección 4

1.



$y = \dfrac{x}{4} + \dfrac{3}{2}$

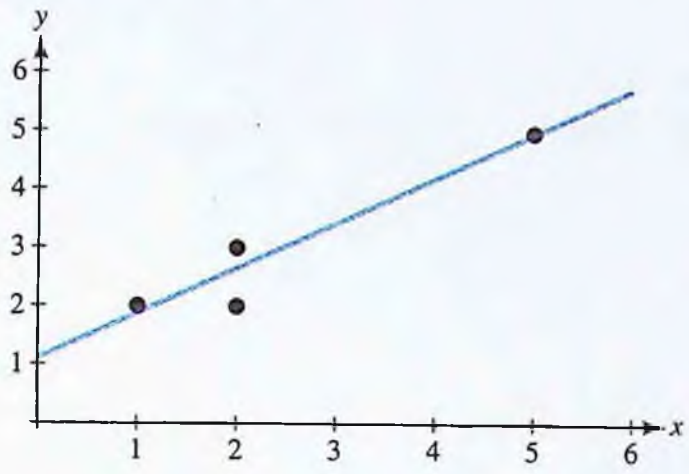
3.



$y = 3$

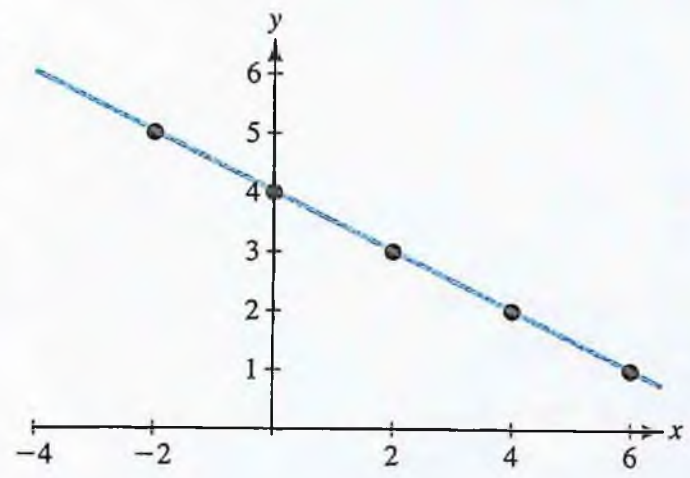
www.FreeLibros.com

5.



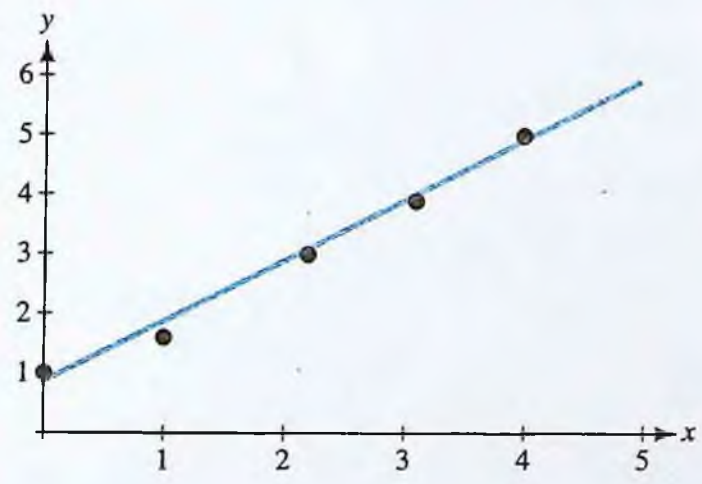
$$y = \frac{7}{9}x + \frac{19}{18}$$

7.



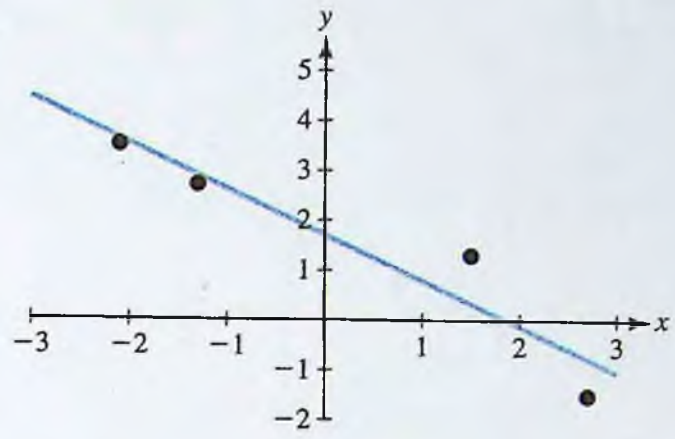
$$y = -\frac{1}{2}x + 4$$

9.



$$y = 1.018x + 0.8022$$

11.

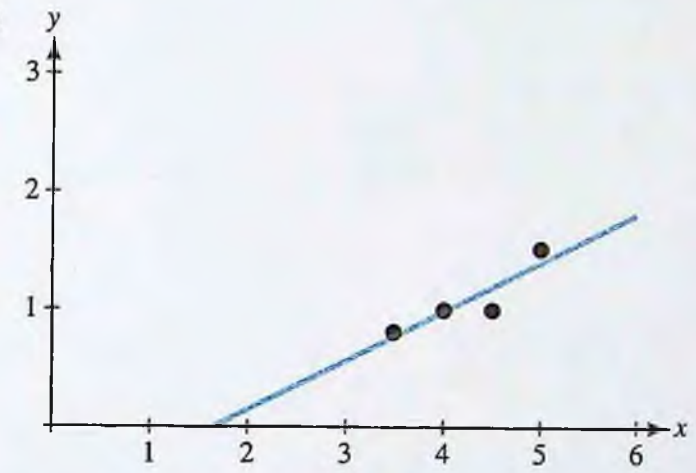


$$y = -0.915x + 1.683$$

13. $y = 15.02\, e^{0.04x}$

15. $y = 20.03\, e^{-0.201x}$

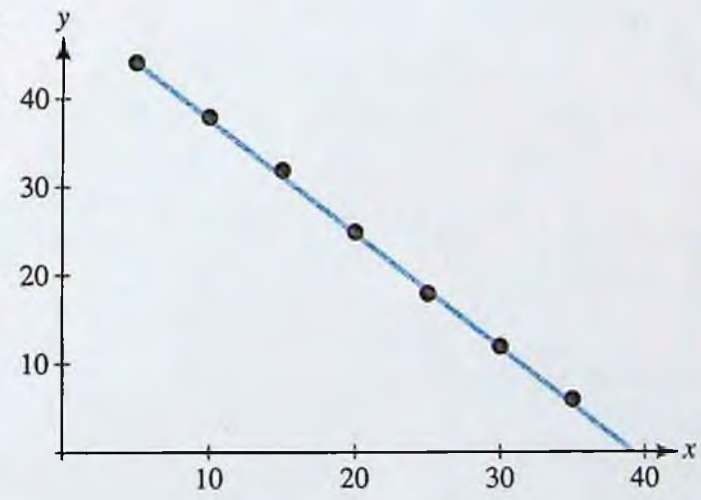
17. *a*)



b) $y = 0.42x - 0.71$

c) 1 306 aplicaciones

19. *a*)



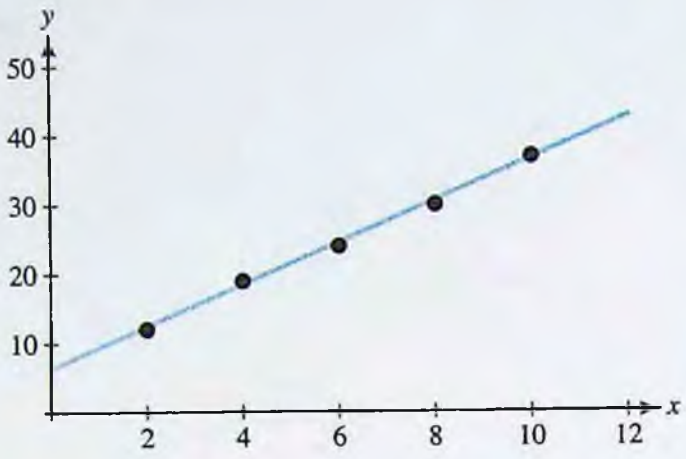
b) $y = -1.29x + 50.71$

c) El precio de demanda es negativo; no se venderán unidades.

www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

21. *a*)



b) $y = 3.05x + 6.1$

c) 42.7%

23. *a*) 12.5% por década

b) 308.4 millones

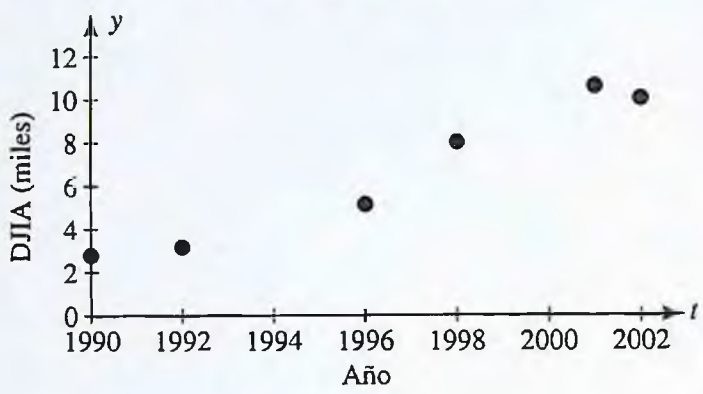
25. *a*) 4.09%

b) \$122 000

c) 42 años

d) $A = 54.5, \quad r = 0.044$
El método de Frank es menos preciso.

27. *a*)



b) $y = 693.8x + 2\,131$

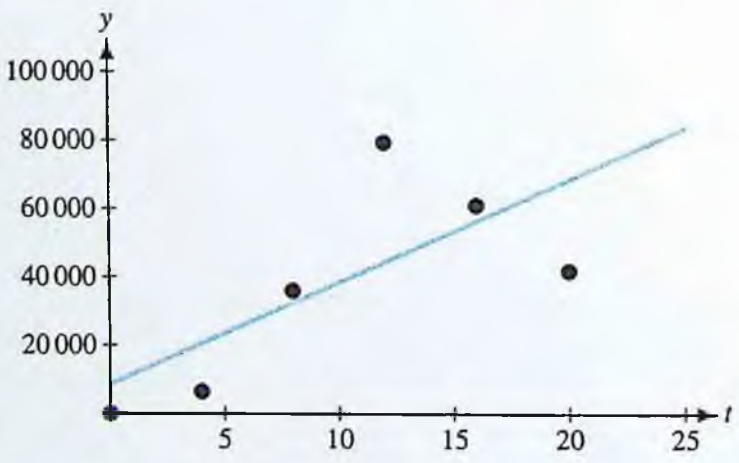
c) 11 150; valor real: 8 607.52

d) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

29. *a*) $y = 539t + 6\,785$

b) 11 636 mil millones de yuanes

31. *a*)

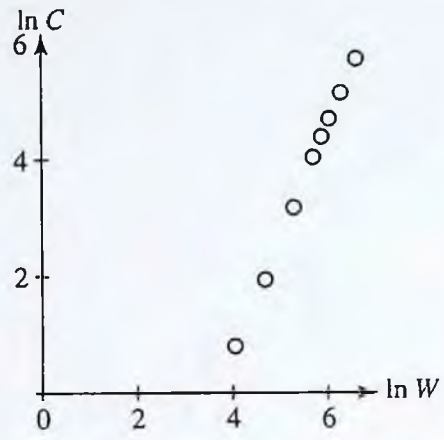


b) $y = 2\,985t + 7\,691$

c) 82 316

d) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

33. *a*)



b) $y = 1.631x - 4.975$

c) $a = 0.0069, k = 1.631$

CAPÍTULO 7 | Sección 5

1. Valor máximo $\frac{1}{4}$ en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

3. Valor máximo 2 en $(-1, -1)$ y $(1, 1)$

5. Valor máximo -4 en $(0, -2)$ y $(0, 2)$

7. Valor máximo $\frac{3}{2}$ en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
Valor máximo -3 en $(0, 1)$

9. Valor máximo -18 en $(8, 7)$

11. Valor máximo e^2 en $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
Valor máximo e^{-2} en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

13. Valor máximo $\frac{256}{3}$ en $\left(8, 4, \frac{8}{3}\right)$

15. Valor máximo $4\sqrt{14}$ en $\left(\frac{4}{\sqrt{14}}, \frac{8}{\sqrt{14}}, \frac{12}{\sqrt{14}}\right)$
Valor máximo $-4\sqrt{14}$ en $\left(-\frac{4}{\sqrt{14}}, -\frac{8}{\sqrt{14}}, -\frac{12}{\sqrt{14}}\right)$

17. 80 metros por 40 metros, donde 80 metros es la longitud del lado paralelo al río

19. 11 664 pulgadas cúbicas

21. Radio ≈ 1.51 pulgadas, altura ≈ 3.02 pulgadas

23. \$2 000 para desarrollo, \$6 000 para promoción

25. Aumento de unas 31.75 unidades

27. $H = 2R$

29. $4L$

www.FreeLibros.com

31. $x \approx 8.93$ cm, $y \approx 10.04$ cm

33. $E_{\text{mín}} = \dfrac{3k^2}{8m} V_0^{-2/3}$ en $(V_0^{1/3}, V_0^{1/3}, V_0^{1/3})$

35. $x = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ ft, $y = \dfrac{80\sqrt{3}}{9}$ ft, $z = \dfrac{25\sqrt{3}}{6}$ ft

donde x = longitud del frente, y = profundidad y z = altura

37. La utilidad aumenta en \$130.61.

39. *a*) $x = 35$
$y = 42$

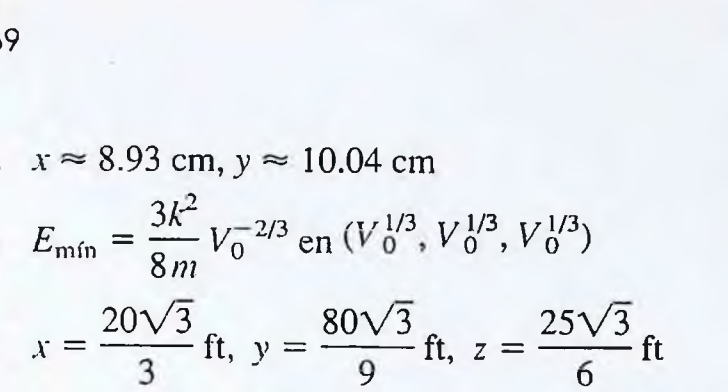
b) $\lambda \approx 14.33$
λ es aproximadamente el cambio en utilidad máxima debida al aumento de \$1.00 en fondos disponibles.

41. El cambio en utilidad máxima es alrededor de $\left(\dfrac{\alpha}{a}\right)^{\alpha}\left(\dfrac{\beta}{b}\right)^{\beta}$.

43. Ecuaciones de Lagrange: $Q_x = \lambda p$
$Q_y = \lambda q$
$px + qy = k$

Por lo tanto, $\dfrac{Q_x}{p} = \dfrac{Q_y}{q}$ sujeta a $px + qy = k$.

45. Extremo posible en $(0, -2)$
Es un punto de inflexión.



47. Ecuaciones de Lagrange: $\dfrac{\partial P}{\partial K} = \lambda \dfrac{\partial C}{\partial K}$
$\dfrac{\partial P}{\partial L} = \lambda \dfrac{\partial C}{\partial L}$
$C(K, L) = A$

por tanto, $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial K}}{\dfrac{\partial C}{\partial K}} = \dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial L}}{\dfrac{\partial C}{\partial L}}$.

49. *a*) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{xy^2 e^{xy^2} + e^{xy^2} - \dfrac{y}{x^2} + \dfrac{x}{x+y} + \ln(x+y)}{2x^2 y\, e^{xy^2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x+y}}$

b) $F_x = x^2 y e^{xy^2} + e^{xy^2} - \dfrac{y}{x^2} + \dfrac{x}{x+y} + \ln(x+y)$

$F_y = 2x^2 y e^{xy^2} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{x+y}$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y}$

donde $\dfrac{dy}{dx}$ es la respuesta en la parte ***a***).

51. Valor mínimo alrededor de 1.6723 en (2.1623, 1.5811)

53. Valor máximo alrededor de 2.952 en (0.9729, −0.1636)

CAPÍTULO 7 | Sección 6

1. $\dfrac{7}{6}$

3. -1

5. $4 \ln 2$

7. 0

9. $\ln 3$

11. 32

13. $\dfrac{1}{3}$

15. $\dfrac{32}{9}$

17. $\dfrac{e^2 - 1}{8}$

19. Secciones transversales verticales: $0 \le x \le 3$
$x^2 \le y \le 3x$

Secciones transversales horizontales: $0 \le y \le 9$
$\dfrac{y}{3} \le x \le \sqrt{y}$

21. Secciones transversales verticales: $-1 \le x \le 2$
$1 \le y \le 2$

Secciones transversales horizontales: $1 \le y \le 2$
$-1 \le x \le 2$

23. Secciones transversales verticales: $1 \le x \le e$
$0 \le y \le \ln x$

Secciones transversales horizontales: $0 \le y \le 1$
$e^y \le x \le e$

25. $\dfrac{3}{2}$

27. $\dfrac{1}{2}$

www.FreeLibros.com

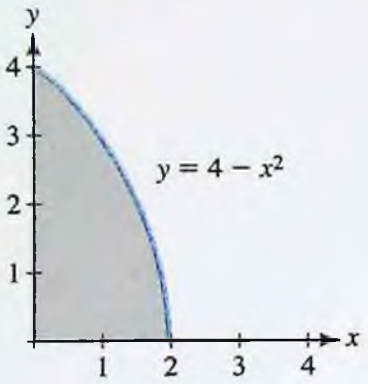
29. $\frac{44}{15}$

31. 1

33. $\frac{3}{2}\ln 5$

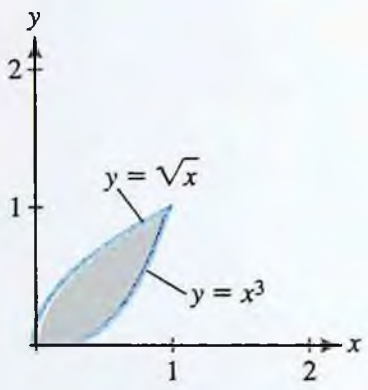
35. $2(e-2)$

37.



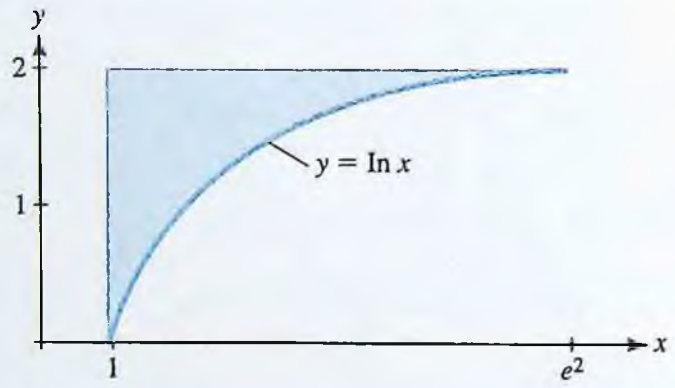
$$\int_{y=0}^{y=4}\int_{x=0}^{x=\sqrt{4-y}} f(x, y)\,dx\,dy$$

39.



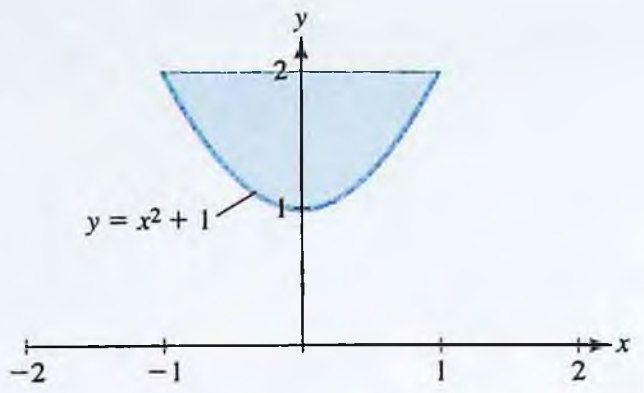
$$\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y^2}^{x=y^{1/3}} f(x, y)\,dx\,dy$$

41.



$$\int_{y=0}^{y=2}\int_{x=1}^{x=e^y} f(x, y)\,dx\,dy$$

43.



$$\int_{y=1}^{y=2}\int_{x=-\sqrt{y-1}}^{x=\sqrt{y-1}} f(x, y)\,dx\,dy$$

45. $\displaystyle\int_{x=-4}^{x=2}\int_{y=0}^{y=x+4} 1\,dy\,dx = 18$

47. $\displaystyle\int_{x=0}^{x=4}\int_{y=\frac{1}{2}x^2}^{y=2x} 1\,dy\,dx = \frac{16}{3}$

49. $\displaystyle\int_{x=1}^{x=3}\int_{y=x^2-4x+3}^{0} 1\,dy\,dx = \frac{4}{3}$

51. $\displaystyle\int_{x=1}^{x=e}\int_{y=0}^{y=\ln x} 1\,dy\,dx = 1$

53. $\displaystyle\int_{y=0}^{y=3}\int_{x=y/3}^{x=\sqrt{4-y}} 1\,dx\,dy = \frac{19}{6}$

55. $\displaystyle\int_{y=0}^{y=2}\int_{x=0}^{x=1} (6-2x-2y)\,dx\,dy = 6$

57. $\displaystyle\int_{x=1}^{x=2}\int_{y=1}^{y=3} \frac{1}{xy}\,dy\,dx = (\ln 3)(\ln 2)$

59. $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=2} xe^{-y}\,dy\,dx = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$

61. $\displaystyle\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=y}^{x=2-y} (2x+y)\,dx\,dy = \frac{7}{3}$

63. $\displaystyle\int_{x=-2}^{x=2}\int_{y=x^2}^{y=8-x^2} (x+1)\,dy\,dx = \frac{64}{3}$

65. Area $= \displaystyle\int_{x=-2}^{x=3}\int_{y=-1}^{y=2} 1\,dy\,dx = 15$

Average $= \dfrac{1}{15}\displaystyle\int_{x=-2}^{x=3}\int_{y=-1}^{y=2} xy(x-2y)\,dy\,dx = \frac{1}{6}$

www.FreeLibros.com

67. Área $= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=2} 1 \, dy \, dx = 2$

Promedio $= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=2} xye^{x^2y} \, dy \, dx = \frac{e^2 - 3}{4}$

69. Área $= \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=x/3}^{y=1} 1 \, dy \, dx = \frac{3}{2}$

Promedio $= \frac{2}{3} \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=x/3}^{y=1} 6xy \, dy \, dx = \frac{9}{2}$

71. Área $= \int_{x=-2}^{x=2} \int_{y=0}^{y=4-x^2} 1 \, dy \, dx = \frac{32}{3}$

Promedio $= \frac{3}{32} \int_{x=-2}^{x=2} \int_{y=0}^{y=4-x^2} x \, dy \, dx = 0$

73. $\int_{x=1}^{x=3} \int_{y=2}^{y=5} \frac{\ln(xy)}{y} \, dy \, dx$

$= (3 \ln 3 - 2) \ln \frac{5}{2} + (\ln 5)^2 - (\ln 2)^2$

75. $\int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1} x^3 e^{x^2y} \, dy \, dx = \frac{e - 2}{2}$

77. Área $= \int_{x=0}^{x=5} \int_{y=0}^{y=7} 1 \, dy \, dx = 35$

Promedio $= \frac{1}{35} \int_{x=0}^{x=5} \int_{y=0}^{y=7} (2x^3 + 3x^2y + y^3) \, dy \, dx$

$= \frac{943}{4}$

79. Promedio $= \frac{1}{25 \cdot 19} \int_{x=100}^{x=125} \int_{y=70}^{y=89} [(x - 30)(70 + 5x - 4y) + (y - 40)(80 - 6x + 7y)] \, dy \, dx$

$= \$24\,896.50$

81. Promedio $= \frac{1}{12} \int_{x=0}^{x=4} \int_{y=0}^{y=3} 90(2x + y^2) \, dy \, dx$

$= 630$ pies

83. Valor $= \int_{x=-1}^{x=1} \int_{y=-1}^{y=1} (300 + x + y) \, e^{-0.01x} dy \, dx$

$= 79\,800 \, e^{.01} - 80\,200 \, e^{-.01} \approx 1\,200$

85. *a)* 0.911 metros cuadrados

b) No, sólo puede ser considerada el área superficial promedio del nacimiento hasta el momento en que la persona llega a la edad adulta.

87. $E = \int_{x=-2}^{x=2} \int_{y=-2}^{y=2} \left[1 - \frac{1}{9}(x^2 + y^2)\right] dy \, dx = \frac{304}{27}$

89. Área $= \int_{x=1}^{x=2} \int_{y=1}^{y=3} 1 \, dy \, dx = 2$

Promedio $= \frac{1}{2} \int_{x=1}^{x=2} \int_{y=1}^{y=3} xy \ln\left(\frac{y}{x}\right) dy \, dx$

$= \frac{27}{8} \ln 3 - 4 \ln 2 + \frac{1}{2}$

CAPÍTULO 7 | Revisión

1. *a)* $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - 3y^4$

El dominio es toda x y y.

$f_x = 3x^2 + 2y^2 \qquad f_{xx} = 6x$

$f_y = 4xy - 12y^3 \qquad f_{xy} = 4y$

b) $f(x, y) = \frac{2x + y}{x - y}$ El dominio es toda $x \neq y$.

$f_x = \frac{-3y}{(x - y)^2} \qquad f_y = \frac{3x}{(x - y)^2}$

$f_{xx} = \frac{6y}{(x - y)^3} \qquad f_{xy} = \frac{-3(x + y)}{(x-y)^3}$

c) $f(x, y) = e^{2x-y} + \ln(y^2 - 2x)$

El dominio es toda (x, y) con $y^2 > 2x$.

$f_x = 2e^{2x-y} - \frac{2}{y^2 - 2x}$

$f_y = -e^{2x-y} + \frac{2y}{y^2 - 2x}$

$f_{xx} = 4e^{2x-y} - \frac{4}{(y^2 - 2x)^2}$

$f_{xy} = -2e^{2x-y} + \frac{4y}{(y^2 - 2x)^2}$

2. *a)* Las curvas de nivel son círculos con centro en el origen.

b) Las curvas de nivel son parábolas que abren a la izquierda con un eje horizontal.

3. *a)* Máximo relativo en (0, 0)
Mínimo relativo en (1, 4)
Puntos de depresión en (0, 4) y (1, 0)

b) Punto de depresión en (−1, 0)

c) Mínimo relativo en (−1, −1)

4. *a)* $f\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right) = \frac{16}{5}$

b) $f(-1, \pm 2) = -4$ es el valor más pequeño.
$f(1, \pm 2) = 4$ es el valor más grande.

www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

5. *a*) 16

b) $\dfrac{3 + e^4}{4e^2}$

c) $2\ln 2 - \dfrac{3}{4}$

d) $2\ln 2 - \dfrac{3}{4}$

6. *a*) $Q_K = 180$ y $Q_L = \dfrac{15}{4}$

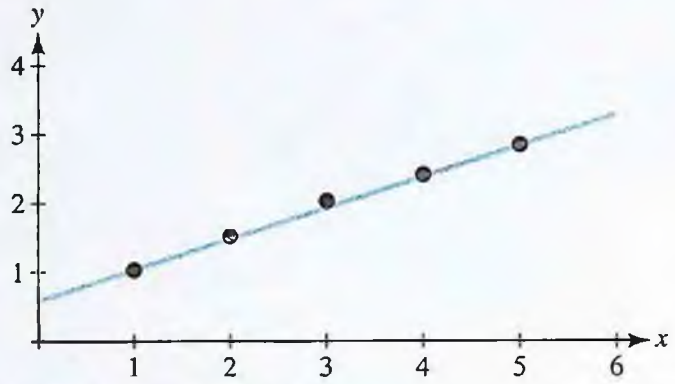
cuando $K = 1\,296$ y $L = 20\,736$

7. Compra $x = 12$ DVD y $y = 2$ juegos de video.

8. $x = 30$ unidades del medicamento A y
$y = 25$ unidades del medicamento B
Sí

9. $\dfrac{10}{\ln 2}\left(1 - \dfrac{1}{e}\right)$°C

10. *a*)



b) $y = 0.451x + 0.613$

c) La utilidad en el año 6 será alrededor de $3 319 000.

CAPÍTULO 7 | Problemas de repaso

1. $f_x = 6x^2y + 3y^2 - \dfrac{y}{x^2}$

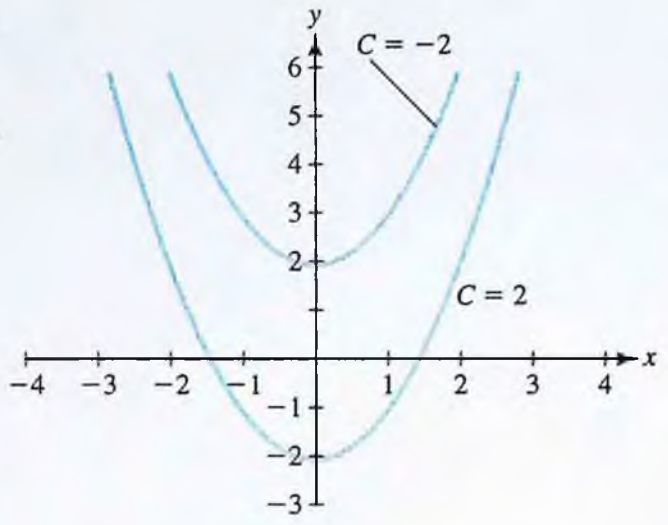
$f_y = 2x^3 + 6xy + \dfrac{1}{x}$

3. $f_x = y(1 + xy)e^{xy}$
$f_y = x(1 + xy)e^{xy}$

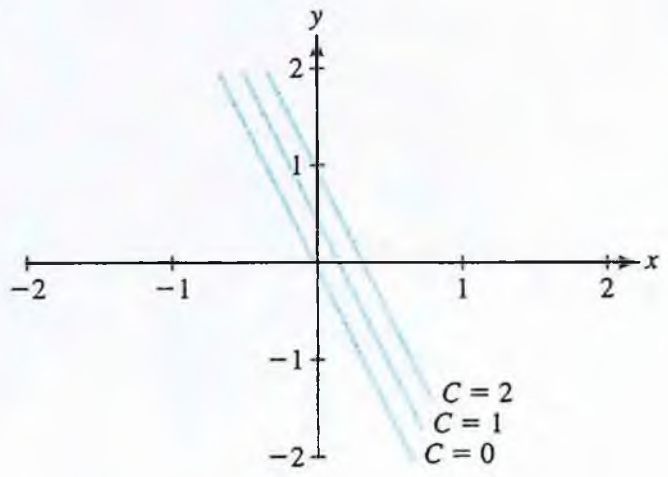
5. $f_x = \dfrac{3y}{x(x + 3y)}$ $\quad f_y = \dfrac{x}{y(x + 3y)}$

7. La producción diaria aumenta en alrededor de 16 unidades.

9. *a*)



b)



11. Reduzca en 2 el número de trabajadores sin capacitación.

13. Punto de depresión en $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$

Mínimo relativo en $\left(-\dfrac{23}{2}, 5\right)$

15. Puntos de depresión en $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{5}{6}\right)$ y $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{6}\right)$

17. Máximice $A = xy$ sujeto a $2x + 2y = C$ donde C es una constante positiva.
Ecuaciones de Lagrange:
$y = 2\lambda \quad x = 2\lambda \quad 2x + 2y = C$
Por lo tanto, $x = y$ y el rectángulo es un cuadrado.

19. $4 000 en desarrollo y $7 000 en promoción

21. Puesto que f es finita en todo punto en la región pero se aproxima al ∞ como $x \to 0$, $y \to 0$, $x \to \infty$, o $y \to \infty$, f debe tener un mínimo en la región.

f tiene un valor mínimo 18 en (2, 3).

23. $\dfrac{(1 + e)(e - 1)^2}{e^3}$

25. $\dfrac{e^2}{4} - \dfrac{1}{4e^2}$

www.FreeLibros.com

27. $2(e-1)$

29. $\dfrac{3(e-1)}{2}$

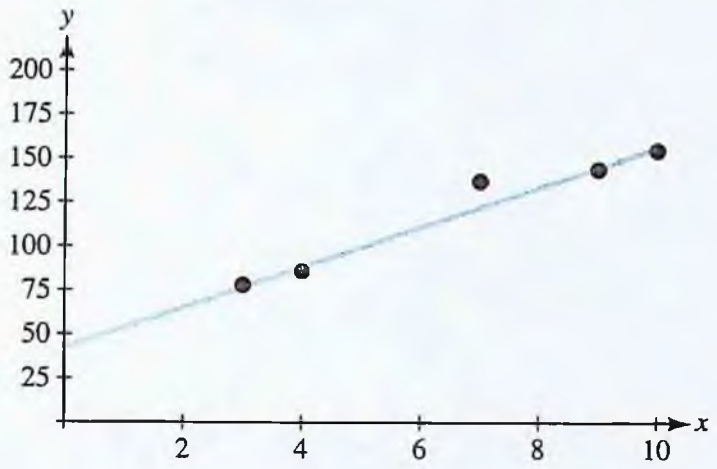
31. 2

33. $\dfrac{3}{2}(e^{-2}-e^{-3})$

35. $x = y = z = \dfrac{20}{3}$

37. La distancia más corta es $\sqrt{10}$ y ocurre cuando $x = z = 0$ y $y = \pm\sqrt{10}$.

39. *a)*



b) $y = 11.54x + 44.45$

c) Unos \$102 000

41. *a)* $\dfrac{\partial M}{\partial r} = Asr^{s-1}e^{-s}$

$\dfrac{\partial M}{\partial s} = Ar^{s}e^{-s}(\ln r - 1)$

b) Punto de depresión en $s = 0, r = e$

c) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

43. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = ax^{a-1}y^{b} = \dfrac{a}{x}Q$

$\dfrac{\partial Q}{\partial y} = bx^{a}y^{b-1} = \dfrac{b}{y}Q$

de modo que

$$x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} = aQ + bQ = (a+b)Q$$

Si $b = 1 - a$ entonces esto se convierte en

$$x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

CAPÍTULO 8 | Sección 1

1. $y = x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 - 6x + C$

3. $y = Ce^{3x}$

5. $y = -\ln(C - x)$

7. $y = \pm\sqrt{x^2 + C}$

9. $y = \left(\dfrac{1}{3}x^{3/2} + C\right)^2$

11. $y = C|x - 1|$

13. $y = -3 + Ce^{[-(2x-5)^{-5}]/10}$

15. $x = \dfrac{Ce^{t/z}}{(2t+1)^{1/4}}$

17. $y = \ln(xe^{x} - e^{x} + C)$

19. $y = Ce^{t(\ln t - 1)/2}$

21. $y = \dfrac{1}{5}(e^{5x} + 4)$

23. $y = \left(\dfrac{3}{2}x^2 + 21\right)^{1/3}$

25. $y = \dfrac{6}{4(4-x)^{3/2} + 3}$

27. $y - 2\ln|y+1| = \ln|t| + 2(1 - \ln 3)$

29. $\dfrac{kQ}{dt} = kQ$ donde $Q(t)$ = número de bacteria en el tiempo t
k = constante de proporcionalidad
t = tiempo

31. $\dfrac{dQ}{dt}$ $0.07Q$ donde $Q(t)$ = cantidad de inversión
t = tiempo

33. $\dfrac{dP}{dt} = 500$ donde $P(t)$ = número de personas
t = tiempo

35. $\dfrac{dT}{dt} = k(T - T_m)$ donde $T(t)$ = temperatura del cuerpo en el tiempo t
T_m = temperatura del medio
k = constante de proporcionalidad
t = tiempo

RESPUESTAS

www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

37. $\frac{dR}{dt} = k(F - R)$ donde $R(t)$ = número de datos recordados en el tiempo t
F = número total de datos
k = constante de proporcionalidad
t = tiempo

39. $\frac{dP}{dt} = kP(C - P)$ donde $P(t)$ = número de personas implicadas en el tiempo t
C = número de personas implicadas
k = constante de proporcionalidad
t = tiempo

41. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(Ce^{kx}) = kCe^{kx} = ky$

43. $\frac{dy}{dx} = C_1 e^x + C_2 (xe^x + e^x)$

$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1 e^x + C_2(xe^x + 2e^x)$

$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y$

$= \left[C_1 e^x + C_2(xe^x + 2e^x)\right] - 2\left[C_1 e^x + C_2(xe^x + e^x)\right]$

$+ \left[C_1 e^x + C_2 xe^x\right] = 0$

45. Unos \$292 608

47. *a*) $\frac{S(t)}{40}$ libras por minuto

b) $\frac{dS}{dt} = -\frac{S}{40}$

c) $S(t) = 400\, e^{-t/40}$

49. $\frac{dP}{dt} = kP(C - P)$

$\frac{d^2P}{dt^2} = k\frac{dP}{dt}(C - P) - kP\frac{dP}{dt}$

$= k(C - 2P)\frac{dP}{dt}$

$\frac{d^2P}{dt^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{dP}{dt} = 0 \quad \text{o} \quad P = \frac{C}{2}$

Buscamos el máximo de $\frac{dP}{dt}$, de modo que eliminamos $\frac{dP}{dt} = 0$ y verificamos $P = \frac{C}{2}$.

$\frac{d^2P}{dt^2} = k(kP(C - P))(C - 2P)$, where $k > 0, P \geq 0$

Suponga que $P < \frac{C}{2}$, entonces $\frac{d^2P}{dt^2} > 0$.

Suponga $P > \frac{C}{2}$ y $P < C$, entonces $\frac{d^2P}{dt^2} < 0$.

Por lo tanto, $\frac{dP}{dt}$ tiene un máximo local en $P = \frac{C}{2}$.

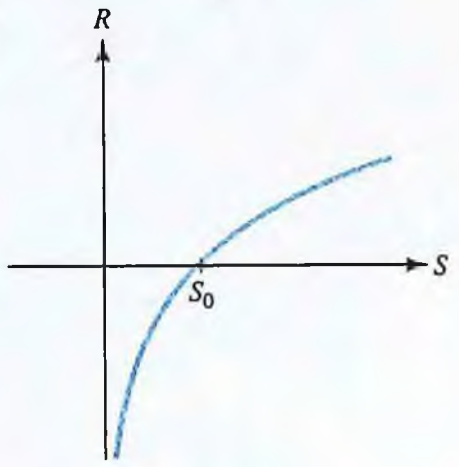
51. $\frac{dp}{dt} = k(1 - p), \quad p(8) = 0.05$

$p(t) = 1 - (0.95)^{t/8}$

53. 45

55. *a*) $R(S) = k \ln\left(\frac{S}{S_0}\right)$

b)



57. $\frac{b}{a}\ln S + \frac{c}{a}S + \frac{1}{2a}S^2 = t + K$

59. $\frac{dP}{dx} = \frac{kP}{x}$

$P(x) = Cx^k$

CAPÍTULO 8 | Sección 2

1. $y = \frac{x^2}{5} + \frac{C}{x^3}$

3. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}(xe^x - e^x + C)$

5. $y = \frac{2}{x}\ln x + \frac{C}{x}$

7. $y = \frac{x}{2e^{2x}} + \frac{C}{xe^{2x}}$

9. $y = \frac{1}{1 + x}(Ce^x - 1)$

11. $y = \frac{1}{1 + t}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C\right)$

13. $y = (t + 1)(1 + Ce^{-t})$

15. $y = 2x^3$

17. $y = 1 + (x - 2)\, e^{-x^2/2}$

www.FreeLibros.com

19. $y = \frac{1}{x}(\ln x - 2)$

21. $y = \frac{5}{3} + Ce^{-3x}$

23. $y = 2 - \frac{C}{x+1}$

25. $y = -x - 1 + 2e^{x+1}$

27. Alrededor de \$260 578

29. *a)* El cambio en el valor de la cuenta se debe al interés acumulado, rV, más depósitos, D.

b) Unos \$245 108.19

c) Unos \$11 488.68

31. Unos \$3 860.03

33. *a)* $\frac{dS}{dt} = \frac{-3}{40 - 2t}S,\ S(0) = 5$

$S(t) = \frac{1}{8\sqrt{5}}(20 - t)^{3/2}$ por $0 \le t \le 20$

b) ≈ 2.76 min

c) $\frac{1}{16\sqrt{5}}$ lbs/gal.

35. Sí

37. Unos \$39 346.93

39. *a)* $\frac{dA}{dt} = 3 - kA, A = 0$ cuando $t = 0$

$A(t) = \frac{3}{k}(1 - e^{-kt})$

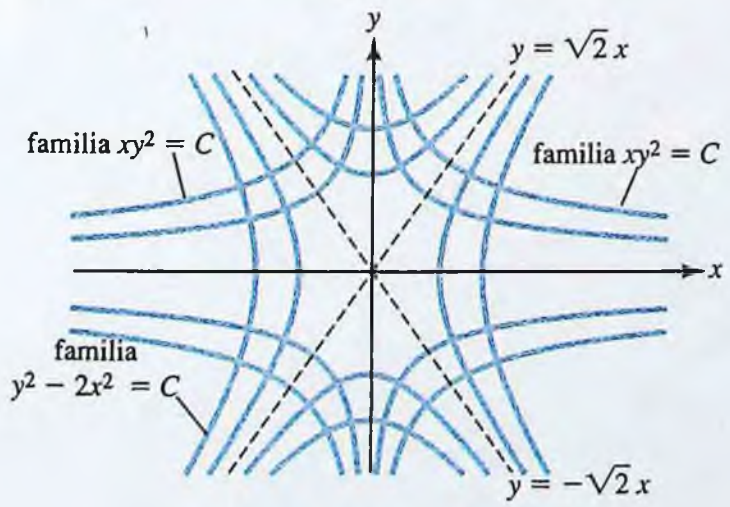
b) $A(8) \approx 5.32$ mg

$\lim_{t\to\infty} A(t) \approx 5.39$ mg

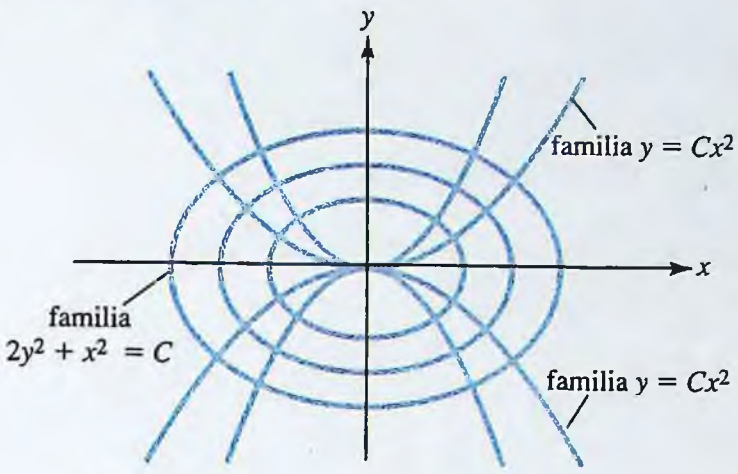
c) El ritmo debe ser de unos 5.013 mg/h.

CAPÍTULO 8 | Sección 3

1. $xy^2 = C$, familia ortogonal $y^2 - 2x^2 = C$



3. $y = Cx^2$, familia ortogonal $2y^2 + x^2 = C$



5. *a)* $\frac{dp}{dt} = 0.02(8 - 4p),\ p(t) = 2 - e^{-0.08t}$

b) $p(4) = 2 - e^{-0.32} \approx \$1.27$

c) $\lim_{t\to\infty} p(t) = 2$, el precio se aproxima a \$2.

7. *a)* $\frac{dp}{dt} = 0.02(1 + 7e^{-t} - p)$,

$p(t) = 1 - \frac{1}{7}e^{-t} + \frac{22}{7}e^{-0.02t}$

b) $p(4) \approx \$3.90$

c) $\lim_{t\to\infty} p(t) = 2$, el precio se aproxima a \$1.

9. 6 minutos

11. Unos 97.27°C

13. Hora de fallecimiento $\approx$ 12:40 p.m.

15. $\frac{dA}{dt} = 6(0.16) - 6\left(\frac{A}{200}\right)$

$A(t) = 32(1 - e^{-0.03t})$

17. *a)* $\frac{dN}{dt} = 0.2te^{-t/40}\frac{75}{3\,000} - N\left(\frac{75}{3\,000}\right)$

$N(t) = \frac{1}{400}t^2e^{-t/40}$

b) $N'(t) = 0$ cuando $t = 80$ minutos.

$\frac{N(80)}{3\,000}$ 0.000722 onzas por galón.

19. $P(t) = \frac{1\,000}{3}t + \frac{100\,000}{9} + \frac{800\,000}{9}e^{0.03t}$

21. $\frac{dP}{dt} = 0.02P + 100e^{-t}, P(0) = 300\,000$

$P(t) \approx -98.04e^{-t} + 300\,098.04e^{0.02t}$

23. *a)* $P(t) = \left(\frac{1}{-ckt + \frac{1}{P_0^c}}\right)^{1/c}$

www.FreeLibros.com

b) $t_a = \dfrac{1}{ck\,P_0^c}$, $\lim_{t \to t_a} P(t) = \infty$

c) $P(t) = \left(\dfrac{1}{2^{-0.02} - 0.00679t}\right)^{50}$

d) 145 meses o 12 años y 1 mes

25. *a*) $\dfrac{dP_1}{dt} = \dfrac{-15P_1}{7\,000}$, $P_1(0) = 2\,000$

$P_1(t) = 2\,000e^{\frac{-3t}{1\,400}}$

b) $\dfrac{dP_2}{dt} = \dfrac{15P_1}{7\,000} - \dfrac{15P_2}{4\,000}$ $P_2(0) = 0$

$a = \dfrac{15}{7\,000}$ y $b = \dfrac{15}{4\,000}$

$P_2(t) = \dfrac{8\,000}{3}\left(e^{\frac{-3t}{1\,400}} - e^{\frac{-3t}{800}}\right)$

c) $P'_2(t) = 0$ cuando $t = 348.2$ horas.
$P_2(348.2) \approx 542$ libras de contaminante, el máximo

d) $t = 3\,898$ horas

27. *a*) $k = \dfrac{1}{30} \ln 10$

b) $D(t) = 50e^{-(\frac{\ln 10}{30})t}$

$S(t) = 5e^{(\frac{\ln 10}{15})t}$

c) Unas 23.2 unidades

29. $y = x^{1/3}$

31. Mercado de dinero: unos \$9 499.10
Fondo de acciones: unos \$30 274.65

33. *a*) Con poblaciones en miles,

$$N(t) = \frac{2.5(250 - N_0)e^{-9.9t} + 250(N_0 - 2.5)}{(250 - N_0)e^{-9.9t} + (N_0 - 2.5)}$$

b) Si $N_0 = 5$(5 000 personas), entonces cuando $t \to \infty$

$$N(t) = \frac{2.5(250 - 5)e^{-9.9t} + 250(5 - 2.5)}{(250 - 5)e^{-9.9t} + (5 - 2.5)} \to 250$$

o sea 250 000 personas

c) Si $N_0 = 1$(1 000 personas), entonces $N(t) = 0$ cuando el numerador satisface

$2.5(250 - 1)e^{-9.9t} + 250(1 - 2.5) = 0$

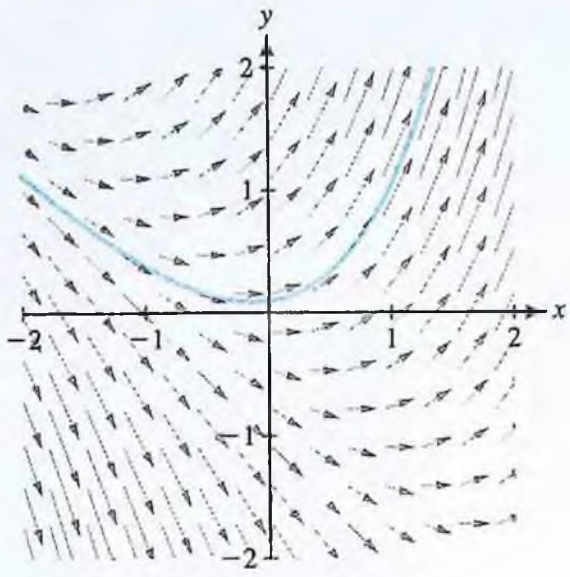
$t = 0.051$ días

d) En general, si $N_0 > m$, entonces $N(t) \to N_s$ cuando $t \to \infty$.
No obstante, si $N_0 < m$, entonces $N(t) = 0$ cuando

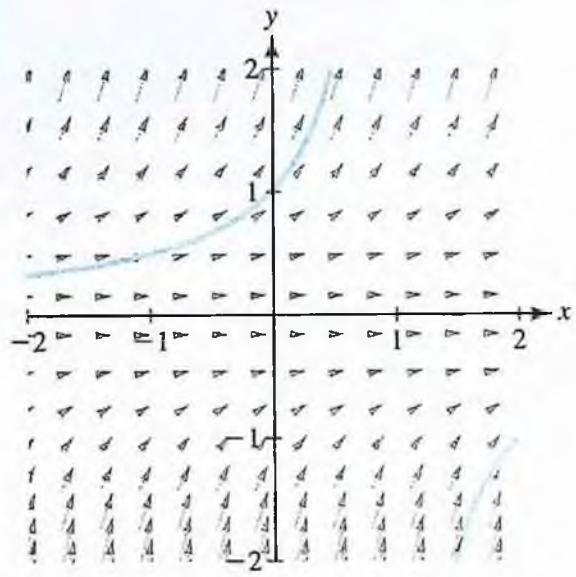
$$t = \frac{1}{(N_s - m)k} \ln\left(\frac{m(N_s - N_0)}{N_s(m - N_0)}\right)$$

CAPÍTULO 8 | Sección 4

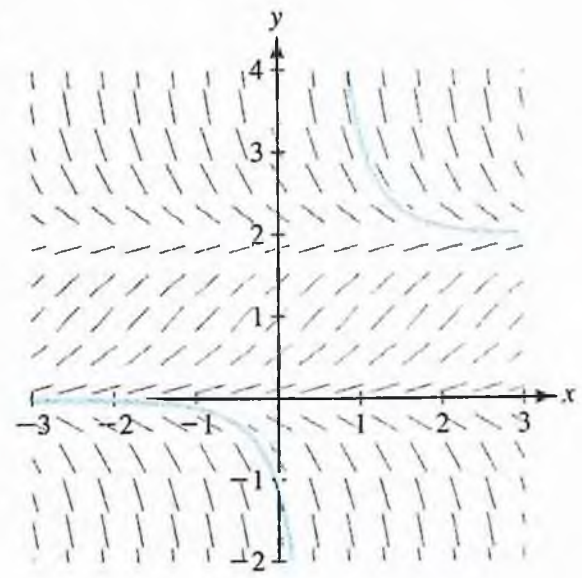
1.



3.



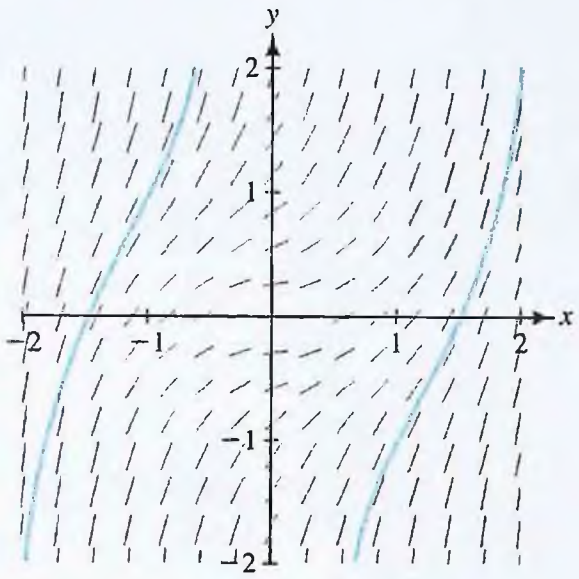
5.



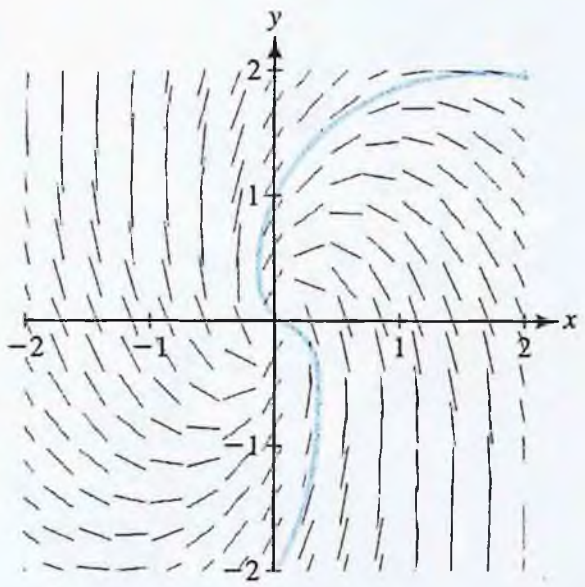
www.FreeLibros.com

www.FreeLibros.com

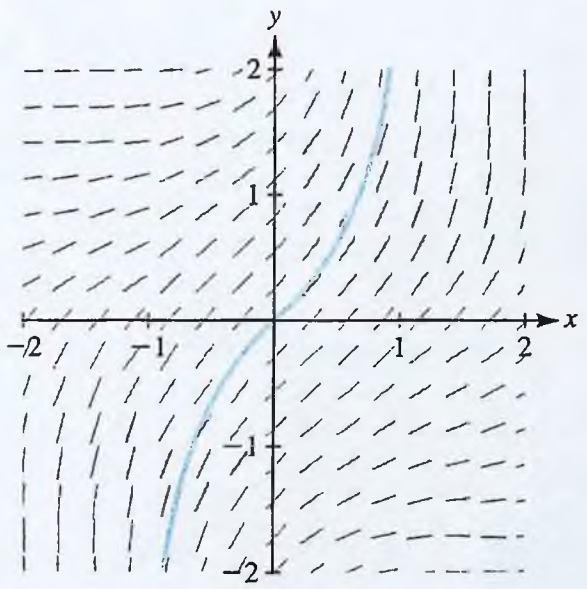
7.



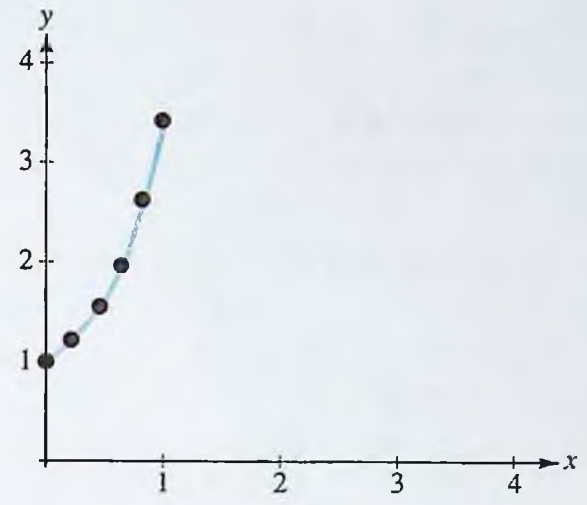
9.



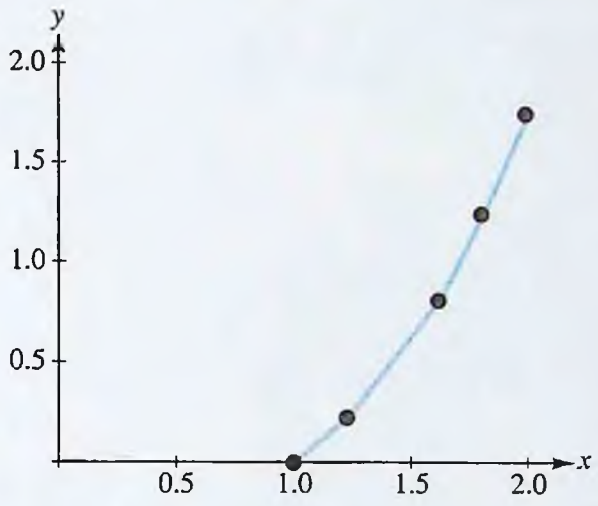
11.



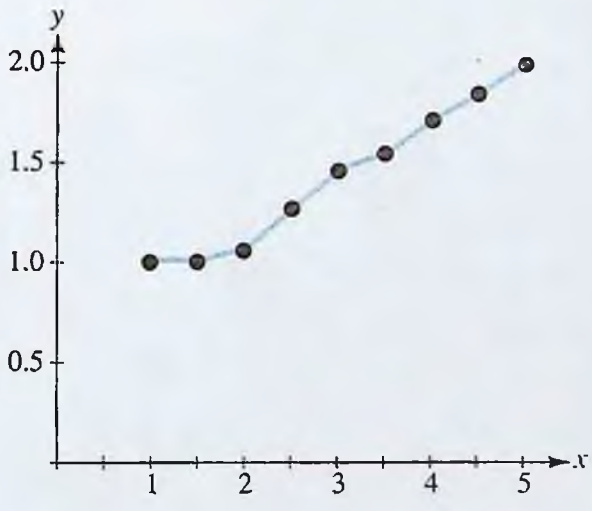
13.



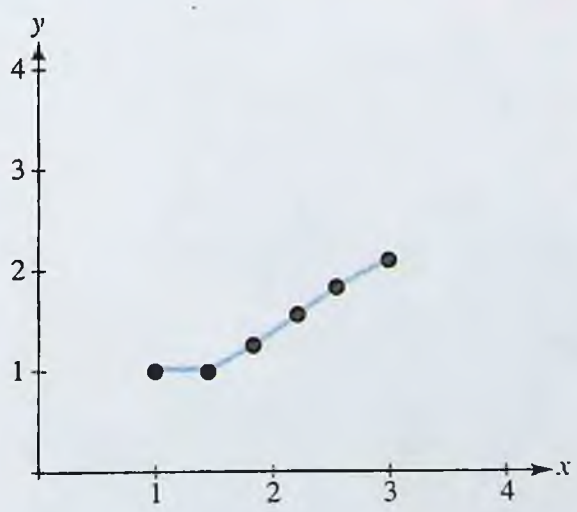
15.



17.



19.



RESPUESTAS

21. $y(1)$ es aproximadamente 5.9728.
23. $y(1)$ es aproximadamente 0.666546.
25. $y(2)$ es aproximadamente 2.77973.
27. $L(4)$ es aproximadamente 3.4526.
$n = 6, h = 0.5$
29. *a*) En el tiempo $t = 2$, el pez medirá unas 4.9415 pulgadas de largo.
b) $L(t) = 5.3 - 5.1e^{-1.03t}$
$L(2) = 4.65$ pulgadas
31. Se producirán unas 870 unidades.

CAPÍTULO 8 | Sección 5

1. $y_0 = 1$
$y_1 = 3$
$y_2 = 9$
$y_3 = 27$
$y_4 = 81$
3. $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$
5. $y_0 = 1$
$y_1 = 1$
$y_2 = 2$
$y_3 = 3$
$y_4 = 5$
7. $y_0 = 1$
$y_1 = \frac{1}{3}$
$y_2 = \frac{1}{7}$
$y_3 = \frac{1}{15}$
$y_4 = \frac{1}{31}$
9. $A = 1, B = -1$
11. $y_n = (-1)^n$
13. $y_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$
15. $y_n = 2\left(\frac{9}{8}\right)^n - 2$
17. $y_n = \frac{11^n}{10^{n-1}}$
19. $y_n = (1.05)\, y_{n-1} + 50,\ y_0 = 1\,000$
$y_n = 1\,000\,[2(1.05)^n - 1]$
21. *a*) $25\,000\,(1.08^n + 1)$
b) $h = 4\,000$
23. *a*) $S_{n+1} - S_n = k(P - S_n) - 0.2S_n$
donde $P = 10\,000, S_0 = 500, S_1 = 1\,100, k = \frac{7}{95}$
b) $S_n = \left(0.8 - \frac{7}{95}\right)^n 500 + \left[\frac{1 - (0.8 - \frac{7}{95})^n}{1 - (0.8 - \frac{7}{95})}\right]\frac{7}{95}(10\,000)$
$\lim_{n\to\infty} S_n = 2\,692.3$
25. *a*) $C_n = 0.75\, C_{n-1} + 50$
$C_n = (0.75)^n\, 100 + 200$
b) 205; 200
27. \$446.08
29. $A = \$180.63$
31. $I_n = \left(I_0 - \frac{h}{c}\right)(1 + c)^n + \frac{h}{c}$
33. *a*) Suponga que $P_m = P_{m+1} = L$ para alguna m.
entonces $P_{m+2} = P_{m+1} + k\,P_{m+1}\left(1 - \frac{1}{K}P_{m+1}\right)$
$= P_m + k\,P_m\left(1 - \frac{1}{K}P_m\right)$
$= L$
Por lo tanto, una vez que dos valores consecutivos sean iguales, todo el resto de los valores será igual.
b) $K = 105, k = \frac{21}{110}, L = 105$
c) $K = 110, k = \ln\frac{5}{6}, L = K = 110$
Los valores son semejantes y $L = K$ en ambos casos.
35. *a*) $C_n = C_{n-1} + 18 - \left(\frac{C_{n-1}}{5\,000}\right)18, C_0 = 0$
$C_n = 5\,000\left(1 - \left(\frac{4\,982}{5\,000}\right)^n\right)$
b) Unos 638.46 años
c) $t \approx 639.61$ años; tiempos muy similares
d) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

www.FreeLibros.com

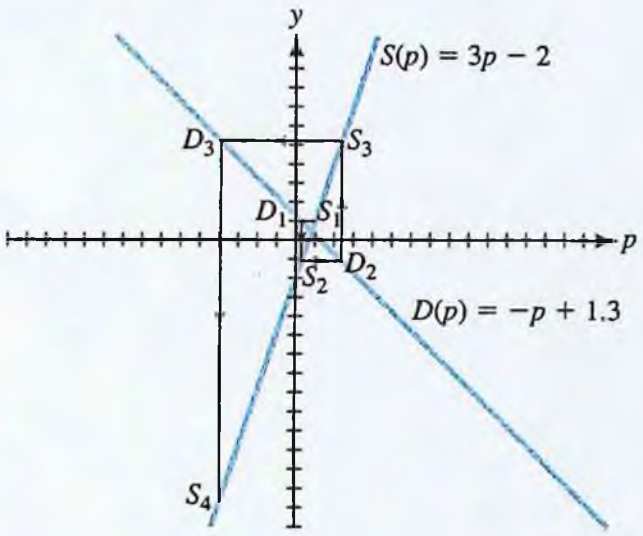
37. *a)* $p_e = 0.825$

b) $p_n = -3\,p_{n-1} + 3.3;\ p_0 = 1$

$p_n = 0.175(-3)^n + 0.825$

c)

n	P_n	S_n	D_n
1	0.3	−1.1	1
2	2.4	5.2	−1.1
3	−3.9	−13.7	5.2



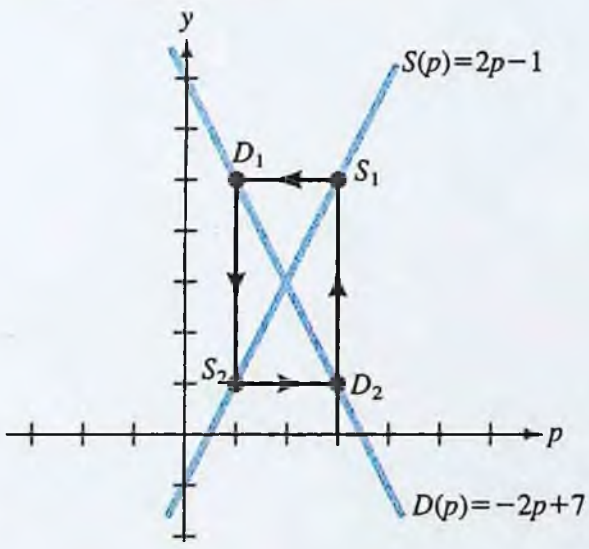
39. *a)* $p_e = 2$

b) $p_n = -p_{n-1} + 4$

$p_n = (-1)^n + 2$

c)

n	P_n	S_n	D_n
0	3	5	1
1	1	1	5
2	3	5	1
3	1	1	5



CAPÍTULO 8 | Revisión

1. *a)* $y = C\sqrt{x^2 + 1}$

b) $y = \frac{1}{2}x^4 + Cx^2$

c) $y = -\ln(|x + 1 - Ce^x|) + x$

2. *a)* $y = \sqrt{\frac{4 + 5x}{x}}$

b) $y = \frac{5}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$

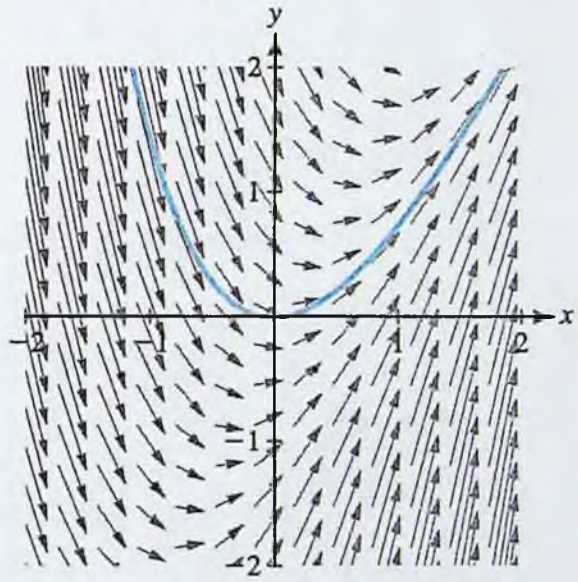
c) $y = \frac{1}{2}\left[x^2 + 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right]$

3. *a)* $y_n = -\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

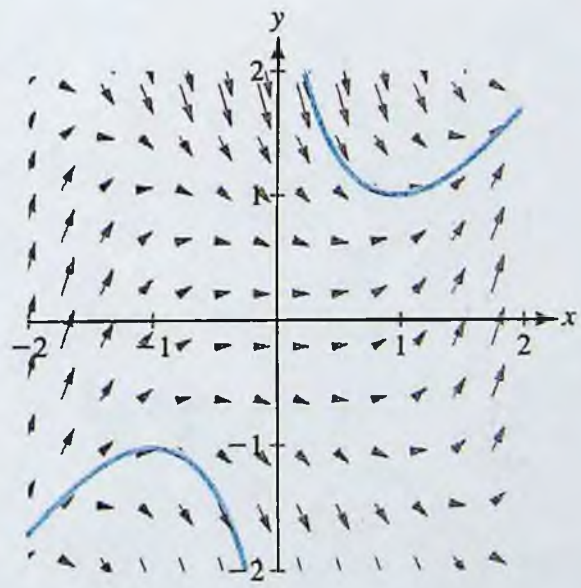
b) $y_n = 2\left(\frac{4}{3}\right)^n$

c) $y_n = 2\left(1 - \left(\frac{5}{4}\right)^n\right)$

4. *a)*



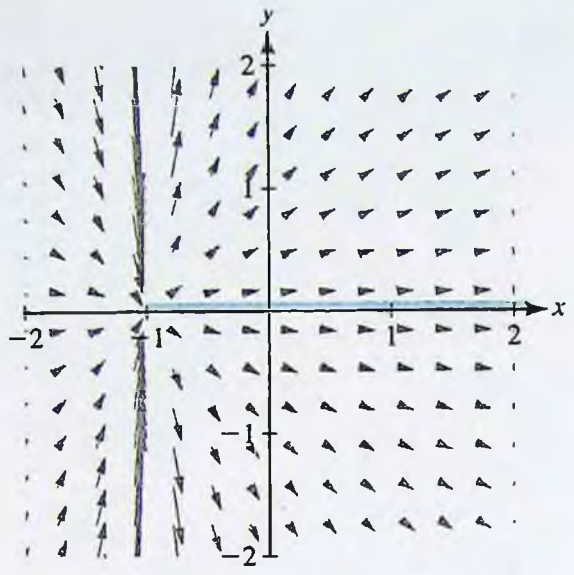
b)



RESPUESTAS

www.FreeLibros.com

c)



5. $\dfrac{dP}{dt} = -0.11p$

6. $\dfrac{dP}{dt} = k[S(p) - D(p)]$

7. $A_0 \approx 2\,546$ mg

8. $t = 16$ años

9. $\dfrac{dA}{dt} = 8 - \dfrac{A(t)}{200 + 3t}$

$$S(t) = 400 + 6t - 325\left[\frac{200}{200 + 3t}\right]^{1/3}$$

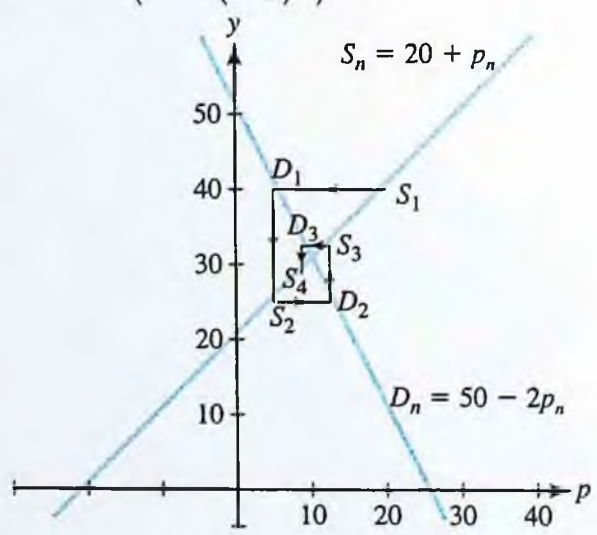
Hay alrededor de 760.54 libras de sal cuando el tanque esta lleno.

10. *a)* $p_e = 10$

b) $p_n = -\dfrac{1}{2}p_{n-1} + 15$

$$p_n = 10\left(1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

c)



CAPÍTULO 8 | Problemas de repaso

1. $y = \dfrac{1}{4}x^4 - x^3 + 5x + C$

3. $y = 80 + Ce^{-kx}$

5. $y = -\ln(-e^x - C)$

7. $y = \dfrac{C}{x^4} - e^{-x}\left[1 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{12}{x^2} + \dfrac{24}{x^3} + \dfrac{24}{x^4}\right]$

9. $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}[2x^2 + 4\ln(x+2) + C]$

11. $y = \pm\sqrt{(\ln x)^2 + C}$

13. $y = x^5 - x^3 - 2x + 6$

15. $y = 100\,e^{0.06x}$

17. $y = -\dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{7}{2}x^5$

19. $y = (4 + x)\,e^{x^2/2}$

21. $y = -4x^{x/2}\,e^{(1-x)/2}$

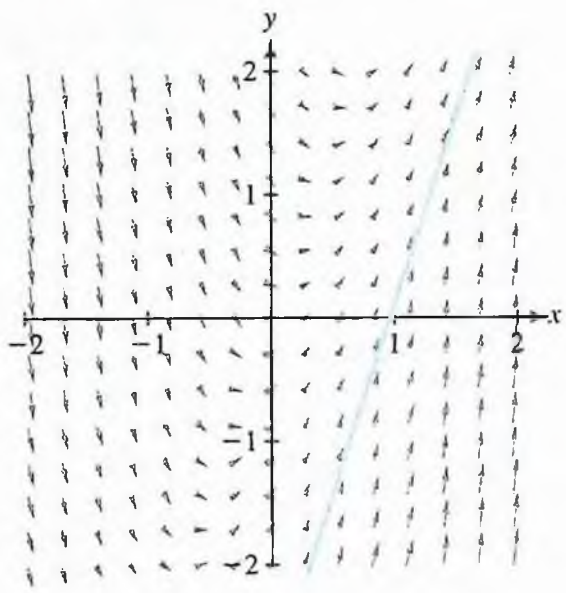
23. $y = 2e^{1-\sqrt{1-x^2}}$

25. $y_n = 1 + 2n$

27. $y_n = 1 + 3n$

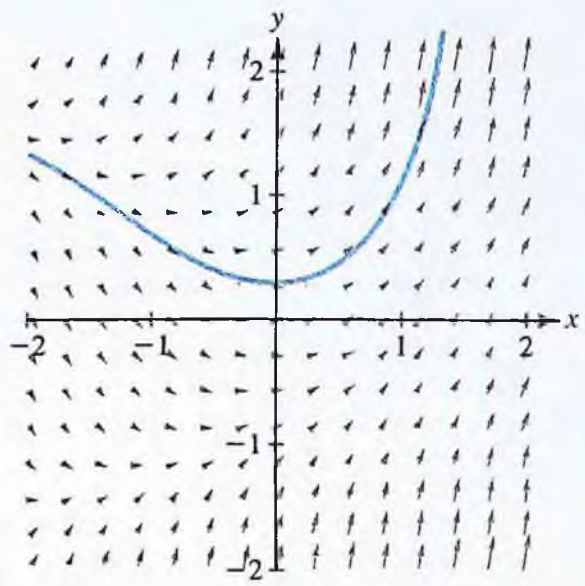
29. $y_n = \dfrac{1}{2}(-1 + 5^{1+n})$

31.

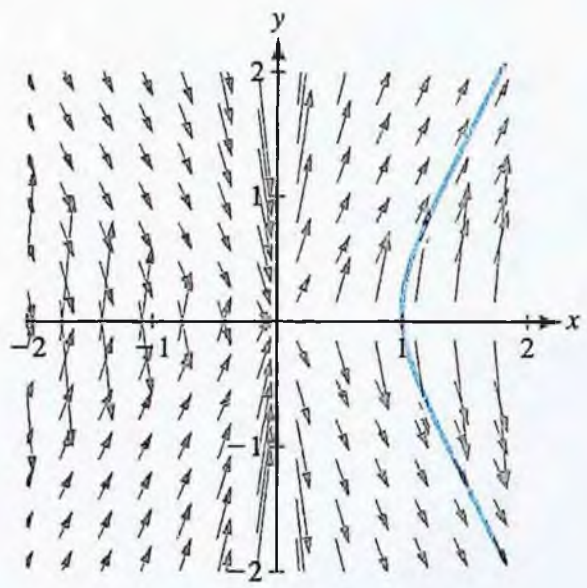


www.FreeLibros.com

33.



35.



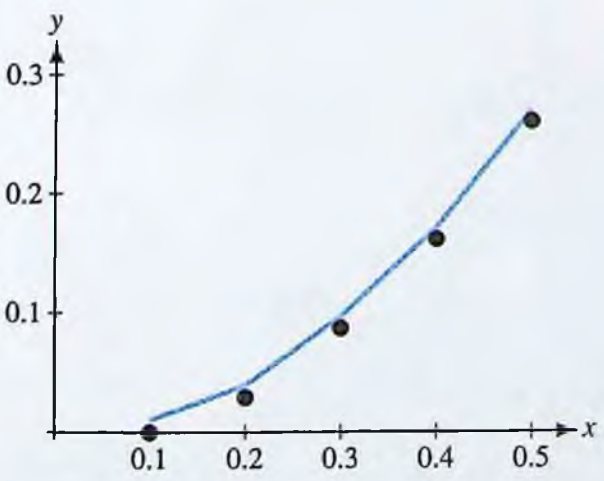
37. $x = 0.1 \quad y = 0$

$x = 0.2 \quad y = 0.03$

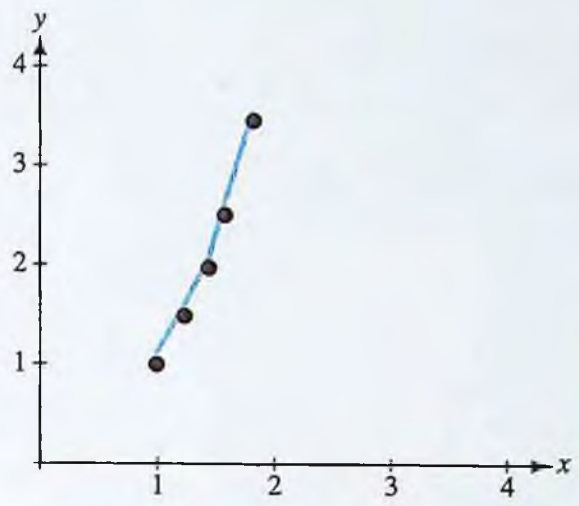
$x = 0.3 \quad y = 0.087$

$x = 0.4 \quad y = 0.1683$

$x = 0.5 \quad y = 0.27147$



39. $x = 1.2 \quad y = 1.4$
$x = 1.4 \quad y = 1.91333$
$x = 1.6 \quad y = 2.56933$
$x = 1.8 \quad y = 3.40437$



41. $y(1)$ es aproximadamente 19.7642.

42. $y(2)$ es aproximadamente 678.6282

45. $\dfrac{dN}{dt} = k(A - N), N(0) = 0$

$N(t) = A(1 - e^{-kt})$

47. Unas 81.20 lb

49. $\dfrac{dP}{dt} = kP(10 - P), P(0) = 4, P(4) = 7.4$

$$P(t) = \frac{20}{3e^{-kt} + 2}$$

$P(10) = 9.615$ millones

51. *a)* $\dfrac{dC}{dt} = R - kC, k > 0$

$$C(t) = \frac{1}{k}(R - (R - C_0k)e^{-kt})$$

b) $\lim\limits_{t\to\infty} C(t) = \dfrac{R}{k}$

c) $T = -\dfrac{1}{k}\ln\left(\dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{R}{R - C_0k}\right)\right)$

53. $E_n = 1.05E_{n-1}, E_0 = 100$
$E_n = (1.05)^n 100$

55. *a)* $p_n = 0.3p_{n-1}$

$p_n = (0.3)^n p_0$

b) La probabilidad de que una unidad defectuosa obtenga su defecto en algún tiempo durante la producción es igual a 1.

$p_n = 0.7(0.3)^n$

$p_3 = 0.0189$

www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

57. *a*) Como $P_0 > 0, a > 0, b > 0$,

entonces $P_1 = \dfrac{bP_0}{a + P_0} > 0$

análogamente $P_2 > 0, P_3 > 0, \ldots, P_{n-1} > 0, \ldots$

Como $P_{n-1} > 0$,

entonces $a + P_{n-1} > a$

Entonces $P_n = \dfrac{bP_{n-1}}{a + P_{n-1}} < \dfrac{b}{a} P_{n-1}$

$$< \left(\frac{b}{a}\right)^2 P_{n-2}$$

$$< \ldots < \left(\frac{b}{a}\right)^n P_0$$

b) Suponga que $a > b$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} P_n < \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^n P_0\right] = 0$$

Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$.

c) Por suposición,

$x = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} P_{n-1} < \infty$

Entonces x satisface $x = \dfrac{bx}{a + x}$

o $x = 0$ (que se descarta)

o $x = b - a$. Entonces, $\lim_{n\to\infty} P_n = b - a$.

59. *a*) Cada mes tenemos todos las parejas de conejos del mes previo, R_{n-1}, más una pareja de conejos por cada pareja de conejos que tiene por lo menos dos meses de edad, de modo que $R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$.

b) $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}, \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$

c) $A = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \qquad B = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

d) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

CAPÍTULO 9 | Sección 1

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n+1}$

7. $\dfrac{15}{16}$

9. $-\dfrac{7}{12}$

11. 5

13. 3

15. Diverge.

17. $\dfrac{3}{20}$

19. 45

21. $\dfrac{3}{16}$

23. 100

25. $\dfrac{1}{3}$

27. $\dfrac{25}{99}$

29. \$625 mil millones, incluyendo gastos del gobierno

31. \$25 503

33. $\dfrac{A}{1+r} + \dfrac{A}{(1+r)^2} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{(1+r)^n} = \frac{A}{r}$

35. $\dfrac{20}{\sqrt{e} - 1}$ unidades

37. $d\dfrac{1-q}{q}$

39. *a*) $1 + 2\sqrt{0.36} + 2(0.36) + 2(0.36)^{3/2} + \cdots = 4$

b) $\dfrac{\sqrt{H}}{4}(1 + 2\sqrt{r} + 2r + 2r^{3/2} + \cdots)$

$$= \frac{\sqrt{H}}{4}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^{n/2}\right) = \frac{\sqrt{H}}{4}\left(\frac{1 + \sqrt{r}}{1 - \sqrt{r}}\right)$$

c) 15 pies

41. 2037

43. 8 horas

45. 856.52125

47. *a*) Cuando $r = 1$, $S_n = na$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} S_n$ no es finito si $a \neq 0$.

b) Cuando $r = -1$, $S_{n,\text{ impar}} = a$ y $S_{n,\text{ par}} = 0$. Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existe.

CAPÍTULO 9 | Sección 2

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 2 \neq 0$

3. $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe

www.FreeLibros.com

5. Diverge.

7. Diverge.

9. Diverge.

11. Converge.

13. Converge.

15. Diverge.

17. Diverge.

19. Converge

21. Diverge.

23. Diverge.

25. Converge.

27. Diverge.

29. Converge

31. Converge.

33. Converge.

35. Diverge.

37. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

39. Si $p > 1$ entonces $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+2x)^p} = \frac{3^{1-p}}{2(p-1)}$

Si $p \leq 1$ entonces

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+2x)^p}$ no converge.

41. $c < 1$

43. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1} > \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+3}$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$$

y esta última serie es la serie armónica divergente.

45. Al igual que en el ejemplo 9.2.2, determinar la resistencia a la ruptura de la primera viga establecerá una marca mínima de deformación por rotura, y también romperá la viga. La siguiente viga, con probabilidad 1/2, establece una nueva marca mínima de deformación por rotura y también rompe la viga. El número total de vigas rotas es el número de la nueva marca mínima de deformaciones por rotura, o sea

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{100} = 5.19$$

47. Una cantidad infinita de tiempo.

49. Compare con $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2/3}}$; por lo tanto, diverge.

51. Compare con $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^k$; por lo tanto, converge.

53. Diverge, porque $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2} > \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$, que diverge por la prueba integral.

CAPÍTULO 9 | Sección 3

1. $R = \frac{1}{5}$; el intervalo de convergencia absoluta es

$$-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}.$$

3. $R = 1$; el intervalo de convergencia absoluta es

$$-1 < x < 1.$$

5. $R = \frac{1}{4}$; el intervalo de convergencia absoluta es

$$-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}.$$

7. $R = \infty$; el intervalo de convergencia absoluta es toda x real.

9. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n$; el intervalo de convergencia absoluta es $-1 < x < 1$.

11. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$; el intervalo de convergencia absoluta es $-1 < x < 1$.

13. $f(x) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\,2^n} x^n$; el intervalo de convergencia absoluta es $-2 < x < 2$.

15. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$

17. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$

19. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^3(-3)^n}{n!} (x+1)^n$

21. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{n} \left(x - \frac{1}{2}\right)^n$

23. $f(x) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(-3)^{n+1}}$

www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

25. *a)* $f(x) = 3x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!} x^{3n+2}$

b) $f(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3x^{3n-1}}{(n-1)!}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n!} x^{3n+2}$

27. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)\,n!} x^{2n+3}$

29. 1.0955

31. −0.3565

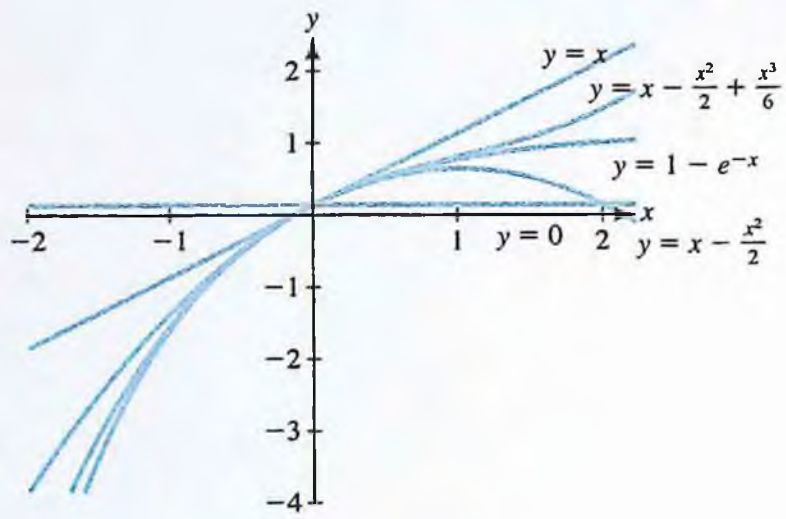
33. 0.6065

35. 0.4591

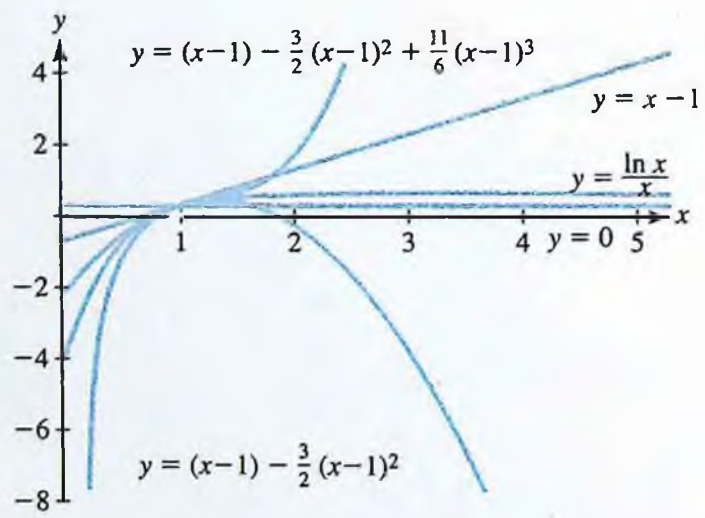
37. 0.2970

39. 0.4854

41.



43.



45. Aproximadamente $1 862

47. 13 548

CAPÍTULO 9 | Revisión

1. *a)* Converge a $\frac{1}{8}$.

b) Diverge.

2. *a)* Prueba de serie p con $p = \frac{3}{2}$

b) Prueba de razón $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0$

3. *a)* Prueba de divergencia: $\lim_{n\to\infty} \frac{n(n^2+1)}{100n^3+9} = \frac{1}{100} \neq 0$

b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} > \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ que diverge por la prueba de serie p. Por lo tanto, diverge.

4. *a)* Diverge. *b)* Converge.
c) Converge. *d)* Converge.

5. *a)* $-1 < x < 1$ *b)* Toda x real

6. *a)* $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{2}\left(\frac{-3}{2}\right)^n x^n$

7. *a)* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n}}{(2n)!}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{n}$

8. $\frac{25}{e^{1/3}-1} \approx 63.2$

9. $122 517

10. Usando $n = 10\,000$, la estimación es 0.7854.

CAPÍTULO 9 | Problemas de repaso

1. $\frac{1}{7}$

3. $\frac{65}{6}$

5. $\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1}$

www.FreeLibros.com

7. Diverge.

9. Diverge.

11. Diverge.

13. Diverge.

15. Converge.

17. Converge.

19. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} < x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

21. $-\dfrac{1}{e} < x < \dfrac{1}{e}$

23. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2^n - 1) x^n}{n}$

27. $\dfrac{25\,417}{495}$

29. 10 pies

31. \$102 521

33. $k = \ln \dfrac{19}{14} \approx 0.305$

35. *a)* $S_5 = \left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right) + \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5}\right) + \left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6}\right)$

$= 1 - \dfrac{1}{6}$

b) $S_n = \left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$

$= 1 - \dfrac{1}{n+1}$

c) $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = 1$

37. *a)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T}{k(k+1)}$ es el número de palabras diferentes; debe sumarse a T.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{T}{k(k+1)} = T$

c) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

39. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-2)^n$

41. 0.9487

43. *a)* El tiempo total para la colisión es

$$\frac{1\,000}{90} + \frac{1\,000}{90}\left(1 - \frac{2}{3}\right) + \frac{1\,000}{90}\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \cdots$$

$$= \frac{50}{3} \text{ segundos.}$$

La distancia que la abeja recorre es

$$\frac{50}{3} \cdot 60 = 1\,000 \text{ pies.}$$

b) Los trenes chocarán en

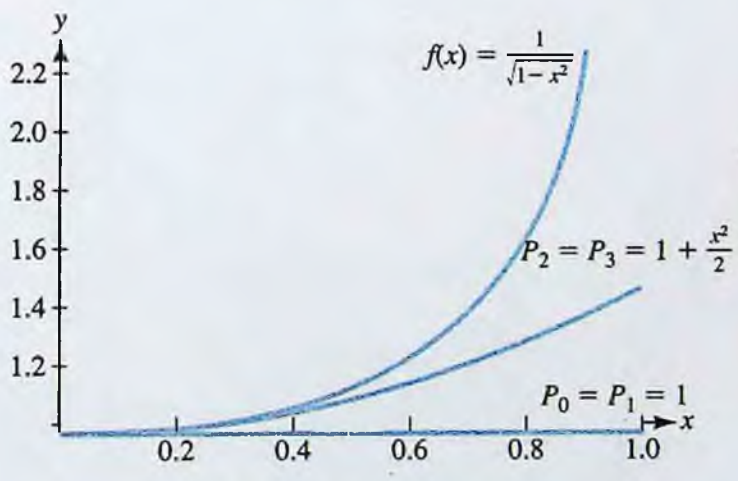
$$\frac{1\,000 \text{ pies}}{60 \text{ s/pies}} = \frac{50}{3} \text{ segundos.}$$

La distancia que la abeja recorre es

$$\frac{50}{3} \cdot 60 = 1\,000 \text{ pies.}$$

c) Los trenes corren $\dfrac{1\,000 - 180}{60} = \dfrac{820}{60}$ segundos antes de empezar a desacelerar. A continuación corren otros 6 segundos antes de detenerse con la abeja posada suavemente entre sus faros delanteros. Así, el tiempo total de viaje para la abeja es $\dfrac{820}{60} + 6 = \dfrac{1\,180}{60}$ segundos, y en ese tiempo, se desplaza $\left(\dfrac{1\,180}{60}\right)(60) = 1\,180$ pies.

45. *a)*



b) La integral es aproximadamente $\dfrac{25}{48}$.

47. *a)* $t = \dfrac{\lambda}{\ln 2}\left[\sqrt{2\dfrac{S(t) - S(0)}{R(t)} + 1} - 1\right]$

b) $t = 5.587 \times 10^8$ años

c) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

www.FreeLibros.com

CAPÍTULO 10 | Sección 1

1. Discreta

3. Continua

5. Continua

7. Discreta

9. Discreta

11. {0, 1, 2}

13. {0, 1, 2}

15. $E(X) = \frac{21}{8}$, $\text{Var}(X) = \frac{143}{64}$, $\sigma(X) = \frac{\sqrt{143}}{8}$

17. $E(X) = \frac{20}{7}$, $\text{Var}(X) = \frac{160}{49}$, $\sigma(X) = \frac{4}{7}\sqrt{10}$

19. *a)*

H H H H, $X = 0$	H T T H, $X = 2$
H H H T, $X = 1$	T H T H, $X = 2$
H H T H, $X = 1$	T T H H, $X = 2$
H T H H, $X = 1$	H T T T, $X = 3$
T H H H, $X = 1$	T H T T, $X = 3$
H H T T, $X = 2$	T T H T, $X = 3$
H T H T, $X = 2$	T T T H, $X = 3$
T H H T, $X = 2$	T T T T, $X = 4$

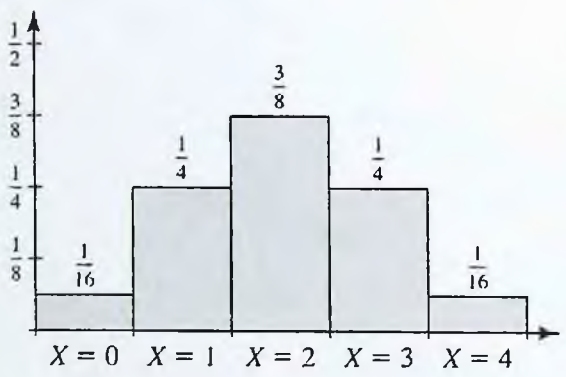
b) H T T T, T H T T, T T H T, T T T H

c) Todos los resultados

d) $P(X = 0) = \frac{1}{16}$, $P(X \leq 3) = \frac{15}{16}$,

$P(X > 3) = \frac{1}{16}$

21.



$E(X) = 2$

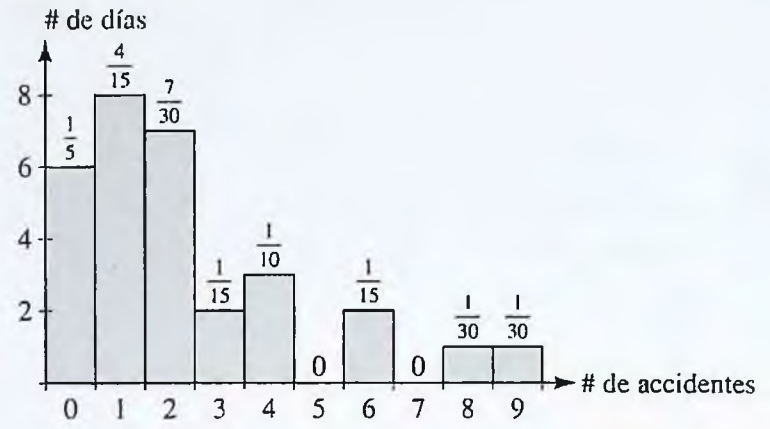
$\text{Var}(X) = 1$

$\sigma(X) = 1$

23. \$20

25. −\$0.027

27. *a)*



b) $E(X) = \frac{23}{10}$

Esperamos que ocurran aproximadamente dos accidentes en cualquier día determinado.

c) $\text{Var}(X) = \frac{1\,603}{300}$

$\sigma(X) = \frac{\sqrt{4\,809}}{30}$

29. $E(X) = 0.096$

31. *a)* $E(X) = pw + (1 - p)(-1)$

$= pw + p - 1$

b) El juego es limpio cuando $E(X) = 0$.

$pw + p - 1 = 0$

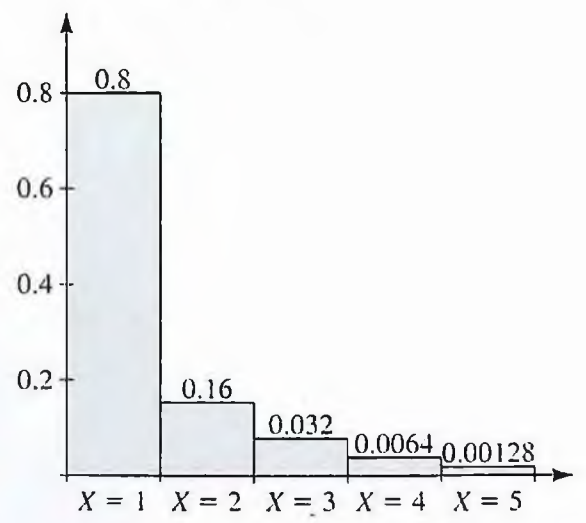
$pw = 1 - p$

$w = \frac{1 - p}{p}$

Las apuestas parejas son $\frac{1 - p}{p}$ a 1.

33. $\frac{19}{18}$ a 1

35. $P(X = 1) = 0.8$, $P(X = 2) = 0.16$, $P(X = 3) = 0.032$, $P(X = 4) = 0.0064$, $P(X = 5) = 0.00128$



www.FreeLibros.com

37. *a*) 0.00567
b) 0.99757
c) 0.00243
d) Unos 1.4 chips

39. *a*) Aproximadamente 0.00050
b) Página 2000
c) Aproximadamente 0.98757

41. *a*) Aproximadamente 0.03397
b) Aproximadamente 0.18463
c) Aproximadamente 0.61271
d) 25 estudiantes

43. Aproximadamente 0.13533

45.
$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} np(1-p)^{n-1}$$
$$= p\sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1}$$
$$= p\frac{1}{(1-(1-p))^2}$$
$$= \frac{1}{p}$$

47. $\sum_{n=1}^{\infty} P(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^b} = a\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^b} = 1$

Por lo tanto, $a = \frac{1}{\zeta(b)}$ donde $\zeta(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^b}$.

CAPÍTULO 10 | Sección 2

1. Sí
3. Sí
5. No

7. *a*) 1
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{3}$

9. *a*) 1
b) $\frac{3}{16}$
c) $\frac{9}{16}$

11. *a*) 1
b) $\frac{7}{8}$
c) $\frac{1}{8}$

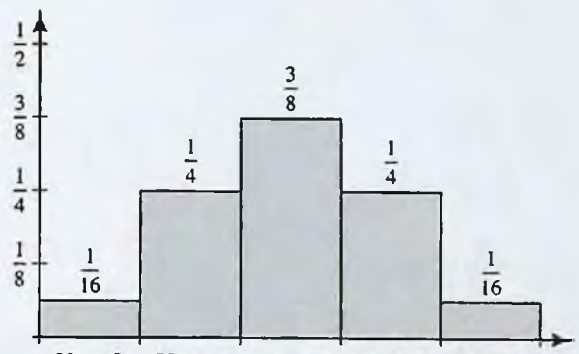
13. *a*) 1
b) $\frac{1}{e} - \frac{1}{e^4}$
c) $1 - \frac{1}{e^4}$

15. *a*) $\frac{9}{14}$
b) $\frac{43}{70}$
c) $\frac{13}{28}$

17. *a*) $\frac{3}{5}$
b) $\frac{3}{20}$

19. *a*) Aproximadamente 0.05772
b) Aproximadamente 0.45119
c) Aproximadamente 0.54881

21.



$E(X) = 2$
$\text{Var}(X) = 1$
$\sigma(X) = 1$

23. \$20

25. −\$0.027

27. *a*) $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{60} & \text{si } 0 \le t \le 60 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$
b) $\frac{1}{4}$
c) $\frac{1}{6}$

29. $\frac{1}{e} \approx 0.36788$

31. *a*) Aproximadamente 0.11612
b) Aproximadamente 0.06336

33. *a*) Aproximadamente 0.33353
b) Aproximadamente 0.66647

35. Aproximadamente0.45816

37. 20 segundos

39. $\frac{A+B}{2}$

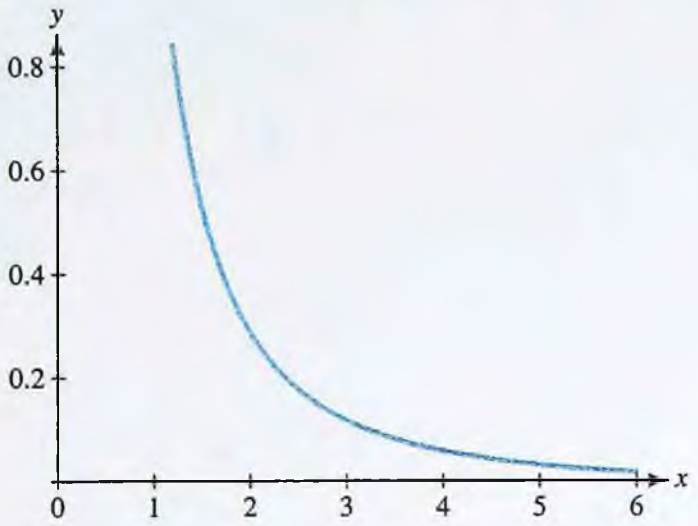
www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

41. *a*) $r(x) = \int_x^{\infty} f(x)\,dx = 1 - \int_0^x f(x)\,dx$

b) e^{-200}

43. *a*)



b) 0.06

c) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

CAPÍTULO 10 | Sección 3

1. $E(X) = \frac{7}{2}$, Var $(X) = \frac{3}{4}$

3. $E(X) = \frac{4}{3}$, Var $(X) = \frac{8}{9}$

5. $E(X) = \frac{3}{2}$, Var $(X) = \frac{3}{4}$

7. $E(X) = \frac{1}{4}$, Var $(X) = \frac{1}{16}$

9. $E(X) = \frac{2}{3}$, Var $(X) = \frac{2}{63}$

11. $E(X) = 2$, $E(Y) = 1$

13. $E(X) = 1$, $E(Y) = 2$

15. $E(X) \approx 4.685$ años

17. $E(X) \approx 10$ minutos

19. $E(X) \approx 20$ meses

21. *a*) $\lambda = \frac{1}{5}$

b) Aproximadamente 0.32968

c) Aproximadamente 0.24660

23. *a*) $A = b = -\ln 0.9$

b) Aproximadamente 35.9%

c) Aproximadamente 22.9 semanas

d) Aproximadamente 9.5 semanas

e) Aproximadamente 90.1 (semanas)^2; la variabilidad es grande en comparación con el valor esperado.

25. 2 horas

27. $E(X) = \int_a^b \left(\frac{x}{b-a}\right) dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_{x=a}^{x=b}$

$= \frac{(b^2 - a^2)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$

29. $E(X) = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^N \lambda x e^{-\lambda x} dx$

$= \lim_{N\to\infty} \left[-xe^{-\lambda x}\Big|_0^N + \int_0^N e^{-\lambda x}\,dx \right]$

$= \lim_{N\to\infty} \left(-xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right)\Big|_0^N = \frac{1}{\lambda}$

31. *a*) $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases}$

b) $e^{-2} \approx 0.13534$

c) $e^{-1/2} - e^{-1} \approx 0.23865$

33. Paciente en 107A: 4 días

Paciente en 107B: 3 días

35. *a*) $\frac{7}{30}$

b) A: $\frac{24}{5}$ trabajador-horas, B: $\frac{16}{3}$ trabajador-horas

c. Aproximadamente \$193.07

CAPÍTULO 10 | Sección 4

1. $E(X) = 0$, Var $(X) = 4$, $\sigma = 2$

3. $E(X) = -1$, Var $(X) = 3$, $\sigma = \sqrt{3}$

5. 0.8925

7. 1.0000

9. 0.6827

11. 1.00

13. 1.10

15. *a*) 0.0228

b) 0.5

c) 0.6826

d) 0.0000

17. *a*) 5

b) -3.5

19. *a*) 0.683 o 68.3%

b) 0.954 o 95.4%

www.FreeLibros.com

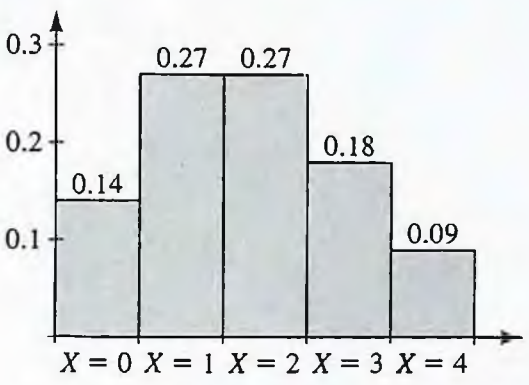
21. *a*) $3e^{-3} \approx 0.149$

b) $\frac{9}{2}e^{-3} \approx 0.224$

c) $\frac{27}{8}e^{-3} \approx 0.168$

d) $\frac{3^8}{8!}e^{-3} \approx 0.008$

23.



25. *a*) Falso; sólo es verdadero si la media es = 0

b) Verdadero; es simétrico alrededor de 0.

27. *a*) Alrededor del 68.3% de los perros basset adultos tienen peso w entre $45 \leq w \leq 55$ lb.

b) Alrededor del 95.4% de los perros basset adultos tienen peso w entre $40 \leq w \leq 60$ lb.

c) Alrededor del 99.7% de los perros basset adultos tienen peso w entre $35 \leq w \leq 65$ lb.

29. 0.3829

31. *a*) 0.9544 *b*) 0.0013

33. Aproximadamente 0.0388

35. 11.51%

37. 44.2 años

39. *a*) 7.66% *b*) 17.78 oz

41. *a*) 7.66%

b) $103.25 \frac{\text{mg}}{\text{dL}}$

43. *a*) 0.0668

b) 0.3538

c) 0.4554

45. 0.9759

47. *a*) 0.3472, 0.4599

b) 0.2047

c) 0.7953

49. Tienda B

51. *a*) 0.9544

b) Sí, 0.0062

c) Sí, 0.00003

d) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

53. *a*) $\lambda = 6.1$

b) 0.0022

c) 0.0848

d) 0.4298

55. La diferencia en probabilidades es 0.00027.

57. *a*) $\lambda = \ln 20 \approx 3$

b) 0.1005

c) ≈ 0.9165

d) 0.95

e) 3 hits

59. $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} = 0$ donde $x = 0$.

$f'(x) > 0$ para $x < 0$ y $f'(x) < 0$ para $x > 0$, de modo que f tiene un máximo absoluto en $x = 0$.

$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}(x^2 - 1) = 0$ cuando $x = -1$

$x = -1$. $f''(x) > 0$ para $x < -1$ y $x > 1$ y $f''(x) < 0$ para $-1 < x < 1$, de modo que f tiene puntos de inflexión en $x = -1$ y $x = 1$.

61. *a*) $\int_{x=\mu-2\sigma}^{x=\mu+2\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$

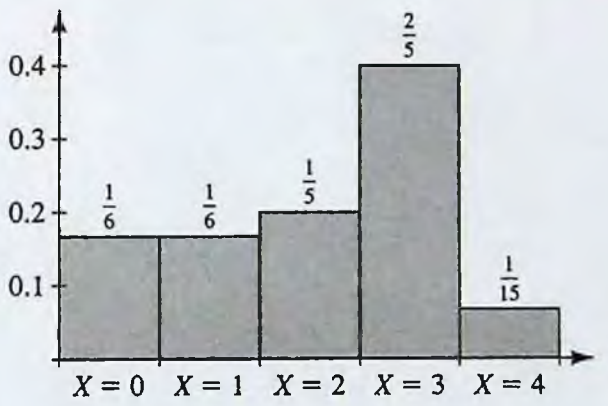
$= \int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx \approx 0.954$

b) $\int_{x=\mu-3\sigma}^{x=\mu+3\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx$

$= \int_{-3}^{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx \approx 0.997$

CAPÍTULO 10 | Revisión

1.



$E(x) = \frac{61}{30} \approx 2.0333$

$\text{Var}(x) = \frac{1\,349}{900} \approx 1.4989$

$\sigma(x) = \frac{\sqrt{1\,349}}{30} \approx 1.2243$

www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

2. *a*) Sí
b) No

3. *a*) $e^{-2/3} - e^{-1} \approx 0.1455$
b) $e^{-1} \approx 0.3679$

4. $E(X) = 3$, Var $(X) = \frac{9}{5}$

5. *a*) 0.1977
b) 0.9026

6. *a*) 0.683
b) 0.954

7. $\frac{2}{3}$

8. 0.7738

9. *a*) $e^{-1.5} \approx 0.2231$

9. *b*) 2 años; la esperanza de vida para quienes reciben medicamento

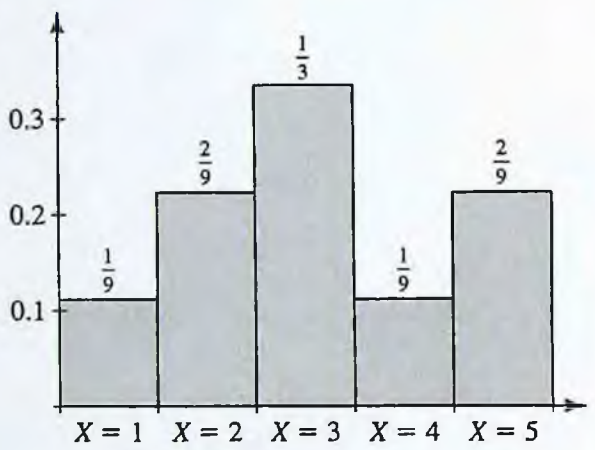
10. 170 puntos

11. 0.5595

12. *a*) 0.9698
b) El segundo componente; 3 años

CAPÍTULO 10 | Problemas de repaso

1.



$E(X) = \frac{28}{9} \approx 3.1111$

Var $(X) = \frac{134}{81} \approx 1.6543$

$\sigma(X) = \frac{\sqrt{134}}{9} \approx 1.2862$

3. Finita discreta

5. Finita discreta

7. $P(2 \leq X \leq 7) = 0.8$
$P(X \geq 5) = 0.6$

9. $P(X \leq 1) = 0.3125$
$P(1 \leq X \leq 3) = 0.6875$

11. $E(X) = 1.2$, Var$(x) = 0.16$

13. $c = \frac{1}{16}$

15. 0.1587

17. Arriba de 16%

19. \$11.40

21. *a*) 15 niños
b) 15 niños
c) 0 niños

23. 0.0004

25. *a*) $1 - e^{-4} \approx 0.9817$
b) $e^{-8} \approx 0.0003$
c) 2.5 años

27. *a*) $1 - 6e^{-5} \approx 0.9596$
b) 4 pies

29. *a*) $P(X = 10\,000) = 0.98$
$P(X = -90\,000) = 0.02$
b) \$8 000
c) \$18 000

31. *a*) $\lambda = \frac{\ln 2}{10}$

b) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{10}{\ln 2} \approx 14.2$ semanas

33. *a*) 1.0000
b) 12.08 onzas

35. 0.4784, 39 estudiantes

37. *a*) 0.5
b) 5

39. *a*) $\frac{32}{3} e^{-4} \approx 0.1954$

b) $e^{-4} \approx 0.0183$

c) $\frac{71}{3} e^{-4} \approx 0.4335$

41. *a*) $e^{-2.4} \approx 0.0907$
b) $1 - e^{-1.2} \approx 0.6988$
c) $e^{-0.1} \approx 0.9048$

43. *a*) $\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=1} 0.4(2x + 3y)\, dx\, dy = 1$
y para $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, f(x,y) \geq 0$

b) 0.275

www.FreeLibros.com

c) 0.072

d) $\frac{1}{3} \approx 0.333$

45. *a*) $(e^{-5/4} - 1)(e^{-5/2} - 1) \approx 0.6549$

b) $1 + e^{-4} - 2e^{-2} \approx 0.7476$

47. *a*) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{5}{18}$

49. *a*) $\frac{25}{92} \approx 0.2717$

b) $\frac{67}{192} \approx 0.3490$

c) Esta distribución no tiene un valor finito esperado.

d) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

CAPÍTULO 11 | Sección 1

1. *a*) 30°

b) 60°

3. *a*) −120°

b) 390°

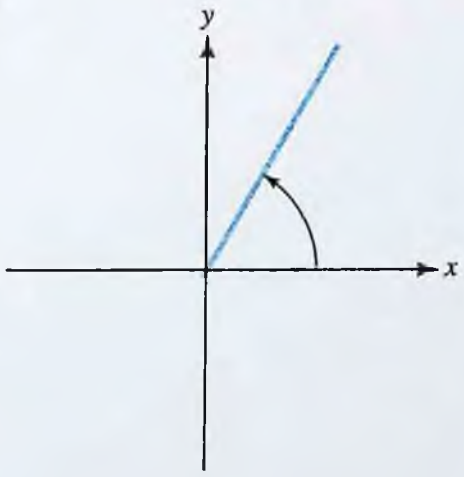
5. *a*) $\frac{3\pi}{4}$

b) $\frac{\pi}{3}$

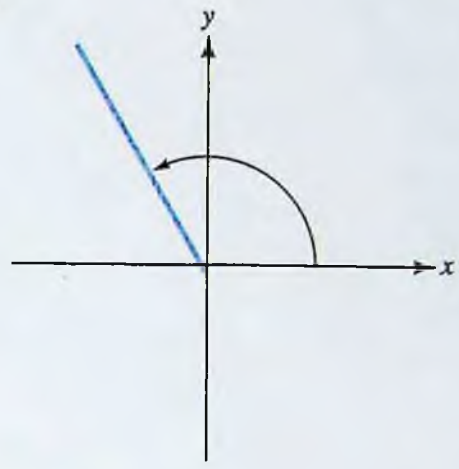
7. *a*) $-\frac{\pi}{3}$

b) $\frac{5\pi}{6}$

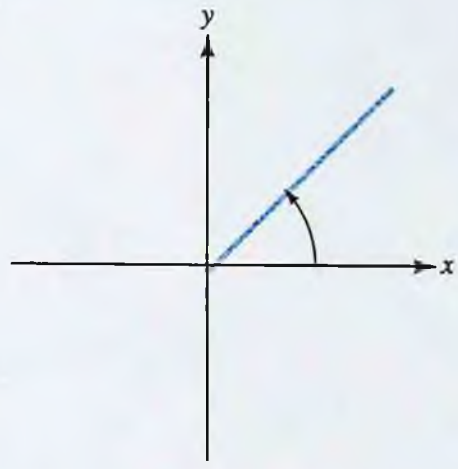
9. *a*) 60°



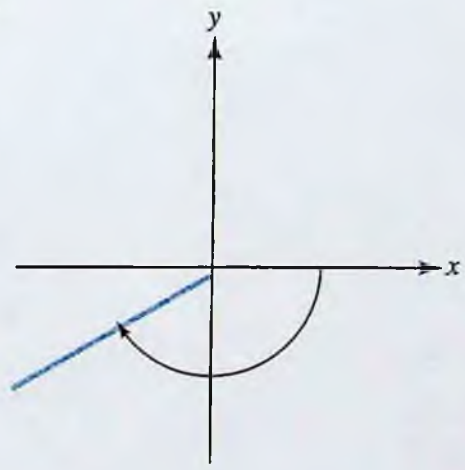
b) 120°



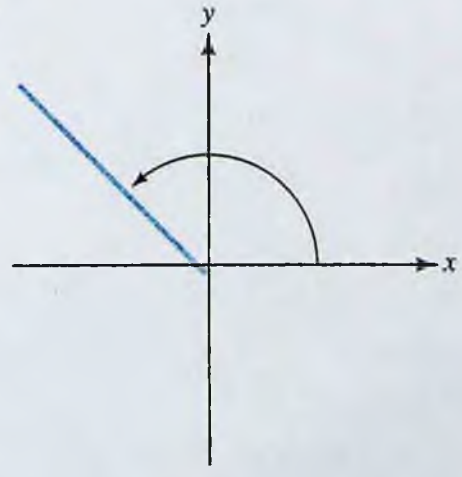
11. *a*) 45°



b) −150°



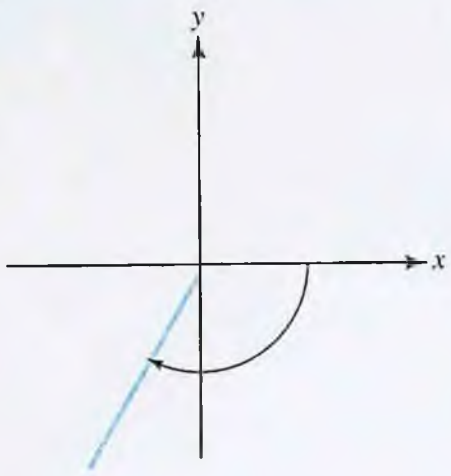
13. *a*) $\frac{3\pi}{4}$



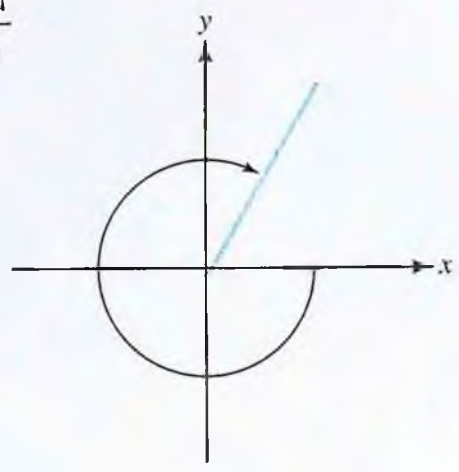
RESPUESTAS

www.FreeLibros.com

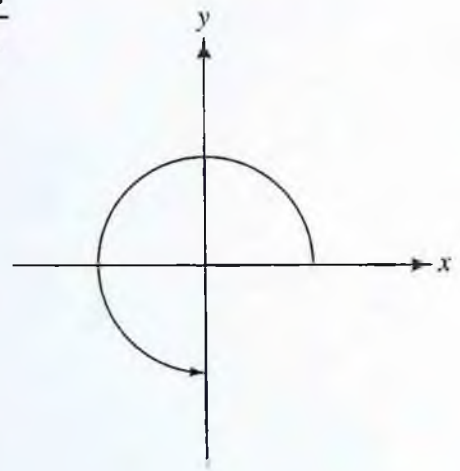
b) $-\frac{2\pi}{3}$



15. *a*) $-\frac{5\pi}{3}$



b) $\frac{3\pi}{2}$



17. *a*) $\frac{\pi}{12}$

b) $-\frac{4\pi}{3}$

19. *a*) $\frac{3\pi}{4}$

b) 3π

21. *a*) $150°$

b) $-15°$

23. *a*) $540°$

b) $\frac{180°}{\pi}$

25. 0

27. 1

29. 0

31. 1

33. $-\frac{1}{2}$

35. $\frac{1}{2}$

37. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

39. -1

41. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

43. $-\sqrt{2}$

45. $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

47.

θ	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\operatorname{sen}\theta$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

49. $\frac{3}{4}$

51. $\frac{4}{3}$

53. $\frac{5}{4}$

55. $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

57. $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}$

59. $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

61. $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi$

www.FreeLibros.com

63. *a)* $E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{28} \cdot 21\ ?365\right) = -E_0$

b) $P_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{23} t\right)$

$$P_0 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{23} \cdot 21 \cdot 365\right) = P_0 \operatorname{sen}\left(\frac{15\,330}{23}\pi\right)$$
$$\simeq 0.998\, P_0$$

c) El ciclo E_0 tiene un máximo cuando $t = 7(4n + 1)$ días y n es un entero. El ciclo P_0 tiene un máximo cuando $t = \frac{23}{4}(4m + 1)$ días y m es un entero. No hay enteros n y m que den el mismo t. Por lo tanto, los dos ciclos de Jake nunca estarán a sus niveles máximos simultáneamente.

65. *a)* $A = 106, B = 24, k = \frac{79\pi}{30}$

b) 130

67. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(-\theta) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(-\theta)$

$$= \cos(-\theta)$$
$$= \cos(\theta)$$

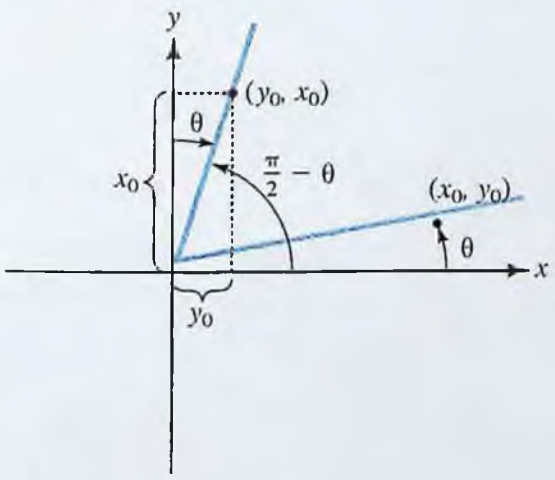
69. Un ángulo θ corresponde a un punto en el círculo unitario con coordenadas $(x, y) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. La correspondencia es biunívoca para $0 \le \theta \le 2\pi$. De las siguientes gráficas vemos que para $0 \le \theta \le 2\pi$, si (x_0, y_0) corresponde al ángulo θ, entonces (y_0, x_0) corresponde al ángulo $\frac{\pi}{2} - \theta$. Esto nos da

$$(y_0, x_0) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$$

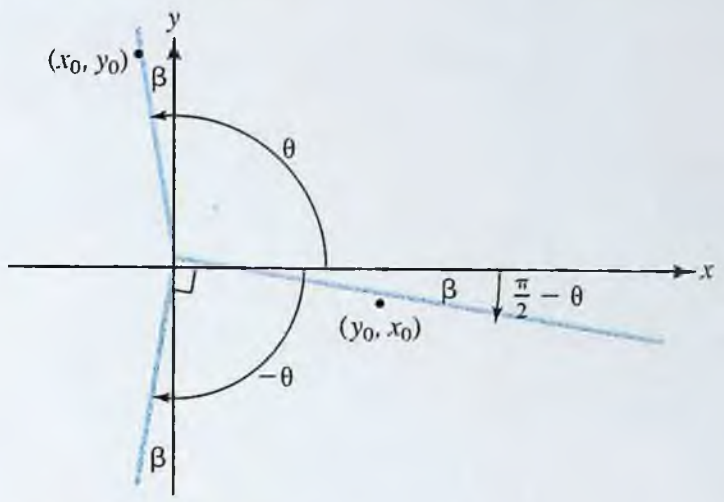
Si $(x_0, y_0) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, entonces $(y_0, x_0) = (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$. Combinando esto con el resultado de líneas antes, tenemos

$$(y_0, x_0) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta).$$

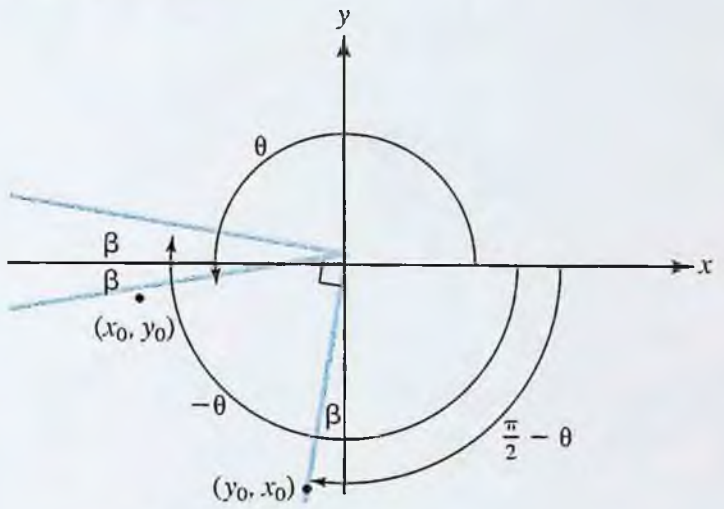
Primer cuadrante



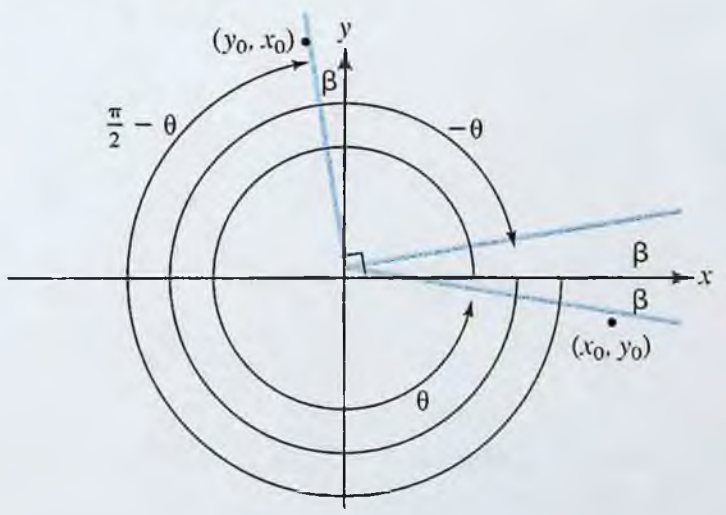
Segundo cuadrante



Tercer cuadrante



Cuarto cuadrante



CAPÍTULO 11 | Sección 2

1. $3\cos 3t$

3. $-2\cos(1 - 2t)$

5. $-3t^2 \operatorname{sen}(t^3 + 1)$

7. $2\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$

RESPUESTAS

www.FreeLibros.com

RESPUESTAS

9. $-6(1 + 3x)\,\text{sen}\,(1 + 3x)^2$

11. $e^{-u/2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2\pi u - 2\pi\,\text{sen}\,2\pi u\right)$

13. $\dfrac{\cos t}{(1 + \text{sen}\,t)^2}$

15. $-3t^2\sec^2(1 - t^3)$

17. $-2\pi\sec\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi t\right)\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi t\right)$

19. $2\cot t$

21. $-2\cos\left(\frac{t}{2}\right) + C$

23. $-\frac{1}{6}\,\text{sen}\,(1 - 3x^2) + C$

25. $\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{x}{2}\,\text{sen}\,(2x) + C$

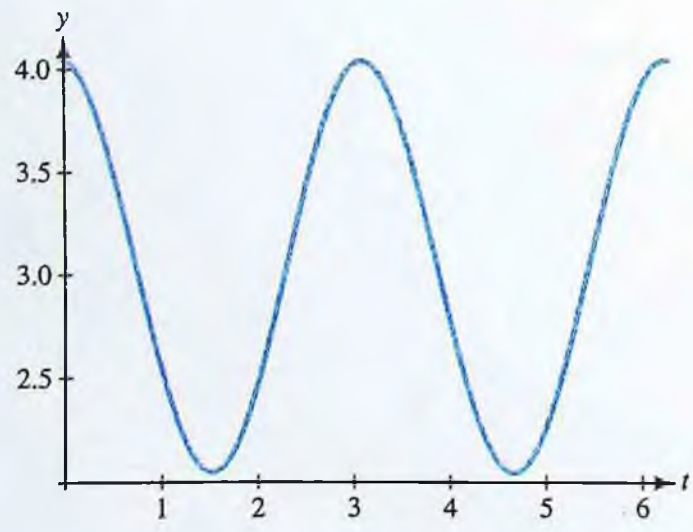
27. $\frac{1}{2}\text{sen}^2 + C$

29. $\text{sen}\,x - x\cos x + C$

31. Periodo 4, amplitud 1.5, desfasamiento 1, cambio vertical 2



33. Periodo π, amplitud -1, desfasamiento $\frac{\pi}{2}$, cambio vertical 3

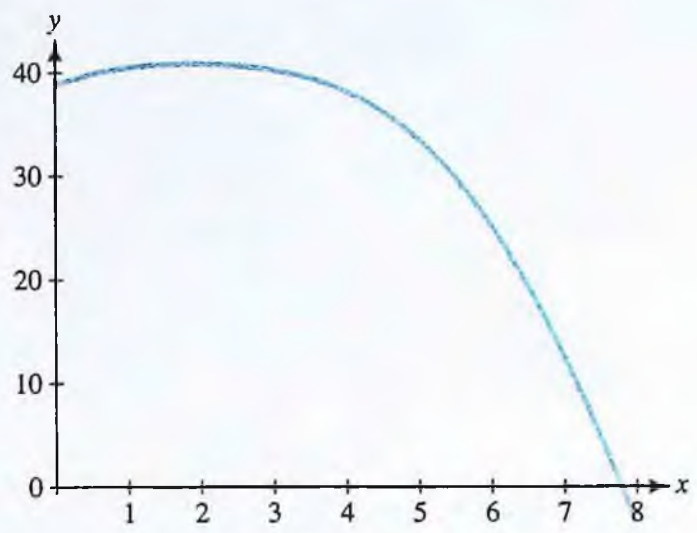


35. $\dfrac{3\sqrt{3} - 4}{2\pi}$

37. $y(t) = -1 + \sqrt{5 - \cos 2t}$

39. ≈ -3.69 grados/hora, más frío

41. *a*)



(0, 37.9), (7.8, 0)

b) ≈ 244.73

43. $B + 32\sqrt{6}$

45. *a*) Mínimo de ≈ 97.87 en el tiempo $t = 0$ (medianoche)

Máximo de 98.7 en el tiempo $t = 15$ (3:00 P.M.)

b) ≈ 0.03°F/hr

c) En $t = 3$ (3:00 A.M.)

47. *a*) $\approx -5.69\,\dfrac{\text{miles de unidades}}{\text{mes}}$, decreciente

b) $\approx 28.53\,\dfrac{\text{miles de unidades}}{\text{mes}}$

49. $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{4}{15}$ rad/s

51. 60 rad/h

53.
$$\frac{d}{dt}(\cos t) = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(t + h) - \cos(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(t)\cos(h) - \text{sen}(t)\,\text{sen}(h) - \cos(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(t)(\cos(h) - 1) - \text{sen}(t)\,\text{sen}(h)}{h}$$

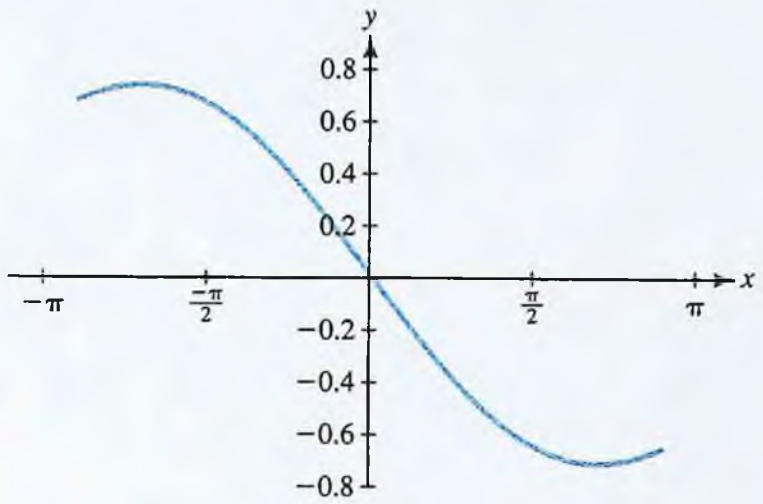
$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h) - 1}{h} = 0,$$

y $\lim_{h\to 0}\dfrac{\text{sen}(h)}{h} = 1$, así,

$$\frac{d}{dt}(\cos t) = -\text{sen}\,t.$$

www.FreeLibros.com

55. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$



57. *a)* $f(t + p) = a + b \operatorname{sen}\left[\dfrac{2\pi}{p}(t + p - d)\right]$

$$= a + b \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{p}(t - d) + 2\pi\right]$$

$$= a + b\left[\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}(t - d)\right)\cos(2\pi)\right.$$

$$\left. + \operatorname{sen}(2\pi)\cos\left(\frac{2\pi}{p}(t - d)\right)\right]$$

$$= a + b \operatorname{sen}\left[\frac{2\pi}{p}(t - d)\right]$$

$$= f(t)$$

b) $f(t + p) = a + b\cos\left[\dfrac{2\pi}{p}(t + p - d)\right]$

$$= a + b\cos\left[\frac{2\pi}{p}(t - d) + 2\pi\right]$$

$$= a + b\left[\cos\left(\frac{2\pi}{p}(t - d)\right)\cos(2\pi)\right.$$

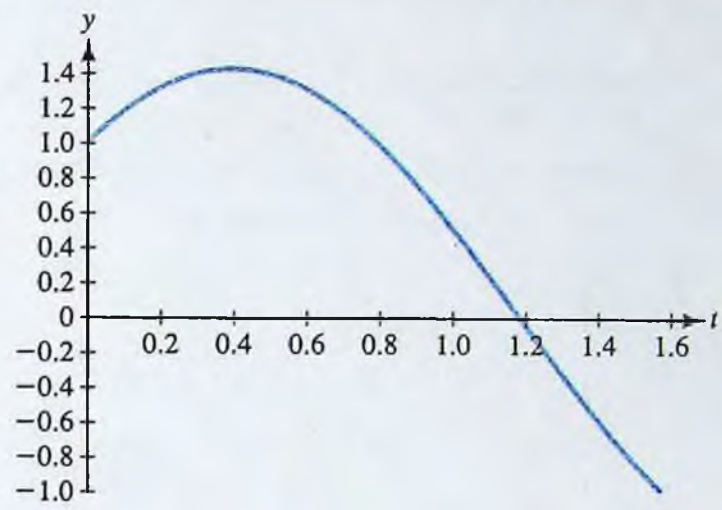
$$\left. - \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{p}(t - d)\right)\operatorname{sen}(2\pi)\right]$$

$$= a + b\cos\left[\frac{2\pi}{p}(t - d)\right]$$

$$= f(t)$$

CAPÍTULO 11 | Sección 3

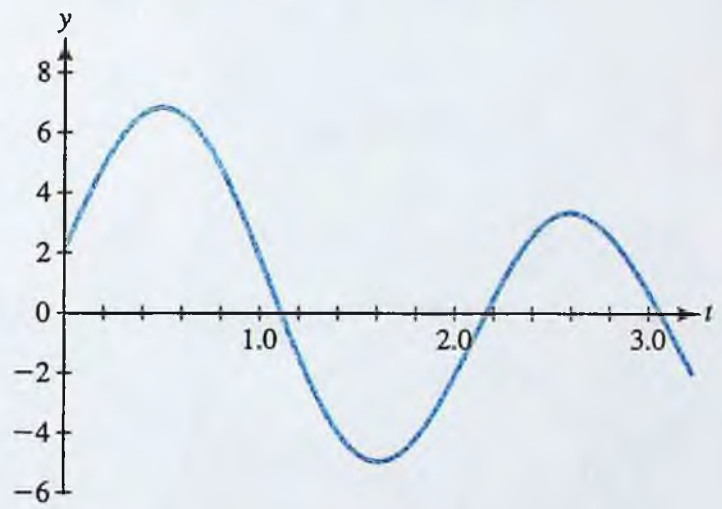
1.



Máximo en $t = \dfrac{\pi}{8} \approx 0.39$,

mínimo en $t = \dfrac{\pi}{2} \approx 1.57$

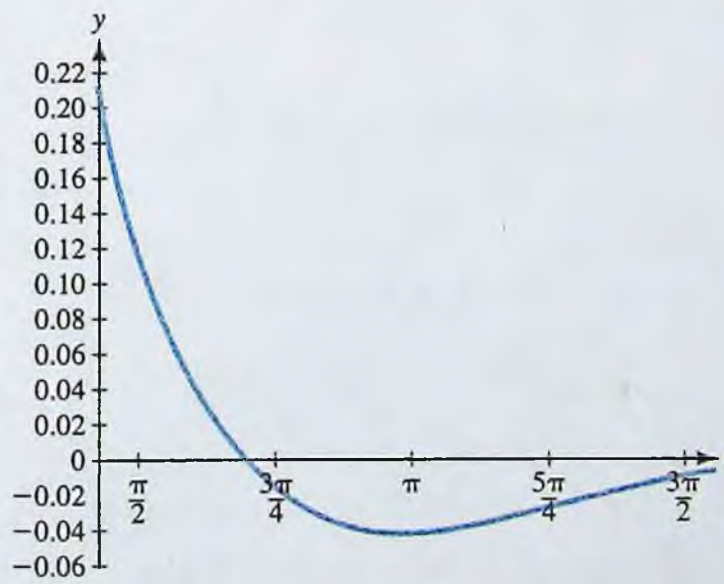
3.



Máximo en $t \approx 0.502$,

mínimo en $t \approx 1.615$

5.



Máximo en $t = \dfrac{\pi}{2}$,

mínimo en $t = \pi$

RESPUESTAS

www.FreeLibros.com

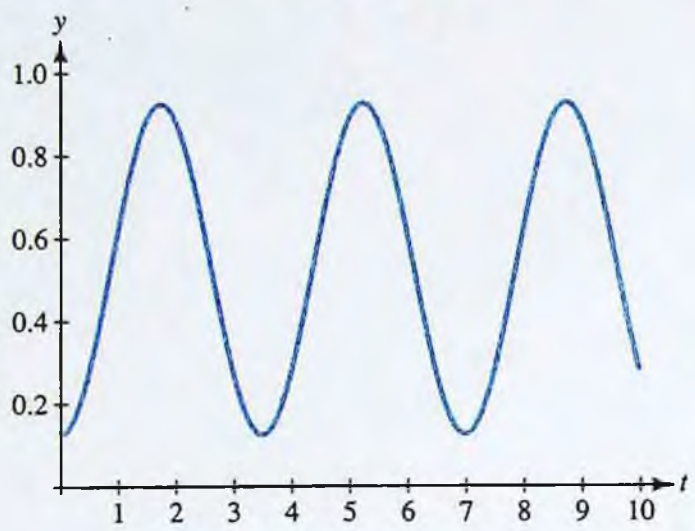
7. Máximo en $= f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$,

no hay valor mínimo, $\lim_{t \to \pi} f(t) = -\infty$

9. *a*) Volumen máximo = 0.9 litros en el tiempo $t = (2n + 1)(1.75)$ donde n es un entero

b) Volumen mínimo = 0.1 litros en los tiempos $t = (2n)(1.75)$ donde n es un entero

c)



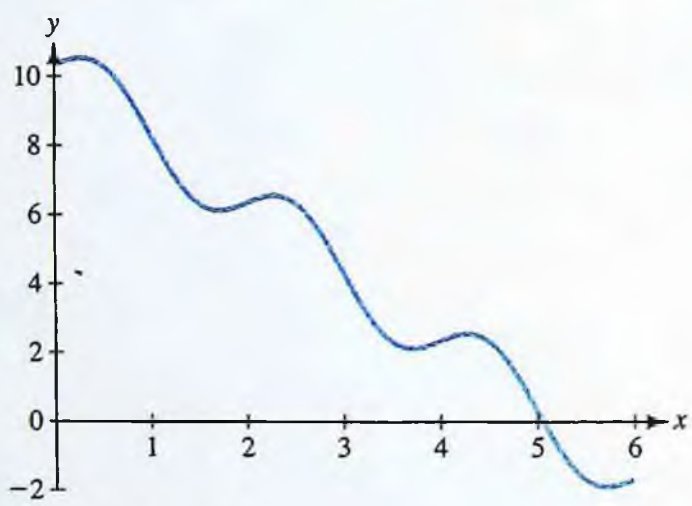
11. $\int \frac{dP}{P} = \int (b + a\cos 2\pi t)\, dt$

$$\ln |P| = bt + \frac{a}{2\pi}\operatorname{sen} 2\pi t + C_1$$

$$P(t) = C_2 e^{bt + \frac{a}{2\pi}\operatorname{sen} 2\pi t}, \text{ donde } C_2 = e^{C_1}$$

$$P_0 = P(0) = C_2$$

13. *a*)



13. **b.** $5 - \frac{2}{3\pi} \approx 4.79$ dólares

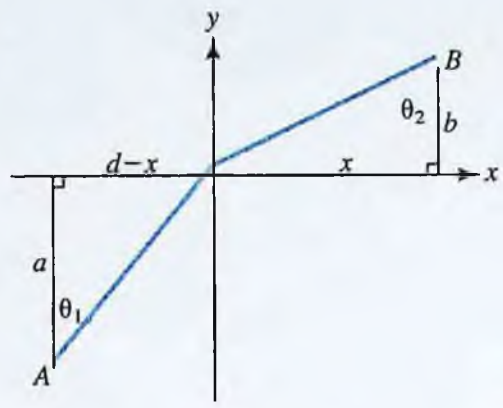
c) $1 600

15. $\theta = \frac{\pi}{2}$

17. Longitud de la cuarta pared = 40 pies
Área máxima $= 300\sqrt{3}$ pies cuadrados

19. $\theta = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{E_L}{E_W}\right)$

21.



$$\text{Tiempo} = T = \frac{\text{distancia}}{\text{rapidez}}$$

$$T = \frac{\sqrt{a^2 + (d-x)^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + x^2}}{v_2}$$

$$\frac{dT}{dx} = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{2(d-x)(-1)}{v_1\sqrt{a^2 + (d-x)^2}} + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{2x}{v_2\sqrt{b^2 + x^2}}$$

$$= \frac{-(d-x)}{v_1\sqrt{a^2 + (d-x)^2}} + \frac{x}{v_2\sqrt{b^2 + x^2}}$$

$$= \frac{-\operatorname{sen}\theta_1}{v_1} + \frac{\operatorname{sen}\theta_2}{v_2}$$

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

23. *a*)

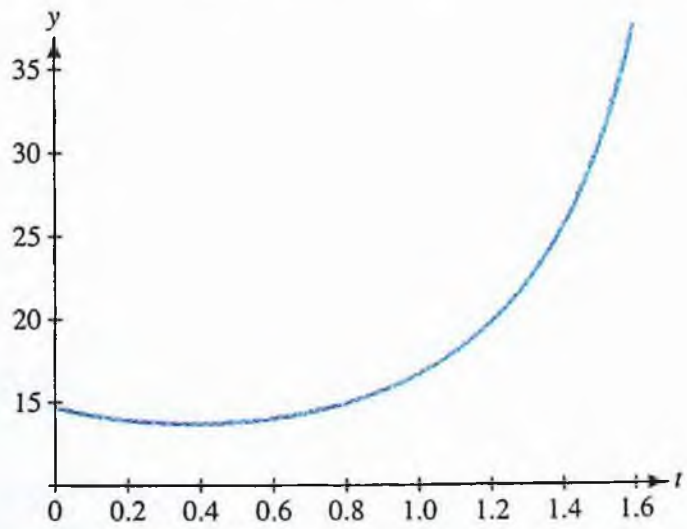
Ángulo θ	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	1.0	1.25	1.5
Fuerza F	13.00	13.13	14.14	15.97	20.15	29.80

b) F no está definida en $\theta = \frac{\pi}{2}$. No obstante, si reescribimos F como

$$\overline{F} = \frac{\mu W}{\cos\theta + \mu \operatorname{sen}\theta}$$

vemos que $\overline{F}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\theta \to \pi/2} F(\theta) = W$.

c)

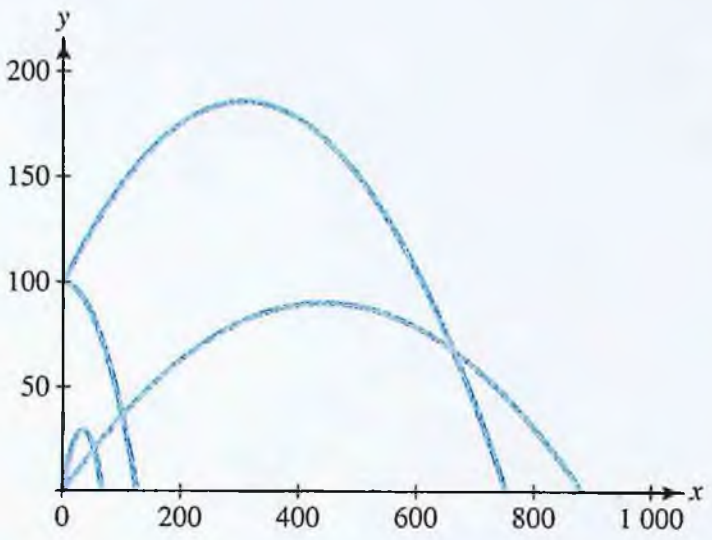


F está minimizada en $\theta \approx 0.38$.

d) $\theta = \arctan(\mu)$

www.FreeLibros.com

25.



a) parábola

b)

Punto más alto	100	187.89	29.30	91.53
Punto de impacto	125.00	749.62	67.66	883.88

27. *a*) 20.34 pies

b) 18.68°

29. *a*) $L = \dfrac{2\pi}{0.65} \approx 9.67$ sec

b) 2.68 litros; sí

c) $I = 9.67$ s; inhala 6.47 litros; no

31. $P(10) = 13\,499$

33. *a*) $T'(t) = -\dfrac{0.46\,\pi}{12}\,\text{sen}\left[\dfrac{\pi(t - 16.37)}{12}\right]$

b) Máximo en $t = 16.37$

Temperatura máxima = 37.75°C

c) Temperatura mínima = 36.83°C en el tiempo $t = 4.37$

d) El promedio en el periodo de 7 A.M. a 10 P.M. = 37.48°C

35. $F'(\theta) = kh \csc\theta\left(\dfrac{\csc\theta}{R^4} - \dfrac{\cot\theta}{r^4}\right), \quad 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

Punto crítico en θ_0 donde $\cos\theta_0 = \dfrac{r^4}{R^4}$.

$\csc\theta > 0$ para $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ y $k > 0, h > 0$

$\Rightarrow$ signo de $F'(\theta)$ = signo de $\left(\dfrac{\csc\theta}{R^4} - \dfrac{\cot\theta}{r^4}\right)$

$$\frac{\csc\theta}{R^4} - \frac{\cot\theta}{r^4} = \frac{1}{R^4\,\text{sen}\,\theta} - \frac{\cos\theta}{r^4\,\text{sen}\,\theta}$$

$$= \frac{1}{\text{sen}\,\theta}\left(\frac{1}{R^4} - \frac{\cos\theta}{r^4}\right)$$

$\text{sen}\,\theta > 0$ para $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, entonces, considere

$$\left(\frac{1}{R^4} - \frac{\cos\theta}{r^4}\right)$$

$\cos\theta$ es estrictamente decreciente en $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow$ si $\theta < \theta_0$ entonces $\cos\theta > \cos\theta_0$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{R^4} - \frac{\cos\theta}{r^4}\right) < \left(\frac{1}{R^4} - \frac{\cos\theta_0}{r^4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow F'(\theta) < 0$$

Análogamente, si $\theta > \theta_0$ entonces $\cos\theta < \cos\theta_0$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{R^4} - \frac{\cos\theta}{r^4}\right) > \left(\frac{1}{R^4} - \frac{\cos\theta_0}{r^4}\right) = 0$$

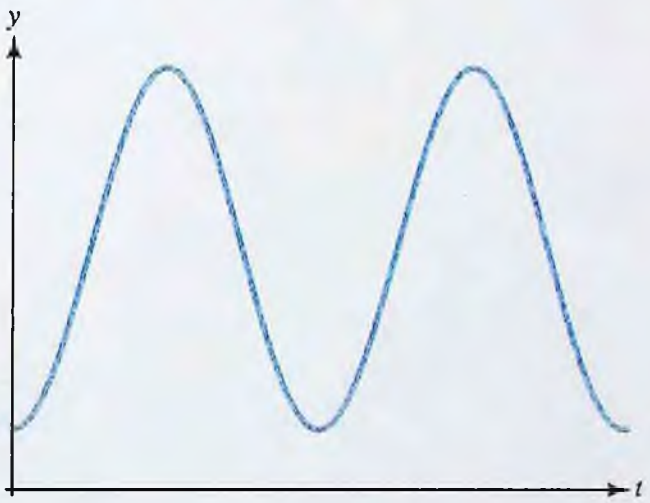
$$\Rightarrow F'(\theta) > 0$$

Hay un mínimo en θ_0 porque

$F'(\theta) < 0 \Rightarrow F(\theta)$ decreciente y

$F'(\theta) > 0 \Rightarrow F(\theta)$ creciente.

37. *a*)



Máximo valor de $\beta = \dfrac{\alpha\cos\gamma}{1 - \text{sen}^2\,\gamma}$

Mínimo valor de $\beta = \alpha\cos\gamma$

b) $T = \dfrac{2\pi}{\alpha}$

Promedio de velocidad angular de salida:

$$\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi/\alpha} \frac{\alpha\cos\gamma}{1 - \text{sen}^2\gamma\,\text{sen}^2(\alpha t)}\,dt$$

c)

Velocidad angular de entrada α	3	5	10	12.7
Ángulo γ entre ejes	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	0.4	0.26
Promedio de velocidad de salida A	3	5	10	12.7

RESPUESTAS

www.FreeLibros.com

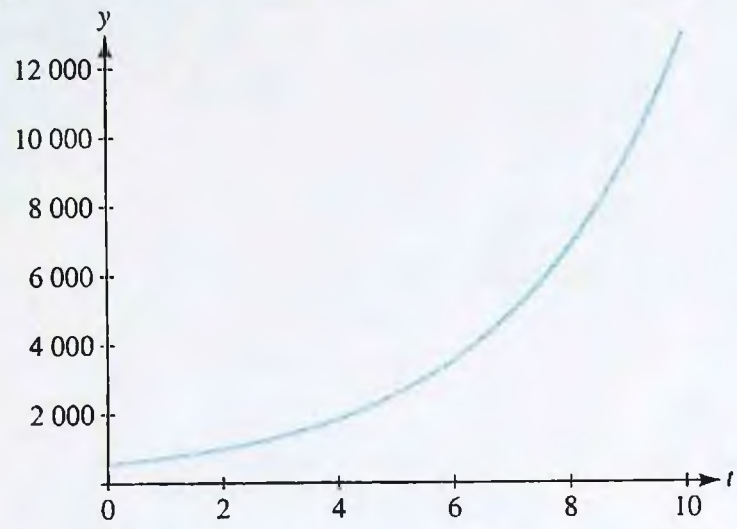
d) α; Al eje de salida le toma el mismo tiempo completar un ciclo.

e) Ejecicio de escritura; las respuestas variarán.

39. *a*) 460, 2 483, 13 211 respectivamente

b) 156, 834, 4 398 respectivamente

c)



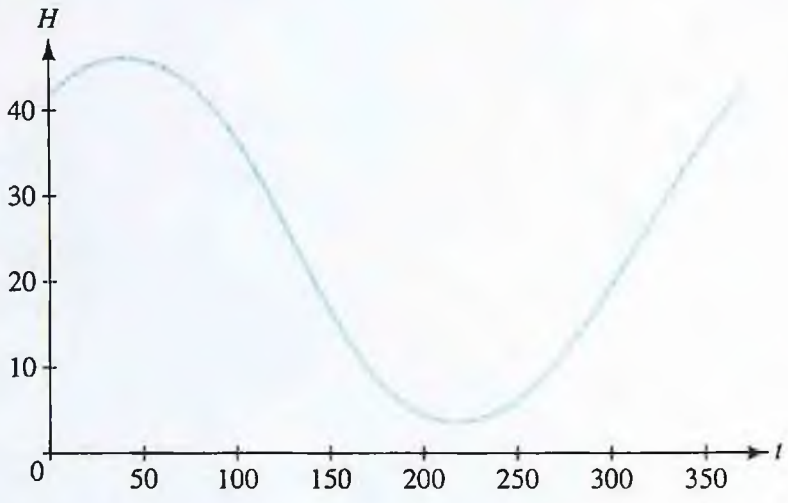
d) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

41. *a*) $t = 35$ (5 de febrero); 47

b) $t = 217.5$ (6 de agosto); 3

c) 1 de enero: ≈ 0.2146; creciente
1 de abril: ≈ -0.3073; decreciente
1 de agosto: ≈ -0.3449; decreciente

d)



e) ≈ 44.57

CAPÍTULO 11 | Revisión

1. *a*) $\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2}$

c) -1

d) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

2. $\cos\theta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

3. *a*) $2\cos(2x)$

b) $\cos x - x \operatorname{sen} x$

c) $\frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}$

d) $\operatorname{sen}(x^2) + 2x^2\cos(x^2)$

4. *a*) $-\frac{1}{2}\cos(2x) + C$

b) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(x^2) + C$

c) ∞

d) $\frac{1}{24}$

5. $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$

6. $\sqrt{2} - 1$

7. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\right)$$

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

8. *a*) $\approx -4.92 \frac{\text{miles de unidades}}{\text{mes}}$; decreciente

b) Ventas máximas: 25.9 mil unidades; febrero y mayo

Ventas mínimas: 6.5 mil unidades; octubre

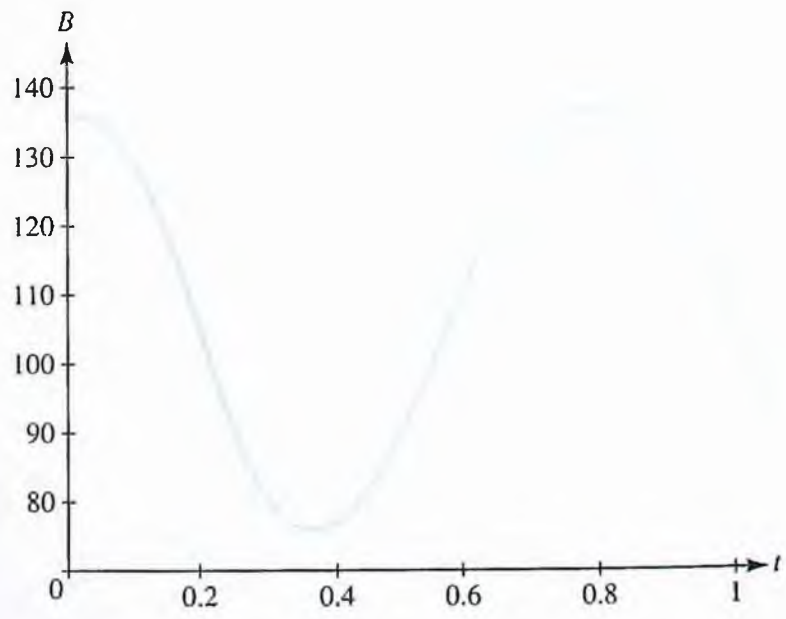
9. *a*) \$3 750

b) \$1 500 por unidad, $\approx$ \$1 871 por unidad

10. *a*) ≈ -0.74°F/día

11. *a*) $k \approx 8.38$

b)



www.FreeLibros.com

c) Sistólica: 136; diastólica: 74

d) 105

CAPÍTULO 11 | Problemas de repaso

1. *a*) $120° = \frac{2\pi}{3}$ radianes

b) $-225° = -\frac{5\pi}{4}$ radianes

3. *a*) $\frac{45°}{\pi} \approx 14.32°$

b) $\frac{180°}{\pi} \approx 57.30°$

c) $-\frac{270°}{\pi} \approx 85.94°$

5. $\frac{4}{3}$

7. $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

9. $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

11. $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$

$\Rightarrow \cos(2\theta) = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)$

$\Rightarrow \cos(2\theta) = -1 + 2\cos^2\theta$

$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta);$

$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$= 1 - \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$

$= \frac{1}{2}(1 - \cos(2\theta))$

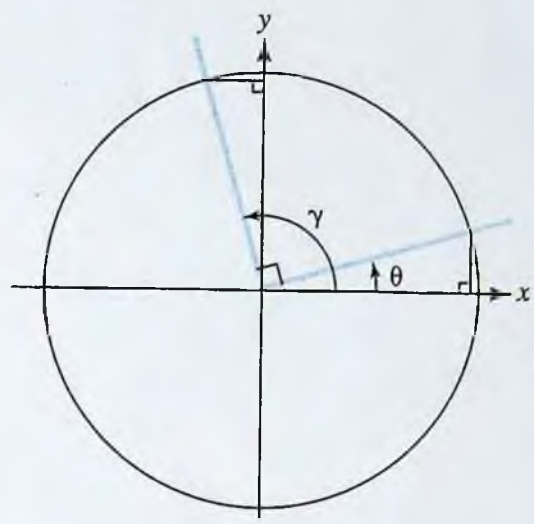
13. *a*) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}\theta$

$= \operatorname{sen}$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= \cos(\theta)$

b)



Sumando 90° a θ intercambia efectivamente los ejes x y y, de modo que $\gamma = \theta + \frac{\pi}{2}$, entonces

$|\cos\gamma| = |\operatorname{sen}\theta|$ y

$|\operatorname{sen}\gamma| = |\cos\theta|$.

Por cuadrante,

sen > 0	sen > 0
cos < 0	cos > 0
sen < 0	sen < 0
cos < 0	cos > 0

Sumando 90° a θ cambia el ángulo al siguiente cuadrante. Vemos que $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\operatorname{sen}\theta$

y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$.

15. $f'(x) = -2\cos x \operatorname{sen} x$

17. $f'(x) = 6\tan(3x + 1)\sec^2(3x + 1)$

19. $f'(x) = -\frac{2\operatorname{sen} x}{\cos x}$

21. $-\frac{1}{2}\cos 2t + C$

23. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$

25. $\ln|\tan t| + C$

27. Ángulo $A = -52°\ 14'\ 20''$, $\theta = 232°\ 14'\ 20''$

29. $x = 0.436, 1.468$

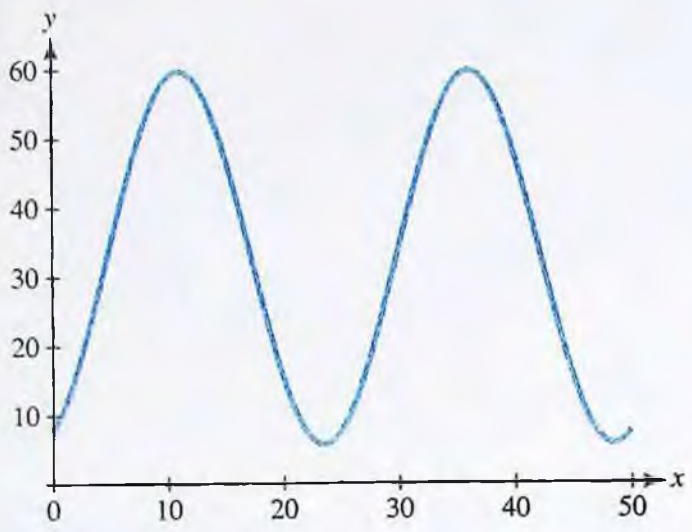
31. $\frac{2}{3}\pi^2 - \frac{3\pi}{4}$

RESPUESTAS

www.FreeLibros.com

33. *a*) $p = 25$
$b = 27$
$d = 11$
$a = 33$

b)



35. $C = (3{,}000 - 900 \cot \theta)\, 4 + (900 \csc \theta)\, 5$

$C' = -900\,(-\csc^2 \theta)\, 4 + 900\,(-\csc \theta \cot \theta)\, 5$

$= 900 \csc^2 \theta\,(4 - 5 \cos \theta)$

$C' = 0 \Rightarrow \cos \theta = \dfrac{4}{5}$ o $\csc \theta = 0$

pero $\csc \theta \neq 0$

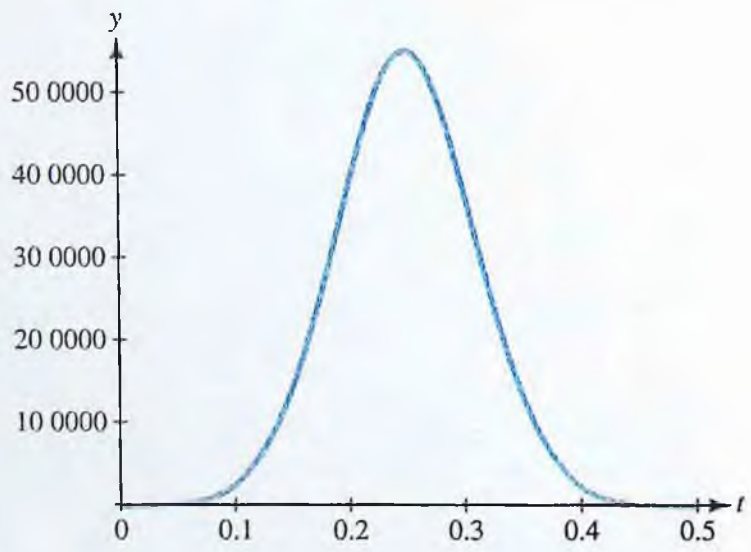
37. *a*)

t	0 125	0.25	0.325	0.5
$p(t)$	70 570	548 317	255 673	500

b)

t	0 125	0.25	0.325	0.5
$p'(t)$	$0\,2195 \times 10^7$	0	$-0.5105 \times 10'$	$-21\,991.15$

c)



39. *a*) primer año 3 300
segundo año 3 300

b) El mes más grande es 12; el mes más pequeño es 1.

41. *a*)

Ene. 1	Mar. 15	Jun. 21
9.11	11.12	15.20

b) Máximo el día 186, 4 de julio
Mínimo el tercer día, 3 de enero

c) 12.2 horas

43. $-\dfrac{3}{250}$ radianes/s

45. *a*) $L = \dfrac{4.25}{\cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta}$

b) L minimiza $\theta = 0.9553$; longitud mínima = 11.04 pulgadas

c) área $= \dfrac{1}{2} L \operatorname{sen} \theta = \dfrac{1}{8} 8.5^2 \sec \theta\, (\csc \theta)^3$; el área se minimiza cuando $\theta = \dfrac{\pi}{3}$; el área mínima es 27.81 pulgadas cuadradas

47. $y = -\cos x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

49. *a*) 0.828155
b) 0.828116

51. $-\ln |\cos x| + C$

53. $\dfrac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0.65$

55. *a*) $\dfrac{du}{dt} = \left(-c^2k^2e^{-c^2k^2t}\right) \operatorname{sen} kx = -c^2k^2e^{-c^2k^2t} \operatorname{sen} kx$

$\dfrac{du}{dx} = e^{-c^2k^2t}\,(k \cos kx)$

$\dfrac{d^2u}{dx^2} = e^{-c^2k^2t}\,(-k^2 \operatorname{sen} kx) = -k^2e^{-c^2k^2t} \operatorname{sen} kx$

$\Rightarrow u_t = c^2u_{xx}$

b) Ejercicio de escritura; las respuestas variarán.

57. ≈ 5.75 o $\sqrt{26 + 5\sqrt{2}}$

APÉNDICE | Repaso de álgebra, Sección A1

1. $1 < x \leq 5$

3. $x > -5$

5.



7.



9. 4

11. 5

www.FreeLibros.com

13. $-3 \le x \le 3$ **15.** $-6 \le x \le -2$

17. $x \le -7$ o $x \ge 3$ **19.** 125

21. 4 **23.** 4

25. $\frac{1}{2}$ **27.** $\frac{1}{2}$

29. $\frac{1}{4}$ **31.** 2

33. $\frac{1}{4}$ **35.** $n = 10$

37. $n = 1$ **39.** $n = 4$

41. $n = \frac{13}{5}$ **43.** $x^4(x - 4)$

45. $-25(x - 7) = 25(7 - x)$

47. $2(x + 1)^2(x - 2)^2(7x - 2)$

49. $x^{-1/2}(6x + 1)$ **51.** $2(x + 3)$

53. $\frac{2(x + 3)^3(5 - x)}{(1 - x)^3}$ **55.** 34

57. 0 **59.** $\sum_{j=1}^{6} \frac{1}{j}$

61. $\sum_{j=1}^{6} 2x_j$ **63.** $\sum_{j=1}^{8} (-1)^{j+1} j$

65. *a*) El área superficial es aproximadamente 5.212×10^8 km^2; la masa de la atmósfera es 5.212×10^{18} kg.

b) 127 400 años

APÉNDICE | Repaso de álgebra, Sección A2

1. $(x + 2)(x - 1)$ **3.** $(x - 3)(x - 4)$

5. $(x - 1)^2$ **7.** $(4x + 5)(4x - 5)$

9. $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ **11.** $x^5(x + 1)(x - 1)$

13. $2x(x - 5)(x + 1)$ **15.** $x = 4; x = -2$

17. $x = -5$ **19.** $x = 4; x = -4$

21. $x = -\frac{1}{2}; x = -1$ **23.** $x = -\frac{3}{2}$

25. $x = 1; x = -5$ **27.** $x = 1; x = -2$

29. $x = -1$ **31.** $x = -\frac{1}{2}; x = -1$

33. No hay soluciones reales **35.** $x = -\frac{3}{2}$

37. $x = 3; y = 2$ **39.** $x = 4, y = 2$

41. $x = -7; y = -5$ y $x = 1, y = -1$

APÉNDICE | Repaso de álgebra, Sección A3

1. 0 **3.** $\frac{1}{2}$

5. $-\frac{1}{3}$ **7.** 0

9. 0 **11.** 0

13. 0 **15.** e^2

APÉNDICE | Repaso de álgebra, problemas de repaso

1. $-2 \le x < 3$

3.



5.



7. 3 **9.** $2 \le x \le 4$

11. 243 **13.** 4

15. $16\sqrt[4]{2}$ **17.** 73

19. $\frac{3}{2}$ **21.** $n = \frac{7}{18}$

23. $n = -1$ **25.** 21

27. 95 **29.** $1 + \sum_{k=2}^{7} \frac{(-1)^k}{k}$

31. $x^2(x + 3)(x - 3)$

33. $x^4(x^6 + 4)(x^3 + 2)(x^3 - 2)$

35. $x(x - 1)^2$ **37.** $(x + 5)(x - 3)$

39. $(2x + 3)^2$ **41.** $(x + 1)(x - 1)(x + 3)$

43. $x = -4; x = 1$ **45.** $x = -7$

47. $x = -1; x = 2$ **49.** $x = -\frac{3}{7}; x = \frac{1}{2}$

51. No hay soluciones reales **53.** $x = -2; x = \frac{1}{3}$

55. $x = -2; y = 1$

57. $x = 1, y = 2$ y $x = 15, y = -26$

59. $\frac{2}{7}$ **61.** 0

63. 1

www.FreeLibros.com

www.FreeLibros.com

ÍNDICE

A

Absorción de la luz, 622
Abuso de drogas, 541
Accidentes
  en autopistas, 769
  industriales, 757
Aceleración, 115-116, 134
  gravedad y, 116-117
  unidad de medida de la, 115
Acidez (pH) de una solución, 347
Acumulación de droga, 668-669, 671, 700, 701
Administración
  de la producción, 86
  de negocios, 644
  de portafolios, 766
  de producto, 760
  de recursos en una cárcel, 367
  del tiempo, 731, 735, 744, 767, 769, 770
  del tráfico, 767
Admisiones a universidad, 39, 540
Adopción de tecnología, 229
Aerodinámica, 247
  trayectorias ortogonales en, 618
Agricultura, 760
Ahorro(s), 611, 624, 644, 701
  propensión marginal al, 247, 667
Ajuste
  de curvas, no lineal, 538-540
  de precios, 614-616, 648
  de tiempo, 624
  exponencial de una curva, 307
  no lineal de curva, 538-540
Alometría, 311, 544-545, 601
Altura, 82 (prob. 56)
  de la mujer, 748
  y rango de un proyectil, 817
Amortización de la deuda, 296, 637-638
Amplitud de oscilación, 248
Análisis
  ambiental, 85
  de costos, 271, 744
  de equilibrio, 49-51, 55-56, 86
  de inversión, 425, 542
  de precios, 342
  de regresión. *Véase* Método de mínimos cuadrados
  marginal, 148-150, 154-155, 197, 214, 238, 248, 271, 314-315, 324, 335-336, 441, 517, 518, 556, 558, 577, 698
    derivadas parciales y, 513-514
    y aproximación por incremento, 150-152
Ángulo
  de incidencia, 810, 815
  de reflexión, 810, 815
  del arco iris, 830
  negativo, 780
  óptimo de observación, 817-818
  óptimo para ramificación vascular, 810-813
  positivo, 780
Ángulos, 780
  medición de, 780-781
  notables, 787
  para ver el arco iris, 830
  recto. *Véase* Triángulos rectángulos
Antiderivación, 356-368
  aplicaciones prácticas de, 362-364
  definición de, 356
  regla de la diferencia para, 360
  regla de la suma para la, 360
  regla del factor constante para la, 360
  reglas algebraicas para la, 360
Antiderivada, 356-368
  definición de, 356
  general, de una función, 356-357
  propiedad fundamental de, 357
  reglas para calcular la, 359
Anualidad
  definición de, 415
  para el retiro, 424-425
  valor presente de, 667-668
Apreciación de un activo, 39
Aprendizaje, 86, 246, 294, 325, 366, 367, 391-392, 530, 593-594, 646, 743
  en la infancia, 336
Aproximación
  de raíces de una ecuación, método de Newton de, 157
  de utilidad por mínimos cuadrados, datos, 576
  método de mínimos cuadrados de, 533-535
  por cambio porcentual, 152-153
  por diferenciales, 153-154
  por incremento, 150-152
  por parábolas, 476-478
  por polinomios de Taylor, 694-696
  por rectángulos, 472
  por trapecios, 472-475
Apuestas, 723
Área, 52
  bajo la curva, 383-384, 386, 391-393
    como integral definida, 385
    como límite de suma, 381-384
    normal, 747
    teorema fundamental del cálculo y, 386, 391-393
  como integral doble, 566-567
  de descanso, 547-548
  de un círculo, 174 (prob. 43)
  de un rectángulo, 260 (probs. 11 y 12), 261 (prob. 13)
  de un triángulo, 261 (prob. 14)
  de una parcela, 386
  entre dos curvas, 398-401
  entre dos curvas, 399-401, 439 (probs. 31-38)
  superficial de la célula de una abeja, 818
  superficial del cuerpo humano, 441, 506, 518, 556, 573
  y volumen, 804
Arqueología, 306-307, 309, 347
Arquitectura, 814
Arte falsificado, 309
Arteriosclerosis, 156
Artículos
  complementarios, 514-515
  sustitutos, 514-515
Asíntota
  horizontal, 65, 218-219
  vertical, 187, 216-218
Astronomía, 40-41
Ataques de tiburones, 762
Aumento, 27
  de salario, 120

B

Bacteriología, 762-763
Bien, costo capitalizado de un, 471
Biología, 70, 638-640, 733, 803
  marina, 272
Biomasa de una especie, 114-115
Bioquímica, 56
Biorritmo, 793
Bola que rebota, 701
  distancia recorrida por la, 671
  tiempo de recorrido de la, 671
Bomberos, 273

C

Calculadora, introducción a la, xxi-xxxii
Cálculo, teorema fundamental del, 358, 380, 385-387
Cambio
  de legisladores, 770
  de temperatura, 11, 52, 441, 600
  en los votos, 541
  neto de la demanda, 437
  neto del ingreso, 437
  porcentual, aproximación de, 152-153
  tasa de. *Véase* Razón de cambio
Camino seguro, 23
Campo de pendientes, 625-627
Cantidad económica
  de producción (CEP), 265
  del pedido (CEP), 265
Capacidad máxima, 330, 594
Capital, productividad marginal del, 513
Cardioide, 170
Carrera de relevos a campo traviesa, 531
Catenaria, 340
Centro de una región, 463-464
CEP. *Véase* Cantidad económica de pedido; Cantidad económica de producción
Cercado, 42, 52, 249-250, 260, 529, 547-548, 555
Ciencia forense, 346, 622
Ciencias
  de la vida, integrales definidas usadas en, 426-435

www.FreeLibros.com

sociales, integrales definidas usadas en, 426-435
Circuito eléctrico, 520
Circulación
de la sangre, 520
de periódicos, 85, 119, 155
Cisoide, 177
Clima, 81, 803, 816, 824
Cociente(s)
derivación de, 124-126
diferencia, 8-9, 99
incremental, 8-9, 99
simplificación de, por factorización y eliminación, 840
Coeficiente(s)
de absorción, 295
de difusión, 582-583
de dispersión, 583
de expansión térmica, 156-157
de polinomios, 844
de Taylor, 689
Colonia de bacterias (población), 84, 133, 229, 268, 291-292, 294, 309, 362-363
Compensación a los empleados, 760
Comportamiento
a largo plazo, 64
animal, 70, 108, 145
de la población, 225-226
de un pájaro, 264, 815
Composición de funciones, 6-9
como línea de montaje, 7
separar, 8
Concavidad
definición de, 200
determinación de intervalos de, 201-203
hacia abajo, 200-201
hacia arriba, 200-201
Concentración
de drogas, 229, 268, 291, 338, 339, 346, 379, 395, 438, 462, 485, 599, 608-609, 612, 622, 648, 651
de glucosa en la sangre, 650-651
de soluto en una célula (Ley de Fick), 346, 601-602
Confiabilidad, 775-778
del producto, 294, 335, 724, 730-731, 733, 738, 743, 767
Conflictos, teoría de, 336
Conjuntamente proporcional, definición de, 45
Cono, gráfica de, 500
Constante(s)
de integración, 358
de los gases, 352, 519
de Michaelis, 56
de un gas, 519
derivada de una, 110
universal de los gases, 352
Construcción, 814-815, 825-826
de casas, 271
de una caja de joyería, 549-550, 556
Consumo
de agua, 38, 395
de energía, 82, 433, 813, 820
de petróleo, 440
nacional, 247
propensión marginal al, 247, 367, 667
Contabilidad, 40
Contaminación, 803, 824-825
del agua, 82, 146, 165, 168, 379, 394, 623, 648
del aire, 12, 39, 119, 142, 145, 155, 173, 345, 379, 394, 507
Continuidad, 75
de funciones. *Véase* Funciones continuas
de polinomios, 76
definición de, 71
en intervalos, 77-78
y diferenciabilidad, 104-105
Contratos deportivos, 425-426
Control
animal, 765
de calidad, 651, 719-720, 724, 760, 761 (prob. 45), 762, 765, 767, 768
de enfermedades, 763
de inventario, optimización en el, 258-260
de la contaminación, 122, 133, 168, 174, 198, 254-255, 481-482
de la producción, 272
de tráfico, 270, 411, 767
en el abuso de alcohol, 40, 325
Convenio para calcular el dominio, 4-5
Convergencia
criterios de, 672-684
cociente, 680-681
comparación directa, 679-680
divergencia, 674-675
la integral, 675-678
serie p, 678-679
series armónicas, 672-674
de integrales impropias, 465
de series de potencias, 684-685
de series geométricas, 665
de series infinitas, 662-664
Conversión de temperatura, 39
Correo, 23, 82
Corrida, 27
Corrupción
en el gobierno, 600-601
política, 53
Cosecha, 55, 260
Costo
capitalizado, de un bien, 471
de almacenamiento, 363-364, 394, 426
de capitalización de un activo, 471
de distribución, 12, 229-230
de educación, 13
de fabricación, 11, 12, 23, 38, 43-44, 53, 55, 86, 87, 145, 151, 155, 156, 163, 171, 176, 229, 262, 263, 265, 270, 391, 411
de instalación, 261, 263
de un diseño eficiente, 86
del agua durante sequías, 44-45
fijo, 260
marginal, 147-149, 239, 362, 366, 367, 440, 462, 600, 822
marginal, 147-149
versus promedio, 239
mínimo, 557-558
en la combinación de insumos, 557-558
óptimo de puesta en marcha, 263
promedio, 70, 237-238, 245
versus costo marginal, 239
promedio mínimo, análisis marginal para, 239
total, 5-6, 26
a partir del costo marginal, 487
variable, 260
Costos
de construcción, 54, 87, 175, 261, 262, 272, 556, 557, 824
de impresión, 38
de transportación, 53, 263
fijos, 260
variables, 260
Crecimiento
abrumador, 623
de bacterias, 174, 342, 345, 411, 434, 544, 599
de insectos, 146
de inversión, 484, 599, 648
de la burocracia, 338
de la población, 11, 45, 52, 107, 120, 133, 155, 173, 175, 215, 293, 294, 311, 324, 326, 335, 344, 366, 368 (prob. 66), 395, 412, 432, 433, 437-438, 462, 471, 600
de la población, 650, 651, 819-820, 825
modelos de, 282
de las suscripciones, 486
de los mamíferos, 145-146
de plantas, 325
de tejidos, 215
de un árbol, 366, 379, 440
de un niño, 39
de un tumor, 119, 167, 171
de una célula, 156
de una especie, 197, 246, 632
decrecimiento, 331
del ingreso per cápita, 325-326
exponencial, 290-292, 317-319, 593
logístico, 594-598, 645-646
tasa
asintótica de, 583
intrínseca de, 583
y decaimiento exponencial, 290-292, 317-319, 593
Crimen urbano, 273
Cristalografía, 272-273
Criterio(s)
de comparación del límite, 683-684
de comparación directa, 679-680
de divergencia, 674-675
de la integral, 675-676
justificación geométrica para el, 677-678
de la segunda derivada
para extremos absolutos, 236
para extremos relativos, 209-211
de la serie p, 678-679
de las segundas derivadas parciales, 523-526
de mínimos cuadrados, 534

www.FreeLibros.com

de recta vertical, 21-22
del cociente, 680-681
educacionales, 119
Cuadrados, dos, diferencia de, factorización, 845-846
Cuentas de cheques, 56
Cuidado de la salud, 471, 735, 744
mental, 480-481
Cuotas
a socios, 38
de admisión, 54, 394, 440
Curva
catenaria, 340 (prob. 60)
de aprendizaje (recuerdos de la memoria), 146, 310, 329-330, 335, 600
de aprendizaje, 329-330, 367
de Gompertz, 338
de Lorentz (e índice de Gini), 405, 439, 463
de Phillips, 109
en forma de campana, 329
normal, 741
área bajo la, 747
Curva(s)
área bajo la
como integral definida, 385
como límite de una suma, 381-384
teorema fundamental del cálculo y, 386, 391-393
área entre, 398-401
catenaria, 340
de campana, 329
de Gompertz, 338
de indiferencia, 502-503
de Lorentz, 404-406
de nivel, 499-502
definición de, 499
en economía, 502-503
en la gráfica de un paraboloide circular, 501-502
en un mapa topográfico, 501
de nivel. *Véase* Curvas de nivel
de Phillips, 109
de producción constante, 507
de producto constante C, 502
de temperatura constante, 507
logísticas, 330-332, 601
normal, 741
área bajo la, 747
trazado de, 190-194, 205-209, 219-226, 326-329
Cúspide, gráfica de, 104, 105

D

Datación
con carbono, 306-307, 342, 345, 347
geológica, 703
Decaimiento
de biomasa, 485, 650
exponencial, 290-292, 317-319, 593
radiactivo, 52, 294, 309, 345, 599
Decibel, 310
Decimales, repetición de, 666, 701
Decisión del editor, 56
Decisiones en construcción, 424
Demanda, 246, 271, 376-377, 380, 814
del consumidor, 13, 145, 175, 518, 519
e ingreso, 132, 487, 541
elástica, 241, 242, 318
de elasticidad unitaria, 241, 242, 318
elasticidad del ingreso de la, 248
elasticidad del precio de, 239-244
e ingreso, 242-243
niveles de, 241-242, 318
inelástica, 241, 242, 318
promedio, 462
Demografía (función de Gompertz), 602
animal, 345
Demográfico, 310, 317, 486, 701, 767
Densidad
de población, 12, 173-174, 294, 307, 433, 698
de probabilidad normal estándar, función, 329
Depreciación, 38, 324, 335, 344 (prob. 46), 379, 395, 439
Derivación, 95-181
de cocientes, 124-126
de funciones
exponenciales, 315-317
logarítmicas, 319-321
de polinomios, 105, 112-113
de productos, 122-124
de series de potencias, 687-689
definición de, 99
implícita, 158-170
definición de, 159
pendiente de la recta tangente por, 160-161
parcial, 510
técnicas de, 110-122
Derivada(s), 99-102
cociente incremental y, 8
de coseno, 794-795, 802
de función potencia, 110-111
de la función exponencial, 315
de la suma, 112
de orden superior, 129-130
de una constante, 110
de una función, 99-100
del factor constante, 112
del logaritmo natural, 312
del seno, 794-795, 801-802
determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las funciones y la, 185-187, 192
n-ésima, 129-130
notación para la, 103-104
parcial. *Véase* Derivadas parciales
cálculo de, 511-512
de Q con respecto a x, 510
de Q con respecto a y, 510
de segundo orden, 515-517
mixtas, 516
interpretación geométrica de, 512-513
y análisis marginal, 513-514
y artículos sustitutos y complementarios, 514-515
pendiente como, 100
primera, 127
aplicaciones prácticas de la, 190-194
criterio para extremos relativos, 189-190
Razón de cambio instantánea como, 100
regla de la cadena y, 136-137
regla de la constante y, 110
regla de la suma y, 112-113
regla del cociente y, 124-126
regla del factor constante y, 112
regla del producto y, 122-124
segunda, 127-129
criterio de la segunda derivada, 209-211, 236
para determinar los intervalos de concavidad, 201-203
trazado de una curva usando la, 205-209
signo de, 102
trazado de la gráfica de una función continua, usando, 190-191
Derrame de petróleo, 164
Descartes, folio de, 170
Descongelamiento, 366-367
Desechos nucleares, 433, 440, 469-470, 471, 579
Desempleo, 33-35, 41
e inflación, 96-97, 109
Desigualdad del ingreso, índice de, 404-405
Desigualdades, repaso de, 834-835
Desplazamiento por un alambre, 70 (problema 39)
Desviación estándar
de una variable aleatoria, discreta, 716-718
con distribución de Poisson, 758
normal, 747
Desviador cardiaco, 520
Deuda, amortización de, 296, 637-638
Diagramas de dispersión, 533-534
Diamante del béibol, 176 (prob. 65)
Diferencia de dos cuadrados, factorización de una, 845-846
Diferenciabilidad, continuidad y, 104-105
Diferenciable, definición de, 99
Diferencial(es), 153-154
Difracción de Fresnel, 819
Difusión
a través de una membrana, 622
de una población, modelación de la, 582-585
definición de, 582
Dilatación de un material, 156-157
Dilución, 600, 606-607, 611, 648, 650
Dinero, utilidad marginal del, 557
Directamente proporcional, definición de, 45
Discontinuidad, 75
Diseño
arquitectónico, 573
de un cartel, 54, 262
mecánico, 818-819
óptimo, 269
Disminución
de fuentes de energía, 425
de ozono, 346
de reservas, 671
en crecimiento, 331

www.FreeLibros.com

Disolución de azúcar, 600, 622
Disposición
  a gastar, total, 419
    marginal, 419
Distancia, 25 (prob. 46), 55, 176 (prob. 60), 261, 364, 368, 392, 441, 462, 480, 842
Distribución
  de probabilidad conjunta, valor esperado de la, 741
  de Weibull, 776-777
  del ingreso, 405, 412, 441, 463, 482-483
Distribución(es)
  acumulada, 774
  de Poisson, 755-759
    fórmulas para, 758
  de Weibull, 776-777
  exponencial, 728
  normal, 745-748
    aplicaciones prácticas de la, 754-755
    cálculos que involucran la, 748-752
  normales, 745-748
    aplicaciones prácticas de, 754-755
    estándar, cálculos que involucran a la, 748-752
    no estándar, transformación a estándar, 753
    otras, 752-754
  probabilidad conjunta, valor esperado para, 741
Divergencia
  de integrales impropias, 465
  de series infinitas, 662-664
Dominio
  definición de, 2
  natural, 4
Donación, 468, 471
Dos variables, funciones de. *Véase* Función(es), de dos variables
Dosis
  de droga, 134, 576
  pediátrica de medicamentos, 53
Duración de una llamada telefónica, 723-724, 738

E

e (base exponencial natural), 862
Ecología, 324, 768, 843
  en la isla, 12
  tropical, 734, 743
Economía
  curvas de nivel en, 502-503
  derivación implícita usada en, 161-162
  efecto multiplicador en, 666-667
  funciones usadas en, 5-6
  integrales definidas usadas en, 414-426
  modelos matemáticos en, 46-47
  razón de cambio usada en, 127
Ecuación(es)
  con valor inicial, 636
  cuadráticas, 847-848
    solución de, 847-848
  de Arrhenius, 346, 351-354
  de difusión, 582
  de estado de Van der Waals, 507
  de Fibonacci, 651-652
  de Haldane, 215
  de Laplace, 519
  de recta tangente, 101, 103-104, 123, 138
  de Van't Hoof, 509
  definición de, 635
  diferencial lineal de primer orden
diferenciales. *Véase* Ecuaciones diferenciales
en diferencias. *Véase* Ecuaciones en diferencias
  forma explícita de, 158
  forma implícita de, 158
  fundamental de glotocronología, 295
  logística, 594-598
  raíces de, método de Newton de aproximación de, 157
  sistemas de, 848
  solución de
    general, definición de, 588
    particular, definición de, 588
    por ecuaciones en diferencias, 633, 634-637
    por factorización, 846-847
  trigonométricas, 789-790
Ecuaciones diferenciales, 362-364, 588-602
  acopladas, 620-621
  de la familia de curvas, 619
  definición de, 588
  lineales, de primer orden, 602-612
  logística, 594-598
  modelación con, 612-624
  parciales, 582
  separables, 591-592, 598
  soluciones aproximadas de, 625-632
    método de Euler, 627-631
    método de las isoclinas, 625-627
  versus ecuaciones en diferencias, 642-643
Ecuaciones en diferencias, 632-646
  aplicaciones prácticas de las, 637-640
  definición de, 632
  solución de, 634-637
  versus ecuaciones diferenciales, 642-643
Edad óptima para la reproducción, 332-333, 337
Efectividad de la droga, 434-435
Efecto
  del gravamen en un monopolio, 265
  multiplicador, 666-667, 670, 701
  térmico de la comida, 412
Eficiencia
  de fabricación, 86
  del trabajador, 11, 119, 128-129, 133, 155, 175, 211, 214-215, 267, 271, 309, 335, 344, 410, 411, 462, 601, 769, 816
  pico, 367
Eje
  horizontal, 15
  vertical, 15
Elasticidad
  del ingreso por la demanda, 248
  del precio de demanda, 241, 243-244, 245, 246, 248, 270, 271, 318-319, 376-377
  del precio por demanda, 239-244
    e ingresos, 242-243
    niveles de, 241-242, 318
  unitaria, demanda de, 241, 242, 318
Elecciones sociales, 529
Electricidad, 247
Elevación promedio, 573
Eliminación, simplificación de cocientes por, 840
  de desechos peligrosos, 215, 602
  de variables, 41-45
    por multiplicación y suma, 848-849
    por sustitución, 849-850
Elipsoide, gráfica de un, 500, 504
Emigración de la población, 623
Empaque, 52, 261, 262, 519, 555
Encuestas políticas, 230, 246, 762
Energía
  de activación, 352
  eólica, 509
  gastada en un vuelo, 435
Enfermedad de Alzheimer, 818
Enfermedades dinámicas, 339
Enfriamiento, ley del, de Newton, 310, 324, 335, 616-618, 622
  del cuerpo de un animal, 579
Entero, definición de, 834
Entomología, 39, 310-311
Entrega de paquetes, 768-769
Entrenamiento
  en negocios, 295
  militar, 766
Entretenimiento, 734, 765
Epidemia
  de SIDA, 173, 483, 544
  modelación, 277-280, 656-660
Epidemiología, 229, 656
Equilibrio de mercado, 48-49, 55
Error
  estimación del, por regla de los trapecios, 474-475
    por regla de Simpson, 478-479
  propagado, 151-152
Escalera inclinada contra la pared, 176 (prob. 63)
Escasez, 48
Espacio
  habitable, 532, 859
  muestral, 710
Especies en peligro, 325, 366, 395, 434
Especulación en el mercado de valores, 644
Esperanza de vida, 435
Esquí acuático, 817
Estación de mantenimiento, 530
Estimador de máxima verosimilitud, 246
Estudios de población, 724
Evaluación de inversión, 462
Evento, 710
  cierto, 710
  imposible, 710
  simple, 710
ex, 861
  límites que conciernen a, 853-855
  versus logaritmo natural, 303-304

www.FreeLibros.com

Excedente, 48
de los consumidores, 420-423, 424, 425, 437, 439, 440, 463, 482
de los productores, 421-423, 424, 482
Exceso neto de utilidad, 402-403, 411
Éxito, 718
Expansión de la población, tasa asintótica de, 583
Experimento aleatorio, 710
Exponentes, leyes de, 838-839
Exportación, 321, 326 (prob. 75)
Exposición a una enfermedad, 573-574
Extinción de la población, 632
Extremos. *Véase también* Máximo; Mínimo
absoluto
absolutos
criterio de la segunda derivada para, 236
de intervalo
cerrado, 232-235
no cerrado, 235-238
definición de, 231
determinación, 232-235
con restricciones, 546
relativos, 187-189
criterio de la primera derivada para, 189-190
criterio de la segunda derivada para, 209-211
de funciones de dos variables, 521-528
definición de, 188
relativos. *Véase* Extremos relativos
sin restricciones, 546

F

Fabricación, 761-762
Fábula antigua, 38-39
Factor
de frecuencia, 352
integrante, definición de, 603
Factorización, 839
de la diferencia de dos cuadrados, 845-846
de polinomios con coeficientes enteros, 844-845
de términos comunes, repaso de, 839-840
simplificación de cocientes por, 840
solución de ecuaciones por, 846-847
Familia, número promedio de hijos por, 706-708
Farmacología, 133
Fenómeno periódico, modelación, 798-801
Física de partículas, 529, 557
Fisicoquímica, 120, 272
Fisiología, 56
Flujo
de ingresos, valor futuro de un, 415-417
valor presente de un, 417-418, 467-468
del tráfico, 233-234, 732-733, 742
sanguíneo, 11-12, 23, 156, 169, 174, 246, 368, 429-430, 433, 507, 518, 519-520 (prob. 49), 819. *Véase también* Ley de Poiseuille
Fluorización del agua, 612-613
Folio de Descartes, 170
Fondo de amortización, 645
Fondos educativos, 85
Forma de U. *Véase* Parábolas
Forma(s)
explícita de una ecuación, 158
implícita de una ecuación, 158
indeterminadas, 851
pendiente-intercepto de una función lineal, 30
punto-pendiente de una función lineal, 31-32
Fórmula(s)
cuadrática, 847
de Babilonia para raíz cuadrada de N, 157-158
de conversión, para logaritmos, 304
de Debye, 120
de lentes delgados, 556
de reducción, 459-460
del ángulo duplo, 789
para el seno y el coseno de una suma, 788-789, 801
para la distancia, 25
Fracaso, 718
Fracción de empaque, 272
Fuentes renovables, 107
Función
constante, 110
cosecante, 785
coseno, 782
de triángulo rectángulo, 786
derivadas de, 794-795, 802
en integrales, 797-798
fórmula de la suma para, 788-789, 801
fórmula del ángulo duplo para, 789
gráfica de, 784
identidad de Pitágoras para, 788
límites de, 801-802
propiedades elementales de, 783-784
costo, 5-6, 26, 43-44, 49
cotangente, 785
creciente, 102, 184-199
definición de, 184, 185
uso de la derivada para determinar intervalos de, 185-187, 192
de confiabilidad, 774
de demanda, 5, 47
de los consumidores, 418-419
de densidad exponencial, 728-729
de densidad uniforme, 727-728
de distribución acumulada, 774
de Gompertz, 602
de incremento, 338
de Michaelis-Menten, 67
de producción de Cobb-Douglas, 168, 498, 569
de renovación, 427-429
de tasa de falla, 775
de utilidad, 502, 550-551
Cobb-Douglas, 550-551
decreciente, 102, 184-199
definición de, 184, 185
uso de la derivada para determinar intervalos de, 185-187, 192
definida por partes, 4
derivada de, 110-111
discreta, definición de, 633
ingreso, 5-6, 19, 49, 193-194
oferta, 47, 421
potencia, 20-21
secante, 785
derivadas de, 795-797
en integrales, 797-798
seno, 782
derivadas de, 794-795, 801-802
en integrales, 797-798
en un triángulo rectángulo, 786
fórmula de suma para, 788-789, 801
fórmula para el ángulo duplo, 789
gráfica de, 784
identidad de Pitágoras para, 788
límites de, 801-802
propiedades elementales de, 783-784
supervivencia, 427-429
tangente, 785
de un triángulo rectángulo, 786
derivada de la, 795-797
utilidad, 5-6, 23, 46-47, 101-102, 108, 132, 270
de Cobb-Douglas, 550-551
versus función exponencial, 285
Función(es)
conjunta, 729-730
de probabilidad, 725-727
exponencial, 728-729
normal, 741
uniforme, 727-728
antiderivada general de, 356-357
como mapeo, 2
como modelos matemáticos. *Véase* Modelos matemáticos
como series de potencia, 684-688
compuesta, 6-9
como línea de montaje, 7
regla de la cadena y, 139
separación, 8
compuestas, 6-9
como línea de ensamble, 7
regla de la cadena y, 139
separar, 8
confiabilidad, 774
constante, 110
continuas, 71-72, 75, 76-77
diferenciables, 104-105
en intervalos, 78
extremos absolutos de, 232-238
graficación, usando derivadas, 190-191
propiedad del valor
extremo de, 231-232
intermedio de, 78-79, 185
racionales, 76-77
costo, 5-6, 26, 43-44, 49
creciente, 102, 184-199
definición de, 184, 185
derivadas para determinar los intervalos de, 185-187, 192
criterio de recta vertical para, 21-22
de densidad. *Véase* Funciones de densidad

www.FreeLibros.com

de densidad de probabilidad, 725-726
conjunta, 729-731
continua, 726-727
exponencial, 729-731
Función(es) (*cont.*)
normal, 745
normal estándar, 329
uniforme, 727-728
de dos variables, 496-498
aplicaciones prácticas de, 522-523
extremos relativos de, 521-528
graficación, 499
gráficas por computadora para, 503-504
optimización de. *Véase* Optimización, de funciones de dos variables
puntos críticos en, 521-522
puntos de silla de, 522-523
valor promedio de, 568-569
de Gompertz, 602
de incremento, 338
de Malthus, 282. *Véase también* Funciones exponenciales
de Michaelis-Menten, 67
de probabilidad, 711-713
de rectas horizontales, 29
de rectas paralelas, 35-36
de rectas perpendiculares, 35-36
de rectas verticales, 29
de supervivencia, 427-429
de tres variables, optimización con restricciones de, 549-552
decreciente, 102, 184-199
definición de, 184, 185
uso de la derivada para determinar intervalos de, 185-187, 192
definición de, 2
definida por partes, 4
demanda, 5, 47
del consumidor, 418-419
derivada de, 99-100
diferenciable, continuidad de, 104-105
discreta, 633
dominio de una
definición de, 2
en funciones de varias variables, 496
natural, 4
en economía, 5-6
graficación/gráficas de, 14-25
de funciones de dos variables, 499
iguales, 19-20
por trazado de puntos, 15-17
ingreso, 5-6, 19, 193-194
inversa, 303
límite por dos lados de, 73-74
límites laterales de una, 72-74
notación para, 2-4, 6
oferta, 47, 421
periódica, 783
potencia, 20-21
derivada de, 110-111
versus función exponencial, 285
racional, 21
continuidad de, 76-77
diferenciable, 105
límites de, 62-63
rango de, definición de, 2
renovación, 427-429
utilidad, 5-6, 46-47, 101-102, 502, 550-551
valor promedio de, 406-408
y cálculo de límites. *Véase* Límite(s)
Funciones exponenciales, 282-296
base exponencial natural (e), 286-287
definición de, 282
derivación de, 315-317
derivada de, 315
notación para, 283
propiedades de, 285-286
regla de la cadena para, 316
versus función potencia, 285
versus funciones logarítmicas, 303-304
Funciones lineales, 26-41
aplicaciones prácticas de, 32-35
definición de, 27
forma intercepto-pendiente de, 30
forma punto-pendiente de, 31-32
horizontales, 29
límites de, 61
paralelas, 35-36
pendiente de, 27-29
negativa, 28
positiva, 28
valor absoluto de, 28
perpendiculares, 35-36
vertical, 29
Funciones logarítmicas, 297-312
derivación de, 319-321
gráficas de, 300-301
notación para, 297
regla de la cadena para, 313
versus funciones exponenciales, 303-304
Funciones racionales, 21
continuidad de, 76-77
diferenciable, 105
límites de, 62-63
Funciones trigonométricas, 780-793
aplicaciones prácticas de, 790, 805-820
cosecante, 785
coseno, 782
de un triángulo rectángulo, 786
derivadas de, 794-795, 802
en integrales, 797-798
fórmula ángulo duplo, 789
fórmula de la suma para, 788-789, 801
gráfica de, 784
identidad pitagórica para, 788
límites de, 801-802
propiedades elementales de, 783-784
cotangente, 785
integrales con, 797-798
para modelación de fenómenos periódicos, 798-801
secante, 785
derivadas de, 795-797
en integrales, 797-798
seno, 782
de triángulo rectángulo, 786
derivadas de, 794-795, 801-802
en integrales, 797-798
fórmula del ángulo duplo, 789
fórmula para la suma, 788-789, 801
gráfica de, 784
identidad pitagórica para, 788
límites de, 801-802
propiedades elementales de, 783-784
tangente, 785
de triángulo rectángulo, 786
derivadas de, 795-797

G

Garantía de protección, 735, 765
Gastar
disposición marginal a, 419
disposición total a, 419
Gasto
cardiaco, 156, 430-432, 433, 463, 481, 490-494
energéticos diarios, 508
periódico, 783
del consumidor, 23, 85, 325
Genética, 530, 645, 698-699, 702
de la población, 634
Glotocronología, 295
Grado
de un polinomio, 21, 844
en la medición de ángulos, 780
Gráfica(s)
comportamiento de, en un punto de inflexión, 205
con calculadora, xxii
con huecos y saltos, 71-72
con pico, 104, 105
de cúspide, 104, 105
de funciones, 14-25
de dos variables, 499
iguales, 19-20
mediante el trazado de puntos, 15-17
de funciones logarítmicas, 300-301
de parábolas, 18-19
de superficie de silla, 500
de tangente vertical, 104, 105, 224
de un cono, 500
de un elipsoide, 500
de un paraboloide, 500
circular, 502
de una función continua, usando derivada, 190-191
en computadora para funciones de dos variables, 503-504
intersecciones de, 19-20
sobre un sistema tridimensional de coordenadas, 499-504
generado por computadora, 503-504
trazado de una curva, 190-194, 205-209, 219-226, 326-329
Gravedad, y movimiento de un proyectil, 116-117
Grillos, 351-354
Guerra del desierto, 683

www.FreeLibros.com

H

Heinz, E., 339
Hiperboloide, 504
Hipertermia, 531
Histograma epidémico, 714
Histogramas, 713-714
Historia
  de espías, 55, 121, 261, 310, 367, 556, 611, 672, 734, 817
  de la abeja, 702
Huecos, gráfica con, 71-72, 75
Hull, C. L., 338

I

ICE. *Véase* índice del costo de educación
Identidades trigonométricas, 788-789
Iluminación de una fuente de luz, 806-808, 815
Impuesto(s)
  sobre ingresos, 54
  sobre una propiedad, 87, 119, 155, 171, 573
Incidencia, ángulo de, 810, 815
Incremento, aproximación por, 150-152
Índice
  de desigualdad del ingreso, 404-405
  de Gini, 404-405
  de valor de educación (IVE), 13
  del costo de educación, 13
  del valor de la educación, 13
  del valor del costo de la educación, 14
Infectivos, en el modelo S-I-R, 656
Infinito, límites en el, 64-67, 216
Inflación, 127, 175
Influencia política, 651
Ingeniería de tráfico, 683
Ingreso, 123-124, 155, 193-194
    marginal, 148-149
    niveles de elasticidad y, 242-243
  del retiro, 650
  disponible y consumo, 543
  en la producción de petróleo, 590-591
  futuro, 440
  marginal, 148-149, 367
  máximo, 18-19, 193-194, 256-258, 342
  nacional, 645
  por ventas, 52, 395
  promedio, 245, 440
  total, 5-6, 426
Inmigración a una población, 623
Inmunización, 12, 230
Inscripción de cursos, 38
Instalación de pagos, 645
Integración, 355-448
  constante de, 358
  de integrales dobles, límites de, 564
  de series de potencia, 687-688
  indefinida. *Véase* Antiderivación
  límites inferiores de, 384
  límites superiores de, 384
  numérica, 472-483
    aproximación, por rectángulos, 472
      por trapecios, 472-475
    interpretación de datos con, 479-480
  por partes, 450-460
    aplicaciones repetidas de la, 455-456
    definición de, 454-455
    fórmula de reducción de la, 460
    fórmula para, 450
  por sustitución, 368-380
    aplicaciones prácticas de, 376-377
    fallo de la, 375
  variable de, 358
Integrales
  definidas, 358, 380, 384-385
    aplicaciones prácticas de, 396-413, 414-435
    área bajo la curva como, 385
    reglas para, 387-389
    sustitución, 389-390
  definidas
    con funciones trigonométricas, 797-798
    dobles, 559-569
      aplicaciones prácticas de las, 566-569
      límites de integración para, 564
      sobre regiones no rectangulares, 562-566
      sobre regiones rectangulares, 560-562
    impropias, 464-470
      aplicaciones prácticas de, 467-470
      definición de, 465-467
      límite útil para, 467
    indefinidas, 356-368
      definición de, 356, 358
      notación para, 358
  dobles, 559-569
    aplicaciones prácticas de, 566-569
    límites de integración de, 564
    sobre regiones no rectangulares, 562-566
    sobre regiones rectangulares, 560-562
  impropias, 464-470
    aplicaciones prácticas de, 467-470
    definición de, 465-467
    límite útil para, 467
  indefinidas, 356-368
    definición de, 356, 358
    notación para, 358
  iteradas, 559-569
Integrando, 358, 384
Intensidad de campo eléctrico, 81
Interés compuesto, 71 (prob. 46), 146, 288, 289, 293, 294, 309, 324, 344, 345, 287-289
  continuo, 71
Internet, 725, 744
Interpretación
  de datos, con integración numérica, 479-480
  geométrica
    de derivadas parciales, 512-513
    de valor promedio, 408-409
Intersección en y
  definición de, 17
  determinación, 17
Intersecciones
  con el eje x
    definición de, 17
    determinación, 17
  con el eje y
    definición de, 17
    determinación, 17
  de gráficas, 19-20, xxiv
Intervalos, 835-836
  cerrados, extremos absolutos de, 232-235
  continuidad sobre, 77-78
  de concavidad, 201-203
  de funciones decrecientes y crecientes, derivada para determinar, 185-187, 192
  definición de, 835
  no cerrados, extremos absolutos de, 235-238
  valor absoluto e, 837
Inventario, 82, 86, 229, 258-260, 262, 265, 271, 272, 411, 426
  cantidad económica de producción, 265
  cantidad económica del pedido, 265
  justo a tiempo, 72, 258
Inversamente proporcional, definición de, 45
Inversión
  de bienes raíces, 294, 412, 413, 440, 610
  en un periodo de mercado a la baja, 441
  térmica, 108
  valor futuro de una, 289
  valor presente de una, 289-290
Investigación
  de mercado, 339
  del cáncer, 339, 578-579
  médica, 743
Isocuanta, 502-503
Isotermas, 507
IVE. *Véase* índice valor de educación

J

Juegos
  de azar, 724
  de casino, 722
  de mesa, 721, 723
  justos, 723
Justo, 723

L

Lanzamiento de una moneda, 712-713, 715-716, 717, 720-721, 723
Lasota, A., 339
Pisa, Leonardo de, 651
Ley
  de alometría, 601
  de Bouguer-Lambert, 295
  de Boyle, 168
  de Fick, 346, 601-602
  de Hoorweg, 337
  de los exponentes, 838-839
  de los gases ideales, 519
  de los rendimientos decrecientes, 520
  de oferta y demanda, 47
  de Pareto, 602
  de Parkinson, 338
  de Poiseuille (flujo sanguíneo), 11-12, 156, 169, 246, 429-430, 433, 811-813
  de reflexión, 810

www.FreeLibros.com

de refracción, 831
de Stefan, 157
del enfriamiento de Newton, 310, 324, 335, 616-618, 622
distributiva, 839
Libby, W. F., 306
Límite(s), 57-71
cálculo de, 62-64
de coseno, 801-802
de funciones lineales, 61
de funciones racionales, 62-63
de polinomios, 62
de seno, 801-802
en el infinito, 64-67, 216
estimación, usando tablas para, 58-59
existencia de, 74
inferiores de integración, 384
infinitos, 60, 64-68, 216
introducción intuitiva a, 57-60
laterales, 71-74
notación para, 72, 217
notación para, 72, 217
para integrales impropias, 467
por los dos lados, 73-74
propiedades de, 60-61
que involucran e^x y $\ln x$, 853-855
superiores de integración, 384
Línea(s)
de montaje, función compuesta como, 7
equipotenciales, 618
isotérmicas, 618
Lingüista, 295, 702
Linterna cayendo, 176 (prob. 64)
Llamadas de ventas por teléfono, 758-759
Llegadas de aviones, 734, 742
Logaritmo(s), 292
aplicaciones de, 304-307
definición de, 297
fórmula de conversión para, 304
natural, 301-302
derivada de, 312
propiedades de, 298-300
versus e^x, 303-304
natural(es), 301-302
derivada del, 312
propiedades de, 302
versus e^x, 303-304
Longitud de un pez, 755
Lotería, 716, 722, 766
Luz
de día, 825
polarizada, 818

M

m/seg, 115
m/seg^2, 115
Malthus, Thomas, 282
Manejo
de costos, 120, 230
de datos con computadora, 433
de desechos peligrosos, 558
de personal, 651
de una pescadería, 198, 337, 623, 638-640, 767-768
Mantenimiento
al restaurante, 622
de un cobertizo, 530
Mapas topográficos, 501
Mapeo, función como, 2
Máquina, vida útil de, 414-415
Material de construcción, 175, 529, 555
Máximo. *Véase también* Optimización
absoluto, definición de, 231
criterio de la segunda derivada para, 236
determinación de, 232-235
con restricciones, 546
relativo, 188, 189
criterio de la primera derivada para, 189
criterio de la segunda derivada para, 209-211
criterio de las segundas derivadas parciales para, 523-526
de funciones de dos variables, 521-528
definición de, 188
puntos críticos de, 188-189
Mayor que
definición de, 834-835
o igual a, definición de, 835
Medicina, 156, 168, 198, 471, 576, 734, 761, 765, 768, 793, 803-804, 817
deportiva, 768
pediátrica, 761, 766-767
veterinaria, 760, 761
Medición
de la respiración, 435
de un tumor, 151-152
pediátrica, 171
Menor que
definición de, 834-835
o igual a, definición de, 835
Metabolismo, 804
de la mujer, 804, 822
del hombre, 804
Metalurgia, 768
Método
de dilución de tintura, 430, 490
de Euler, 627-631
de los multiplicadores de Lagrange. *Véase* Multiplicadores de Lagrange
de mínimos cuadrados, 533-535
de Newton para la aproximación de las raíces de una ecuación, 157
Microbiología, 85, 556
Migración laboral, 703
Minimización
de costos, 250-252, 255-256, 263
del tiempo recorrido, 808-810
Mínimo(s). *Véase también* Optimización
absoluto, definición de, 231
criterio de la segunda derivada para, 236
determinación de, 232-235
con restricciones, 546
cuadrados, método de, 533-535
relativo, 188, 189
criterio de la primera derivada para, 189
criterio de la segunda derivada para, 209-211
criterio de las segundas derivadas parciales para, 523-526
de funciones de dos variables, 521-528
definición de, 188
puntos críticos de, 188-189
Modelo de ajuste de precio, 614-616, 622
de ajuste de precios de Evans, 614-616
de Cobweb, 639-641, 646
de deuda de Domar, 624
de la telaraña, 640-642, 646
de Mitscherlich, 600
de salud pública, 612-613
S-I-R, 656-659
Modelos
alométricos, 91-92
de aprendizaje, 593-594
de dilución, 606-609
salud pública, 612-613
logísticos, 282, 595
matemáticos, 41-57
alométricos, 91-92
con calculadoras, xxviii-xxx
de crecimiento poblacional, 282
de difusión poblacional, 582-585
de epidemias, 277-280, 656-660
de fenómenos periódicos, 798-801
definición de, 41
eliminación de variables en, 41-45
en negocios y economía, 46-47
etapas de, 588
proporcionalidad en, 45
Molusco, 578
Monopolista, definición de, 265
Montaña, sobre mapa topográfico, 501
Movimiento de un proyectil, 23, 116-117, 121, 816, 392
rectilíneo, 115-116
sobre una recta, 171, 177 (prob. 74)
Multiplicación, eliminación de variables por, 848-849
Multiplicadores
de Lagrange, y optimización con restricciones
aplicaciones prácticas de, 557-558
para dos variables, 546-547
para tres variables, 549-552
interpretación geométrica de los, 553-554
significado de los, 552-553
Múltiplo, de la derivada, 112
Mutación, 84

N

Negocios de restaurantes, 722
n-ésima derivada, 129-130
n-ésimo polinomio de Taylor, 694
Niños, número promedio por familia, 706-708
Nivel diario promedio de dióxido de carbono, 9
Niveles del sonido, 310
Notación
de la suma, 397-398, 840-841
exponencial, 283, 837-838

www.FreeLibros.com

para derivadas, 103-104
para funciones, 2-4, 6
para la función logarítmica, 297
para la integral indefinida, 358
para límites laterales, 72, 217
para razón de cambio, 103
Números
críticos, definición de, 188
de Fibonacci, 652
de ventas, 799-800
irracionales, 834
racionales, 834
reales, 834
Numismática, 724
Nutrición, 39-40, 763

O

Objeto
desacelerando, 115
en retroceso, 115
estacionario, 115
que avanza, 115
Oferta y demanda, 55, 56, 84, 648
ley de, 47
modelo de ajuste de precios para, 622
Óptica, 556, 819
Optimización, 231-248. *Véase también* Máximo; Mínimo
con restricciones, 545-554
para dos variables, 545-554
para tres variables, 549-552
de funciones de dos variables, 521-528
aplicaciones prácticas de, 526-528
con restricciones, 545-554
de funciones de tres variables, con restricciones, 549-552
de intervalo
cerrado, 232-235
no cerrado, 235-238
de tiempo de espera, 329
en control de inventario, 258-260
problemas prácticos de, 249-265
Órbita de satélite, 816
Organismos Semélparo, 332-333
Organización corporativa, 338
Ornitología, 120-121, 247
Ósmosis inversa, 509

P

Pago(s)de la lotería, 426
financieros, 296
hipotecarios, 296, 644-645
Paisajes, 52, 803, 814
Palomilla de la manzana, 180-181
Parábolas
abriendo hacia abajo, 18
abriendo hacia arriba, 18
aproximación por, 476-478
graficación, 18-19
vértice de, 18
Paraboloide
circular, gráfica de, 501-551
de revolución, 501-502
gráfica de, 500
Paradoja de Zenón, 671, 683
Partes, integración por, 450-460
aplicación reiterada de la, 455-456
definidas, 454-455
fórmula de reducción, 460
Patrones
en la edad del hielo sobre la temperatura y el hielo, 508
en las alas de una mariposa, 532
sociales, 761
Pendiente
como derivada, 100
de recta secante, 98-99
de recta tangente, 96, 98, 100, 101, 104
por derivación implícita, 160-161
de una función lineal, 27-29
negativa, 28
positiva, 28
valor absoluto de, 28
y razón de cambio, 96-99
Percepción
auditiva, diferencias notables en la, 446-448
diferencias notables en, 446-448
humana, diferencias apreciables en la, 446-448
Pérdida, 50
Perímetro de una ventana, 271 (prob. 45)
Periodismo, 769
Periodo de búsqueda, palomillas de manzana, 180-181
Pico, gráfica con, 104, 105
pies/s^2, 115
pies/seg, 115
Plan de inversión, 610-611
Planeación urbana, 263-264
Plano de observación, 796-797
Población(es), 645
animal con caza, 644
de insectos, 735
de los Estados Unidos, 347 (prob. 77)
estacionales, 800-801, 813-814, 817, 824
mundial, 336
promedio, 411, 441
Polinomio(s)
con coeficientes enteros, factorización, 844-845
continuidad de los, 76
de Taylor, aproximación por, 694-696
definición de, 20-21
derivación de, 105, 112-113
grado de un, 21
límites de, 62
Póliza de seguros, 767
Posición de un objeto, y velocidad, 115
en movimiento, 12
Precio
de equilibrio, 48
óptimo de venta, 85-86
promedio, 440
Precios, 32-33, 84 (probs. 2 y 7), 143, 529
de comida, 410
de gasolina, 543
de las acciones, 38
de venta, 379, 610
Predicción
de la población, 542, 636-637
mediante mínimos cuadrados, 536-537
Presión
atmosférica, 622
del aire, 311
osmótica, 509
sanguínea, 105, 108-109, 822
diastólica, 105
sistólica, 105
Presupuesto fijo, 558
Prima del comprador de una subasta, 53
Primera derivada, 127
aplicaciones prácticas de, 190-194
criterios para extremos relativos, 189-190
Principal, 287
Principio de Fermat, 810, 815-816
Probabilidad de ventas, 754-755
Problema
con presupuesto fijo, 558
de una boya, 176 (prob. 62)
del costo mínimo, 557-558
del papalote, 176 (prob. 61)
Problemas
con valor inicial, 362-364
definición de, 588, 633
ecuación diferencial lineal de primer orden, 636
método de Euler aplicado a, 630-631
en geometría y ciencias físicas
Procedimiento de ubicación de raíces, 79
Proceso químico adiabático, 169
Producción, 367, 395, 486, 505, 506, 573, 579, 632
agrícola, 600
de bebidas, 768
de células de la sangre, 134
de madera, 169
de petróleo, 395, 600
de sangre, 247
en una fábrica, 152, 155, 156, 161-162, 167, 168, 169, 171, 173, 174, 265, 569, 573
máxima obtenible, 67
Productividad
del capital, marginal, 513
del trabajo, marginal, 577
marginal, 517-518, 520
del capital, 513
del trabajo, 513
Producto
interno bruto, 114, 120, 153, 173, 198, 294, 309, 347, 543-544
marginal del trabajo, 577
Productos, derivación de, 122-124
Promedio
aritmético, 715
del mercado de valores, 543
Pronóstico del tiempo, 762

www.FreeLibros.com

Propagación
de un rumor, 270, 337, 600
de una epidemia, 52, 119, 120, 215, 277-280, 332, 335, 336, 339, 340, 346, 433, 463, 596-597, 600-601, 624, 644
del SIDA, 277-280
Propaganda, 119, 133, 198, 230, 309, 335, 344, 366, 395, 411
Propensión marginal
al ahorro, 247, 667
al consumo, 247, 367, 667
Propiedad
del valor extremo, 231-232
fundamental de las antiderivadas, 357
Propiedades algebraicas de límites, 61
Proporcionalidad, en modelos matemáticos, 45
Proyectil, movimiento de, 116-117
Prueba(s)
académicas, 760, 761, 765, 768
de materiales, 683
para drogas, 762
psicológicas, 486
Psicología, 506
experimental, 11, 70, 229, 733-734, 743
Pulso
arterial, 105
cardiaco, 105
Punto(s)
crítico. *Véase* Puntos críticos
de equilibrio, 49
de inflexión, 203-205
comportamiento de la gráfica en, 205
definición de, 203
localización de, 203-205
de rendimientos decrecientes, 200
muestra, 710
picos, gráfica con, 104, 105
silla. *Véase* Puntos de silla
trazado de, graficación por, 15-17
Puntos críticos, 188-189
criterio de las segundas derivadas parciales para, 523-526
definición de, 188
en funciones, de dos variables, 521-522
Puntos de silla, 522-523
criterios de segundas derivadas parciales para, 523-526
Puntos extremos, 835
Purificación del aire, 611

Q

Química, 169, 507, 519
Quimiotaxis, 618-619, 624

R

Radiación, 157
Radianes, 780-781
Radio
de la Tierra, 88 (prob. 49)
de la tráquea, 234-235
de una esfera, 175 (prob. 58)
Radiodifusoras, 245
Radiología, 310, 347
Raíces de una ecuación, método de Newton de aproximación de, 157
Rango, definición de, 2
Razón de cambio
constante, 96
de la población, 113
de los costos, 138-139
de tasa de cambio, 127-129
instantánea, 97-99
como derivada, 100
notación para, 103
per cápita, 113-115
porcentual, 113-115
promedio, 97-99
relativa (per cápita), 113-115, 825
variable, 96
y pendiente, 96-99
Razón variable de cambio variable, 96
Reacción al medicamento, 413
Recaudación de fondos, 424, 462
Reciclaje, 56, 263, 644
Recta
de mejor ajuste, 33-34
de mínimos cuadrados, 535-536
de regresión. *Véase* Recta de mínimos cuadrados
secante, pendiente de la, 98-99
tangente
ecuación de la, 101, 103-104, 123, 138
pendiente de la, 96, 98, 100, 101, 104
por derivación implícita, 160-161
vertical, 104, 105, 224
Rectángulos, aproximación por, 472
Rectas
horizontales, función de, 29
paralelas, 41
funciones de, 35-36
perpendiculares, 41
funciones de, 35-36
verticales, función de, 29
Recuerdo de la memoria, 600, 650
Recursos, ubicación de, 551-552
Reducción en la contaminación del aire, 651
Reflexión
ángulo de, 810, 815
de la luz, 810
ley de, 810
Refracción, ley de, 831
de la luz en agua, 793, 815-816
Refrigeración, 167-168
Regiones no rectangulares, integrales dobles sobre, 562-566
Regiones rectangulares, integrales dobles sobre, 560-562
Regla(s)
aditiva de la integral definida, 387
de exponentes, para antiderivadas, 359
de L´Hôpital, 851-853
de la cadena, 135-147
para funciones compuestas, 139
para funciones exponenciales, 316
para funciones logarítmicas, 313
de la constante, 110
para antiderivadas, 359
de la diferencia
para antiderivación, 360
para integración definida, 387
de la división, para funciones exponenciales, 286
de la igualdad
para funciones exponenciales, 285
para logaritmos, 298
naturales, 302
de la potencia
general, 140-143
prueba de, 147 (probs. 69 y 70)
para antiderivadas, 359
para funciones exponenciales, 286
para la derivación, 110-111
para logaritmos, 298
para logaritmos naturales, 302
recíproca, 65
de la suma, 112-113
para la antiderivación, 360
para la integración definida, 387
de los recíprocos de potencias, 65
de multiplicación, para funciones exponenciales, 286
de Simpson, 476-479
error estimado por, 478-479
del cociente
para funciones exponenciales, 285
para logaritmos, 298
naturales, 302
prueba de la, 135 (prob. 67)
y derivadas, 124-126
del factor constante, 112
para antiderivación, 360
para integración definida, 387
del producto
demostración de, 130-131
para funciones exponenciales, 285
para logaritmos, 298
naturales, 302
y derivadas, 122-124
del trapecio, 473-475
error estimado para la, 474-475
empírica, 747
general de la potencia, 140-143
prueba de, 147 (probs. 69 y 70)
logarítmica, para antiderivadas, 359
Regresión
log-lineal, 540
polinomial, xxx-xxxi
Regulación de colesterol, 433-434
Regulaciones postales (empaques), 555
Removidos, en el modelo S-I-R, 656
Rendimiento(s)
agrícola, 55, 260, 395
decrecientes
ley de, 520
punto de, 200
proporcionales, 507
Renovación de la moneda, 646

www.FreeLibros.com

Renta
de autos, 38, 51
de equipo, 24 (prob. 42), 40
Representación recíproca doble de Lineweaver-Burk, 56
Reproducción, edad óptima para, 332-333
Respiración, 248
humana, 813
Respuesta a estímulos, 337, 529, 573, 601
Restricción, 545
Ritmo
aeróbico, 336, 411-412
metabólico, 92, 168
basal, 168
Rueda de la fortuna, 766

S

Saldo doblemente decreciente, 340 (prob. 61)
Saltos, gráfica con, 71-72, 75
Salud
personal, 767
pública, 542, 612-613, 671, 769
Secciones transversales
horizontales, de regiones no rectangulares, 563-564
verticales, de regiones no rectangulares, 562-563
Segunda derivada, 127-129
para determinar intervalos de concavidad, 201-203
trazado de curva con, 205-209
Seguridad
del tráfico, 175
en autopistas, 722-723
en centros comerciales, 464
Selección de un jurado, 724
Semáforo, 723, 737-738
Sensibilidad
a los medicamentos, 247
definición de, 247
Serie armónica, 672-674
Series
de potencia
convergencia de, 684-685
derivación de, 687-688
funciones como, 684-688
integración de, 687-688
de Taylor, 689-692
alrededor de x = a, 693
geométricas, 635, 664-666
aplicaciones prácticas de, 666-669
infinitas, 662-672
convergencia y divergencia de, 662-664
telescópicas, 701
Servicio al cliente, 733, 743
SIDA, propagación del, 277-280
Signo, de la derivada, 102
Símbolo
de infinito (∞), 64
de integral, 358, 384
Sin memoria, 777
Sismología, 310, 311
Sistema
cardiovascular, 174-175
de coordenadas, en tres dimensiones
curvas de nivel en, 499-502
generado por computadora, 503-504
rectangulares, 15
Sistemas
curvas de nivel en, 499-502
de coordenadas tridimensionales, 499-504
de ecuaciones, 848
generados por computadora, 503-504
Skellam, J. G., 583
Socios, 245-246, 432, 434, 463, 671
Solución
de una ecuación
general, definición de, 558
particular, definición de, 588
por ecuación en diferencias, 633, 634-637
por factorización, 846-847
general, definición de, 588
para una ecuación en diferencias, 633
particular, definición de, 588
Sombra de un hombre, 168 (prob. 49)
Suma
de derivadas, 112
de Riemann, 384
eliminación de variables por, 848-849
límite de, área bajo la curva como, 381-384
Suministros, 379-380, 632, 814
Superficie de silla, 522-523
gráfica de, 500
Supervivencia
de la vida acuática, 247
y renovación, 427-428, 432, 486
Susceptibles, en el modelo S-I-R, 656
Sustitución
eliminación de variables por, 849-850
en las integrales definidas, 389-390
integración por, 368-380
aplicaciones prácticas de, 376-377
falla de, 375

T

Tabla(s)
cálculo del límite con, 58-59
de integrales, 456-460
graficación de funciones con, 15-17
Tamaño de un tumor, 174
Tangente vertical, 104, 105, 224
Tasa asintótica de expansión de la población, 583
de abastecimiento, 165-166, 167
de aprendizaje, 367
de crecimiento, intrínseca, 583
de demanda, 167, 168
de depreciación, 590
de mortalidad, 339, 347, 483-484
de reacción química (ecuación de Arrhenius), 346, 351-354
efectiva de interés, 295, 344
intrínseca de crecimiento, 583
metabólica basal, 92, 168
Tasas
de interés, efectiva, 295
nominal, 295
nominal de interés, 295
relacionadas, 162-166, 804
Telecomunicaciones, 744
Temperatura
determinación de la, sin termómetro, 351-354
promedio, 408, 410, 576, 578
Tendencia central, 715
Tendencias
en la población, 434
políticas, 433
Teorema
de Pitágoras, 25, 41
fundamental del cálculo, 358, 380, 385-387
Teoría
de conflictos, 335, 336
del aprendizaje, 338
Terapia contra el cáncer, 367, 531
Término, definición de, 415
Termodinámica, trayectorias ortogonales en, 618
Tiempo
de duplicación, 304-305
cálculo del, 304-305
de espera, optimización del, 329
mínimo de viaje, 270
óptimo de espera, 329, 336-337, 338-339, 345
Tirar desechos, 761
peligrosos, 770
Toxina (efecto sobre el crecimiento de la población), 125-126, 337, 428-429, 441
Trabajo, productividad marginal de, 513
Tránsito rápido, 173
Transporte, 734
público, 119, 440
Trapecios, aproximación por, 472-475
Trayectorias ortogonales, 618-619, 621
en quimiotaxis, 618-619
Trazado de puntos, 15-17
Triángulos rectángulos, 785-787
cálculos con, 787

U

Ubicación
de fondos, 530, 551-552, 555-556, 557, 577
de plantas, 755
de recursos, 551-552
de una bodega, 527-528
del almacén, 527-528
Urbanismo, 530
Utilidad, 49, 507 (probs. 38 y 39), 557, 793
de publicación, 57
de una invención, 426
del dinero, marginal, 557
en un monopolio, 198, 530
exceso de, 402-403
marginal, 148, 149-150, 238-239, 367, 379, 380, 395

www.FreeLibros.com

del dinero, 557
máxima, 236-237, 245, 252-253, 267-268, 345, 526-527
análisis marginal para la, 238-239
negativa, 50
neta, 482
promedio, 573
Utilidades anuales, 120, 145

V

Valle de la parábola. *Véase* Vértice de parábola
Valor absoluto, 836-837
absoluto. *Véase* Valor absoluto
Valor absoluto (*cont.*)
de la educación, 13-14
de la pendiente de una función lineal, 28
de una máquina, 589-590
de una propiedad, 573
del costo de la educación, 14
del terreno, 379, 394
e intervalos, 837
esperado
de la distribución de probabilidad conjunta, 741
de una variable aleatoria, continua, 736-737
cálculo de, 737-738
con distribución de Poisson, 758
discreta, 715-716
normal, 747
futuro, 289
de flujo de ingresos, 415-417, 424, 437, 440
de una inversión, 462, 481, 604-605
intermedio de una propiedad, 78-79, 185
neto de un activo, 439, 486
presente, 289-290
de la renta de una propiedad, 471
de un activo, 484-485
de un flujo de ingresos, 417-418, 440, 467-468
de una anualidad, 345, 667-668
de una franquicia, 425, 471, 480
de una inversión, 290, 293, 425, 471, 486, 670-671, 700, 701
promedio
de inversión, 411
de una función, 406-408
de dos variables, 568-569
interpretación geométrica del, 408-409
real de un préstamo, 296
Variable
de integración, 358
normal, 741
Variable aleatoria
con distribución de Poisson, valor esperado de, 758
continua, 710, 725-736
valor esperado de, 736-737
cálculo de, 738-739
varianza de, 738-739
cálculo de, 739-741
continua, 710, 725-736
valor esperado de, 736-738
varianza de, 738-741
discreta, 710-725
valor esperado de, 715-716
distribuida exponencialmente, 728
normal
fórmulas para, 747
valor esperado de una, 747
uniformemente distribuida, 727
valor esperado de, 715-716
Variables, 3
aleatoria discreta, 710-725
valor esperado de, 715-716
aleatorias geométricas, 718-721
con parámetro, 719
dependientes, 3
discretas finitas, 710-718
valor esperado de, 715
varianza y desviación estándar de, 717
dos, función de. *Véase* Función(es), de dos variables
eliminación de, 41-45
por multiplicación y suma, 848-849
por sustitución, 849-850
independientes, 3
Variación
neta, cálculo de la, 390-391
total, 390-391
de la biomasa, 366, 391, 395, 440
Varianza
de una variable aleatoria, discreta, 716-718
con distribución de Poisson, 758
normal, estándar, 747
de una variable aleatoria continua, 738-739
cálculos de, 739-741
Velocidad de la luz, 246
Velocidad
de un objeto, 97-98, 108, 116, 117, 129, 134, 146-147 (prob. 67), 146 (prob. 66), 177 (prob. 67), 368 (prob. 67), 441, 480
de una lagartija, 168
instantánea, 98
movimiento rectilíneo y, 115-116
unidad de medida de, 115
Ventas, 132, 214, 294, 344, 366, 407, 541, 573, 578, 803, 804, 822, 825
al por menor, 23, 54, 260, 263, 294, 506, 529
de seguros, 769-770
Vértice de parábola, 18
Viaje(s)
aéreo, 723
en avión, 55
regulares, 733, 742
Vida
de una planta acuática, 295
media, 305-306
cálculo de la, 305-306
útil de una máquina, 414-415, 424, 732, 742
Virología, 743
Visitas a un sitio internet, 763
Volumen
como integral doble, 567-568
de biomasa, 568
de sangre durante la sístole, 413
de un balón de fútbol, 176 (prob. 59)
de un cubo, 174 (prob. 44)

www.FreeLibros.com

La octava edición de *Cálculo aplicado para administración, economía y ciencias sociales* se ha modificado de manera que satisface plenamente las necesidades de la materia, pues ahora se le han incluido los siguientes temas:

- Aproximaciones a series infinitas y de Taylor (capítulo 9)
- Probabilidad y cálculo (capítulo 10)
- Funciones trigonométricas (capítulo 11)

los cuales satisfacen las necesidades de aquellos docentes que estudian uno o los cuatro capítulos, además del contenido de los primeros ocho.

Como es sabido, la gran fortaleza de esta obra ha sido introducir los conceptos del cálculo en un contexto práctico, de manera que el estudiante tenga un conocimiento lógico, a la vez que intuitivo, de los conceptos básicos que necesitará en su desempeño académico. Otra característica es que se exponen las técnicas de derivación y cálculo integral sin sacrificar la precisión matemática, y se expresan de manera detallada los principales resultados, motivando y explicando al estudiante en forma intuitiva o geométrica; asimismo, se ha tratado que cada concepto e idea sea tan fácil de entender como sea posible; por ello, el contenido se ha diseñado en torno a herramientas prácticas como:

- Procedimientos detallados en ejemplos y recuadros
- Conjunto de ejercicios renovados
- Cobertura extendida de las aplicaciones de economía y ciencias sociales
- Modelado matemático
- Aplicaciones de tecnología
- Lineamientos para calculadora graficadora

Mc Graw Hill McGraw-Hill Interamericana

The McGraw-Hill Companies

Visite nuestra página WEB
www.mcgraw-hill-educacion.com

www.FreeLibros.com